



Por

Juan José Silva Cuevas
Proyecto de Ingeniería Física

Tecnológico de Monterrey
Monterrey, Nuevo León

Supervisada por:

Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara
Profesor Investigador,
Escuela Nacional de Ingeniería y Ciencias,
Tecnológico de Monterrey, campus Monterrey.

©Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey 2017
Derechos reservados

El autor otorga al ITESM el permiso de reproducir y
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes

Abstract

Resumen

iiiiiii

Agradecimientos

Dedicatoria

A mi familia.

Índice general

Abstract	III
Resumen	V
Agradecimientos	VII
Dedicatoria	IX
Introduction	1
1. Sobre guías de ondas	3
1.0.1. Ecuaciones de Helmholtz	3
1.0.2. Guías metálica	4
1.0.3. Guías dieléctricas	7
1.0.4. Acoplamientos	9
2.	11
3.	13
4.	15

Índice general

Introducción

Capítulo 1

Sobre guías de ondas

En este capítulo se estudiará el comportamiento de los campos electromagnéticos a través de guías de ondas o fibras. Se empezara con la deducción de las ecuaciones de Helmholtz para una onda plana en dos dimensiones, y de ahí se partirá en la deducciones de los campos en fibras metálicas para configuraciones cilíndricas y cuadradas. Posteriormente se estudiaran las fibras dieléctricas también en las mismas configuraciones. Al final del capítulo se empiezan a experimentar con acoplamientos entre fibras dieléctricas y sus posibles interacciones. Al final de cada apartado se encuentra una simulación computacional del fenómeno. Los códigos se pueden encontrar en anexos.

1.0.1. Ecuaciones de Helmholtz

Se empieza con las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo, isotrópico y lineal, sin cargas ni corrientes libres [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{v^2} \partial_t \mathbf{E}, \quad (1.1d)$$

donde los campos eléctricos y magnéticos están representados por $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ con una rapidez de propagación en el medio dada por v . Además se usó la notación corta ∂_t para representar la derivada con respecto al tiempo.

Un campo electromagnético monocromático que se propaga en la dirección $+z$ se puede escribir en coordenadas cartesianas en la forma.

$$\mathbf{E} = [E_x(\mathbf{r}) \hat{x} + E_y(\mathbf{r}) \hat{y} + E_z(\mathbf{r}) \hat{z}] e^{ikz - i\omega t}, \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{B} = [B_x(\mathbf{r}) \hat{x} + B_y(\mathbf{r}) \hat{y} + B_z(\mathbf{r}) \hat{z}] e^{ikz - i\omega t}, \quad (1.2b)$$

donde la posición en el plano transversal a la dirección de propagación está dada por $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sustituyendo estos campos en las ecuaciones de Maxwell se obtiene.

$$\partial_y \mathbf{E}_x - \partial_x \mathbf{E}_y = iw \mathbf{B}_z, \quad (1.3a)$$

$$ik \mathbf{E}_x - \partial_x \mathbf{E}_z = iw \mathbf{B}_y, \quad (1.3b)$$

$$\partial_y \mathbf{E}_z - ik \mathbf{E}_y = iw \mathbf{B}_x, \quad (1.3c)$$

$$\partial_x \mathbf{B}_z - \partial_y \mathbf{B}_x = \frac{-iw \mathbf{E}_z}{v^2}, \quad (1.3d)$$

$$ik \mathbf{B}_x - \partial_x \mathbf{B}_z = \frac{-iw \mathbf{E}_y}{v^2}, \quad (1.3e)$$

$$\partial_y \mathbf{B}_z - ik \mathbf{B}_y = \frac{-iw \mathbf{E}_x}{v^2}, \quad (1.3f)$$

donde hemos obviado la dependencia espaciotemporal, $\mathbf{E}_i \equiv \mathbf{E}_i(\rho, t)$ y $\mathbf{B}_i \equiv \mathbf{B}_i(\rho, t)$.

Despejando entre ellas se puede llegar a:

$$\mathbf{E}_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k \partial_x \mathbf{E}_z + w \partial_y \mathbf{B}_z), \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k \partial_y \mathbf{E}_z - w \partial_x \mathbf{B}_z), \quad (1.4b)$$

$$\mathbf{B}_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k \partial_x \mathbf{B}_z - \frac{w}{v^2} \partial_y \mathbf{E}_z), \quad (1.4c)$$

$$\mathbf{B}_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k \partial_y \mathbf{B}_z - \frac{w}{v^2} \partial_x \mathbf{E}_z). \quad (1.4d)$$

La deducción mas detallada de las formulas se puede encontrar en anexos. Acoplando los campos y factorizando, podemos llegar a la forma básica de la ecuación de Helmholtz

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2] \mathbf{E}_z = 0 \quad (1.5a)$$

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2] \mathbf{B}_z = 0 \quad (1.5b)$$

1.0.2. Guías metálica

Las ecuaciones de Maxwell en el interior de una fibra metálica tiene la forma.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{B}, \quad (1.6b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.6c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \mathbf{E} + \mu \sigma \mathbf{E} \quad (1.6d)$$

Operando el rotaciones en la ultima ecuacion y usando la identidad del triple producto vectorial obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{E} + \mu \sigma \partial_t \mathbf{E} \quad (1.7a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{B} + \mu \sigma \partial_t \mathbf{B} \quad (1.7b)$$

Utilizando la formulación imaginaria de los campos, Eq.(1.2), puedo encontrar la relación de dispersión para Operando con ellas y usando las ecuaciones 1.7, obtenemos una ecuacion para el numero de onda

$$k^2 = \mu\epsilon w^2 + i\mu\sigma w, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \mu, \epsilon, \sigma \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Quitando las dependecia de la frecuencia w

$$\begin{aligned} (k + i\kappa)^2 &= k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa = \mu\epsilon w^2 + i\mu\sigma w \\ k^2 - \kappa^2 &= \mu\epsilon w^2, \end{aligned} \quad (1.9a)$$

$$2k\kappa = \mu\sigma w \quad (1.9b)$$

por lo que

$$\kappa = \frac{\mu\epsilon w}{2k} \quad (1.10)$$

Metiendo las equivalencias obtenidas a las ecuaciones originales

$$k^4 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4} - \mu\epsilon w^2 = 0 \quad (1.11a)$$

Completando cuadrados llegamos a

$$k = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.12a)$$

como $\kappa^2 = k^2 - \mu\epsilon w^2$ luego

$$\kappa = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.13a)$$

Guías cuadradas

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_z(x, y) &= X(x)Y(y) \\ Y\partial_x^2 X + X\partial_y^2 Y + \left[\left(\frac{w}{v}\right)^2 - k^2\right]XY &= 0 \\ \frac{1}{X}\partial_x^2 X &= -k_x^2; \quad \frac{1}{Y}\partial_y^2 Y = -K_y^2 \\ -k_x^2 - k_y^2 + \left(\frac{w}{v}\right)^2 - k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Proponiendo

$$X(x) = A \sin(K_x x) + B \cos(k_x x), \quad X = E_z, B_z \quad (1.15)$$

metendiolo en las ecuaciones originales

$$\mathbf{E}_x = , \propto E_0 \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right) \quad (1.16)$$

$$\mathbf{E}_y = , \propto E_0 \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{E}_z = \quad (1.18)$$

$$\mathbf{B}_x = , \propto B_0 \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{a}\right) \quad (1.19)$$

$$\mathbf{B}_y = , \propto B_0 \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{a}\right) \quad (1.20)$$

$$\mathbf{B}_z = \quad (1.21)$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{w}{v}\right)^2 - \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]} \quad (1.22)$$

Guías esféricas

Las ecuaciones de Helmholtz en coordenadas cilindricas toman la forma

$$\mathbf{E}_\rho = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[\beta_z \partial_\rho \mathbf{E}_z + \frac{w\mu}{\rho} \partial_\phi \mathbf{B}_z \right] \quad (1.23)$$

$$\mathbf{E}_\phi = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[\frac{-\beta_z}{\rho} \partial_\phi \mathbf{E}_z + w\mu \partial_\rho \mathbf{B}_z \right] \quad (1.24)$$

$$\mathbf{B}_\rho = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[\frac{w\epsilon}{\rho} \partial_\phi \mathbf{E}_z - \beta_z \partial_\rho \mathbf{B}_z \right] \quad (1.25)$$

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[w\epsilon \partial_\rho \mathbf{E}_z + \frac{\beta_z}{\rho} \partial_\phi \mathbf{B}_z \right] \quad (1.26)$$

Satisfaciendo en laplaciano en coordenadas cilindricas

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \mathbf{B}_z) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 \mathbf{B}_z - (\beta_z^2 - \beta^2) \mathbf{B}_z = 0 \quad (1.27)$$

Donde

$$\beta_c^2 = \beta^2 - \beta_z^2 \quad (1.28)$$

Utilizando separación de variables de la forma

$$\mathbf{B}_z = R(\rho) \Phi(\phi) e^{-i\beta_z z} \quad (1.29)$$

Sustituyendo 1.29 en 1.27 y acomodando, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\rho}{R} (R' + \rho R'') + \beta_c^2 \rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = n^2 \quad (1.30)$$

Que tiene soluciones de la forma

$$\Phi(\phi) = A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi) \quad (1.31)$$

$$R(\rho) = C_n J_n(\beta_c \rho) \quad (1.32)$$

y que tiene las soluciones generales

$$\mathbf{E}_\rho = i \frac{i w \mu n}{\beta_c^2 \rho} J_n(\beta_c \rho) (A_n \sin(n\phi) - B_n \cos(n\phi)) e^{-i \mathbf{B}_z z} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{E}_\phi = i \frac{i w \mu}{\beta_c} J_n(\beta_c \rho) (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)) e^{-i \mathbf{B}_z z} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{B}_\rho = -\frac{\beta_z}{w \mu} \mathbf{E}_\phi \quad (1.35)$$

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\beta_z}{w \mu} \mathbf{E}_\rho \quad (1.36)$$

$$\mathbf{B}_z = J_n(\beta_c \rho) (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)) e^{-i \mathbf{B}_z z} \quad (1.37)$$

Donde $J_n(\beta_c \rho)$ son los polinomios de Bessel.

1.0.3. Guías dieléctricas

Que son las ecuaciones de Helmholtz en dos dimensiones. Estas ecuaciones pueden ser generalizadas a

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\mu \epsilon \frac{w^2}{c^2} - k^2} [D_t(\partial_z \mathbf{B}_z) + i \mu \epsilon \frac{w}{v} e_3 \times D_t \mathbf{E}_z] \quad (1.38a)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{\mu \epsilon \frac{w^2}{c^2} - k^2} [D_t(\partial_z \mathbf{E}_z) - i \frac{w}{v} e_3 \times D_t \mathbf{B}_z] \quad (1.38b)$$

Donde t es la componente transversal

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\gamma^2} [D_t(\partial_z \mathbf{B}_z) + i \mu \epsilon \frac{w}{v} e_3 \times D_t \mathbf{E}_z] \quad (1.39a)$$

Desarrollando todas las componentes implicada

$$\mathbf{B}_{rho} = \frac{ik}{\gamma^2} \partial_{rho} \mathbf{B}_z \quad \mathbf{B}_\phi = \frac{i \epsilon w}{\gamma^2 v} \partial_\rho \mathbf{E}_z \quad (1.40a)$$

$$\mathbf{E}_\phi = \frac{-w}{v k} \mathbf{B}_\rho \quad \mathbf{E}_\rho = \frac{v k}{\epsilon w} \mathbf{B}_\phi \quad (1.40b)$$

Con soluciones

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_z &= J_0(\gamma \rho) \\ \mathbf{B}_\rho &= \frac{-ik}{\gamma} J_1(\gamma \rho) \\ \mathbf{E}_\phi &= \frac{i w}{v \gamma} J_1(\gamma \rho) \end{aligned} \right\} \quad \text{para} \quad \rho \leq a$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_z &= AK_0(\beta\rho) \\ \mathbf{B}_\rho &= \frac{ikA}{\beta} K_1(\beta\rho) \\ \mathbf{E}_\phi &= \frac{-iwA}{v\beta} K_1(\beta\rho) \end{aligned} \right\} \quad \text{para} \quad \rho \geq a$$

Condiciones de frontera a $\rho = a$

$$AK_0(\beta a) = J_0(\gamma a) \quad (1.41)$$

$$-\frac{A}{B} K_1(\beta a) = \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma} \quad (1.42)$$

Despejando A

$$A = \frac{J_0(\beta a)}{k_0(\beta a)} \quad (1.43)$$

Si sumamos y despejamos

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0 \quad (1.44)$$

Con la condicion

$$\gamma^2 + \beta^2 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{w^2}{v^2} \quad (1.45)$$

Guías cuadradas

Las misma ecuaciones para los campos que se obtuvieron en el caso de fibras metálicas cuadradas siguen siendo validas para este caso, solo que ahora tendremos que empatar en la fronteras para respetar la evolución de los campos en todo el espacio. Primeramente definamos las ecuaciones que describen los campos pero ahora con un desfase.

$$\mathbf{E}_z = E_0 \sin(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.46)$$

$$\mathbf{B}_z = B_0 \cos(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y) \quad (1.47)$$

Se tienen soluciones oscilatorias dentro de la fibra y con caída exponencial fuera de ella. Se puede usar el hecho de que para que la formulación sea valida el campo eléctrico debe de ser un mínimo o máximo en la frontera.

$$\sin\left(\frac{k_x a}{2} + \phi_x\right) = \sin\left(\frac{k_y b}{2} + \phi_y\right) = \pm 1 \quad \vee \quad 0 \quad (1.48)$$

Utilizando las ecuaciones de Helmholtz en forma cartesiana

$$\mathbf{B}_x = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_x \mathbf{B}_z - w \epsilon \partial_y \mathbf{E}_z) \quad (1.49)$$

$$\mathbf{B}_y = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_y \mathbf{B}_z - w \epsilon \partial_x \mathbf{E}_z) \quad (1.50)$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_x \mathbf{E}_z - w \mu \partial_y \mathbf{B}_z) \quad (1.51)$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_y \mathbf{E}_z - w \mu \partial_x \mathbf{B}_z) \quad (1.52)$$

$$(1.53)$$

Operando con 1.46 en 1.49 obtenemos las ecuaciones de los campos en todo el espacio.

$$\mathbf{B}_x = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_x \mathbf{B}_0 + w \epsilon k_y \mathbf{E}_0) \sin(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.54)$$

$$\mathbf{B}_y = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_y \mathbf{B}_0 + w \epsilon k_x \mathbf{E}_0) \cos(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.55)$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_x \mathbf{E}_0 + w \mu k_y \mathbf{B}_0) \cos(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.56)$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_y \mathbf{E}_0 + w \mu k_x \mathbf{B}_0) \sin(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y) \quad (1.57)$$

$$(1.58)$$

Guías esféricas

$$\gamma^2 = \mu_1 \epsilon_1 \frac{w^2}{v^2} - k^2 \quad \text{Dentro} \quad (1.59a)$$

$$\beta^2 = k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{w^2}{v^2} \quad \text{Fuera (onda desvaneciente)} \quad (1.59b)$$

La ecuacion de Helmholtz para variación azimutal toma la forma

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1} \partial_\rho + \gamma^2) \psi = 0 \quad (1.60a)$$

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1} \partial_\rho - \beta^2) \psi = 0 \quad (1.60b)$$

Que es la ecuación diferencial de Bessel y cuya solución toma la forma

$$\psi = \begin{cases} J_0(\gamma \rho), \rho \leq a \\ A k_0(\beta \rho), \rho > a \end{cases} \quad (1.61)$$

1.0.4. Acoplamientos

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Bibliografia

- [1] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. International Series in Physics, McGraw-Hill, 1st. ed., 1941.