Por

Juan José Silva Cuevas
Proyecto de Ingeniería Física

Tecnológico de Monterrey
Monterrey, Nuevo León

Supervisada por:

Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara
Profesor Investigador,
Escuela Nacional de Ingeniería y Ciencias,
Tecnológico de Monterrey, campus Monterrey.

Abstract

Resumen

Agradecimientos

Dedicatoria

A mi familia.

Contents

¡¡¡¡¡¡¡ HEAD

Introducción

Chapter 1

Sobre guías de ondas

1.0.1 Helm

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot E &= 0, && (1.1a)\\
\nabla \times &= -\partial_t B, && (1.1b)\\
\nabla \cdot B &= 0, && (1.1c)\\
\nabla \times B &= \frac{1}{v^2}\partial_t E, && (1.1d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_0 &= E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} && (1.2a)\\
\hat{B}_0 &= B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z} && (1.2b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_y E_x - \partial_x E_y &= iwB_z && (1.3a)\\
ikE_x - \partial_x E_z &= iwB_y && (1.3b)\\
\partial_y E_z - ikE_y &= iwB_x && (1.3c)\\
\partial_x B_z - \partial_y B_x &= \frac{-iwE_Z}{v^2} && (1.3d)\\
ikB_x - \partial_x B_z &= \frac{-iwE_y}{v^2} && (1.3e)\\
\partial_y B_z - ikB_y &= \frac{-iwE_x}{v^2} && (1.3f)
\end{aligned}
$$

Operando entre ellas se puede llegar ha

$$E_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_x E_z + w\partial_y B_z) \tag{1.4a}$$

$$E_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_y E_z - w\partial_x B_z) \tag{1.4b}$$

$$B_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_x B_z - \frac{w}{v^2}\partial_y E_z) \tag{1.4c}$$

$$B_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2}(k\partial_y B_z - \frac{w}{v^2}\partial_x E_z) \tag{1.4d}$$

De este procedimiento se obtienen

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2]E_z = 0 \tag{1.5a}$$

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2]B_z = 0 \tag{1.5b}$$

1.0.2 Guías en fibras metálicas

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & (1.6a)\\ \nabla \times E &= \partial_t B, & (1.6b)\\ \nabla \cdot B &= 0, & (1.6c)\\ \nabla \times B &= \mu\epsilon E + \mu\sigma E & (1.6d) \end{aligned}$$

Operando el rotaciones en la ultima ecuacion y usando la identidad del triple producto vectorial obtenemos

$$\nabla^2 E = \mu\epsilon\partial_t^2 E + \mu\sigma\partial_t E \tag{1.7a}$$

$$\nabla^2 B = \mu\epsilon\partial_t^2 B + \mu\sigma\partial_t B \tag{1.7b}$$

Utilizando la formulación imaginaria de los campos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\vec{r}, t) &= E_0(\vec{r}_\perp)e^{\hat{k}z - wt}; & (1.8)\\ \mathbf{B}(\vec{r}, t) &= B_0(\vec{r}_\perp)e^{\hat{k}z - wt} & (1.9) \end{aligned}$$

Operando con ellas y usando las ecuaciones 1.7, obtenemos una ecuacion para el numero de onda

$$k^2 = \mu\epsilon w^2 + i\mu\sigma w, \qquad k \in \mathbb{C}, \quad \mu, \epsilon, \sigma \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

Quitando las dependecia de la frecuencia w

$$\begin{aligned} (k + i\kappa)^2 &= k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa = \mu\epsilon w^2 + i\mu\sigma w \\ k^2 - \kappa^2 &= \mu\epsilon w^2, & (1.11a)\\ 2k\kappa &= \mu\sigma w \end{aligned}$$

(1.11b)

por lo que

$$\kappa \quad = \quad \frac{\mu\epsilon w}{2k} \tag{1.12}$$

Metiendo las equivalencias obtenidas a las ecuaciones originales

$$k^4 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4} - \mu\epsilon w^2 = 0 \tag{1.13a}$$

Completando cuadrados llegamos a

$$k = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2}+1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.14a}$$

como $\kappa^2 = k^2 - \mu\epsilon w^2$ luego

$$\kappa = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2}-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.15a}$$

Guías cuadradas

$$B_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$Y\partial_x^2 X + X\partial_y^2 Y + [(\frac{w}{v})^2 - k^2]XY = 0$$

$$\frac{1}{X}\partial_x^2 X = -k_x^2; \frac{1}{Y}\partial_y^2 Y = -K_y^2$$

$$-k_x^2 - k_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2 = 0$$

Proponiendo

$$X(x) = A\sin(K_x x) + B\cos(k_x x) \tag{1.16a}$$

metendielo en las ecuaciones originales

$$B_z = B_0 \cos\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\cos\left(n\pi\frac{y}{a}\right) \tag{1.16b}$$

$$k = \sqrt{(\frac{w}{v})^2 - \pi^2[(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2]} \tag{1.16c}$$

Guías esféricas

1.0.3 Guías dieléctricas

Que son las ecuaciones de Helmholtz en dos dimensiones. Estas ecuaciones pueden ser generalizadas a

$$B_t = \frac{}{\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2}[D_t(\partial_z Bz) + i\mu\epsilon\frac{w}{v}e_3 \times D_t E_z \tag{1.17a}$$

$$E_t = \frac{}{\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2}[D_t(\partial_z Ez) - i\frac{w}{v}e_3 \times D_t B_z \tag{1.17b}$$

Donde t es la componente transversal

$$B_t = \frac{}{\gamma^2}[D_t(\partial_z B_z) + i\mu\epsilon\frac{w}{v}e_3 \wedge D_t E_z] \tag{1.18a}$$

Desarrollando todas las componentes implicada

$$B_{rho} = \frac{ik}{\gamma^2}\partial_{rho} B_z \qquad B_\phi = \frac{i\epsilon w}{\gamma^2 v}\partial_\rho E_z \tag{1.19a}$$

$$E_\phi = \frac{-w}{vk}B_\rho \qquad E_\rho = \frac{vk}{\epsilon w}B_\phi \tag{1.19b}$$

Con soluciones

$$\left.\begin{array}{l} B_z = J_0(\gamma\rho) \\ B_\rho = \frac{-ik}{\gamma}J_1(\gamma\rho) \\ E_\phi = \frac{iw}{v\gamma}J_1(\gamma\rho) \end{array}\right\} \qquad \text{para} \qquad \rho \leq a$$

$$\left.\begin{array}{l} B_z = AK_0(\beta\rho) \\ B_\rho = \frac{ikA}{\beta}K_1(\beta\rho) \\ E_\phi = \frac{-iwA}{v\beta}K_1(\beta\rho) \end{array}\right\} \qquad \text{para} \qquad \rho \geq a$$

Guías cuadradas

Guías esféricas

$$\gamma^2 = \mu_1\epsilon_1\frac{w^2}{v^2} - k^2 \qquad \text{Dentro} \tag{1.20a}$$

$$\beta^2 = k^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{w^2}{v^2} \qquad \text{Fuera (onda desvaneciente)} \tag{1.20b}$$

La ecuacion de Helmholtz para variación azimutal toma la forma

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho + \gamma^2)\psi = 0 \tag{1.21a}$$

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho - \beta^2)\psi = 0 \tag{1.21b}$$

Que es la ecuación diferencial de Bessel y cuya solución toma la forma

$$\psi \quad = \begin{cases} J_0(\gamma\rho), \rho \leq a \\ Ak_0(\beta\rho), \rho > a \end{cases} \tag{1.22}$$

1.0.4 Acoplamientos

Chapter 2

Chapter 3

Chapter 4

Bibliography