

TP PLP

Javaneta

September 20, 2024

1 Ejercicio 9

De acuerdo a las definiciones de las funciones para arboles ternarios ($AT\ a$) se pide demostrar: $(\forall t::AT\ a)(\forall x::a)(elem\ x\ (preorder\ t) = elem\ x\ (postorder\ t))$

Preorder y Postorder son dos maneras diferentes de recorrer un árbol; En este caso en puntual, recorren un árbol ternario.

La lista resultante de ordenar el árbol ternario que devuelve preorder t y postorder t son diferentes, pero lo que ambos tienen en común es que contienen los mismos elementos, es decir, $(\forall x :: a)(x \in listaResPreOrder \iff x \in listaResPostOrder)$

Tenemos un caso que podemos mencionar, donde en el ejercicio 4 del TP: $elem\ n\ (preorder\ at) = elem\ n\ (postorder\ at)$ es válido $\forall n :: a$

Por lo tanto, probemos esto utilizando los principios de extensionalidad e inducción estructural sobre árboles para concluir que esto es verdadero para cualquier árbol ternario.

Recordemos la definición del tipo AT y cuáles son los constructores del tipo correspondientes: $data\ AT\ a = Nil\ |\ Tern\ a\ (AT\ a)\ (AT\ a)\ deriving\ Eq$

Luego, recordemos qué ecuaciones representan a las operaciones de $elem$, $preorder$ y $postorder$.

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
{FO0} foldr f z [] = z
{FO1} foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

```
elem :: Eq a => a -> [a] -> Bool
{E0} elem e [] = False
{E1} elem e (x:xs) = (e==x) || elem e xs
```

```
foldAT :: (a -> b -> b -> b -> b) -> b -> AT a -> b
```

$\{F0\}$ foldAT _ b Nil = b
 $\{F1\}$ foldAT f b (Tern r i c d) =
 f r (foldAT f b i) (foldAT f b c) (foldAT f b d)

preorder :: AT a \rightarrow [a]
 $\{PR0\}$ preorder = foldAT(\r i c d \rightarrow [r] ++ i ++ c ++ d) []

postorder :: AT a \rightarrow [a]
 $\{PS0\}$ postorder = foldAT(\r i c d \rightarrow [r] ++ d ++ c ++ i) []

Por inducción estructural en t tenemos:

- $P(t) = (\forall x::a)(\text{elem } x (\text{preorder } t) = \text{elem } x (\text{postorder } t))$

Probemos el caso base, es decir, el constructor del tipo AT a no recursivo: este caso es Nil.

Caso Base: $P(\text{Nil}) = (\forall x::a)(\text{elem } x (\text{preorder Nil}) = \text{elem } x (\text{postorder Nil}))$
 Resolvamos ambos lados por separado y deberíamos llegar a una equivalencia.

- $\text{elem } x (\text{preorder Nil}) \stackrel{PR0}{=} \text{elem } x (\text{foldAT}(\backslash r i c d \rightarrow [r] ++ i ++ c ++ d) [] Nil) \stackrel{F0}{=} \text{elem } x [] \stackrel{E0}{=} \text{False}$
- $\text{elem } x (\text{postorder Nil}) \stackrel{PS0}{=} \text{elem } x (\text{foldAT}(\backslash r i c d \rightarrow [r] ++ d ++ c ++ i) [] Nil) \stackrel{F0}{=} \text{elem } x [] \stackrel{E0}{=} \text{False}$

Como el lado izquierdo y el derecho de la expresión son equivalentes, el caso base es verdadero.

Recordemos que para poder hacer inducción sobre listas necesitamos predicar acerca de $(\forall xs :: [a])(\forall x :: a)(P(xs) \implies P(x : xs))$. En árboles, la inducción lo hacemos sobre cada constructor recursivo, en este caso serían 3.

Paso Inductivo:

- $(\forall i, c, d :: AT a)(\forall r :: a)(P(i) \wedge P(c) \wedge P(d) \implies P(\text{Tern } r i c d))$
 - HI: $P(i) \wedge P(c) \wedge P(d)$ donde:
 - * $P(i)$: $\text{elem } x (\text{preorder } i) = \text{elem } x (\text{postorder } i)$
 - * $P(c)$: $\text{elem } x (\text{preorder } c) = \text{elem } x (\text{postorder } c)$
 - * $P(d)$: $\text{elem } x (\text{preorder } d) = \text{elem } x (\text{postorder } d)$
 - TI: $P(\text{Tern } r i c d)$ es decir
 - * $\text{elem } x (\text{preorder } (\text{Tern } r i c d)) = \text{elem } x (\text{postorder } (\text{Tern } r i c d))$

Lado Izquierdo: Para una mayor legibilidad, llamamos $\text{pf0} = \text{foldAT}(\backslash r i c d \rightarrow [r] ++ i ++ c ++ d)$
 $\text{elem } x (\text{preorder } (\text{Tern } r i c d))$
 $\stackrel{PR0}{=} \text{elem } x (\text{foldAT } (\backslash r i c d \rightarrow [r] ++ i ++ c ++ d) [] (\text{Tern } r i c d))$
 $\stackrel{F1}{=} \text{elem } x ([r] ++ (\text{foldAT } (\backslash r i c d \rightarrow [r] ++ i ++ c ++ d) [] i) ++ (\text{foldAT}$

$(\backslash r \ i \ c \ d \rightarrow [r] \ ++ \ i \ ++ \ c \ ++ \ d) \ \square \ c) \ ++ \ (\text{foldAT} \ (\backslash r \ i \ c \ d \rightarrow [r] \ ++ \ i \ ++ \ c \ ++ \ d) \ \square \ d))$

$\stackrel{\text{PR0}}{=} \text{elem } x \ (([r] \ ++ \ (\text{preorder } i) \ ++ \ (\text{preorder } c) \ ++ \ (\text{preorder } d))$

$\stackrel{\text{E1}}{=} (x == r) \ \parallel \ \text{elem } x \ ((\text{preorder } i) \ ++ \ (\text{preorder } c) \ ++ \ (\text{preorder } d))$

Aplicamos el Lema 1

$= (x == r) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } c) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } d)$

Por extensionalidad de booleanos en la condición de $(x == r)$ tenemos dos casos:

- A: $(x == r) = \text{True}$
- B: $(x == r) = \text{False}$

Caso A: $\text{True} \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } c) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } d) = \text{True}$

Esto es verdadero ya que en el caso de un ó lógico basta un True para que todo sea verdadero.

Caso B: $\text{False} \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } c) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } d) \stackrel{\text{HI}}{=} \text{elem } x \ (\text{postorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } c) \ \parallel \ (\text{postorder } d)$

Veamos ahora, que si desarrollamos desde **elem x (postorder(Tern r i c d))** y llegamos a aplicar la hipótesis inductiva como esto es una igualdad, basta para que sea verdadero.

Lado Derecho

$\text{elem } x \ (\text{postorder}(\text{Tern } r \ i \ c \ d))$

$\stackrel{\text{PS0}}{=} \text{elem } x \ (\text{foldAT}(\backslash r \ i \ c \ d \rightarrow [r] \ ++ \ d \ ++ \ c \ ++ \ i) \ \square \ (\text{Tern } r \ i \ c \ d))$

$\stackrel{\text{F1}}{=} \text{elem } x \ ([r] \ ++ \ (\text{foldAT}(\backslash r \ i \ c \ d \rightarrow [r] \ ++ \ d \ ++ \ c \ ++ \ i) \ \square \ i) \ ++ \ (\text{foldAT}(\backslash r \ i \ c \ d \rightarrow [r] \ ++ \ d \ ++ \ c \ ++ \ i) \ \square \ c) \ ++ \ (\text{foldAT}(\backslash r \ i \ c \ d \rightarrow [r] \ ++ \ d \ ++ \ c \ ++ \ i) \ \square \ d))$

$\stackrel{\text{PS0}}{=} \text{elem } x([r] \ ++ \ \text{postorder } i \ ++ \ \text{postorder } c \ ++ \ \text{postorder } d)$

$\stackrel{\text{E1}}{=} (x == r) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } i \ ++ \ \text{postorder } c \ ++ \ \text{postorder}(d))$

Nuevamente por Lema 1

$= (x == r) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } c) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } d)$

Por extensionalidad de booleanos en la condicion de $(x == r)$ tenemos dos casos:

- A: $(x == r) = \text{True}$
- B: $(x == r) = \text{False}$

Caso A: $\text{True} \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } c) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } d) = \text{True}$

Caso B: $\text{False} \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } c) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{postorder } d) \stackrel{\text{HI}}{=} \text{elem } x \ (\text{preorder } i) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } c) \ \parallel \ \text{elem } x \ (\text{preorder } d)$

Luego, como probamos que de ambos lados pudimos aplicar la HI, y la HI es

verdadera, entonces sucede que: $\text{elem } x \text{ (preorder (Tern } r \text{ i } c \text{ d}))} = \text{elem } x \text{ (postorder (Tern } r \text{ i } c \text{ d))}$ como queríamos probar.

Lema 1: Vamos a probar la siguiente propiedad sobre inducción estructural sobre xs.

$$(\forall xs :: [a])(\forall ys :: [a])(\forall e :: a)(\text{elem } e \text{ (xs ++ ys)} = \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys})$$

$$P(xs) = (\forall ys :: [a])(\forall e :: a)(\text{elem } e \text{ (xs ++ ys)} = \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys})$$

Caso Base: $P([])$

- $\text{elem } e \text{ ([] ++ ys)} = \text{elem } e \text{ (foldr(:) ys [])} \stackrel{F0}{=} \text{elem } e \text{ ys}$
- $\text{elem } e \text{ ([])} \parallel \text{elem } e \text{ (ys)} \stackrel{E0}{=} \text{False} \parallel \text{elem } e \text{ ys} = \text{elem } e \text{ ys}$

Por lo tanto, el caso base es verdadero.

Paso Inductivo:

- HI: $P(xs): (\forall ys :: [a])(\forall e :: a)(\text{elem } e \text{ (xs ++ ys)} = \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys})$
- TI: $P(x:xs): (\forall ys :: [a])(\forall e :: a)(\text{elem } e \text{ ((x : xs) ++ ys)} = \text{elem } e \text{ (x : xs)} \parallel \text{elem } e \text{ ys})$

$$\text{elem } e \text{ ((x:xs) ++ ys)} \stackrel{++}{=} \text{elem } e \text{ (foldr(:) ys (x:xs))} \stackrel{FO1}{=} \text{elem } e \text{ ((:) x (foldr(:) ys xs))} \stackrel{E1}{=} (e == x \parallel \text{elem } e \text{ (foldr(:) ys xs)})$$

Por el **principio de extensionalidad de booleanos** tengo dos casos para $e == x$

- LE1) $e == x = \text{True} = \text{True} \parallel \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys} = \text{True}$
- LE2) $e == x = \text{False} = \text{False} \parallel \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys} = \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys} \stackrel{HI}{=} \text{elem } e \text{ (xs ++ ys)} = \text{True}$

Veamos ahora por el otro lado

$$\text{elem } e \text{ (x:xs)} \parallel \text{elem } e \text{ ys} \stackrel{E1}{=} (e == x) \parallel \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys}$$

Por el **principio de extensionalidad de booleanos** tengo dos casos para $e == x$

- LE1) $e == x = \text{True} \parallel \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys} = \text{True}$
- LE2) $e == x = \text{False} \parallel \text{elem } e \text{ xs} \parallel \text{elem } e \text{ ys} \stackrel{HI}{=} \text{elem } e \text{ (xs ++ ys)} = \text{True}$

Luego, queda probado el Lema.