

Formulas relevantes

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ Deformacion}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ Eq equilibrio, tensor de esfuerzo}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} \text{ Ley de Hooke}$$

$$\text{Modulo de young } E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$\text{Coeficiente de Poisson } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\text{Modulo de compresibilidad } K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Sección 7: Deformaciones en Sólidos

Problema 1: Deformación de una Varilla Vertical

Enunciado. Determinar la deformación de una larga varilla (longitud l) vertical y en reposo en un campo gravitatorio

Solución. Tomamos el eje z en la dirección de la varilla, y el plano x, y coincidente con el plano de su extremo inferior. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

En la superficie lateral de la varilla, todas las componentes de σ_{ik} deben anularse, excepto σ_{zz} . En el extremo superior ($z = l$), $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. La solución que satisface estas condiciones es $\sigma_{zz} = -\rho g(l - z)$, con las demás σ_{ik} nulas.

Para u_{ik} , obtenemos:

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E} \rho g(l - z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g(l - z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0.$$

Integrando, las componentes del vector de desplazamiento son:

$$u_x = \frac{\sigma}{E} \rho g(l - z)x, \quad u_y = \frac{\sigma}{E} \rho g(l - z)y, \quad u_z = -\frac{\rho g}{2E} \{l^2 - (l - z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}.$$

La solución para u_z satisface $u_z = 0$ solo en un punto del extremo inferior de la varilla, por lo que no es válida cerca de este extremo.

Problema 2: Deformación de una Esfera Hueca

Enunciado. Hallar la deformación de una esfera hueca (de radios externo e interno R_2 y R_1 , respectivamente), sometida a una presión interna p_1 y a una presión externa p_2 .

Nota: Ecuación 7.5

$$2(1 - \sigma)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - (1 - 2\sigma)\nabla \times \nabla \times \vec{u} = 0$$

Formulas 1.7

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \cot(\theta) + \frac{u_r}{r}$$

$$2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot(\theta) \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$2u_{\varphi r} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}$$

Solución. Usamos coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera. El desplazamiento \vec{u} es radial y función de r solamente. Así, $\nabla \times \vec{u} = 0$ y (eq 7.5) $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Resulta:

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const} \equiv 3a,$$

donde $u = ar + \frac{b}{r^2}$. Las componentes del tensor de deformación son (Véase formulas 1.7) $u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}$, $u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}$. La tensión radial es:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \{ (1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta} \} = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Las constantes a y b se determinan por las condiciones de contorno: $\sigma_{rr} = -p_1$ para $r = R_1$ y $\sigma_{rr} = -p_2$ para $r = R_2$:

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Para una capa esférica con $p = p_1$ y $p_2 = 0$:

$$\sigma_{rr} = \frac{p R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 - \frac{R_2^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 + \frac{R_1^3}{r^3} \right).$$

Para una cáscara esférica delgada, de espesor $h = R_2 - R_1 \ll R$ obtenemos aproximadamente:

$$u = \frac{p R^2 (1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{p}{2}.$$

Donde $\bar{\sigma}_{rr}$ es el valor medio de la tensión radial promediada en el espesor de la cáscara. Obtenemos la distribución de tensiones en un medio elástico infinito con cavidad hueca (de radio R) sometido a compresión hidrostática, simplemente poniendo en las ecuaciones anteriores $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $p_1 = 0$ y $p_2 = p$:

$$\sigma_{rr} = -p \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

La tensión tangencial en la superficie es $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -3p/2$.

Problema 3: Deformación de una Esfera Maciza

Enunciado. Determinar la deformación de una esfera maciza (de radio R) bajo la acción de su propio campo gravitatorio.

Nota: Ecuación 7.3:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \nabla \times \nabla \times \vec{u} = -\rho \vec{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}$$

Solución. La fuerza gravitatoria que actúa sobre la unidad de masa en un cuerpo esférico es $-\frac{g\vec{r}}{R}$. Sustituyendo esta expresión en lugar de g en la ecuación (7.3), obtenemos:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

La solución para $r = 0$ y $\sigma_{rr} = 0$ en $r = R$ es:

$$u = -\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left(\frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

La materia está comprimida ($u_{rr} < 0$) dentro de $R\sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$ y dilatada fuera ($u_{rr} > 0$). La presión en el centro es $\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} g\rho R$.

Problema 4: Deformación de un Tubo Cilíndrico

Enunciado. Hallar la deformación de un tubo cilíndrico de radios externo e interno R_2 y R_1 , respectivamente, sometido únicamente a una presión interna p (se supone que se mantiene constante la longitud del cilindro, de manera que no hay deformación longitudinal).

Nota: Formulas 1.8:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Solución. Usamos coordenadas cilíndricas con el eje z a lo largo del tubo. La presión uniforme causa un desplazamiento radial puro $u_r = u(r)$. Análogamente al problema 2:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = \operatorname{const} \equiv 2a.$$

Por lo tanto, $u = ar + \frac{b}{r}$. Las componentes no nulas del tensor de deformaciones son $u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}$, $u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}$. De las condiciones $\sigma_{rr} = 0$ en $r = R_2$ y $\sigma_{rr} = -p$ en $r = R_1$:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1+\sigma}{E}.$$

La distribución de tensiones en el espesor de las paredes del tubo esta dada por:

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Problema 5: Deformación de un Cilindro Giratorio

Enunciado. Determinar la deformación de un cilindro que gira uniformemente alrededor de su eje.

Solución. Reemplazamos la fuerza gravitatoria en (7.3) por la centrífuga $\rho\Omega^2 r$. La ecuación para $u_r = u(r)$ es:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) = -\rho\Omega^2 r.$$

La solución para $r = 0$ y $\sigma_{rr} = 0$ en $r = R$ es:

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r[(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

Sección 16: Rigidez a la Torsión

Problema 1: Barra de Sección Circular

Enunciado. Determinar la rigidez a la torsión de una barra de sección circular (de radio R).

Nota:

De pag 97: Conviene notar también una analogía hidrodinámica: una ecuación de la forma $\nabla\chi = -1$ (16.11), determina la distribución de velocidades $v(x, y)$ de un líquido viscoso en la sección de un tubo: la condición de contorno $\chi = 0$ (16.12), corresponde a la condición $v = 0$ en las paredes inmóviles del tubo.

Ecuación 16.10:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

Ecuación 16.4:

$$u_z = \tau\psi(x, y)$$

Solución. Las soluciones de los problemas 1-4 coinciden formalmente con las soluciones de los problemas del movimiento de un líquido viscoso en un tubo de sección correspondiente (nota de pag 97) a la cantidad de líquido Q que pasa a través de una sección del tubo correspondiente aquí la cantidad C . Para una barra de sección circular, tenemos:

$$\chi = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2).$$

La rigidez a la torsión es:

$$C = \frac{\mu\pi R^4}{2}.$$

Para la función ψ , (de 16.10) se deduce $\psi = \text{const.}$ La constante (según 16.4) ψ corresponde a un desplazamiento de toda la barra a lo largo del eje z , por lo que se puede considerar $\psi = 0$. Así, las secciones transversales permanecen planas.

Problema 2: Barra de Sección Elíptica

Enunciado. Lo mismo para una barra de sección elíptica (de semiejes a y b).

Solución. La rigidez a la torsión es:

$$C = \pi\mu \frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}.$$

La distribución de desplazamientos longitudinales está dada por la función de torsión:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}xy.$$

Los ejes de coordenadas están dirigidos según los ejes de la elipse.

Problema 3: Barra de Sección Triangular

Enunciado. Lo mismo para una barra cuya sección es un triángulo equilátero (de lado a).

Solución. Rigidez a la torsión:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80}\mu a^4.$$

Función de torsión:

$$\psi = \frac{y(x\sqrt{3} + y)(x\sqrt{3} - y)}{6a}.$$

El origen de coordenadas se elige en el centro del triángulo, y el eje x coincide con una de sus alturas.

Problema 4: Barra con Forma de Placa Delgada

Enunciado. Ídem para una barra que tiene la forma de una larga placa delgada (de ancho d y grueso $h \lll d$).

Solución. El problema es equivalente al flujo de un líquido viscoso entre paredes planas y paralelas. El resultado es:

$$C = \frac{\mu d h^3}{3}.$$

Problema 5: Tubo Cilíndrico

Enunciado. Lo mismo para un tubo cilíndrico (de radios interno y externo R_1 y R_2).

Nota: Ecuación 16.13:

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} dl = -S$$

Ecuación 16.17:

$$C = 4\mu \sum_k \chi_k S_k + 4\mu \int \chi dx dy$$

Solución. La función (en coordenadas polares):

$$\chi = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)$$

satisface la condición (16.13) en ambos límites de la sección anular del tubo. De la fórmula (16.17) se sigue:

$$C = \mu\pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}.$$

Problema 6: Tubo de Paredes Delgadas

Enunciado. Ídem para un tubo de paredes delgada y sección arbitraria.

Solución. Dado que la pared del tubo es delgada, se puede considerar que en ella la función χ varía linealmente desde cero, sobre una cara, hasta χ_1 , sobre la otra (y es la coordenada a lo largo del espesor del la pared):

$$\chi = \chi_1 \frac{y}{h}.$$

La condición (16.13) da $\frac{\chi_1 L}{h} = S$, donde L es la longitud del perímetro de la sección del tubo, y S el área que encierra. En la expresión (16.17) el segundo término es pequeño comparado con el primero, y obtenemos:

$$C = \frac{4hS^2\mu}{L}.$$

Si se corta el tubo a lo largo de una de sus generatrices, la rigidez a la torsión disminuye a (de acuerdo con el resultado del problema 4):

$$C = \frac{\mu L h^3}{3}.$$

Sección 19: Problemas de Flexión

Problema 1: Reducción a Cuadraturas

Enunciado. Reducir a cuadraturas el problema de la determinación de la forma de una barra de sección circular (varilla elástica), fuertemente combada en un plano por fuerzas concentradas.

Nota: Ecuación 19.10:

$$EI \frac{d\vec{r}}{dl} \times \frac{d^3\vec{r}}{dl^3} = \vec{F} \times \frac{d\vec{r}}{dl}$$

Solución. Consideremos una porción de la barra comprendida entre puntos de aplicación de las fuerzas; en tal región es $F = \text{const.}$ Elijamos el plano de la flexión como plano x, y , con el eje y paralelo a la fuerza F e introduzcamos el ángulo θ entre la tangente a la línea de la barra y el eje y . Entonces:

$$\frac{dx}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{dy}{dl} = \cos \theta,$$

donde x, y son las coordenadas de los puntos de la barra. Desarrollando los productos vectoriales en (19.10), obtenemos una ecuación para θ , considerando como función de la longitud de arco l :

$$IE \frac{d^2\theta}{dl^2} - F \sin \theta = 0.$$

La primera integración da:

$$\frac{IE}{2} \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 + F \cos \theta = c_1,$$

y de aquí:

$$l = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + c_2 \rightarrow (1)$$

La función $\theta(l)$ puede expresarse mediante funciones elípticas. Para las coordenadas:

$$x = \int \sin \theta dl, \quad y = \int \cos \theta dl,$$

obtenemos:

$$x = \pm \frac{1}{F} \sqrt{2IE} \sqrt{c_1 - F \cos \theta} + \text{const.}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + \text{const}. \rightarrow (2)$$

El momento M está dirigido según el eje z y su módulo vale $M = IE \frac{d\theta}{dl}$.

Problema 2: Barra Fuertemente Encorvada

Enunciado. Hallar la forma de una barra fuertemente encorvada, uno de cuyos extremos está empotrado, y en el otro, que es libre, se aplica una fuerza \vec{f} : la dirección de \vec{f} es perpendicular a la recta de la barra no deformada (fig. 15).

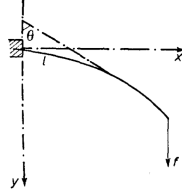


Figure 1: fig 15

Solución. En toda longitud de la barra es $\vec{F} = \text{const} = \vec{f}$. En el extremo empotrado ($l = 0$) se tiene $\theta = \frac{\pi}{2}$, y en el libre ($l = L$, donde L es la longitud de la barra), $M = 0$, esto es, $\theta' = 0$. Introduciendo la notación $\theta_0 = \theta(L)$, tenemos en (1) $c_1 = f \cos(\theta_0)$:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

De aquí se deduce la ecuación que determina θ_0 :

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

La forma de la barra se halla mediante las fórmulas:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left(\sqrt{\cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta} \right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

Problema 3: Fuerza Aplicada en el Extremo Libre

Enunciado. Ídem, si la fuerza \vec{f} , aplicada en el extremo libre, está dirigida paralelamente a la línea de la barra no deformada.

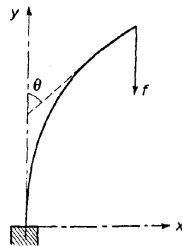


Figure 2: fig. 16

Solución. Tenemos $\vec{F} = -\vec{f}$. Condiciones de contorno: $\theta = 0$ en $l = 0$, $\theta' = 0$ en $l = L$. Tenemos:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

donde $\theta_0 = \theta(L)$ se determina por:

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Para x e y obtenemos:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left(\sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

En una flexión pequeña, $\theta_0 \ll 1$ y se puede escribir:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{f}}.$$

Esto es, θ_0 desaparece de esta relación. Indicando que la solución existe solo cuando $f \geq \frac{\pi^2 IE}{4L^2}$.

Problema 4: Barra con Ambos Extremos Apoyados

Enunciado. Ídem, si ambos extremos de la barra están apoyados y en su punto medio se aplica una fuerza \vec{f} : la distancia entre los puntos de apoyo es L_0 .

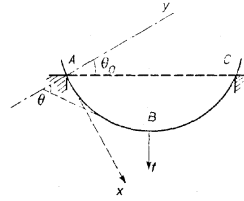


Figure 3: fig. 17

Solución. La fuerza \vec{F} es constante en cada una de las porciones AB y BC , y en cada una de ellas es perpendicular a la línea de la barra en los puntos de apoyo A y C , respectivamente. La diferencia entre los valores de \vec{F} en AB y BC es igual a \vec{f} , de donde se deduce que en AB es $F \sin \theta_0 = -\frac{f}{2}$, donde θ_0 es el ángulo entre el eje y y la línea AC . En el punto A ($l = 0$) tenemos $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $M = 0$, es decir, $\theta' = 0$, de modo que en AB :

$$l = \sqrt{\frac{IE}{f}} \sqrt{\sin \theta_0} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \quad x = 2\sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \sqrt{\cos \theta},$$

$$y = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta.$$

El ángulo θ_0 se determina mediante la condición que expresa que la proyección del arco AB sobre la recta AC debe ser igual a $\frac{L_0}{2}$, de donde:

$$\frac{L_0}{2} = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

Para determinado valor de θ_0 , entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ la derivada $\frac{df}{d\theta_0}$ se anula y pasa a ser positiva, indicando que la solución se hace inestable.

Sección 20: Formas de Barras

Problema 1: Barra Combadura por su Propio Peso

Enunciado. Hallar la forma de una barra (de longitud l), combada por la acción de su propio peso, para diferentes maneras de fijar sus extremos.

Solución. La forma buscada se obtiene como solución de la ecuación $\zeta'''' = \frac{q}{EI}$ (q es el peso de la barra por unidad de longitud) con condiciones de contorno en sus extremos. Para distintos apoyos de los extremos de la barra se obtienen las formas de flexión y los desplazamientos máximos (el origen de coordenadas coincide siempre con uno de los extremos de la barra):

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2(z-l)^2, \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z(z^3 - 2lz^2 + l^3), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

c) Un extremo ($z = l$) empotrado, y el otro ($z = 0$) apoyado:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z(2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta(0.42l) = 0.0054 \frac{ql^4}{EI}.$$

d) Un extremo ($z = 0$) empotrado, y el otro ($z = l$) libre:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2(z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta(l) = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

Problema 2: Barra Encorvada por una Fuerza Concentrada

Enunciado. Determinar la forma de una barra encorvada por la acción de una fuerza concentrada f , aplicada en su punto medio.

Solución. En todas partes, menos en el punto $z = l/2$, tenemos la ecuación $\zeta'''' = 0$. Las condiciones de contorno en los extremos de la barra determinan el modo de fijación. En el punto $z = l/2$ deben ser continuas ζ , ζ' , ζ'' , pero la diferencia de las fuerzas de corte $F = -EI\zeta'''$ a uno y otro lado debe ser igual a la fuerza f . La forma de la barra (en la porción $0 \ll z \ll \frac{l}{2}$) y la flecha de la línea elástica vienen dadas por las siguientes fórmulas:

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z^2(3l - 4z), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{192EI}.$$

b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z(3l^2 - 4z^2), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

La forma de la barra es simétrica respecto a su punto medio, de modo que la función $\zeta(z)$ en la porción $\frac{l}{2} \ll z \ll l$ se obtiene cambiando simplemente z por $l - z$ en estas expresiones.

Problema 3: Barra con un Extremo Empotrado y el Otro Libre

Enunciado. Ídem, para una barra con uno de sus extremos ($z = 0$) empotrado y el otro ($z = l$) libre: en este último está aplicada una fuerza concentrada f .

Solución. A lo largo de toda la barra es $F = \text{const} = f$, de modo que $\zeta''' = -\frac{f}{EI}$. Con las condiciones $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ para $z = 0$ y $\zeta'' = 0$ para $z = l$ obtenemos:

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2(3l - z), \quad \zeta(l) = \frac{fl^3}{3EI}.$$

Problema 4: Barra con Extremos Fijos y Par de Fuerzas

Enunciado. Hallar la forma de una barra con extremos fijos, combada por la acción de un par de fuerzas concentrado aplicado en su punto medio.

Solución. A lo largo de toda la barra es $\zeta'''' = 0$, pero en el punto $z = l/2$ el momento $M = EI\zeta''$ experimenta un salto igual al momento m del par concentrado, aplicado en él. Con condiciones apropiadas en los extremos:

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = \frac{m}{24EI} z^2(l + 2z) \quad \text{cuando } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EI} (l - z)^2[l + 2(l - z)] \quad \text{cuando } l/2 \leq z \leq l.$$

b) Ambos extremos articulados:

$$\zeta = \frac{m}{24EI} z(l^2 - 4z^2) \quad \text{cuando } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EI} (l - z)[l^2 - 4(l - z)^2] \quad \text{cuando } l/2 \leq z \leq l.$$

La barra se flexiona en sentidos opuestos a uno y a otro lado en el punto $x = l/2$.

Problema 5: Par Concentrado en el Extremo Libre

Enunciado. Ídem, si el par concentrado está aplicado en el extremo libre de una barra, cuyo otro extremo se encuentra empotrado.

Solución. A lo largo de toda la barra tenemos $M = EI\zeta'' = m$, y en el punto $z = 0$ es $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$. La forma de la flexión viene dada por la fórmula:

$$\zeta = \frac{m}{2EI} z^2.$$