

## Ejercicios de Mecánica y Teoría Clásica de Campos (Landau)

### 1. Introducción

Este documento es una recopilación de ejercicios y ejemplos de mecánica clásica y teoría clásica de campos del Landau.

### 2. Mecánica Clásica

Encontrar la lagrangiana de los siguientes sistemas, colocados en un campo gravitatorio (aceleración de la gravedad:  $g$ ).

#### 2.1. Ejercicio 1: Péndulo doble coplanario

**Solución:** Tomemos como coordenadas los ángulos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que forman los hilos  $l_1$  y  $l_2$  con la vertical. Tenemos entonces para la partícula  $m_1$ :

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2, \quad U = -m_1 g l_1 \cos \phi_1$$

Para hallar la energía cinética de la segunda partícula, expresamos sus coordenadas cartesianas  $x_2, y_2$  (origen de coordenadas en el punto de suspensión, eje  $y$  dirigido verticalmente hacia abajo) en función de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ :

$$x_2 = l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2$$

Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2] \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \cos \phi_1 + m_2 g l_2 \cos \phi_2$$

#### 2.2. Ejercicio 2: Pendulo plano

**Enunciado.** Péndulo plano de masa  $m_2$ , cuyo punto de suspensión (de masa  $m_1$ ) puede desplazarse en el mismo plano sobre una recta horizontal (fig. 2).

**Solución:** Usando la coordenada  $x$  del punto  $m_1$  y el ángulo  $\phi$  entre el hilo del péndulo y la vertical, tenemos:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2 \dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \phi) + m_2 g l \cos \phi$$

### 2.3. Ejercicio 3: Péndulo plano, cuyo punto de suspensión:

a) se desplace uniformemente sobre una circunferencia vertical con una frecuencia constante  $\gamma$  (fig. 3);

b) oscila horizontalmente en el plano del péndulo según la ley  $x = a \cos \gamma t$ ;

c) oscila verticalmente según la ley  $y = a \cos \gamma t$ .

**Solución:** a) coordenadas del punto  $m$ :

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \phi, \quad y = -a \sin \gamma t + l \cos \phi$$

. Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mla\gamma \sin(\phi - \gamma t) + mgl \cos \phi;$$

se han omitido los términos que sólo dependen del tiempo y eliminado la derivada total con respecto al tiempo de  $mla\gamma \cos(\phi - \gamma t)$ .

b) Coordenadas del punto  $m$ :

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \phi, \quad y = l \cos \phi$$

. Lagrangiana (omitiendo las derivadas totales con respecto al tiempo):

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \phi + mgl \cos \phi.$$

c) De la misma manera:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \phi + mgl \cos \phi.$$

### 2.4. Ejercicio 4:

**Enunciado.** En el sistema representado en la figura 4, el punto  $m_2$  se mueve sobre el eje vertical, y todo el sistema gira con velocidad angular constante  $\Omega$  alrededor de este eje.

**Solución:** Sea  $\theta$  el ángulo formado por el segmento  $a$  y la vertical, y  $\phi$  el ángulo de rotación del sistema alrededor del eje;  $\dot{\phi} = \Omega$ . Para cada partícula  $m_1$ , un desplazamiento elemental  $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ . La distancia de  $m_2$  al punto de suspensión  $A$  es  $2a \cos \theta$  y así,  $dl_2 = -2a \sin \theta d\theta$ . La lagrangiana:

$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2(m_1 + m_2)ga \cos \theta.$$

### 2.5. Ejercicio 5: Anillo oscilante con masa puntual

**Enunciado.** Considere un anillo de radio  $R$  y masa  $M$  que se cuelga de uno de sus puntos y oscila en su propio plano. Se comporta como un péndulo físico cuyo centro de gravedad está ubicado a una distancia  $R$  del punto de suspensión. En el anillo se coloca una masa puntual  $M$  que se puede deslizar sin fricción. Halle el lagrangiano del sistema. Realice la aproximación de pequeñas oscilaciones. Resuelva el problema de vectores propios y valores propios implicado. Analice los resultados.

## 2.6. Ejercicio 6: Oscilaciones de molécula triatómica lineal

*Ejercicio 1 secc 24: Frecuencia de vibraciones de molécula triatómica lineal* 1. Determinar la frecuencia de las vibraciones de una molécula simétrica lineal triatómica  $ABA$  (fig. 28). Se supone que la energía potencial de la molécula depende solamente de las distancias  $AB$  y  $BA$  y del ángulo  $ABA$ .

**Solución:** Los desplazamientos longitudinales  $x_1, x_2, x_3$  de los átomos están relacionados, según (24.1), por:

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$

Con la ayuda de esta ecuación, eliminamos  $x_2$  de la lagrangiana del movimiento longitudinal de la molécula:

$$L = \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

y utilizando las nuevas coordenadas:

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad Q_s = x_1 - x_3,$$

obtenemos:

$$L = \frac{\mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 l^2}{4m_B^2}Q_a^2 - \frac{k_1}{4}Q_s^2.$$

Es evidente que  $Q_a$  y  $Q_s$  son coordenadas normales (todavía no normalizadas). La coordenada  $Q_a$  corresponde a una vibración antisimétrica alrededor del centro de la molécula ( $x_1 = x_3$ ; fig. 28, a) y de frecuencia:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}}.$$

La coordenada  $Q_s$  corresponde a una vibración simétrica ( $x_1 = x_3$ ; fig. 28, b) de frecuencia:

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$

Los desplazamientos transversales de los átomos  $y_1, y_2, y_3$  están relacionados, según (24.1) y (24.2), por:

$$m_A(y_1 + y_2) + m_B y_2 = 0, \quad y_1 = y_3.$$

(vibraciones simétricas de curvatura de la molécula; fig. 28, c). Sea  $\frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2$  la energía potencial de curvatura de la molécula, donde  $\delta$  es la desviación del ángulo  $ABA$  con respecto a  $\pi$ ; su expresión en función de los desplazamientos es:

$$\delta = \frac{[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]}{l}.$$

Expresando  $y_1, y_2, y_3$  en función de  $\delta$ , se obtiene la lagrangiana del movimiento transversal de la molécula:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_A(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2 \\ &= \frac{m_A m_B l^2 \dot{\delta}^2}{4\mu} - \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2, \end{aligned}$$

de donde la frecuencia:

$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_A m_B}}.$$

**Enunciado.** Plantee y resuelva el problema de las oscilaciones de la molécula triatómica lineal, descrito en la Fig.28 (que corresponde al Pro.1 de la sección §24), cuando se considera que cada átomo está sometido a fricción y a una forzante periódica.

## 2.7. Ejercicio 7: Oscilador forzado y amortiguado

**Enunciado.** Considere el oscilador forzado y amortiguado descrito por la ecuación (26.1). Halle la amplitud de la oscilación de estado estacionario de la velocidad correspondiente a la  $B$  de (26.2). Halle el valor  $\gamma_R$  de  $\gamma$  para el cual dicha amplitud es máxima y compárelo con la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas libres. Se define el factor de calidad del oscilador:

$$Q = \frac{\gamma_R}{2\lambda}.$$

Demuestre que si el amortiguamiento es pequeño y la frecuencia de la forzante es cercana a la resonancia:

$$Q \approx 2\pi \frac{\text{Energía total}}{\text{Energía perdida en un período}} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

donde  $\Delta\omega$  representa el intervalo de frecuencia entre los puntos en los cuales la amplitud alcanza  $1/\sqrt{2}$  de su valor máximo. Ilustre con gráficas cuando  $Q = 5$  y cuando  $Q = 100$ .

## 2.8. Ejercicio 8: Sistema con fuerzas periódicas

**Enunciado.** Considere el sistema mostrado en la Fig.2, que corresponde al Pro.2 de la sección §5. Suponga que las masas  $m_1$  y  $m_2$  están sometidas a fuerzas externas periódicas horizontales de la forma  $f_i \cos(\gamma t + \alpha_i)$  para  $i = 1, 2$ . Realice la aproximación de pequeñas oscilaciones. Lleve el problema a coordenadas normales. Analice los resultados.

# 3. 2da unidad teorica 2"

## § 38. Cuerpos rígidos en contacto

Las ecuaciones del movimiento (34.1) y (34.3) muestran que las *condiciones de equilibrio* de un cuerpo rígido se pueden formular anulando la resultante general y el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre él.

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0. \quad (38.1)$$

La suma se extiende a todas las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo, y  $\mathbf{r}$  es el radio vector del “punto de aplicación” de estas fuerzas; el origen, con respecto al cual se definen los momentos, puede escogerse arbitrariamente, ya que si  $\mathbf{F} = 0$  el valor de  $\mathbf{K}$  no depende de esta elección [véase (34.5)].

La condición impuesta en el movimiento de rodadura es que las velocidades de los puntos de contacto deben ser iguales; por ejemplo, cuando un cuerpo rueda sobre una

superficie fija, la velocidad del punto de contacto debe ser nula. En el caso general, esta condición está expresada por *ecuaciones de ligadura* del tipo

$$\sum_i c_{\alpha i} \dot{q}_i = 0, \quad (38.2)$$

donde las  $c_{\alpha i}$  son funciones de las coordenadas solamente (el índice  $\alpha$  numera las ecuaciones de ligadura). Si los primeros miembros de estas ecuaciones no son derivadas totales con respecto al tiempo de funciones de las coordenadas, estas ecuaciones no pueden ser integradas. En otras palabras, no pueden reducirse a la forma  $f(q_1, \dots, q_n, t) = \text{const}$ , y se llaman *ligaduras no holónomas*.

Como de costumbre, llamaremos  $\mathbf{V}$  a la velocidad de traslación (velocidad del centro de la esfera), y  $\mathbf{\Omega}$  a la velocidad angular de rotación. La velocidad del punto de contacto con el plano se obtiene poniendo  $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$  en la fórmula general  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$  ( $a$  es el radio de la esfera y  $\mathbf{n}$  el vector unitario de la normal al plano en el punto de contacto). La ligadura buscada está dada por la condición de que no haya deslizamiento en el punto de contacto, es decir,

$$\mathbf{V} - a\mathbf{\Omega} \times \mathbf{n} = 0. \quad (38.3)$$

Esta ecuación no es integrable: aunque la velocidad  $\mathbf{V}$  es la derivada total respecto al tiempo del radio vector del centro de la esfera, la velocidad angular no es en general la derivada total de una coordenada respecto al tiempo, de modo que la ligadura (38.3) es no holónoma<sup>1</sup>.

La presencia de ligaduras del tipo (38.2) impone ciertas restricciones en los valores posibles de las variaciones de las coordenadas: multiplicando las ecuaciones (38.2) por  $\delta t$ , se encuentra que las variaciones  $\delta q_i$  no son independientes, sino están relacionadas por

$$\sum_i c_{\alpha i} \delta q_i = 0. \quad (38.4)$$

Esto debe tenerse en cuenta cuando se varía la acción. Según el método de Lagrange para hallar extremales condicionados, deben añadirse al integrando de la variación de la acción

$$\delta S = \int \left[ \sum_i \delta q_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dt$$

los términos de la izquierda de las ecuaciones (38.4) multiplicados por coeficientes indeterminados<sup>2</sup>  $\lambda_\alpha$  (funciones de las coordenadas), y después igualar el integrando a cero. Entonces pueden considerarse todas las variaciones  $\delta q_i$  como independientes, y se obtienen las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \quad (38.5)$$

Existe sin embargo otro método para establecer las ecuaciones del movimiento de cuerpos en contacto, en el cual se introducen explícitamente las reacciones. Este método, que constituye el *principio de d'Alembert*, consiste esencialmente en escribir para cada uno de los cuerpos en contacto las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (38.6)$$

---

<sup>1</sup>Observemos que la ligadura análoga en la rodadura de un cilindro sería holónoma. En este caso, el eje de rotación tiene una dirección fija en el espacio, y, por lo tanto,  $\Omega = d\phi/dt$  es una derivada total del ángulo  $\phi$  de rotación del cilindro alrededor de su eje. La condición (38.3) puede entonces integrarse y da una relación entre el ángulo  $\phi$  y la coordenada del centro de masa.

<sup>2</sup>Denominados *multiplicadores de Lagrange*.

estando comprendidas las fuerzas de reacción en el conjunto de las fuerzas  $\mathbf{f}$  que actúan sobre el cuerpo; estas fuerzas son desconocidas *a priori* y se determinarán, a la vez que el movimiento del cuerpo, resolviendo las ecuaciones.

### 3.1. Ejecicios

**1. Utilizando el principio de d'Alembert, hallar las ecuaciones del movimiento de una esfera homogénea que rueda sobre un plano bajo la acción de una fuerza exterior  $\mathbf{F}$  y de un momento  $\mathbf{K}$ .**

*Solución:* La ecuación de ligadura es (38.3). Llamando a  $\mathbf{R}$  la fuerza de reacción en el punto de contacto entre la esfera y el plano, se escriben las ecuaciones (38.6):

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$I \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \mathbf{K} - a\mathbf{n} \times \mathbf{R}, \quad (2)$$

(teniendo en cuenta que  $\mathbf{P} = m\mathbf{V}$  y que para una peonza esférica  $M = I\Omega$ ). Derivando con respecto al tiempo la ecuación de ligadura (38.3), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{V}} = a\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{n}.$$

Sustituyendo en (1) y eliminando  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  por medio de (2), se encuentra,

$$(I/ma)\mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{K} \times \mathbf{n} - a\mathbf{R} + a\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}),$$

que relaciona la fuerza de reacción con  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{K}$ . Escribiendo esta ecuación en componentes y sustituyendo  $I = \frac{2}{5}ma^2$  (véase problema 2 b, §32), se tiene

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x, \quad R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \quad R_z = -F_z,$$

(se ha tomado el plano como plano  $xy$ ). Finalmente, sustituyendo estas expresiones en (1), se obtienen las ecuaciones del movimiento conteniendo solamente los datos, fuerza exterior y momento:

$$m \frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7} \left( F_x + \frac{K_y}{a} \right), \quad m \frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7} \left( F_y - \frac{K_x}{a} \right).$$

Las componentes  $\Omega_x$  y  $\Omega_y$  de la velocidad angular se expresan en función de  $V_y$ ,  $V_x$  por la ecuación de ligadura (38.3), y para  $\Omega_z$  se tiene,

$$I \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z,$$

donde  $I$  es el momento de inercia respecto al eje  $z$ .

**2. Una varilla homogénea  $BD$  de peso  $P$  y longitud  $l$  está apoyada contra una pared (fig. 52); su extremo inferior  $B$  está mantenido por un hilo  $AB$ . Calcular la reacción de la pared y la tensión del hilo.**

*Solución:* El peso de la varilla puede representarse por una fuerza  $P$  aplicada en su punto medio y dirigida verticalmente hacia abajo. Las reacciones  $R_B$  y  $R_C$  están respectivamente dirigidas verticalmente hacia arriba y perpendicularmente a la varilla; la

tensión  $T$  del hilo está dirigida de  $B$  hacia  $A$ . La resolución de las ecuaciones de equilibrio da:

$$R_C = \frac{Pl}{4h} \sin 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \sin \alpha, \quad T = R_C \cos \alpha,$$

donde  $h$  es la altura y  $\alpha$  el ángulo indicado en la figura.

**3. Una varilla  $AB$  de peso  $P$  tiene un extremo sobre un plano horizontal y el otro en un plano vertical, y se mantiene en esta posición por dos hilos horizontales  $AD$  y  $BC$ ; el hilo  $BC$  se halla en el mismo plano vertical que la varilla. Determinar las reacciones de los planos y las tensiones en los hilos.**

*Solución:* Las tensiones de los hilos  $T_A$  y  $T_B$  están dirigidas de  $A$  hacia  $D$  y de  $B$  a  $C$ , respectivamente. Las reacciones  $R_A$  y  $R_B$  son perpendiculares a los planos correspondientes. La resolución de las ecuaciones de equilibrio da:

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{1}{2}P \cotg \alpha, \quad R_A = T_B \sin \beta, \quad T_A = T_B \cos \beta.$$

**4. Dos varillas de longitud  $l$  y peso despreciable están unidas por una articulación, y sus extremos se apoyan en un plano conectados por un hilo  $AB$  (fig. 54). En el centro de una de las varillas se aplica una fuerza  $F$ . Determinar las reacciones.**

*Solución:* La tensión  $T$  del hilo actúa en el punto  $A$  de  $A$  hacia  $B$ , y en el punto  $B$  de  $B$  hacia  $A$ . Las reacciones  $R_A$  y  $R_B$  son perpendiculares al plano. Sea  $R_C$  la reacción sobre la varilla  $AC$  en la articulación; entonces, sobre la varilla  $BC$  actúa una reacción  $-R_C$ . La condición de que la suma de los momentos de las fuerzas  $R_B$ ,  $T$  y  $-R_C$  sobre la varilla  $BC$  sea nula muestra que  $R_C$  actúa a lo largo de  $BC$ . Las otras condiciones de equilibrio (para las dos varillas por separado) dan:

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{1}{4}F, \quad R_C = \frac{1}{4}F \csc \alpha, \quad T = \frac{1}{4}F \cotg \alpha,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo  $CAB$ .

## § 39. Movimiento en un sistema de referencia no inercial

Hasta aquí, siempre se han utilizado sistemas de referencia inerciales al discutir el movimiento de los sistemas mecánicos. Por ejemplo, la lagrangiana de una partícula en un campo exterior

$$L_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - U, \quad (39.1)$$

y la ecuación del movimiento correspondiente

$$m d\mathbf{v}_0/dt = -\partial U/\partial \mathbf{r}, \quad (1)$$

son válidas solamente en un sistema inercial. (En esta sección se designará con el índice 0 las magnitudes referidas a un sistema inercial.)

Veamos ahora qué forma toman las ecuaciones del movimiento de una partícula en un sistema no inercial. El punto de partida para resolver este problema es otra vez el principio de la mínima acción, cuya validez no depende del sistema de referencia elegido. Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (39.2)$$

son igualmente válidas. Sin embargo, la lagrangiana no toma la forma (39.1), y para calcularla debe transformarse adecuadamente la función  $L_0$ .

Esta transformación se realiza en dos etapas. Consideremos, primero un sistema de referencia  $K'$  que se mueve con una velocidad de traslación  $\mathbf{V}(t)$  con respecto al sistema de referencia inercial  $K_0$ . Las velocidades  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}'$  de una partícula, en los sistemas  $K_0$  y  $K'$  respectivamente, están relacionadas por

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \quad (39.3)$$

Sustituyendo en (39.1) se obtiene la lagrangiana en el sistema  $K'$ :

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}mV^2 - U.$$

Introduzcamos ahora otro sistema de referencia  $K$ , cuyo origen coincide con el de  $K'$ , pero que gira con relación a  $K'$  con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ ; con respecto al sistema inercial  $K_0$ , el sistema  $K$  efectúa a la vez una traslación y una rotación.

La velocidad  $\mathbf{v}'$  de la partícula con relación al sistema  $K'$  se expresa en función de su velocidad  $\mathbf{v}$  relativa al sistema  $K$  y de la velocidad  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  y del movimiento de su rotación con  $K$ :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

(los vectores de posición  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  de la partícula en los sistemas  $K$  y  $K'$  coinciden). Sustituyendo en la lagrangiana (39.4), se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - m\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} - U. \quad (39.6)$$

Esta es la forma general de la lagrangiana de una partícula en un sistema de referencia arbitrario, no necesariamente inercial. Observamos que la rotación del sistema de referencia hace aparecer en la lagrangiana un término lineal con respecto a la velocidad de la partícula.

Para calcular las derivadas que entran en la ecuación de Lagrange, escribimos la diferencial total:

$$\begin{aligned} dL &= m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r} \\ &\quad + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - m d\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} - (\partial U / \partial \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Reuniendo por separado los términos que contienen  $d\mathbf{v}$  y  $d\mathbf{r}$ , se tiene,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\mathbf{w} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Sustituidas estas expresiones en (39.2), nos dan la ecuación del movimiento buscada:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{w} + m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (39.7)$$



Haciendo en (39.6) y (39.7)  $\boldsymbol{\Omega} = \text{cte.}$ ,  $\mathbf{w} = 0$ , se obtiene la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U \quad (39.8)$$

y la ecuación del movimiento

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (39.9)$$

La energía de la partícula en este caso se obtiene sustituyendo

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

en  $E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$ , obteniéndose,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + U. \quad (39.11)$$

Observemos que la expresión de la energía no contiene término lineal en la velocidad. La rotación del sistema añade simplemente a la energía un término que depende solamente de las coordenadas de la partícula y es proporcional al cuadrado de la velocidad angular. Este término adicional  $-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$  se llama *energía potencial centrífuga*.

La velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula con respecto al sistema que gira uniformemente está relacionada con su velocidad  $\mathbf{v}_0$  con respecto al sistema inercial  $K_0$  por

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (39.12)$$

El ímpetu  $\mathbf{p}$  (39.10) de la partícula en el sistema  $K$  coincide por lo tanto con su ímpetu  $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$  en el sistema  $K_0$ . Los momentos angulares  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  y  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0$  son también iguales. Sin embargo, las energías de la partícula en los sistemas  $K$  y  $K_0$  son diferentes. Sustituyendo  $\mathbf{v}'$  de (39.12) en (39.11), se obtiene

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - m\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + U - m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}.$$

Los dos primeros términos son la energía  $E_0$  en el sistema  $K_0$ . Utilizando el momento angular, se tiene

$$E = E_0 - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (39.13)$$

Esta fórmula define la ley de transformación de la energía cuando se pasa a un sistema de coordenadas animado de una rotación uniforme.

## PROBLEMAS

**1. Encontrar la separación con respecto a la vertical, provocada por la rotación de la Tierra, de un cuerpo que cae libremente. (La velocidad angular de rotación se considera pequeña.)**

*Solución:* En el campo de la gravedad  $U = -mgr$  donde  $g$  es el vector aceleración de la gravedad; despreciando en la ecuación (39.9) la fuerza centrífuga que contiene el cuadrado de  $\Omega$ , se tiene la ecuación del movimiento

$$\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g}. \quad (1)$$

Esta ecuación puede resolverse por aproximaciones sucesivas. Para ello ponemos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , donde  $\mathbf{v}_1$  es la solución de la ecuación  $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$ , es decir,  $\mathbf{v}_1 = gt + \mathbf{v}_0$  (siendo  $\mathbf{v}_0$

la velocidad inicial). Sustituyendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  en (1) y conservando solamente  $\mathbf{v}_1$  en el segundo miembro, se obtiene para  $\mathbf{v}_2$  la ecuación

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\Omega} = 2t\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}.$$

La integración da

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} + t^2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{h}$  es el vector de posición inicial de la partícula.

Tomemos el eje  $z$  verticalmente hacia arriba y el eje  $x$  hacia el polo; entonces

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = -g; \quad \Omega_x = \Omega \cos \lambda, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega \sin \lambda,$$

donde  $\lambda$  es la latitud (que tomamos norte para fijar ideas). Haciendo  $\mathbf{v}_0 = 0$  (en  $z$ ), resulta,

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3}t^3 g \Omega \cos \lambda.$$

Sustituyendo el tiempo de caída  $t \approx \sqrt{2h/g}$ , encontramos finalmente,

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3}(2h/g)^{3/2} g \Omega \cos \lambda,$$

(el signo menos indica un desplazamiento hacia el este).

## 2. Determinar la separación de la trayectoria de un cuerpo lanzado desde la superficie de la Tierra con velocidad $v_0$ , respecto del plano inicial.

*Solución:* Sea el plano  $xz$  tal que contenga la velocidad  $v_0$ . La altura inicial es  $h = 0$ . La desviación lateral dada por la ecuación (2) del problema 1 es:

$$y = -\frac{1}{3}t^2 g \Omega_z + t^2(\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x})$$

o, sustituyendo la duración de la trayectoria  $t \approx 2v_{0z}/g$ :

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2} \left( \frac{1}{3} \Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x} \right).$$

## 3. Determinar la influencia de la rotación de la Tierra en las pequeñas oscilaciones de un péndulo (problema del *péndulo de Foucault*).

*Solución:* Despreciando el desplazamiento vertical del péndulo, como infinitésimo de segundo orden, puede considerarse que el movimiento tiene lugar en el plano horizontal  $xy$ . Omitiendo los términos que contienen  $\Omega^2$ , se tienen las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación del péndulo si no se tuviese en cuenta la rotación de la Tierra. Multiplicando la segunda ecuación por  $i$  y sumando, se obtiene la ecuación única

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

en la magnitud compleja  $\xi = x + iy$ . Para  $\Omega_z \ll \omega$  la solución de esta ecuación es:

$$\xi = \exp(-i\Omega_z t) [A_1 \exp(i\omega t) + A_2 \exp(-i\omega t)]$$

o

$$x + iy = (x_0 + iy_0) \exp(-i\Omega_z t),$$

donde las funciones  $x_0(t)$  e  $y_0(t)$  dan la trayectoria del péndulo cuando se desprecia la rotación de la Tierra. El efecto de esta rotación es, por lo tanto, un giro de la trayectoria alrededor de la vertical con una

## 4. Ecuaciones canónicas

**§ 40. Ecuaciones de Hamilton** La formulación de las leyes de la Mecánica con la ayuda de la lagrangiana (y de las ecuaciones de Lagrange que de ella se deducen) presupone que el estado mecánico del sistema está determinado dando sus coordenadas y velocidades generalizadas. Sin embargo, éste no es el único método posible; la descripción del estado de un sistema en función de sus coordenadas e ímpetus generalizados presenta un cierto número de ventajas, especialmente en el estudio de diferentes problemas generales de Mecánica. Entonces se deben deducir las ecuaciones del movimiento correspondientes a esta formulación.

El paso de un conjunto de variables independientes a otro puede realizarse mediante lo que se llama en matemáticas transformación de Legendre. En el presente caso esta transformación toma la forma siguiente. La diferencial total de la lagrangiana como función de las coordenadas y de las velocidades es:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Esta expresión puede escribirse

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (40.1)$$

La cantidad bajo el signo diferencial es la energía del sistema (véase § 6); expresada en función de las coordenadas y de los ímpetus, se llama función de Hamilton o hamiltoniana del sistema:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (40.2)$$

De la ecuación

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (40.3)$$

en la cual las variables independientes son las coordenadas y los ímpetus, se obtienen las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (40.4)$$

Estas son las deseadas ecuaciones del movimiento en las variables  $p$  y  $q$ , y se llaman ecuaciones de Hamilton. Constituyen un conjunto de  $2s$  ecuaciones diferenciales de primer orden, entre las  $2s$  funciones incógnitas  $p_i(t)$  y  $q_i(t)$ , que sustituyen a las ecuaciones de segundo orden obtenidas por medio de Lagrange. A causa de su sencillez y simetría de forma se les llama ecuaciones canónicas.

La derivada total con respecto al tiempo de la hamiltoniana es:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Sustituyendo  $\dot{q}_i$  y  $\dot{p}_i$  de las ecuaciones (40.4) los dos últimos términos se eliminan, de modo que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (40.5)$$

En particular, si la función de Hamilton no depende explícitamente del tiempo, entonces  $\frac{dH}{dt} = 0$ , y se tiene la ley de la conservación de la energía.

Además de las variables dinámicas  $q$  y  $p$ , las funciones de Lagrange y de Hamilton contienen varios parámetros, los cuales se refieren bien a las propiedades del sistema mecánico o bien al campo exterior que actúa sobre él. Sea  $\lambda$  uno de estos parámetros. Considerándolo como una variable, se tiene en lugar de (40.1):

$$dL = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{p}_i dq_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

y en lugar de (40.3):

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

de donde

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q} \quad (40.6)$$

**Este resultado puede expresarse de otro modo.** Sea la lagrangiana

$$L = L_0 + L',$$

siendo  $L'$  una pequeña corrección a la función fundamental  $L_0$ . La correspondiente adición  $H'$  en la hamiltoniana

$$H = H_0 + H'$$

está relacionada con  $L'$  por

$$(H')_{p,q} = - \left(L'\right)_{\dot{q},q} \quad (40.7)$$

Puede observarse que en la transformación de (40.1) en (40.3) no se ha escrito un término en  $dt$ , que tendría en cuenta la posible dependencia explícita del tiempo de la lagrangiana; el tiempo representaría en este caso sólo el papel de un parámetro que nada tiene que ver con la transformación. Las derivadas parciales con respecto al tiempo de  $L$  y de  $H$  están ligadas por la relación

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q} \quad (40.8)$$

## Problemas

1. Hallar la función de Hamilton de una partícula, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Solución. En coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ :

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

En coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \phi, z).$$

En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi).$$

2. Hallar la hamiltoniana de una partícula en un sistema de referencia animado de un movimiento de rotación uniforme. Solución. Usando la expresión de la energía en función de  $p$  se obtiene

$$H = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + U.$$

3. Hallar la función de Hamilton de una partícula de masa  $M$  y  $n$  partículas de masa  $m$ , excluido el movimiento del centro de masa (véase el problema en § 13). Solución. Partiendo de la lagrangiana del § 13 (cambiando el signo de  $U$ ), los ímpetus generalizados son

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} = m v_a - \frac{m}{M} \sum_b v_b.$$

De aquí se sigue

$$v_a = \frac{p_a}{m} + \frac{1}{M} \sum_b p_b.$$

## § 41. Función de Routh

En ciertos casos es conveniente, cuando se pasa a las nuevas variables, no sustituir todas las velocidades generalizadas por los ímpetus, sino sólo algunas de ellas. La transformación correspondiente es análoga a la del § 40.

Para simplificar, supongamos dos coordenadas  $q$  y  $\xi$ . Pasamos de  $(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$  a  $(q, \xi, p, \dot{\xi})$ , siendo

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

el ímpetu generalizado de  $q$ . La diferencial de  $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$  es

$$dL = (\partial_q L) dq + (\partial_{\dot{q}} L) d\dot{q} + (\partial_\xi L) d\xi + (\partial_{\dot{\xi}} L) d\dot{\xi} = p d\dot{q} + (\partial_q L) dq + (\partial_\xi L) d\xi + (\partial_{\dot{\xi}} L) d\dot{\xi},$$

por tanto

$$d(L - p \dot{q}) = -p dq + q dp + (\partial_\xi L) d\xi + (\partial_{\dot{\xi}} L) d\dot{\xi}.$$

Si se define la función de Routh como

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p \dot{q} - L, \quad (41.1)$$

en la cual  $\dot{q}$  se expresa en función de  $p$ , su diferencial es

$$dR = -\dot{q} dq + q dp - (\partial_\xi L) d\xi - (\partial_{\dot{\xi}} L) d\dot{\xi}. \quad (41.2)$$

De aquí se deduce

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \dot{q}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \quad (41.3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = -\frac{\partial L}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}. \quad (41.4)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange para  $\xi$  se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0. \quad (41.5)$$

Entonces la función de Routh es una hamiltoniana con respecto a  $q$  (ec. (41.3)) y una lagrangiana para  $\xi$  (ec. (41.5)). De acuerdo con la definición general, la energía del sistema es:

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \xi \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L.$$

Se expresa mediante la función de Routh sustituyendo (41.1) y (41.4):

$$E = R - \xi \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \quad (41.6)$$

La generalización de estas fórmulas para el caso de varias coordenadas  $q$  y  $\xi$  es inmediata. En particular, puede convenir usar la función de Routh cuando algunas coordenadas son cíclicas. Si  $q$  es cíclica, no aparece en la lagrangiana ni en  $R$ , que sólo depende entonces de  $p, \xi, \dot{\xi}$ . Los ímpetus  $p$  relativos a las coordenadas cíclicas son constantes (véase la segunda ecuación de (41.3)). Sustituyendo estos valores constantes en (41.5)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \right) = \frac{\partial R}{\partial \xi},$$

se obtienen ecuaciones sólo en  $\xi(t)$ . Una vez resuelta  $\xi(t)$ , las ecuaciones

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}$$

dan  $q(t)$  por integración directa.

**Problema** Encontrar la función de Routh de una peonza simétrica en un campo exterior  $U(\theta, \varphi)$ , eliminando la coordenada cíclica  $\psi$  ( $\varphi, \psi, \theta$  son los ángulos de Euler).

**Solución** La lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - U(\theta, \varphi).$$

(véase problema 1, § 35). La función de Routh se define por

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = p_\psi \dot{\psi} - \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + U(\theta, \varphi).$$

El primer término es constante y puede omitirse.

## § 42. Paréntesis de Poisson

Sea  $f(q, p, t)$  una función de coordenadas, ímpetus y tiempo. Su derivada total es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Sustituyendo  $\dot{q}_k, \dot{p}_k$  de las ecuaciones de Hamilton (40.4), resulta

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f], \quad (42.1)$$

donde

$$[H, f] = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \quad (42.2)$$

La expresión (42.2) es el paréntesis de Poisson de  $H$  y  $f$ .

Recordando que las integrales del movimiento son funciones constantes en la evolución, de (42.1) se deduce la condición

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0. \quad (42.3)$$

Si  $f$  no depende explícitamente del tiempo,

$$[H, f] = 0. \quad (42.4)$$

Para dos magnitudes  $f, g$ , el paréntesis de Poisson se define como

$$[f, g] = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (42.5)$$

Sus propiedades son:

$$[f, g] = -[g, f], \quad (42.6)$$

$$[f, c] = 0, \quad (42.7)$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g], \quad (42.8)$$

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + [f_1, g] f_2. \quad (42.9)$$

Derivando (42.5) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]. \quad (42.10)$$

Si una de las funciones coincide con una coordenada o un ímpetu,

$$[f, q_j] = \frac{\partial f}{\partial p_j}, \quad (42.11)$$

$$[f, p_j] = -\frac{\partial f}{\partial q_j}. \quad (42.12)$$

La fórmula (42.11), por ejemplo, se obtiene haciendo  $g = q_k$  en (42.5); la suma se reduce a un solo término, puesto que  $\partial q_l / \partial q_k = \delta_{lk}$  y  $\partial q_l / \partial p_k = 0$ . Haciendo  $g = p_k$  en (42.5) y (42.12), y la función  $f$  igual a  $q_j$  y  $p_j$ , se tiene, en particular,

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0, \quad [p_k, q_i] = \delta_{ik}. \quad (42.13)$$

Entre los paréntesis de Poisson formados por tres funciones existe la relación

$$[[f, g], h] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0, \quad (42.14)$$

llamada identidad de Jacobi. Para demostrarla, observemos que, según la definición (42.5), los paréntesis de Poisson  $[f, g]$  son funciones homogéneas bilineales de las primeras derivadas de  $f$  y  $g$ . Entonces el paréntesis  $[h, [f, g]]$ , por ejemplo, será una función lineal

homogénea de las segundas derivadas de  $f$ , de  $g$  y de  $h$ . Agrupemos en (42.14) los términos que contienen las derivadas segundas de  $f$ . El primer paréntesis no contiene tales derivadas, ya que sólo contiene las primeras derivadas de  $f$ . La suma del segundo y tercer paréntesis puede escribirse en forma simbólica utilizando dos operadores diferenciales lineales  $D_1, D_2$  definidos por

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

donde  $\xi_k$  y  $\eta_k$  son funciones arbitrarias de las variables  $x_1, x_2, \dots$ . Entonces,

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \phi &= \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l}, \\ D_2 D_1 \phi &= \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l}, \end{aligned}$$

y su diferencia es

$$(D_1 D_2 - D_2 D_1) \phi = \sum_l \left( \sum_k \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_l},$$

que sólo contiene derivadas primeras. Procediendo análogamente con los otros términos de (42.14), todos los segundos derivados se cancelan, y la identidad de Jacobi queda demostrada.

De nuevo, un operador que sólo contiene derivadas primeras. Así, en el primer miembro de la ecuación (42.14), todos los términos con derivadas segundas se anulan recíprocamente, y puesto que ocurre análogamente con las funciones  $g$  y  $h$ , la expresión entera es idénticamente nula.

Una propiedad importante de los paréntesis de Poisson es que, si  $f$  y  $g$  son integrales del movimiento, su paréntesis de Poisson es también una integral del movimiento:

$$[f, g] = \text{cte.} \quad (42.15)$$

Este es el teorema de Poisson. La demostración es muy sencilla si  $f$  y  $g$  no dependen explícitamente del tiempo. Haciendo  $h = H$  en la identidad de Jacobi (42.14), se tiene

$$[[H, f], g] + [g, [H, f]] + [f, [g, H]] = 0.$$

Como  $[H, g] = 0$  y  $[H, f] = 0$ , se deduce  $[H, [f, g]] = 0$ , que es justo lo que se quería demostrar.

Si las integrales  $f$  y  $g$  dependen explícitamente del tiempo, partiendo de (42.1) escribimos

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [H, [f, g]].$$

Utilizando la fórmula (42.10) y expresando  $[H, [f, g]]$  por medio de la identidad de Jacobi, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f, g] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [H, [f, g]] - [[f, H], g] - [g, [H, f]] \\ &= \left[ \frac{df}{dt}, g \right] + \left[ f, \frac{dg}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (42.16)$$



Esto demuestra el teorema de Poisson en el caso general.

Por supuesto, aplicando el teorema de Poisson no siempre se obtendrán nuevas integrales del movimiento, pues su número es limitado ( $2s - 1$ , siendo  $s$  el número de grados de libertad). En algunos casos el paréntesis es constante; en otros, la nueva integral resulta depender sólo de las originales. Sólo cuando no ocurre ninguno de estos casos,  $[f, g]$  es una integral nueva.

## Problemas

1. Determinar los paréntesis de Poisson formados por las componentes cartesianas del ímpetu  $\mathbf{p}$  y del momento angular  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  de una partícula.

Solución. Por medio de la fórmula (42.12) se tiene

$$[M_x, p_x] = -\frac{\partial M_x}{\partial p_x} = -\frac{\partial(y p_z - z p_y)}{\partial p_x} = -p_z, \quad [M_x, p_y] = 0, \quad [M_x, p_z] = p_y.$$

Los restantes paréntesis se obtienen por permutación circular de los índices  $x, y, z$ .

2. Determinar los paréntesis de Poisson formados por las componentes de  $\mathbf{M}$ .

Solución. Un cálculo inmediato de la fórmula (42.5) da

$$[M_x, M_y] = M_z, \quad [M_y, M_z] = M_x, \quad [M_z, M_x] = M_y.$$

Puesto que los ímpetus y las coordenadas de distintas partículas son variables independientes, las fórmulas de los problemas 1 y 2 valen también para el momento angular total de un sistema.

3. Demostrar que

$$[f, \mathbf{M}] = 0,$$

siendo  $f$  una función escalar de las coordenadas  $\mathbf{r}$  y del ímpetu  $\mathbf{p}$ .

Solución. Una función escalar sólo puede depender de  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  a través de  $r^2, p^2$  y  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ . Luego

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 2 \frac{\partial f}{\partial(r^2)} \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})} \mathbf{p}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 2 \frac{\partial f}{\partial(p^2)} \mathbf{p} + \frac{\partial f}{\partial(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})} \mathbf{r},$$

y la relación se verifica inmediatamente con (42.5).

4. Demostrar que

$$[\boldsymbol{\varepsilon}, M_z] = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\varepsilon},$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es una función vectorial de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{n}$  el versor del eje  $z$ .

Solución. Todo vector  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  puede escribirse

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{r} \phi + \mathbf{p} \psi + (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \chi,$$

con  $\phi, \psi, \chi$  escalares. La relación se verifica directamente con (42.9), (42.11), (42.12) y el resultado del problema 3.

## § 43. La acción como una función de las coordenadas

Al formular el principio de la mínima acción, consideramos la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (43.1)$$

tomada a lo largo de una trayectoria entre dos posiciones dadas  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$  en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . Al variar la acción, se comparan los valores de la integral para trayectorias vecinas con los mismos extremos; sólo aquella que hace  $S$  mínimo es el movimiento real.

Ahora tratamos  $S$  como función de la posición final  $q(t_2) = q$ , con  $q(t_1) = q^{(1)}$  fijo. La variación de la acción al pasar a una trayectoria vecina está dada (si hay un grado de libertad) por

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Como la trayectoria real satisface las ecuaciones de Lagrange, la integral se anula. En el primer término ponemos  $\partial L / \partial \dot{q} = p$  y designamos  $q(t_2) = q$ , resultando

$$\delta S = p \delta q, \quad (43.2)$$

y en el caso general

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (43.2)$$

De aquí se deduce que las derivadas parciales de la acción respecto de las coordenadas finales son

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (43.3)$$

De la definición de acción se sigue que su derivada total respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria es:

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (43.4)$$

Por otra parte, considerando  $S$  como función de las coordenadas y del tiempo, y aplicando la fórmula (43.3) se tiene:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Comparando las dos expresiones, se deduce

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i, \quad \text{o sea,} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (43.5)$$

Las fórmulas (43.3) y (43.5) pueden reunirse en la expresión

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt. \quad (43.6)$$

Supongamos ahora que las coordenadas y el tiempo varían tanto en el instante inicial  $t_1$  como en el final  $t_2$ . La variación de la acción vendrá dada por la diferencia de las expresiones (43.3) y (43.5) en los extremos de la trayectoria:

$$dS = \sum_i p_i \delta q_i \Big|_{t_2} - H \delta t_2 - \left( \sum_i p_i \delta q_i \Big|_{t_1} - H \delta t_1 \right). \quad (43.7)$$

De aquí se deduce que, independientemente de la forma particular de  $L$ , la condición de mínima acción equivale a requerir que la integral

$$S = - \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) \quad (43.8)$$

sea estacionaria.

## § 44. Principio de Maupertuis

Si  $L$  y, por tanto,  $H$  no dependen explícitamente del tiempo, la energía del sistema se conserva:

$$H(p, q) = E = \text{cte.}$$

De acuerdo con el principio de mínima acción, variando el tiempo final y manteniendo fijas las coordenadas inicial y final, la variación de la acción es

$$\delta S = -H \delta t. \quad (44.1)$$

Como  $H = E$  es constante,

$$\delta S + E \delta t = 0. \quad (44.2)$$

Escribiendo la acción en la forma (43.8) y reemplazando  $H$  por  $E$ , resulta

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E (t_2 - t_1). \quad (44.3)$$

**El primer término en esta expresión**

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i \quad (44.4)$$

se denomina acción abreviada. Sustituyendo (44.3) en (44.2) se encuentra que

$$\delta S_0 = 0. \quad (44.5)$$

Para aplicar este principio variacional, los ímpetus y todo el integrando de (44.2) deben expresarse en función de las coordenadas  $q$  y de sus diferenciales  $dq$ ; para ello empleamos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}), \quad (44.6)$$

$$E(q, \dot{q}) = E. \quad (44.7)$$

Cuando la lagrangiana tiene la forma habitual

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q),$$

los ímpetus y la energía se escriben

$$p_i = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k, \quad E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

De aquí se deduce

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k}{2(E - U)}}. \quad (44.8)$$

Sustituyendo en  $\sum_i p_i dq_i$  se obtiene la acción abreviada

$$S_0 = \int \sqrt{2(E - U) \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k}. \quad (44.9)$$

En particular, para una sola partícula la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m \left( dl/dt \right)^2,$$

donde  $m$  es la masa y  $dl$  un elemento de longitud de la trayectoria; el principio variacional es

$$\delta \int \sqrt{2m(E - U)} dl = 0. \quad (44.10)$$

Volviendo a la acción abreviada  $S_0$ , su derivada con respecto a  $E$  da

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \quad (44.11)$$

Cuando  $S_0$  toma la forma (44.9), esta igualdad conduce a

$$\int \sqrt{\frac{\sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k}{2(E - U)}} = t - t_0. \quad (44.12)$$

**Problema** Deducir la ecuación de la trayectoria del principio variacional (44.10).

**Solución** Efectuando la variación se halla

$$\delta \int \sqrt{E - U} dl = - \int \frac{\partial U / \partial r}{2\sqrt{E - U}} \delta r dl - \int \sqrt{E - U} \delta(dl).$$

Como  $dl^2 = dr^2$ , se usa  $dl \delta(dl) = dr \delta r$ ; integrando por partes el segundo término y anulando el coeficiente de  $\delta r$ , se obtiene la ecuación diferencial

$$2(E - U) \frac{d}{dl} \left( \sqrt{E - U} \frac{dr}{dl} \right) = - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

## § 45. Transformaciones canónicas

La elección de las coordenadas generalizadas  $q$  no está limitada por ninguna condición; pueden ser  $s$  magnitudes cualesquiera que definan unívocamente la posición del sistema en el espacio. El aspecto formal de las ecuaciones de Lagrange no depende de esta elección, y en este sentido puede decirse que las ecuaciones de Lagrange son invariantes respecto a una transformación de las coordenadas  $q_i, q'_i, \dots$  en otras magnitudes independientes  $Q_i, Q'_i, \dots$ . Las nuevas coordenadas  $Q_i$  son funciones de las antiguas  $q_i$ , y admitimos que pueden depender explícitamente del tiempo, es decir, que la transformación es de la forma

$$Q_i = Q_i(q, t) \quad (45.1)$$

(denominadas a veces transformaciones puntuales).

Puesto que las ecuaciones de Lagrange son invariantes por la transformación (45.1), también son invariantes las ecuaciones de Hamilton (40.4). Sin embargo, estas últimas ecuaciones admiten en realidad un margen mucho más amplio de transformaciones. Esto es, por supuesto, porque en el método de Hamilton los ímpetus  $p$  son variables independientes con igual categoría que las coordenadas  $q$ , y, por tanto, puede ampliarse la transformación para incluir las  $2s$  variables independientes  $p$  y  $q$  que pasarán a  $P$  y  $Q$  según las fórmulas

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t). \quad (45.2)$$

Esta ampliación de las posibles transformaciones constituye una de las ventajas esenciales del método de Hamilton en Mecánica. Sin embargo, las ecuaciones del movimiento no conservan su forma canónica para toda transformación del tipo (45.2). Por ello vamos a deducir ahora las condiciones que deben satisfacerse para que las ecuaciones del movimiento en las nuevas variables  $P, Q$  sean de la forma

$$\dot{Q}_i = +\frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad (45.3)$$

con una nueva hamiltoniana  $H'(P, Q)$ . Cuando esto ocurre, la transformación se dice que es canónica.

Las fórmulas para las transformaciones canónicas pueden obtenerse de modo siguiente. Se ha demostrado al final del § 43 que las ecuaciones de Hamilton pueden deducirse del principio de la mínima acción en la forma

$$\delta\left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) = 0, \quad (45.4)$$

en la cual la variación se aplica a todas las coordenadas y los ímpetus independientemente. Si las nuevas variables  $P$  y  $Q$  satisfacen también a las ecuaciones de Hamilton, deben verificar igualmente el principio de la mínima acción:

$$\delta\left(\sum_i P_i dQ_i - H' dt\right) = 0. \quad (45.5)$$

Las dos formas (45.4) y (45.5) son equivalentes solamente si sus integrandos difieren en la diferencial total de una función arbitraria  $F$  de las coordenadas, de los ímpetus y del tiempo; la diferencia entre las dos integrales (diferencia de los valores de  $F$  en los límites de integración) será entonces una constante cuya variación es nula. Consecuentemente se debe tener:

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF. \quad (45.6)$$

Toda transformación canónica está caracterizada por su función  $F$ , denominada función generatriz de la transformación. Escribiendo la relación anterior en la forma

$$dF = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (45.6')$$

se tiene, comparando coeficientes,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (45.7)$$

El argumento de la diferencial del primer miembro, expresada en función de las variables  $q$  y  $P$ , es una nueva función generatriz. Denominémosla  $\Phi(q, P, t)$ , y se tiene:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (45.8)$$

De modo análogo se pueden obtener las fórmulas para las transformaciones canónicas que encierran funciones generatrices dependientes de las variables  $p$  y  $Q$ , o de las  $p$  y  $P$ .

La relación entre la nueva y la antigua hamiltoniana es siempre de la misma forma; la diferencia  $H' - H$  es la derivada parcial de la función generatriz respecto al tiempo. En particular, si la función generatriz es independiente del tiempo, entonces  $H' = H$ ; es decir, en este caso la nueva hamiltoniana se obtiene sustituyendo en  $H$  las magnitudes  $p$  y  $q$  por sus valores en función de las nuevas variables  $P$  y  $Q$ .

El amplio alcance de las transformaciones canónicas en el método de Hamilton se mantiene incluso cuando parte de su significado inicial. Puesto que las transformaciones (45.2) relacionan cada una de las magnitudes  $P_i, Q_i$  tanto a las coordenadas  $q$  como a los antiguos  $p$ , no se pueden considerar las variables  $Q$  como coordenadas estrictamente espaciales, y la diferencia entre los dos grupos de variables  $p$  y  $Q$  se convierte esencialmente en cuestión de nomenclatura. Esto se ve muy claramente en la transformación

$$Q_1 = p_1, \quad P_1 = -q_1,$$

que evidentemente no cambia la forma canónica de las ecuaciones, y se reduce simplemente al intercambio de los nombres de las coordenadas y de los ímpetus.

Teniendo en cuenta esta arbitrariedad de terminología, a las variables  $p$  y  $q$  en el método de Hamilton se les denomina habitualmente magnitudes canónicamente conjugadas. Las condiciones para que las variables sean canónicamente conjugadas pueden expresarse con ayuda de los paréntesis de Poisson. Demostremos primero un teorema general sobre la invarianza de los paréntesis de Poisson con respecto a las transformaciones canónicas.

Sea  $[f, g]_{p,q}$  el paréntesis de Poisson de las magnitudes  $f$  y  $g$ , en el cual la diferenciación se hace respecto a las variables  $p$  y  $q$ , y  $[f, g]_{P,Q}$  el paréntesis de Poisson de las mismas magnitudes diferenciadas con respecto a las variables canónicas  $P$  y  $Q$ . Entonces

$$[f, g]_{p,q} = [f, g]_{P,Q} \quad (45.9)$$

Esta relación puede demostrarse por cálculo directo, empleando las fórmulas de las transformaciones canónicas; sin embargo, pueden evitarse estos cálculos mediante el razonamiento siguiente:

Empecemos por observar que en las transformaciones canónicas (45.7) y (45.8), el tiempo aparece como un parámetro; por lo tanto, es suficiente demostrar el teorema (45.9) para magnitudes que no dependan explícitamente del tiempo. Consideremos ahora, de modo puramente formal, a la magnitud  $H$  como la hamiltoniana de un sistema ficticio; entonces, de la fórmula (42.1)

$$\dot{f} = [f, H].$$

La derivada  $\dot{f}/dt$  sólo puede depender de las propiedades del movimiento del sistema ficticio, y de la elección particular de las variables. De aquí que el paréntesis de Poisson  $[ , ]$  sea inalterable por el paso de un conjunto de variables canónicas a otro.

De las fórmulas (42.13) y del teorema (45.9) se tiene:

$$\{Q_i, Q_j\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, Q_j\}_{p,q} = \delta_{ij} \quad (45.10)$$

Estas son las condiciones, expresadas en función de los paréntesis de Poisson, que deben satisfacer las nuevas variables para que la transformación  $q, p \rightarrow Q, P$  sea canónica.

Es interesante observar que la variación de las magnitudes  $p, q$  durante el movimiento del sistema puede ser considerada por sí misma como una serie de transformaciones canónicas. El significado de esta afirmación es el siguiente: sean  $q_i, p_i$  dos variables canónicas conjugadas en el instante  $t$ ; sean también  $q'_i, p'_i$  sus valores en el instante  $t + \tau$ . Estas últimas son funciones de las primeras (y del valor  $t$  del intervalo como parámetro):

$$q'_i = q_i(q, p, t), \quad p'_i = p_i(q, p, t).$$

Si se consideran estas fórmulas como una transformación de las variables  $q_i, p_i \rightarrow q'_i, p'_i$ , entonces esta transformación será canónica; esto es evidente si se considera la expresión de la diferencia de la acción  $S$ :

$$\Delta S = \sum_i p_i dq_i - \sum_i p'_i dq'_i,$$

calculada a lo largo de la trayectoria real que pasa por los puntos  $(q, p)$  en los instantes dados  $t$  y  $t + \tau$ ; cf. (43.7). La comparación de esta fórmula con (45.6) prueba que  $-S$  es la función generatriz de la transformación.

## § 46. Teorema de Liouville

## § 46. Teorema de Liouville

Esta integral tiene la propiedad de ser invariante con respecto a las transformaciones canónicas, es decir, si las variables  $p, q$  se transforman canónicamente en las variables  $P, Q$ , los volúmenes de las regiones correspondientes de los espacios  $p, q$  y  $P, Q$  serán los mismos:

$$\int \cdots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int \cdots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n \quad (46.1)$$

Como es sabido, la transformación de variables en una integral múltiple se realiza por la fórmula

$$\int \cdots \int f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int \cdots \int D dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n,$$

en la que

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \quad (46.2)$$

es el jacobiano de la transformación. Consecuentemente, la demostración del teorema (46.1) queda reducida a probar que el jacobiano de toda transformación canónica es igual a la unidad:

$$D = 1 \quad (46.3)$$

Haremos uso de la conocida propiedad de los jacobianos por la cual pueden ser tratados como si fuesen fracciones. Dividiendo numerador y denominador por  $\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)$ , se obtiene:

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \quad (46.4)$$

Otra propiedad de los jacobianos es que cuando las mismas magnitudes aparecen en el numerador y denominador, el jacobiano se reduce a otro con menor número de variables, y en el cual las magnitudes repetidas se consideran como constantes y salen fuera de los símbolos de derivación. De aquí que

$$D = \left[ \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right]_{P=\text{cte}} \left[ \frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \right]_{q=\text{cte}}.$$

El jacobiano del numerador es, por definición, un determinante de orden  $n$  cuyo elemento de la fila  $i$  y columna  $k$  es  $\partial Q_i / \partial q_k$ . Representando la transformación canónica por la función generatriz  $\Phi(q, P, t)$  en la forma (45.8), se obtiene:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_i \partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i} = \frac{\partial p_k}{\partial P_i}.$$

Análogamente se encuentra que el elemento de la fila  $i$  y columna  $k$  del determinante del denominador es  $\partial^2 \Phi / \partial q_i \partial P_k$ . Esto quiere decir que ambos determinantes sólo difieren en el intercambio de filas y columnas; por tanto serán iguales, de modo que el cociente (46.4) es igual a la unidad, como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que cada punto en la región considerada del espacio físico se mueve en el curso del tiempo de acuerdo con las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico; la región también se moverá como un todo, sin que cambie su volumen:

$$\int d\Gamma = \text{cte} \quad (46.5)$$

Este resultado, conocido como teorema de Liouville, es consecuencia inmediata de la invariancia del volumen del espacio físico en las transformaciones canónicas, y del hecho de que la variación de  $p$  y  $q$  durante el movimiento puede ser considerada como una transformación canónica (como se ha demostrado al final de §45).

De modo análogo puede demostrarse la invariancia de las integrales

$$\iint \sum_i q_i dp_i, \quad \iiint \sum_i q_i dq_i dp_i, \dots,$$

en las que la integración se extiende a variedades bidimensionales, cuatrimensionales, etc., del espacio físico.

## § 47. Ecuación de Hamilton–Jacobi

Al considerar en §43 la acción  $S$  como función de las coordenadas y del tiempo se ha demostrado que la derivada parcial respecto al tiempo de esta función  $S(q, t)$  está relacionada con la hamiltoniana por la expresión

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) = 0,$$

y que sus derivadas parciales con respecto a las coordenadas son los ímpetus. Sustituyendo entonces en la hamiltoniana los ímpetus  $p$  por las derivadas  $\partial S / \partial q$ , se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) = 0 \quad (47.1)$$



## § 47. Ecuación de Hamilton–Jacobi

En un sistema con  $s$  grados de libertad, una integral completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi debe contener  $s + 1$  constantes arbitrarias. Como la función  $S$  sólo interviene en la ecuación por sus derivadas, una de dichas constantes será aditiva. Así, una integral completa tiene la forma

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A \quad (47.2)$$

siendo  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  y  $A$  constantes arbitrarias.

Para relacionar esta integral con la solución de las ecuaciones del movimiento, efectuemos una transformación canónica de las variables  $p, q$  a las nuevas variables  $\alpha, \beta$ , tomando como función generatriz  $f(t, q; \alpha)$ . Las nuevas coordenadas las llamamos  $\alpha_i$  y los nuevos ímpetus  $\beta_i$ . Según las fórmulas (45.8),

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = -\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Como  $f$  satisface la ecuación de Hamilton–Jacobi,  $\partial f / \partial t + H = 0$ , resulta

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Por tanto las ecuaciones canónicas en las nuevas variables son  $\dot{\alpha}_i = 0$ ,  $\dot{\beta}_i = 0$ , de modo que

$$\alpha_i = \text{cte.}, \quad \beta_i = \text{cte.} \quad (47.3)$$

Además, las  $s$  ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (47.4)$$

permiten expresar las coordenadas  $q_i$  como funciones de  $t$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ . A su vez,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

da los ímpetus en función del tiempo y de las constantes.

Si se dispone sólo de una integral incompleta dependiente de menos de  $s$  constantes, no podrá obtenerse la solución general, pero sí simplificarse el problema. Por ejemplo, si  $S$  contiene una constante arbitraria  $a$ , la relación

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \text{cte}$$

genera una ecuación entre  $q_1, \dots, q_s$  y  $t$ .

En el caso conservativo ( $H$  no depende explícitamente de  $t$ ), la acción se escribe

$$S = S_0(q_1, \dots, q_s) - E t \quad (47.5)$$

y la ecuación (47.1) pasa a

$$H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \quad (47.6)$$

## § 48. Separación de variables

## § 48. Separación de variables

En este caso se busca una solución en la forma de una suma

$$S = S'(q_1, t) + S_1(q_1) \quad (48.2)$$

que sustituida en la ecuación (48.1) da

$$\phi\left(q_1, t, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = 0. \quad (48.3)$$

Supongamos que ha sido hallada la solución (48.2). Al sustituirla en (48.3), ésta se convierte en una identidad para todo  $q_1$ . Para que así sea, deben cumplirse las dos ecuaciones

$$\phi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \quad (48.4)$$

$$\phi\left(q_1, t, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \frac{\partial S'}{\partial t}; \alpha_1\right) = 0, \quad (48.5)$$

donde  $\alpha_1$  es constante arbitraria. La primera de ellas permite obtener  $S_1(q_1)$  por simple integración; la segunda es una EDP en menos variables.

Si así se separan sucesivamente las  $s$  coordenadas y el tiempo, la integral completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi se reduce a cuadraturas. Para un sistema conservativo, basta separar las  $s$  coordenadas en la ecuación (47.6) y se obtiene

$$S = \sum_{k=1}^s S_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_s) - Et \quad (48.6)$$

donde cada  $S_k$  depende sólo de  $q_k$ , y  $E$  se determina al sustituir  $S$  en (47.6).

Un caso particular es la separación de una variable cíclica  $q_j$ . Entonces  $\phi(q_j, \partial S/\partial q_j) = \partial S/\partial q_j$  y de (48.4) se obtiene

$$S_j = \alpha_j q_j, \quad (48.7)$$

siendo  $\alpha_j = p_j$  constante. Obsérvese que el término  $-Et$  en (48.6) equivale a la separación de la variable cíclica  $t$ .

El método de separación engloba así tanto el uso de variables cíclicas como los casos en que, aun sin serlo, pueden separarse las coordenadas. A continuación, un ejemplo clásico:

**1. Coordenadas esféricas.** En  $(r, \theta, \varphi)$  la hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi),$$

y puede separarse si

$$U(r, \theta, \varphi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Físicamente basta tomar

$$U(r, \theta) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \quad (48.8)$$

La ecuación de Hamilton–Jacobi para  $S_0(r, \theta, \varphi)$  es

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2m r^2} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2m r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 = E.$$

Como  $\varphi$  es cíclica, busquemos

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_\theta(\theta) + S_r(r),$$

y obtenemos las ecuaciones separadas

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = 2m[E - a(r)] - \beta, \quad \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = \beta - 2m b(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta},$$

donde  $\beta$  es constante de separación. Su integración da finalmente

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \beta} dr + \int \sqrt{\beta - 2m b(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta. \quad (48.9)$$

Aquí las constantes libres son  $p_\varphi$  y  $\beta$ ; derivando respecto a ellas y fijando el resultado como nuevas constantes, se obtiene la solución general del movimiento.

## 2. Coordenadas parabólicas

Se pasa de las coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$  a las parabólicas  $\xi, \eta, \varphi$  mediante las fórmulas:

$$z = \xi(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta} \quad (48.10)$$

Las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  pueden tomar valores de 0 a  $\infty$ ; las superficies  $\xi = \text{cte}$  y  $\eta = \text{cte}$  son dos familias de paraboloides de revolución (eje de simetría  $z$ ). De (48.10) sigue

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \xi + \eta, \quad (48.11)$$

de donde

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \quad (48.12)$$

Derivando (48.10) respecto al tiempo y sustituyendo en

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z),$$

se obtiene

$$L = \frac{1}{2}m((\xi + \eta)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \xi\eta\dot{\varphi}^2) - U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48.13)$$

Los ímpetus son

$$p_\xi = m(\xi + \eta)\dot{\xi}, \quad p_\eta = m(\xi + \eta)\dot{\eta}, \quad p_\varphi = m\xi\eta\dot{\varphi},$$

y la hamiltoniana resulta

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{2m(\xi + \eta)} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48.14)$$

Los casos de interés para separación de variables aparecen con un potencial de la forma

$$U(\xi, \eta) = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}. \quad (48.15)$$

La ecuación de Hamilton–Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{(\partial S / \partial \xi)^2 + (\partial S / \partial \eta)^2}{\xi + \eta} + \frac{1}{\xi\eta} (\partial S / \partial \varphi)^2 \right) + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E$$

con  $\partial S/\partial\varphi = p_\varphi$  cíclica. Multiplicando por  $2m(\xi + \eta)$  y reagrupando:

$$2\xi\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2 + m a(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{\xi} + 2\eta\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2 + m b(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{\eta} = 0.$$

Al separar las variables quedan dos ecuaciones

$$2\xi\left(\frac{dS_\xi}{d\xi}\right)^2 + m a(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{\xi} = \beta, \quad 2\eta\left(\frac{dS_\eta}{d\eta}\right)^2 + m b(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{\eta} = -\beta.$$

Su integración da finalmente

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int \sqrt{\frac{\beta - m a(\xi) + mE\xi - \frac{p_\varphi^2}{\xi}}{2\xi}} d\xi + \int \sqrt{\frac{-\beta - m b(\eta) + mE\eta - \frac{p_\varphi^2}{\eta}}{2\eta}} d\eta. \quad (48.16)$$

La hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\varphi^2 \right] + U(\xi, \eta, \varphi) \quad (48.20)$$

Los casos físicamente interesantes de separación de variables corresponden a un potencial de la forma

$$U(\xi, \eta) = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{\xi^2 - \eta^2} \left[ a\left(\frac{\xi+\eta}{2\sigma}\right) + b\left(\frac{\xi-\eta}{2\sigma}\right) \right] \quad (48.21)$$

De este modo, la separación de variables en la ecuación de Hamilton–Jacobi conduce a

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int \sqrt{\frac{2m\sigma^2 E + \beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{2m\sigma^2 E - \beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta \quad (48.22)$$

**Problemas** 1. Hallar una integral completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi para el movimiento de una partícula en un campo

$$U = -\frac{\alpha}{r} - Fz$$

(superposición de un campo coulombiano y de un campo uniforme). La hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\varphi^2 \right] + U(\xi, \eta, \varphi) \quad (48.20)$$

Los casos físicamente interesantes de separación de variables corresponden a un potencial de la forma

$$U(\xi, \eta) = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{\xi^2 - \eta^2} \left[ a\left(\frac{\xi+\eta}{2\sigma}\right) + b\left(\frac{\xi-\eta}{2\sigma}\right) \right] \quad (48.21)$$

De este modo, la separación de variables en la ecuación de Hamilton–Jacobi conduce a

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int \sqrt{\frac{2m\sigma^2 E + \beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{2m\sigma^2 E - \beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta \quad (48.22)$$

**Problemas** 1. Hallar una integral completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi para el movimiento de una partícula en un campo

$$U = -\frac{\alpha}{r} - Fz$$

(superposición de un campo coulombiano y de un campo uniforme).

## § 49. Invariantes adiabáticos

Sea  $H(p, q; \lambda)$  la hamiltoniana del sistema que depende del parámetro  $\lambda$ . De acuerdo con (40.5), la derivada total de la energía con respecto al tiempo es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}.$$

Tomemos el valor medio de esta ecuación durante un período del movimiento; dado que  $\lambda$  (y por consiguiente  $\dot{\lambda}$ ) varía lentamente, no es necesario promediar  $\dot{\lambda}$ :

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle.$$

En la función  $\partial H / \partial \lambda$  que se promedia podemos considerar como variables únicamente  $p$  y  $q$ , es decir, como si el movimiento tuviese lugar con  $\lambda$  constante.

Puesto que  $\dot{q} = \partial H / \partial p$ , se tiene

$$dt = \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{dq}{\partial H / \partial p},$$

y el período puede expresarse como

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}.$$

Por tanto,

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial H}{\partial p} dq} \quad (49.2)$$

A lo largo de la trayectoria,  $H = E$  es constante, y  $p = p(q; E, \lambda)$ . Derivando  $H(p, q; \lambda) = E$  respecto de  $\lambda$  se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0.$$

Sustituyendo en el numerador de (49.2) y escribiendo el denominador como  $\oint (\partial p / \partial E) dq$ , resulta

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{-\oint \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq},$$

o equivalentemente

$$\oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\bar{E}}{dt} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

Finalmente, esta igualdad puede escribirse

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad (49.4)$$

siendo

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq. \quad (49.5)$$

La magnitud  $I$  permanece constante cuando varía lentamente  $\lambda$ , por lo que se denomina invariante adiabático. Además,

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T. \quad (49.6)$$

## Invariante adiabático para un oscilador lineal

Definimos

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq.$$

Como ejemplo, determinemos el invariante adiabático para un oscilador lineal. Su hamiltoniana es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2.$$

Siendo  $\omega$  la frecuencia propia del oscilador. La ecuación de la trayectoria física está dada por la ley de conservación de la energía  $H(p, q) = E$ ; es una elipse de semiejes  $\sqrt{2mE}$  y  $\sqrt{2E/(m\omega^2)}$ , y su área, dividida por  $2\pi$ , es

$$I = \frac{E}{\omega} \quad (49.7)$$

La invariancia adiabática de esta magnitud significa que, cuando los parámetros del oscilador varían lentamente, la energía es proporcional a la frecuencia. Las ecuaciones del movimiento de un sistema cerrado con parámetros constantes pueden volver a formularse en función de  $I$ . Efectuemos una transformación canónica de las variables  $p, q$ , tomando  $I$  como nueva “impulsa”; la función generatriz es la acción abreviada  $S_0$ , expresada como función de  $q$  e  $I$ . Puesto que  $S_0$  está definida para una energía dada del sistema, y en un sistema cerrado  $I$  sólo es función de la energía,  $S_0$  puede escribirse también como una función  $S(q, I)$ . La derivada parcial  $(\partial S_0 / \partial q)_E$  coincide con la derivada  $(\partial S / \partial q)_I$ . En consecuencia,

$$p = \frac{\partial S_0(q, E)}{\partial q} = \frac{\partial S(q, I)}{\partial q} \quad (49.8)$$

lo que corresponde a la primera de las fórmulas para una transformación canónica. La segunda nos da la nueva “coordenada” que designamos por  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\partial S_0(q, E)}{\partial E} = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I} \quad (49.9)$$

Las variables  $I$  y  $\omega$  se llaman variables canónicas:  $I$  es la variable acción y  $\omega$  la variable angular.

Puesto que la función generatriz  $S(q, I)$  no depende explícitamente del tiempo, la nueva hamiltoniana  $H'$  coincide con la antigua  $H$  expresada en las nuevas variables. En

otras palabras,  $H'$  representa la energía  $E(I)$  en función de la acción. Así, las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\omega} = \frac{dE}{dI} \quad (49.10)$$

La primera da  $I = \text{cte.}$ . De la segunda se deduce que la variable angular es lineal en  $t$ :

$$\omega = \frac{dE}{dI} t + \text{cte.} \quad (49.11)$$

La acción  $S(q, I, t)$  es multiforme en las coordenadas. Tras cada período aumenta en

$$\Delta S_0 = 2\pi I \quad (49.12)$$

y, al mismo tiempo, la variable angular se incrementa en

$$\Delta\omega = \omega \Delta(\partial S_0 / \partial I) = \Delta(\Delta S_0 / \Delta I) = 2\pi \quad (49.13)$$

Cualquier función uniforme  $F(p, q)$  expresada en variables canónicas es periódica en  $\omega$  de período  $2\pi$ .

## §50 Propiedades generales del movimiento en el espacio

Consideremos un sistema con varios grados de libertad y movimiento finito en cada coordenada. Si el problema admite separación completa por Hamilton–Jacobi, la acción reducida se descompone:

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \quad (50.1)$$

cada término depende de una sola coordenada. Los ímpetus generalizados son

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i}.$$

Estas funciones no son uniformes. Como el movimiento del sistema es finito, cada coordenada sólo puede describir un intervalo finito, y cuando las  $q_i$  varían “ida y vuelta” en ese intervalo, la acción aumenta en

$$\Delta S_i = \Delta S_{0,i} = 2\pi I_i \quad (50.3)$$

siendo

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (50.4)$$

extendida la integral a la mencionada variación de  $q_i$ .

Realicemos ahora una transformación canónica análoga a la considerada en §49 para el caso de un solo grado de libertad. Las nuevas variables son las variables de acción  $I_i$  y las variables angulares

$$w_i = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I_i} \quad (50.5)$$

donde la función generatriz  $S(q, I)$  es la acción abreviada expresada en función de las  $q_i$  y los  $I_i$ . Las ecuaciones del movimiento en estas variables dan

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

luego,

$$I_i = \text{cte.} \quad (50.6)$$

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \text{cte.} \quad (50.7)$$

También encontramos, análogamente a (49.13), que una variación completa (“ida y vuelta”) de la coordenada  $q_i$  corresponde a un cambio de  $2\pi$  en  $w_i$ :

$$\Delta w_i = 2\pi \quad (50.8)$$

De aquí se deduce que cualquier función uniforme  $F(p, q)$  del estado del sistema, cuando se expresa en variables canónicas, es una función periódica de las variables angulares de período  $2\pi$  respecto de cada una de ellas. Puede, por lo tanto, ser desarrollada en serie múltiple de Fourier

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} A_{l_1, \dots, l_n}(I) \exp[i(l_1 w_1 + \cdots + l_n w_n)] \quad (50.9)$$

(donde  $l_1, \dots, l_n$  son números enteros). Sustituyendo las variables angulares por sus expresiones en función del tiempo se obtiene

$$F = \sum_{l_1, \dots, l_n} A_{l_1, \dots, l_n}(I) \exp[i(l_1 \dot{w}_1 + \cdots + l_n \dot{w}_n) t] = \sum_{l_1, \dots, l_n} A_{l_1, \dots, l_n}(I) \exp[i(l_1 \partial E / \partial I_1 + \cdots + l_n \partial E / \partial I_n) t] \quad (50.10)$$

Cada término de esta suma es una función periódica del tiempo de frecuencia

$$\omega_l = |l_1 \partial E / \partial I_1 + \cdots + l_n \partial E / \partial I_n| \quad (50.11)$$

Como en general estas frecuencias no son conmensurables, la suma no es periódica estricta, ni lo son las coordenadas  $q$  ni los ímpetus  $p$ . El sistema es en general casi periódico (condicionalmente periódico).

En casos particulares, si dos (o más) de las frecuencias fundamentales  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$  son conmensurables para valores arbitrarios de  $I$ , hablamos de degeneración. Si las  $n$  frecuencias son conmensurables el movimiento es completamente degenerado y las trayectorias son cerradas. La existencia de degeneración implica una reducción del número de magnitudes independientes  $I_i$ . Por ejemplo, si

$$m_i \frac{\partial E}{\partial I_i} = m_j \frac{\partial E}{\partial I_j}, \quad (50.12)$$

con  $m_i, m_j \in \mathbb{Z}$ , entonces hay sólo  $n - 1$  acciones independientes.

Donde  $n_1$  y  $n_2$  son números enteros, se deduce que  $I_1$  e  $I_2$  sólo aparecen en la energía en forma de la suma  $n_1 I_1 + n_2 I_2$ .

Una particularidad muy importante del movimiento degenerado es el aumento del número de integrales uniformes respecto al caso no degenerado (con igual número de grados de libertad). En éste, de las  $n - 1$  integrales sólo  $s$  son uniformes —por ejemplo, las magnitudes  $I_\nu$ — y las  $s - 1$  restantes pueden escribirse como las diferencias

$$\omega_{s2} \frac{\partial E}{\partial I_1} - \omega_{s1} \frac{\partial E}{\partial I_2} \quad (50.13)$$



La constancia de estas cantidades se sigue de (50.7), pero no son uniformes porque las variables angulares no lo son.

En los casos de degeneración, la situación cambia. Según (50.12), aunque la combinación

$$\omega_2 l_2 = \omega_2 l_1 \quad (50.14)$$

no sea uniforme, su no uniformidad sólo consiste en sumar un múltiplo arbitrario de  $2\pi$ . Basta entonces tomar una función trigonométrica de dicha magnitud para obtener una nueva integral uniforme.

Como ejemplo, en el campo  $U = -e/r$  aparece, además de las dos integrales usuales (momento angular  $M$  y energía  $E$ ), una nueva integral uniforme característica de este potencial central.

Si ahora introducimos un parámetro  $\lambda$  y hacemos que la función generatriz  $S(q, I; \lambda)$  dependa de  $\lambda$  (y, si  $\lambda = \lambda(t)$ , explícitamente del tiempo), la nueva hamiltoniana

$$H' = E(I) + \dot{\lambda} \Lambda, \quad \Lambda = \frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

no coincide con  $H$ . De las ecuaciones de Hamilton resulta

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H'}{\partial w_i} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i} \dot{\lambda}. \quad (50.15)$$

Si tomamos el valor medio sobre muchos períodos fundamentales,  $\langle \partial \Lambda / \partial w_i \rangle = 0$  y, por tanto,  $\dot{I}_i = 0$ . Esto demuestra la invariancia adiabática de las  $I_i$ .

Con esto concluimos las propiedades generales del movimiento casi periódico en sistemas finitos de  $s$  grados de libertad.““

Donde  $n_1$  y  $n_2$  son números enteros, se deduce que  $I_1$  e  $I_2$  sólo aparecen en la energía en forma de la suma  $n_1 I_1 + n_2 I_2$ .

Una particularidad muy importante del movimiento degenerado es el aumento del número de integrales uniformes respecto al caso no degenerado (con igual número de grados de libertad). En éste, de las  $n - 1$  integrales sólo  $s$  son uniformes —por ejemplo, las magnitudes  $I_\nu$ — y las  $s - 1$  restantes pueden escribirse como las diferencias

$$\omega_{s2} \frac{\partial E}{\partial I_1} - \omega_{s1} \frac{\partial E}{\partial I_2} \quad (50.13)$$

La constancia de estas cantidades se sigue de (50.7), pero no son uniformes porque las variables angulares no lo son.

En los casos de degeneración, la situación cambia. Según (50.12), aunque la combinación

$$\omega_2 l_2 = \omega_2 l_1 \quad (50.14)$$

no sea uniforme, su no uniformidad sólo consiste en sumar un múltiplo arbitrario de  $2\pi$ . Basta entonces tomar una función trigonométrica de dicha magnitud para obtener una nueva integral uniforme.

Como ejemplo, en el campo  $U = -e/r$  aparece, además de las dos integrales usuales (momento angular  $M$  y energía  $E$ ), una nueva integral uniforme característica de este potencial central.

Si ahora introducimos un parámetro  $\lambda$  y hacemos que la función generatriz  $S(q, I; \lambda)$  dependa de  $\lambda$  (y, si  $\lambda = \lambda(t)$ , explícitamente del tiempo), la nueva hamiltoniana

$$H' = E(I) + \dot{\lambda} \Lambda, \quad \Lambda = \frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

no coincide con  $H$ . De las ecuaciones de Hamilton resulta

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H'}{\partial w_i} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i} \dot{\lambda}. \quad (50.15)$$

Si tomamos el valor medio sobre muchos períodos fundamentales,  $\langle \partial \Lambda / \partial w_i \rangle = 0$  y, por tanto,  $\dot{I}_i = 0$ . Esto demuestra la invariancia adiabática de las  $I_i$ .

Con esto concluimos las propiedades generales del movimiento casi periódico en sistemas finitos de  $s$  grados de libertad.

## Problema

Calcular las variables acción para un movimiento elíptico en un campo  $U = -\alpha/r$ .

Solución. En coordenadas polares  $(r, \varphi)$  en el plano del movimiento se tiene

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = M \quad (50.16)$$

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}} dr = -M + \alpha \sqrt{\frac{m}{2E}} \quad (50.17)$$

De donde resulta que la energía expresada en función de las variables acción es

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2} \quad (50.18)$$

Depende solamente de la suma  $I = I_r + I_\varphi$ , lo que significa que el movimiento es degenerado: las dos frecuencias fundamentales (respecto a  $r$  y  $\varphi$ ) coinciden.

Los parámetros  $\rho$  y  $e$  de la órbita (véase (15.4)) se expresan en función de  $I_r$  e  $I_\varphi$  por

$$\rho = \frac{I_\varphi^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \frac{I_\varphi}{I_r + I_\varphi} \quad (50.19)$$

Como consecuencia de la invariancia adiabática de  $I_r$  e  $I_\varphi$ , la excentricidad de la órbita permanece constante cuando  $\alpha$  o  $m$  varían lentamente, y sus dimensiones varían en proporción inversa a  $m$  y  $\alpha$ .

## Problemas generales

1. Demuestre la identidad de Jacobi (42.14).
2. Use la identidad de Jacobi y otras propiedades de los corchetes de Poisson para probar que si  $p_y$  y  $l_z$  son constantes, también lo es  $p_x$ ; y que si  $l_x$  y  $l_y$  son constantes, también lo es  $l_z$ .
3. Deduzca la fórmula

$$\{f, l_i\} = \hat{u}_i \times f,$$

donde  $l_i$  (para  $i = x, y, z$ ) son las componentes del momento angular y  $f$  una variable dinámica vectorial.

4. Para un vector constante  $\mathbf{b}$  y las componentes  $r_i, p_i, l_i$  de posición, momento y momento angular, calcule

$$\{\mathbf{l}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\}, \quad \{\mathbf{p}, r^n\}, \quad \{\mathbf{p}, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2\}.$$

5. Considere el vector de Laplace–Runge–Lenz

$$\mathbf{A} = \mathbf{l} \times \mathbf{v} + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r},$$

constante de movimiento del problema de Kepler. Resuelva el problema 10.26 de Serbo–Kotkin relativo a este vector.

6. Considere una partícula con coordenadas  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  en un sistema de referencia espacial. Halle la ecuación de Hamilton–Jacobi en un sistema de coordenadas rotante alrededor del eje  $z$ .
7. Halle y resuelva la ecuación de Hamilton–Jacobi para un oscilador armónico tridimensional con frecuencias  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  diferentes.
8. Halle y resuelva la ecuación de Hamilton–Jacobi para un oscilador armónico tridimensional en coordenadas esféricas. Exprese la solución  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  y los momentos conjugados usando variables acción–ángulo.
9. Calcule la acción como función de las coordenadas para una partícula libre en tres dimensiones. Compruebe que coincide con la función generatriz de la transformación canónica de evolución temporal y escriba dicha transformación.
10. Calcule la acción para una partícula en caída libre como función de las coordenadas. Compruebe que coincide con el generador de la transformación canónica de evolución temporal e implemente dicha transformación.
11. Considere el movimiento de “tiro parabólico” desde el suelo y desde un ascensor que se mueve hacia arriba con aceleración  $g$ . Realice la transformación de coordenadas entre ambos sistemas y halle los hamiltonianos correspondientes.
12. Considere un sistema de fuerzas centrales de su elección. Resuelva la ecuación de Hamilton–Jacobi y halle la transformación canónica generada.
13. Realice los detalles del problema 2 de la sección 40.
14. Realice los detalles del problema de la sección 50.
15. ¿A qué velocidad debe moverse un observador hacia una estrella para que la mitad de la luz emitida esté concentrada en un cono de ángulo  $0,01$  rad? Puede aproximarse  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ .
16. Considere el lagrangiano

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v},$$

con  $\mathbf{a}$  constante. Halle el hamiltoniano y la ecuación de Hamilton–Jacobi.

17. La ecuación de Schrödinger para una partícula libre en una dimensión es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi.$$

Se acostumbra escribir  $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ . Como cualquier función compleja,  $\psi$  se puede escribir

$$\psi(x) = \exp(i \Sigma(x)/\hbar),$$

donde  $\Sigma$  es real. Suponiendo que el problema admite considerar que  $\hbar$  es “pequeña”, expanda  $\Sigma$  en potencias de  $\hbar$ :

$$\Sigma = \Sigma_0 + \frac{\hbar}{i} \Sigma_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \Sigma_2 + \dots.$$

Muestre que el término de orden cero,  $\Sigma_0$ , satisface la ecuación de Hamilton–Jacobi. Resuelva dicha ecuación y obtenga la función de onda  $\psi$  en esta aproximación, comprobando que describe una “onda plana”.

18. Considere un sistema formado por  $N$  partículas, de masas  $m_i$ , cuyas posiciones y velocidades son  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{v}_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Defina un conjunto  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_{3N}\}$  de  $3N$  coordenadas generalizadas por

$$q_1 = x_1 \sqrt{m_1}, \quad q_2 = y_1 \sqrt{m_1}, \quad q_3 = z_1 \sqrt{m_1}, \quad q_4 = x_2 \sqrt{m_2}, \dots, \quad q_{3N} = z_N \sqrt{m_N}.$$

Defina la distancia infinitesimal en el espacio de configuración  $3N$ -dimensional como

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3N} dq_i^2.$$

Demuestre que la acción de Hamilton (ecuación 44.4) está dada por

$$S_0 = \int \sqrt{2T} ds,$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema de partículas.

19. Escriba la acción del campo electromagnético

$$S_F = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega,$$

y, de  $\delta S_F = 0$ , deduzca el segundo par de ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes.

20. Considere una esfera de acero que rebota elásticamente entre dos paredes verticales paralelas sin fricción. Evalúe numéricamente la variable de acción y exprese el resultado en unidades de  $\hbar$ , dado  $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$  J s. Discuta la extensión a un régimen no clásico.
21. Considere una esfera de acero que salta sobre una placa horizontal sin fricción. Evalúe numéricamente la variable de acción y exprese el resultado en unidades de  $\hbar$ . Discuta la adaptación no clásica.

22. Demuestre

$$\{\mathbf{p}, l^2\} = 2\mathbf{l} \times \mathbf{p},$$

donde

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$$

es la magnitud al cuadrado del momento angular de una partícula,  $\mathbf{p}$  es el momento y  $\{\cdot, \cdot\}$  denota el corchete de Poisson.

23. Considere el conjunto de todas las transformaciones canónicas. Suponga que están definidas mediante funciones generatrices del tipo  $F$ . Es decir,

$$F_1(q, Q, t) \text{ define la TC } (q, p) \rightarrow (Q, P), \quad F_2(Q, \bar{Q}, t) \text{ define la TC } (Q, P) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P}),$$

$$F_3(\bar{Q}, \bar{\bar{Q}}, t) \text{ define la TC } (\bar{Q}, \bar{P}) \rightarrow (\bar{\bar{Q}}, \bar{\bar{P}}), \dots$$

Demuestre que ese conjunto tiene las propiedades de un grupo:

- (a) Ley de composición interna: la realización sucesiva de dos TC equivale a una TC.
- (b) Existe la TC identidad (encuéntrela).
- (c) Cada TC tiene una TC inversa (encuéntrela).
- (d) Se cumple la propiedad asociativa.

24. Calcule la acción para una partícula en caída libre como función de las coordenadas. Compruebe que coincide con el generador de la transformación canónica de evolución temporal e implemente dicha transformación.

## 5. Teoría Clásica de Campos

### 5.1. Ejercicio 1: Campo Escalar

Estudie el campo escalar  $\phi(x)$  a partir del lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi).$$

Derive las ecuaciones de movimiento correspondientes usando el formalismo de Euler-Lagrange.

### 5.2. Ejercicio 2: Campo Electromagnético

Exponga las ecuaciones de Maxwell en el contexto del campo electromagnético y su representación en términos del tensor electromagnético.