Sección 7: Deformaciones en Sólidos

Problema 1: Deformación de una Varilla Vertical

Enunciado. Determinar la deformación de una larga varilla (longitud l) vertical y en reposo en un campo gravitatorio

Solución. Tomamos el eje z en la dirección de la varilla, y el plano x, y coincidente con el plano de su extremo inferior. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

En la superficie lateral de la varilla, todas las componentes de σ_{ik} deben anularse, excepto σ_{zz}. En el extremo superior ($z = l$), $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. La solución que satisface estas condiciones es $\sigma_{zz} = -\rho g(l - z)$, con las demás σ_{ik} nulas.

Para u_{ik}, obtenemos:

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E}\rho g(l - z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g(l - z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0.$$

Integrando, las componentes del vector de desplazamiento son:

$$u_x = \frac{\sigma}{E}\rho g(l - z)x, \quad u_y = \frac{\sigma}{E}\rho g(l - z)y, \quad u_z = -\frac{\rho g}{2E}\{l^2 - (l - z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}.$$

La solución para u_z satisface $u_z = 0$ solo en un punto del extremo inferior de la varilla, por lo que no es válida cerca de este extremo.

Problema 2: Deformación de una Esfera Hueca

Enunciado. Hallar la deformación de una esfera hueca (de radios externo e interno R_2 y R_1, respectivamente), sometida a una presión interna p_1 y a una presión externa p_2.

Nota: Equación 7.5

$$2(1 - \sigma)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - (1 - 2\sigma)\nabla \times \nabla \times \vec{u} = 0$$

Formulas 1.7

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\cot(\theta) + \frac{u_r}{r}$$

$$2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot(\theta)\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$2u_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}$$

Solución. Usamos coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera. El desplazamiento $\vec{u}$ es radial y función de r solamente. Así, $\nabla \times \vec{u} = 0$ y (eq 7.5)$\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Resulta:

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const} \equiv 3a,$$

donde $u = ar + \frac{b}{r^2}$. Las componentes del tensor de deformación son (Véase formulas 1.7) $u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}$, $u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}$. La tensión radial es:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}\{(1 - \sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}\} = \frac{E}{1 - 2\sigma}a - \frac{2E}{1 + \sigma}\frac{b}{r^3}.$$

Las constantes a y b se determinan por las condiciones de contorno: $\sigma_{rr} = -p_1$ para $r = R_1$ y $\sigma_{rr} = -p_2$ para $r = R_2$:

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1 + \sigma}{2E}.$$

Para una capa esférica con $p = p_1$ y $p_2 = 0$:

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 + \frac{R_1^3}{r^3}\right).$$

Para una cáscara esférica delgada, de espesor $h = R_2 - R_1 \lll R$ obtenemos aproximadamente:

$$u = \frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{p}{2}.$$

Donde $\bar{\sigma_{rr}}$ es el valor medio de la tensión radial promediada en el espesor de la cascara. Obtenemos la distribucion de tensiones en un medio elástico infinito con cavidad hueca (de radio R) sometido a compresión hidrostática, simplemente poniendo en las ecuaciones anteriores $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $p_1 = 0$ y $p_2 = p$:

$$\sigma_{rr} = -p\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).$$

La tensión tangencial en la superficie es $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -3p/2$.

Problema 3: Deformación de una Esfera Maciza

Enunciado. Determinar la deformación de una esfera maciza (de radio R) bajo la acción de su propio campo gravitatorio.

Nota: Equación 7.3:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\nabla \times \nabla \times \vec{u} = -\rho\vec{g}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}$$

Solución. La fuerza gravitatoria que actua sobre la unidad de masa en un cuerpo esférico es $-\frac{g\vec{r}}{R}$. Sustituyendo esta expresion en lugar de g en la ecuación (7.3), obtenemos:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr}\right) = \rho g\frac{r}{R}.$$

La solución para $r = 0$ y $\sigma_{rr} = 0$ en $r = R$ es:

$$u = -\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)}r\left(\frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

La materia está comprimida ($u_{rr} < 0$) dentro de $R\sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$ y dilatada fuera ($u_{rr} > 0$). La presión en el centro es $\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)}g\rho R$.

Problema 4: Deformación de un Tubo Cilíndrico

Enunciado. Hallar la deformación de un tubo cilíndrico de radios externo e interno R_2 y R_1, respectivamente, sometido unicamente a una presión interna p (se supone que se mantiene constante la longitud del cilindro, de manera que no hay deformación longitudinal).

Nota: Formulas 1.8:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Solución. Usamos coordenadas cilíndricas con el eje z a lo largo del tubo. La presión uniforme causa un desplazamiento radial puro $u_r = u(r)$. Análogamente al problema 2:

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr} = \text{const} \equiv 2a.$$

Por lo tanto, $u = ar + \frac{b}{r}$. Las componentes no nulas del tensor de deformaciones son $u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}$, $u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}$. De las condiciones $\sigma_{rr} = 0$ en $r = R_2$ y $\sigma_{rr} = -p$ en $r = R_1$:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1+\sigma}{E}.$$

La distribución de tensiones en el espesor de las paredes del tubo esta dada por:

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Problema 5: Deformación de un Cilindro Giratorio

Enunciado. Determinar la deformación de un cilindro que gira uniformemente alrededor de su eje.

Solución. Reemplazamos la fuerza gravitatoria en (7.3) por la centrífuga $\rho\Omega^2 r$. La ecuación para $u_r = u(r)$ es:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}\right) = -\rho\Omega^2 r.$$

La solución para $r = 0$ y $\sigma_{rr} = 0$ en $r = R$ es:

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r[(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

Sección 16: Rigidez a la Torsión

Problema 1: Barra de Sección Circular

Solución. Las soluciones de los problemas 1-4 coinciden formalmente con las soluciones de los problemas del movimiento de un líquido viscoso en un tubo de sección correspondiente. Para una barra de sección circular, tenemos:

$$\chi = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2).$$

La rigidez a la torsión es:

$$C = \frac{\mu\pi R^4}{2}.$$

Para la función ψ, se deduce $\psi = \text{const}$. La constante ψ corresponde a un desplazamiento de toda la barra a lo largo del eje z, por lo que se puede considerar $\psi = 0$. Así, las secciones transversales permanecen planas.

Problema 2: Barra de Sección Elíptica

Solución. La rigidez a la torsión es:

$$C = \pi\mu \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

La distribución de desplazamientos longitudinales está dada por la función de torsión:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy.$$

Problema 3: Barra de Sección Triangular

Solución. Rigidez a la torsión:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80}\mu a^4.$$

Función de torsión:

$$\psi = y(x\sqrt{3} + y)(x\sqrt{3} - y)/6a.$$

El origen de coordenadas se elige en el centro del triángulo, y el eje x coincide con una de sus alturas.

Problema 4: Barra con Forma de Placa Delgada

Solución. El problema es equivalente al flujo de un líquido viscoso entre paredes planas y paralelas. El resultado es:

$$C = \frac{\mu d h^3}{3}.$$

Problema 5: Tubo Cilíndrico

Solución. La función:

$$\chi = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)$$

satisface la condición (16.13) en ambos límites de la sección anular del tubo. De la fórmula (16.17) se sigue:

$$C = \mu\pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}.$$

Problema 6: Tubo de Paredes Delgadas

Solución. Dado que la pared del tubo es delgada, se puede considerar que en ella la función χ varía linealmente desde cero hasta χ_1:

$$\chi = \chi_1 \frac{y}{h}.$$

La condición (16.13) da $\frac{\chi_1 L}{h} = S$, donde L es la longitud del perímetro de la sección del tubo, y S el área que encierra. Obtenemos:

$$C = \frac{4hS^2\mu}{L}.$$

Si se corta el tubo a lo largo de una de sus generatrices, la rigidez a la torsión disminuye a:

$$C = \frac{\mu L h^3}{3}.$$

Sección 19: Problemas de Flexión

Problema 1: Reducción a Cuadraturas

Solución. Consideremos una porción de la barra comprendida entre puntos de aplicación de las fuerzas; en tal región es $F = \text{const}$. Elijamos el plano de la flexión como plano x, y, con el eje y paralelo a la fuerza F e introduzcamos el ángulo θ entre la tangente a la línea de la barra y el eje y. Entonces:

$$\frac{dx}{dl} = \sin\theta, \quad \frac{dy}{dl} = \cos\theta,$$

donde x, y son las coordenadas de los puntos de la barra. Desarrollando los productos vectoriales, obtenemos:

$$IE\frac{d^2\theta}{dl^2} - F\sin\theta = 0.$$

La primera integración da:

$$\frac{IE}{2}\left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2 + F\cos\theta = c_1,$$

y de aquí:

$$l = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + c_2$$

La función $\theta(l)$ puede expresarse mediante funciones elípticas. Para las coordenadas:

$$x = \int \sin\theta \, dl, \quad y = \int \cos\theta \, dl,$$

obtenemos:

$$x = \pm \frac{1}{F}\sqrt{2IE}\sqrt{c_1 - F\cos\theta} + \text{const.}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + \text{const.}$$

El momento M está dirigido según el eje z y su módulo vale $M = IE\frac{d\theta}{dl}$.

Problema 2: Barra Fuertemente Encorvada

Solución. En toda longitud de la barra es $F = \text{const} = f$. En el extremo empotrado ($l = 0$) se tiene $\theta = \frac{\pi}{2}$, y en el libre ($l = L$, donde L es la longitud de la barra), $M = 0$, esto es, $\theta' = 0$. Introduciendo la notación $\theta_0 = \theta(L)$, tenemos:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

De aquí se deduce la ecuación que determina θ_0:

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

La forma de la barra se halla mediante las fórmulas:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left(\sqrt{\cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}\right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

Problema 3: Fuerza Aplicada en el Extremo Libre

Solución. Tenemos $F = -f$. Condiciones de contorno: $\theta = 0$ en $l = 0$, $\theta' = 0$ en $l = L$. Tenemos:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

donde $\theta_0 = \theta(L)$ se determina por:

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Para x e y obtenemos:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left(\sqrt{1 - \cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}\right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

En una flexión pequeña, $\theta_0 \ll 1$ y se puede escribir:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{IE}{f}}.$$

Esto indica que la solución existe solo cuando $f \geq \frac{\pi^2 IE}{4L^2}$.

Problema 4: Barra con Ambos Extremos Apoyados

Solución. La fuerza F es constante en cada una de las porciones AB y BC. La diferencia entre los valores de F en AB y BC es igual a f, de donde se deduce que en AB es $F \sin\theta_0 = -\frac{f}{2}$, donde θ_0 es el ángulo entre el eje y y la línea AC. En el punto A ($l = 0$) tenemos $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $M = 0$, es decir, $\theta' = 0$, de modo que en AB:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{f}}\sqrt{\sin\theta_0}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}},$$

$$x = 2\sqrt{\frac{IE\sin\theta_0}{f}}\sqrt{\cos\theta},$$

$$y = \sqrt{\frac{IE\sin\theta_0}{f}}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}.$$

El ángulo θ_0 se determina mediante la condición:

$$\frac{L_0}{2} = \sqrt{\frac{IE\sin\theta_0}{f}}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{\sin\theta}}\, d\theta.$$

Para determinado valor de θ_0, la derivada $\frac{df}{d\theta_0}$ se anula y pasa a ser positiva, indicando que la solución se hace inestable.

Sección 20: Formas de Barras

Problema 1: Barra Combadura por su Propio Peso

Solución. La forma buscada se obtiene como solución de la ecuación $\zeta'''' = \frac{q}{EI}$ con condiciones de contorno en sus extremos. Para distintos apoyos de los extremos de la barra se obtienen las formas de flexión y los desplazamientos máximos:

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = -\frac{q}{24EI}z^2(z-l)^2, \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = \frac{q}{24EI}z(z^3 - 2lz^2 + l^3), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

c) Un extremo ($z = l$) empotrado, y el otro ($z = 0$) apoyado:

$$\zeta = -\frac{q}{48EI}z(2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta(0.42l) = 0.0054\frac{ql^4}{EI}.$$

d) Un extremo ($z = 0$) empotrado, y el otro ($z = l$) libre:

$$\zeta = -\frac{q}{24EI}z^2(z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta(l) = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI}.$$

Problema 2: Barra Encorvada por una Fuerza Concentrada

Solución. En todas partes, menos en el punto $z = l/2$, tenemos la ecuación $\zeta'''' = 0$. Las condiciones de contorno en los extremos de la barra determinan el modo de fijación. En el punto $z = l/2$ deben ser continuas ζ, ζ', ζ'', pero la diferencia de las fuerzas de corte debe ser igual a la fuerza f.

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = -\frac{f}{48EI}z^2(3l - 4z), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{192EI}.$$

b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = -\frac{f}{48EI} z(3l^2 - 4z^2), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

Problema 3: Barra con un Extremo Empotrado y el Otro Libre

Solución. A lo largo de toda la barra es $F = \text{const} = f$, de modo que $\zeta''' = -\frac{f}{EI}$. Con las condiciones $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ para $z = 0$ y $\zeta'' = 0$ para $z = l$ obtenemos:

$$\zeta = -\frac{f}{6EI} z^2(3l - z), \quad \zeta(l) = \frac{fl^3}{3EI}.$$

Problema 4: Barra con Extremos Fijos y Par de Fuerzas

Solución. A lo largo de toda la barra es $\zeta'''' = 0$, pero en el punto $z = l/2$ el momento $M = EI\zeta''$ experimenta un salto igual al momento m del par concentrado.

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} z^2(l + 2z) \quad \text{cuando } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} (l - z)^2[l + 2(l - z)] \quad \text{cuando } l/2 \leq z \leq l.$$

b) Ambos extremos articulados:

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} z(l^2 - 4z^2) \quad \text{cuando } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} (l - z)[l^2 - 4(l - z)^2] \quad \text{cuando } l/2 \leq z \leq l.$$

Problema 5: Par Concentrado en el Extremo Libre

Solución. A lo largo de toda la barra tenemos $M = EI\zeta'' = m$, y en el punto $z = 0$ es $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$. La forma de la flexión viene dada por la fórmula:

$$\zeta = -\frac{m}{2EI} z^2.$$