

## Formulas relevantes

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ Deformacion}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ Eq equilibrio, tensor de esfuerzo}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left( u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ij} \right) = \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} \text{ Ley de Hooke}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\sigma)\sigma_{ij} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ij}] \text{ Ley de Hooke reciproca}$$

$$\text{Modulo de young } E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$\text{Coeficiente de Poisson } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\text{Modulo de compresibilidad } K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

## Sección 7: Deformaciones en Sólidos

### Problema 1: Deformación de una Varilla Vertical

**Enunciado.** Determinar la deformación de una larga varilla (longitud  $l$ ) vertical y en reposo en un campo gravitatorio

*Solución.* Tomamos el eje  $z$  en la dirección de la varilla, y el plano  $x, y$  coincidente con el plano de su extremo inferior. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

En la superficie lateral de la varilla, todas las componentes de  $\sigma_{ik}$  deben anularse, excepto  $\sigma_{zz}$ . En el extremo superior ( $z = l$ ),  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ . La solución que satisface estas condiciones es  $\sigma_{zz} = -\rho g(l - z)$ , con las demás  $\sigma_{ik}$  nulas.

Para  $u_{ik}$ , obtenemos:

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E} \rho g(l - z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g(l - z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0.$$

Integrando, las componentes del vector de desplazamiento son:

$$u_x = \frac{\sigma}{E} \rho g(l - z)x, \quad u_y = \frac{\sigma}{E} \rho g(l - z)y, \quad u_z = -\frac{\rho g}{2E} \{l^2 - (l - z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}.$$

La solución para  $u_z$  satisface  $u_z = 0$  solo en un punto del extremo inferior de la varilla, por lo que no es válida cerca de este extremo.

### Problema 2: Deformación de una Esfera Hueca

**Enunciado.** Hallar la deformación de una esfera hueca (de radios externo e interno  $R_2$  y  $R_1$ , respectivamente), sometida a una presión interna  $p_1$  y a una presión externa  $p_2$ .

*Nota:* Ecuación 7.5

$$2(1 - \sigma)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - (1 - 2\sigma)\nabla \times \nabla \times \vec{u} = 0$$

Formulas 1.7

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \cot(\theta) + \frac{u_r}{r} \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot(\theta) \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ 2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \end{aligned}$$

*Solución.* Usamos coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera. El desplazamiento  $\vec{u}$  es radial y función de  $r$  solamente. Así,  $\nabla \times \vec{u} = 0$  y (eq 7.5)  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ . Resulta:

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const} \equiv 3a,$$

donde  $u = ar + \frac{b}{r^2}$ . Las componentes del tensor de deformación son (Véase formulas 1.7)  $u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}$ ,  $u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}$ . La tensión radial es:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \{ (1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta} \} = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Las constantes  $a$  y  $b$  se determinan por las condiciones de contorno:  $\sigma_{rr} = -p_1$  para  $r = R_1$  y  $\sigma_{rr} = -p_2$  para  $r = R_2$ :

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Para una capa esférica con  $p = p_1$  y  $p_2 = 0$ :

$$\sigma_{rr} = \frac{p R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( 1 - \frac{R_2^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( 1 + \frac{R_1^3}{r^3} \right).$$

Para una cáscara esférica delgada, de espesor  $h = R_2 - R_1 \ll R$  obtenemos aproximadamente:

$$u = \frac{p R^2 (1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{p}{2}.$$

Donde  $\bar{\sigma}_{rr}$  es el valor medio de la tensión radial promediada en el espesor de la cáscara. Obtenemos la distribución de tensiones en un medio elástico infinito con cavidad hueca (de radio  $R$ ) sometido a compresión hidrostática, simplemente poniendo en las ecuaciones anteriores  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = p$ :

$$\sigma_{rr} = -p \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

La tensión tangencial en la superficie es  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -3p/2$ .

### Problema 3: Deformación de una Esfera Maciza

**Enunciado.** Determinar la deformación de una esfera maciza (de radio  $R$ ) bajo la acción de su propio campo gravitatorio.

*Nota:* Ecuación 7.3:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \nabla \times \nabla \times \vec{u} = -\rho \vec{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}$$

*Solución.* La fuerza gravitatoria que actúa sobre la unidad de masa en un cuerpo esférico es  $-\frac{g\vec{r}}{R}$ . Sustituyendo esta expresión en lugar de  $\vec{g}$  en la ecuación (7.3), obtenemos:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

La solución para  $r = 0$  y  $\sigma_{rr} = 0$  en  $r = R$  es:

$$u = -\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left( \frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

La materia está comprimida ( $u_{rr} < 0$ ) dentro de  $R\sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$  y dilatada fuera ( $u_{rr} > 0$ ). La presión en el centro es  $\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} g\rho R$ .

## Problema 4: Deformación de un Tubo Cilíndrico

**Enunciado.** Hallar la deformación de un tubo cilíndrico de radios externo e interno  $R_2$  y  $R_1$ , respectivamente, sometido únicamente a una presión interna  $p$  (se supone que se mantiene constante la longitud del cilindro, de manera que no hay deformación longitudinal).

*Nota:* Formulas 1.8:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

*Solución.* Usamos coordenadas cilíndricas con el eje  $z$  a lo largo del tubo. La presión uniforme causa un desplazamiento radial puro  $u_r = u(r)$ . Análogamente al problema 2:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = \operatorname{const} \equiv 2a.$$

Por lo tanto,  $u = ar + \frac{b}{r}$ . Las componentes no nulas del tensor de deformaciones son  $u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}$ ,  $u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}$ . De las condiciones  $\sigma_{rr} = 0$  en  $r = R_2$  y  $\sigma_{rr} = -p$  en  $r = R_1$ :

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1+\sigma}{E}.$$

La distribución de tensiones en el espesor de las paredes del tubo esta dada por:

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

## Problema 5: Deformación de un Cilindro Giratorio

**Enunciado.** Determinar la deformación de un cilindro que gira uniformemente alrededor de su eje.

*Solución.* Reemplazamos la fuerza gravitatoria en (7.3) por la centrífuga  $\rho\Omega^2 r$ . La ecuación para  $u_r = u(r)$  es:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) = -\rho\Omega^2 r.$$

La solución para  $r = 0$  y  $\sigma_{rr} = 0$  en  $r = R$  es:

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r[(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

## Sección 16: Rigidez a la Torsión

### Problema 1: Barra de Sección Circular

**Enunciado.** Determinar la rigidez a la torsión de una barra de sección circular (de radio  $R$ ).

*Nota:*

De pag 97: Conviene notar también una analogía hidrodinámica: una ecuación de la forma  $\nabla\chi = -1$  (16.11), determina la distribución de velocidades  $v(x, y)$  de un líquido viscoso en la sección de un tubo: la condición de contorno  $\chi = 0$  (16.12), corresponde a la condición  $v = 0$  en las paredes inmóviles del tubo.

Ecuación 16.10:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2 \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2 \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

Ecuación 16.4:

$$u_z = \tau\psi(x, y)$$

*Solución.* Las soluciones de los problemas 1-4 coinciden formalmente con las soluciones de los problemas del movimiento de un líquido viscoso en un tubo de sección correspondiente (nota de pag 97) a

la cantidad de líquido  $Q$  que pasa a través de una sección del tubo correspondiente aquí la cantidad  $C$ . Para una barra de sección circular, tenemos:

$$\chi = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2).$$

La rigidez a la torsión es:

$$C = \frac{\mu\pi R^4}{2}.$$

Para la función  $\psi$ , (de 16.10) se deduce  $\psi = \text{const.}$  La constante (según 16.4)  $\psi$  corresponde a un desplazamiento de toda la barra a lo largo del eje  $z$ , por lo que se puede considerar  $\psi = 0$ . Así, las secciones transversales permanecen planas.

## Problema 2: Barra de Sección Elíptica

**Enunciado.** Lo mismo para una barra de sección elíptica (de semiejes  $a$  y  $b$ ).

*Solución.* La rigidez a la torsión es:

$$C = \pi\mu \frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}.$$

La distribución de desplazamientos longitudinales está dada por la función de torsión:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}xy.$$

Los ejes de coordenadas están dirigidos según los ejes de la elipse.

## Problema 3: Barra de Sección Triangular

**Enunciado.** Lo mismo para una barra cuya sección es un triángulo equilátero (de lado  $a$ ).

*Solución.* Rigidez a la torsión:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80}\mu a^4.$$

Función de torsión:

$$\psi = \frac{y(x\sqrt{3} + y)(x\sqrt{3} - y)}{6a}.$$

El origen de coordenadas se elige en el centro del triángulo, y el eje  $x$  coincide con una de sus alturas.

## Problema 4: Barra con Forma de Placa Delgada

**Enunciado.** Ídem para una barra que tiene la forma de una larga placa delgada (de ancho  $d$  y grueso  $h \ll d$ ).

*Solución.* El problema es equivalente al flujo de un líquido viscoso entre paredes planas y paralelas. El resultado es:

$$C = \frac{\mu d h^3}{3}.$$

## Problema 5: Tubo Cilíndrico

**Enunciado.** Lo mismo para un tubo cilíndrico (de radios interno y externo  $R_1$  y  $R_2$ ).

*Nota:* Ecuación 16.13:

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} dl = -S$$

Ecuación 16.17:

$$C = 4\mu \sum_k \chi_k S_k + 4\mu \int \chi dx dy$$

*Solución.* La función (en coordenadas polares):

$$\chi = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)$$

satisface la condición (16.13) en ambos límites de la sección anular del tubo. De la fórmula (16.17) se sigue:

$$C = \mu\pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}.$$

## Problema 6: Tubo de Paredes Delgadas

**Enunciado.** Ídem para un tubo de paredes delgada y sección arbitraria.

*Solución.* Dado que la pared del tubo es delgada, se puede considerar que en ella la función  $\chi$  varía linealmente desde cero, sobre una cara, hasta  $\chi_1$ , sobre la otra ( $y$  es la coordenada a lo largo del espesor del la pared):

$$\chi = \chi_1 \frac{y}{h}.$$

La condición (16.13) da  $\frac{\chi_1 L}{h} = S$ , donde  $L$  es la longitud del perímetro de la sección del tubo, y  $S$  el área que encierra. En la expresión (16.17) el segundo término es pequeño comparado con el primero, y obtenemos:

$$C = \frac{4hS^2\mu}{L}.$$

Si se corta el tubo a lo largo de una de sus generatrices, la rigidez a la torsión disminuye a (de acuerdo con el resultado del problema 4):

$$C = \frac{\mu L h^3}{3}.$$

## Sección 19: Problemas de Flexión

### Problema 1: Reducción a Cuadraturas

**Enunciado.** Reducir a cuadraturas el problema de la determinación de la forma de una barra de sección circular (varilla elástica), fuertemente combada en un plano por fuerzas concentradas.

*Nota:* Ecuación 19.10:

$$EI \frac{d\vec{r}}{dl} \times \frac{d^3\vec{r}}{dl^3} = \vec{F} \times \frac{d\vec{r}}{dl}$$

*Solución.* Consideremos una porción de la barra comprendida entre puntos de aplicación de las fuerzas; en tal región es  $F = \text{const.}$  Elijamos el plano de la flexión como plano  $x, y$ , con el eje  $y$  paralelo a la fuerza  $F$  e introduzcamos el ángulo  $\theta$  entre la tangente a la línea de la barra y el eje  $y$ . Entonces:

$$\frac{dx}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{dy}{dl} = \cos \theta,$$

donde  $x, y$  son las coordenadas de los puntos de la barra. Desarrollando los productos vectoriales en (19.10), obtenemos una ecuación para  $\theta$ , considerando como función de la longitud de arco  $l$ :

$$IE \frac{d^2\theta}{dl^2} - F \sin \theta = 0.$$

La primera integración da:

$$\frac{IE}{2} \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 + F \cos \theta = c_1,$$

y de aquí:

$$l = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + c_2 \rightarrow (1)$$

La función  $\theta(l)$  puede expresarse mediante funciones elípticas. Para las coordenadas:

$$x = \int \sin \theta \, dl, \quad y = \int \cos \theta \, dl,$$

obtenemos:

$$x = \pm \frac{1}{F} \sqrt{2IE} \sqrt{c_1 - F \cos \theta} + \text{const.}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + \text{const}'. \rightarrow (2)$$

El momento  $M$  está dirigido según el eje  $z$  y su módulo vale  $M = IE \frac{d\theta}{dl}$ .

## Problema 2: Barra Fuertemente Encorvada

**Enunciado.** Hallar la forma de una barra fuertemente encorvada, uno de cuyos extremos está empotrado, y en el otro, que es libre, se aplica una fuerza  $\vec{f}$ : la dirección de  $\vec{f}$  es perpendicular a la recta de la barra no deformada (fig. 15).

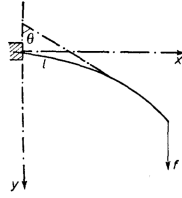


Figure 1: fig 15

*Solución.* En toda longitud de la barra es  $\vec{F} = \text{const} = \vec{f}$ . En el extremo empotrado ( $l = 0$ ) se tiene  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , y en el libre ( $l = L$ , donde  $L$  es la longitud de la barra),  $M = 0$ , esto es,  $\theta' = 0$ . Introduciendo la notación  $\theta_0 = \theta(L)$ , tenemos en (1)  $c_1 = f \cos(\theta_0)$ :

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

De aquí se deduce la ecuación que determina  $\theta_0$ :

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

La forma de la barra se halla mediante las fórmulas:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left( \sqrt{\cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta} \right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

## Problema 3: Fuerza Aplicada en el Extremo Libre

**Enunciado.** Ídem, si la fuerza  $\vec{f}$ , aplicada en el extremo libre, está dirigida paralelamente a la línea de la barra no deformada.

*Solución.* Tenemos  $\vec{F} = -\vec{f}$ . Condiciones de contorno:  $\theta = 0$  en  $l = 0$ ,  $\theta' = 0$  en  $l = L$ . Tenemos:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

donde  $\theta_0 = \theta(L)$  se determina por:

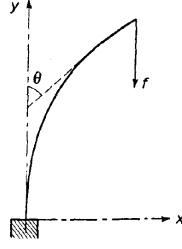


Figure 2: fig. 16

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Para  $x$  e  $y$  obtenemos:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left( \sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

En una flexión pequeña,  $\theta_0 \ll 1$  y se puede escribir:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{f}}.$$

Esto es,  $\theta_0$  desaparece de esta relación. Indicando que la solución existe solo cuando  $f \geq \frac{\pi^2 IE}{4L^2}$ .

#### Problema 4: Barra con Ambos Extremos Apoyados

**Enunciado.** Ídem, si ambos extremos de la barra están apoyados y en su punto medio se aplica una fuerza  $\vec{f}$ : la distancia entre los puntos de apoyo es  $L_0$ .

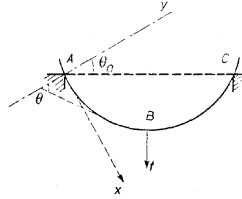


Figure 3: fig. 17

*Solución.* La fuerza  $\vec{F}$  es constante en cada una de las porciones  $AB$  y  $BC$ , y en cada una de ellas es perpendicular a la línea de la barra en los puntos de apoyo  $A$  y  $C$ , respectivamente. La diferencia entre los valores de  $\vec{F}$  en  $AB$  y  $BC$  es igual a  $\vec{f}$ , de donde se deduce que en  $AB$  es  $F \sin \theta_0 = -\frac{f}{2}$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo entre el eje  $y$  y la línea  $AC$ . En el punto  $A$  ( $l = 0$ ) tenemos  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $M = 0$ , es decir,  $\theta' = 0$ , de modo que en  $AB$ :

$$l = \sqrt{\frac{IE}{f}} \sqrt{\sin \theta_0} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \quad x = 2 \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \sqrt{\cos \theta},$$

$$y = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta.$$

El ángulo  $\theta_0$  se determina mediante la condición que expresa que la proyección del arco  $AB$  sobre la recta  $AC$  debe ser igual a  $\frac{L_0}{2}$ , de donde:

$$\frac{L_0}{2} = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

Para determinado valor de  $\theta_0$ , entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$  la derivada  $\frac{df}{d\theta_0}$  se anula y pasa a ser positiva, indicando que la solución se hace inestable.

## Sección 20: Formas de Barras

### Problema 1: Barra Combadura por su Propio Peso

**Enunciado.** Hallar la forma de una barra (de longitud  $l$ ), combada por la acción de su propio peso, para diferentes maneras de fijar sus extremos.

*Solución.* La forma buscada se obtiene como solución de la ecuación  $\zeta'''' = \frac{q}{EI}$  ( $q$  es el peso de la barra por unidad de longitud) con condiciones de contorno en sus extremos. Para distintos apoyos de los extremos de la barra se obtienen las formas de flexión y los desplazamientos máximos (el origen de coordenadas coincide siempre con uno de los extremos de la barra):

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2(z-l)^2, \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z(z^3 - 2lz^2 + l^3), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

c) Un extremo ( $z = l$ ) empotrado, y el otro ( $z = 0$ ) apoyado:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z(2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta(0.42l) = 0.0054 \frac{ql^4}{EI}.$$

d) Un extremo ( $z = 0$ ) empotrado, y el otro ( $z = l$ ) libre:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2(z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta(l) = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

### Problema 2: Barra Encorvada por una Fuerza Concentrada

**Enunciado.** Determinar la forma de una barra encorvada por la acción de una fuerza concentrada  $f$ , aplicada en su punto medio.

*Solución.* En todas partes, menos en el punto  $z = l/2$ , tenemos la ecuación  $\zeta'''' = 0$ . Las condiciones de contorno en los extremos de la barra determinan el modo de fijación. En el punto  $z = l/2$  deben ser continuas  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ , pero la diferencia de las fuerzas de corte  $F = -EI\zeta'''$  a uno y otro lado debe ser igual a la fuerza  $f$ . La forma de la barra (en la porción  $0 \ll z \ll \frac{l}{2}$ ) y la flecha de la línea elástica vienen dadas por las siguientes fórmulas:

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z^2(3l - 4z), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{192EI}.$$

b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z(3l^2 - 4z^2), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

La forma de la barra es simétrica respecto a su punto medio, de modo que la función  $\zeta(z)$  en la porción  $\frac{l}{2} \ll z \ll l$  se obtiene cambiando simplemente  $z$  por  $l - z$  en estas expresiones.



### Problema 3: Barra con un Extremo Empotrado y el Otro Libre

**Enunciado.** Ídem, para una barra con uno de sus extremos ( $z = 0$ ) empotrado y el otro ( $z = l$ ) libre: en este último esta aplicada una fuerza concentrada  $f$ .

*Solución.* A lo largo de toda la barra es  $F = \text{const} = f$ , de modo que  $\zeta''' = -\frac{f}{EI}$ . Con las condiciones  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  para  $z = 0$  y  $\zeta'' = 0$  para  $z = l$  obtenemos:

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2(3l - z), \quad \zeta(l) = \frac{fl^3}{3EI}.$$

### Problema 4: Barra con Extremos Fijos y Par de Fuerzas

**Enunciado.** Hallar la forma de una barra con extremos fijos, combada por la acción de un par de fuerzas concentrado aplicado en su punto medio.

*Solución.* A lo largo de toda la barra es  $\zeta'''' = 0$ , pero en el punto  $z = l/2$  el momento  $M = EI\zeta''$  experimenta un salto igual al momento  $m$  del par concentrado, aplicado en él. Con condiciones apropiadas en los extremos:

a) Ambos extremos empotrados:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{m}{24EI} z^2(l + 2z) \quad \text{cuando } 0 \leq z \leq l/2, \\ \zeta &= -\frac{m}{24EI} (l - z)^2[l + 2(l - z)] \quad \text{cuando } l/2 \leq z \leq l. \end{aligned}$$

b) Ambos extremos articulados:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{m}{24EI} z(l^2 - 4z^2) \quad \text{cuando } 0 \leq z \leq l/2, \\ \zeta &= -\frac{m}{24EI} (l - z)[l^2 - 4(l - z)^2] \quad \text{cuando } l/2 \leq z \leq l. \end{aligned}$$

La barra se flexiona en sentidos opuestos a uno y a otro lado en el punto  $x = l/2$ .

### Problema 5: Par Concentrado en el Extremo Libre

**Enunciado.** Ídem, si el par concentrado está aplicado en el extremo libre de una barra, cuyo otro extremo se encuentra empotrado.

*Solución.* A lo largo de toda la barra tenemos  $M = EI\zeta'' = m$ , y en el punto  $z = 0$  es  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$ . La forma de la flexión viene dada por la fórmula:

$$\zeta = \frac{m}{2EI} z^2.$$