Por

Juan José Silva Cuevas
Proyecto de Ingeniería Física

Tecnológico de Monterrey
Monterrey, Nuevo León

Supervisada por:

Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara
Profesor Investigador,
Escuela Nacional de Ingeniería y Ciencias,
Tecnológico de Monterrey, campus Monterrey.

Abstract

Resumen

llllllll

Agradecimientos

Dedicatoria

A mi familia.

Contents

¡¡¡¡¡¡¡ HEAD

Introducción

Chapter 1

Sobre guías de ondas

En este capitulo se estudiara el comportamiento de los campos electromagnéticos a través de guías de ondas o fibras. Se empezara con la deducción de las ecuaciones de Helmoltz para una onda plana en dos dimensiones, y de ahí se partirá en la deducciones de los campos en fibras metálicas para configuraciones cilíndricas y cuadradas. Posteriormente se estudiaran las fibras dieléctricas también en las mismas configuraciones. Al final del capitulo se empiezan a experimentar con acoplamientos entre fibras dieléctricas y sus posibles interacciones. Al final de cada apartado se encuentra una simulación computacional del fenómeno Los códigos se pueden encontrar en anexos.

1.0.1 Ecuaciones de Helmholtz

Se empieza con las ecuaciones de Maxwell en espacio vacío sin cargas libres.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{1.1a}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \tag{1.1b}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.1c}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{v^2}\partial_t \mathbf{E}, \tag{1.1d}$$

Los campos magnético y eléctrico se pueden escribir en coordenadas cartesianas en la forma.

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_x\hat{x} + \mathbf{E}_y\hat{y} + \mathbf{E}_z\hat{z} \tag{1.2a}$$
$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_x\hat{x} + \mathbf{B}_y\hat{y} + \mathbf{B}_z\hat{z} \tag{1.2b}$$

Aplicando las ecuaciones de Maxwell a los campos magnético y eléctrico se obtiene.

$$\partial_y \mathbf{E}_x - \partial_x \mathbf{E}_y = iw\mathbf{B}_z \tag{1.3a}$$
$$ik\mathbf{E}_x - \partial_x \mathbf{E}_z = iw\mathbf{B}_y \tag{1.3b}$$
$$\partial_y \mathbf{E}_z - ik\mathbf{E}_y = iw\mathbf{B}_x \tag{1.3c}$$
$$\partial_x \mathbf{B}_z - \partial_y \mathbf{B}_x = \frac{-iw\mathbf{E}_Z}{v^2} \tag{1.3d}$$
$$ik\mathbf{B}_x - \partial_x \mathbf{B}_z = \frac{-iw\mathbf{E}_y}{v^2} \tag{1.3e}$$
$$\partial_y \mathbf{B}_z - ik\mathbf{B}_y = \frac{-iw\mathbf{E}_x}{v^2} \tag{1.3f}$$

Operando entre ellas se puede llegar ha

$$\mathbf{E}_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_x \mathbf{E}_z + w\partial_y \mathbf{B}_z) \tag{1.4a}$$
$$\mathbf{E}_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_y \mathbf{E}_z - w\partial_x \mathbf{B}_z) \tag{1.4b}$$
$$\mathbf{B}_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_x \mathbf{B}_z - \frac{w}{v^2}\partial_y \mathbf{E}_z) \tag{1.4c}$$
$$\mathbf{B}_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_y \mathbf{B}_z - \frac{w}{v^2}\partial_x \mathbf{E}_z) \tag{1.4d}$$

La deducción mas detallada de las formulas se puede encontrar en anexos. Acoplando los campos y factorizando, podemos llegar a la forma básica de la ecuación de Helmholtz

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2]\mathbf{E}_z = 0 \tag{1.5a}$$
$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2]\mathbf{B}_z = 0 \tag{1.5b}$$

1.0.2 Guías en fibras metálicas

Las ecuaciones de Maxwell en el interior de una fibra metálica tiene la forma.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{1.6a}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{B}, \tag{1.6b}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.6c}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon\mathbf{E} + \mu\sigma\mathbf{E} \tag{1.6d}$$

Operando el rotaciones en la ultima ecuacion y usando la identidad del triple producto vectorial obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon\partial_t^2 \mathbf{E} + \mu\sigma\partial_t \mathbf{E} \tag{1.7a}$$
$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon\partial_t^2 \mathbf{B} + \mu\sigma\partial_t \mathbf{B} \tag{1.7b}$$

Utilizando la formulación imaginaria de los campos

$$\mathbf{E}(\vec{r},t) = \mathbf{E}_0(\vec{r}_\perp)e^{\hat{k}z-wt}; \tag{1.8}$$

$$\mathbf{B}(\vec{r},t) = \mathbf{B}_0(\vec{r}_\perp)e^{\hat{k}z-wt} \tag{1.9}$$

Operando con ellas y usando las ecuaciones 1.7, obtenemos una ecuacion para el numero de onda

$$k^2 = \mu\epsilon w^2 + i\mu\sigma w, \qquad k \in \mathbb{C}, \quad \mu,\epsilon,\sigma \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

Quitando las dependecia de la frecuencia w

$$(k+i\kappa)^2 = k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa = \mu\epsilon w^2 + i\mu\sigma w$$

$$k^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon w^2, \tag{1.11a}$$

$$2k\kappa = \mu\sigma w \tag{1.11b}$$

por lo que

$$\kappa = \frac{\mu\epsilon w}{2k} \tag{1.12}$$

Metiendo las equivalencias obtenidas a las ecuaciones originales

$$k^4 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4} - \mu\epsilon w^2 = 0 \tag{1.13a}$$

Completando cuadrados llegamos a

$$k = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2}+1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.14a}$$

como $\kappa^2 = k^2 - \mu\epsilon w^2$ luego

$$\kappa = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2}-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.15a}$$

Guías cuadradas

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_z(x,y) &= X(x)Y(y) \\ Y\partial_x^2 X + X\partial_y^2 Y + [(\frac{w}{v})^2 - k^2]XY &= 0 \\ \frac{1}{X}\partial_x^2 X = -k_x^2; \frac{1}{Y}\partial_y^2 Y &= -K_y^2 \\ -k_x^2 - k_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Proponiendo

$$X(x) = A\sin(K_x x) + B\cos(k_x x) \tag{1.17}$$

metendielo en las ecuaciones originales

$$\mathbf{E}_z = E_0 \sin\Big(m\pi\frac{x}{a}\Big)\sin\Big(n\pi\frac{y}{a}\Big) \tag{1.18}$$

$$\mathbf{B}_z = B_0 \cos\Big(m\pi\frac{x}{a}\Big)\cos\Big(n\pi\frac{y}{a}\Big) \tag{1.19}$$

$$k = \sqrt{(\frac{w}{v})^2 - \pi^2[(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2]} \tag{1.20}$$

Guías esféricas

Las ecuaciones de Helmholtz en coordenas cilindricas toman la forma

$$\mathbf{E}_\rho = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2}\left[\beta_z\partial_\rho\mathbf{E}_z + \frac{w\mu}{\rho}\partial_\phi\mathbf{B}_z\right] \tag{1.21}$$

$$\mathbf{E}_\phi = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2}\left[\frac{-\beta_z}{\rho}\partial_\phi\mathbf{E}_z + w\mu\partial_\rho\mathbf{B}_z\right] \tag{1.22}$$

$$\mathbf{B}_\rho = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2}\left[\frac{w\epsilon}{\rho}\partial_\phi\mathbf{E}_z - \beta_z\partial_\rho\mathbf{B}_z\right] \tag{1.23}$$

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2}\left[w\epsilon\partial_\rho\mathbf{E}_z + \frac{\beta_z}{\rho}\partial_\phi\mathbf{B}_z\right] \tag{1.24}$$

Satisfaciendo en laplaciano en coordenadas cilindricas

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\mathbf{B}_z) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2\mathbf{B}_z - (\beta_z^2 - \beta^2)\mathbf{B}_z = 0 \tag{1.25}$$

Donde

$$\beta_c^2 = \beta^2 - \beta_z^2 \tag{1.26}$$

Utilizando separación de variables de la forma

$$\mathbf{B}_z = R(\rho)\Phi(\phi)e^{-i\beta_z z} \tag{1.27}$$

Sustituyendo 1.27 en 1.25 y acomodando, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\rho}{R}(R' + \rho R'') + \beta_c^2\rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = n^2 \tag{1.28}$$

Que tiene soluciones de la forma

$$\Phi(\phi) = A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi) \tag{1.29}$$

$$R(\rho) = C_n J_n(\beta_c\rho) \tag{1.30}$$

y que tiene las soluciones generales

$$\mathbf{E}_\rho = i\frac{iw\mu n}{\beta_c^2\rho}J_n(\beta_c\rho)(A_n\sin(n\phi) - B_n\cos(n\phi))e^{-i\mathbf{B}_z z} \tag{1.31}$$

$$\mathbf{E}_\phi = i\frac{iw\mu}{\beta_c}J_n(\beta_c\rho)(A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi))e^{-i\mathbf{B}_z z} \tag{1.32}$$

$$\mathbf{B}_\rho = -\frac{\beta_z}{w\mu}\mathbf{E}_\phi \tag{1.33}$$

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\beta_z}{w\mu}\mathbf{E}_\rho \tag{1.34}$$

$$\mathbf{B}_z = J_n(\beta_c\rho)(A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi))e^{-i\mathbf{B}_z z} \tag{1.35}$$

Donde $J_n(\beta_c\rho)$ son los polinomios de Bessel.

1.0.3 Guías dieléctricas

Que son las ecuaciones de Helmholtz en dos dimensiones. Estas ecuaciones pueden ser generalizadas a

$$\mathbf{B}_t = \frac{}{\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2}[D_t(\partial_z\mathbf{B}z) + i\mu\epsilon\frac{w}{v}e_3 \times D_t\mathbf{E}_z \tag{1.36a}$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{}{\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2}[D_t(\partial_z\mathbf{E}z) - i\frac{w}{v}e_3 \times D_t\mathbf{B}_z \tag{1.36b}$$

Donde t es la componente transversal

$$\mathbf{B}_t = \frac{}{\gamma^2}[D_t(\partial_z\mathbf{B}_z) + i\mu\epsilon\frac{w}{v}e_3 \times D_t\mathbf{E}_z] \tag{1.37a}$$

Desarrollando todas las componentes implicada

$$\mathbf{B}_{rho} = \frac{ik}{\gamma^2}\partial_{rho}\mathbf{B}_z \qquad \mathbf{B}_\phi = \frac{i\epsilon w}{\gamma^2 v}\partial_\rho\mathbf{E}_z \tag{1.38a}$$

$$\mathbf{E}_\phi = \frac{-w}{vk}\mathbf{B}_\rho \qquad \mathbf{E}_\rho = \frac{vk}{\epsilon w}\mathbf{B}_\phi \tag{1.38b}$$

Con soluciones

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}_z = J_0(\gamma\rho) \\ \mathbf{B}_\rho = \frac{-ik}{\gamma}J_1(\gamma\rho) \\ \mathbf{E}_\phi = \frac{iw}{v\gamma}J_1(\gamma\rho) \end{array}\right\} \qquad \text{para} \qquad \rho \leq a$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}_z = AK_0(\beta\rho) \\ \mathbf{B}_\rho = \frac{ikA}{\beta}K_1(\beta\rho) \\ \mathbf{E}_\phi = \frac{-iwA}{v\beta}K_1(\beta\rho) \end{array}\right\} \qquad \text{para} \qquad \rho \geq a$$

Condiciones de frontera a $pho = a$

$$AK_0(\beta a) = J_0(\beta a) \tag{1.39}$$

$$-\frac{A}{B}K_1(\beta a) = \frac{J_1}{\gamma}(\gamma a) \tag{1.40}$$

Despejando A

$$A = \frac{J_0(\beta A)}{k_0(\beta a)} \tag{1.41}$$

Si sumamos y despejamos

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0 \tag{1.42}$$

Con la condicion

$$\gamma^2 + \beta^2 = (\epsilon_1 - \epsilon_0)\frac{w^2}{v^2} \tag{1.43}$$

Guías cuadradas

Las misma ecuaciones para los campos que se obtuvieron en el caso de fibras metálicas cuadradas siguen siendo validas para este caso, solo que ahora tendremos que empatar en la fronteras para respetar la evolución de los campos en todo el espacio. Primeramente definamos las ecuaciones que describen los campos pero ahora con un desfase.

$$\mathbf{E}_z = E_0 \sin(k_x x + \phi_x)\sin(k_y y + \phi_y) \tag{1.44}$$

$$\mathbf{B}_z = B_0 \cos(k_x x + \phi_x)\cos(k_y y + \phi_y) \tag{1.45}$$

Se tienen soluciones oscilatorias dentro de la fibra y con caída exponencial fuera de ella. Se puede usar el hecho de que para que la formulación sea valida el campo eléctrico debe de ser un mínimo o máximo en la frontera.

$$\sin\left(\frac{k_x a}{2} + \phi_x\right) = \sin\left(\frac{k_y b}{2} + \phi_y\right) \quad = \quad \pm 1 \quad \vee \quad 0 \tag{1.46}$$

Utilizando las ecuaciones de Helmholtz en forma cartesiana

$$\mathbf{B}_x = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z \partial_x \mathbf{B}_z - w\epsilon\partial_y \mathbf{E}_z) \tag{1.47}$$

$$\mathbf{B}_y = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z \partial_y \mathbf{B}_z - w\epsilon\partial_x \mathbf{E}_z) \tag{1.48}$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z \partial_x \mathbf{E}_z - w\mu\partial_y \mathbf{B}_z) \tag{1.49}$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z \partial_y \mathbf{E}_z - w\mu\partial_x \mathbf{B}_z) \tag{1.50}$$

$$\tag{1.51}$$

Operando con 1.44 en 1.47 obtenemos las ecuaciones de los campos en todo el espacio.

$$\mathbf{B}_x = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z k_x \mathbf{B}_0 + w\epsilon k_y \mathbf{E}_0)\sin(k_x x + \phi_x)\sin(k_y y + \phi_y) \tag{1.52}$$

$$\mathbf{B}_y = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z k_y \mathbf{B}_0 + w\epsilon k_y \mathbf{E}_0)\cos(k_x x + \phi_x)\sin(k_y y + \phi_y) \tag{1.53}$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z k_x \mathbf{E}_0 + w\mu k_y \mathbf{E}_0)\cos(k_x x + \phi_x)\sin(k_y y + \phi_y) \tag{1.54}$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2}(k_z k_y \mathbf{E}_0 + w\mu k_x \mathbf{B}_0)\sin(k_x x + \phi_x)\cos(k_y y + \phi_y) \tag{1.55}$$

$$\tag{1.56}$$

Guías esféricas

$$\gamma^2 = \mu_1\epsilon_1\frac{w^2}{v^2} - k^2 \qquad \text{Dentro} \tag{1.57a}$$

$$\beta^2 = k^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{w^2}{v^2} \qquad \text{Fuera (onda desvaneciente)} \tag{1.57b}$$

La ecuacion de Helmholtz para variación azimutal toma la forma

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho + \gamma^2)\psi = 0 \tag{1.58a}$$

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho - \beta^2)\psi = 0 \tag{1.58b}$$

Que es la ecuación diferencial de Bessel y cuya solución toma la forma

$$\psi = \begin{cases} J_0(\gamma\rho), \rho \leq a \\ Ak_0(\beta\rho), \rho > a \end{cases} \tag{1.59}$$

1.0.4 Acoplamientos

Chapter 2

Chapter 3

Chapter 4

Bibliography