



Por

**Juan José Silva Cuevas**  
Proyecto de Ingeniería Física

**Tecnológico de Monterrey**  
Monterrey, Nuevo León

Supervisada por:

**Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara**  
Profesor Investigador,  
Escuela Nacional de Ingeniería y Ciencias,  
Tecnológico de Monterrey, campus Monterrey.

©Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey 2017  
Derechos reservados

El autor otorga al ITESM el permiso de reproducir y  
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes

---

# Abstract

---

# Resumen

iiiiiii

---

# Agradecimientos

---



# Dedicatoria

*A mi familia.*



# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>IX</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1. Sobre guías de ondas</b>	<b>3</b>
1.0.1. Ecuaciones de Helmholtz . . . . .	3
1.0.2. Guías dieléctricas con frontera metálica . . . . .	4
1.0.3. Guías dieléctricas . . . . .	6
1.0.4. Acoplamientos . . . . .	9
1.0.5. Separación de constante de propagación . . . . .	9
<b>2.</b>	<b>11</b>
<b>3.</b>	<b>13</b>
<b>4.</b>	<b>15</b>
<b>A. Simulación cuántica con iones atrapados</b>	<b>17</b>



Índice general

# Introducción



# Capítulo 1

## Sobre guías de ondas

En este capítulo se estudiará el comportamiento de los campos electromagnéticos a través de guías de ondas o fibras. Se empezara con la deducción de las ecuaciones de Helmholtz para una onda plana en dos dimensiones, y de ahí se partirá en la deducciones de los campos en fibras metálicas para configuraciones cilíndricas y cuadradas.

Posteriormente se estudiaran las fibras dieléctricas también en las mismas configuraciones. Al final del capitulo se empiezan a experimentar con acoplamientos entre fibras dieléctricas y sus posibles interacciones. Al final de cada apartado se encuentra una simulación computacional del fenómeno Los códigos se pueden encontrar en anexos.

### 1.0.1. Ecuaciones de Helmholtz

Se empieza con las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo, isotrópico y lineal, sin cargas ni corrientes libres [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{v^2} \partial_t \mathbf{E}, \quad (1.1d)$$

donde los campos electricos y magnéticos estan representados por  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  con una rapidez de propagación en el medio dada por  $v$ . Además se uso la notación corta  $\partial_t$  para representar la derivada con respecto al tiempo.

Un campo electromagnético monocromático que se propaga en la dirección  $+z$  se puede escribir en coordenadas cartesianas en la forma.

$$\mathbf{E} = [E_x(\rho) \hat{x} + E_y(\rho) \hat{y} + E_z(\rho) \hat{z}] e^{ikz - i\omega t}, \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{B} = [B_x(\rho) \hat{x} + B_y(\rho) \hat{y} + B_z(\rho) \hat{z}] e^{ikz - i\omega t}, \quad (1.2b)$$

donde la posición en el plano transversal a la dirección de propagación está dada por  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . En esta formulación de los campos se ha usado una aproximación paraxial al eje de vertical de la guía de onda.

Sustituyendo estos campos en las ecuaciones de Maxwell se obtiene [1].

$$\partial_y E_x - \partial_x E_y = iwB_z, \quad (1.3a)$$

$$ikE_x - \partial_x E_z = iwB_y, \quad (1.3b)$$

$$\partial_y E_z - ikE_y = iwB_x, \quad (1.3c)$$

$$\partial_x B_z - \partial_y B_x = \frac{-iwE_z}{v^2}, \quad (1.3d)$$

$$ikB_x - \partial_x B_z = \frac{-iwE_y}{v^2}, \quad (1.3e)$$

$$\partial_y B_z - ikB_y = \frac{-iwE_x}{v^2}, \quad (1.3f)$$

donde hemos obviado la dependencia espaciotemporal,  $\mathbf{E}_i \equiv \mathbf{E}_i(\rho, t)$  y  $\mathbf{B}_i \equiv \mathbf{B}_i(\rho, t)$ .

Despejando entre ellas se puede llegar a:

$$E_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k\partial_x E_z + w\partial_y B_z), \quad (1.4a)$$

$$E_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k\partial_y E_z - w\partial_x B_z), \quad (1.4b)$$

$$B_x = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k\partial_x B_z - \frac{w}{v^2}\partial_y E_z), \quad (1.4c)$$

$$B_y = \frac{i}{(\frac{w}{v})^2 - k^2} (k\partial_y B_z - \frac{w}{v^2}\partial_x E_z), \quad (1.4d)$$

Una deducción mas detallada de las formulas se puede encontrar en [1]. Acoplando los campos y factorizando, podemos llegar a la forma básica de la ecuación de Helmholtz

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2]E_z = 0 \quad (1.5a)$$

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + (\frac{w}{v})^2 - k^2]B_z = 0, \quad (1.5b)$$

Este conjunto de ecuaciones derivadas para el caso particular de 3 dimensión en coordenadas cartesianas se pueden generalizar a un conjunto de ecuaciones independiente de coordenadas, como se ve mas adelante en la ecuación 1.30a. Basta con resolver estas ecuaciones diferenciales parciales para encontrar una solución al comportamiento de los campos dentro de las fibras.

Particularmente se puede observar que estas ecuaciones soportan soluciones para el caso de  $E_z = 0$ ,  $B_z = 0$ . El primer caso es conocido como TE o modo transversal eléctrico y el segundo como TM o modo transversal magnético, el caso en donde ambos campos son 0 es conocido como TEM o modo transversal electromagnético

### 1.0.2. Guías dieléctricas con frontera metálica

Para este apartado se resolverá las ecuaciones de Helmholtz dentro de un guía con paredes metálicas y en cuyo interior se encuentra algún material dieléctrico. Estas



guías soportan modos puros de onda, es decir modos TE o TM, sin embargo los modos TEM no son una solución viables para este tipo de fibras. Se procederá a resolver dos configuraciones: para geometría cuadrada y circular, las dos para el caso de modos TE.

### Guías cuadradas

$$\begin{aligned}
B_z(x, y) &= X(x)Y(y) \\
Y\partial_x^2 X + X\partial_y^2 Y + \left[\left(\frac{w}{v}\right)^2 - k^2\right]XY &= 0 \\
\frac{1}{X}\partial_x^2 X &= -k_x^2, \frac{1}{Y}\partial_y^2 Y = -K_y^2 \\
-k_x^2 - k_y^2 + \left(\frac{w}{v}\right)^2 - k^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Proponiendo

$$X(x) = A \sin(K_x x) + B \cos(k_x x), \tag{1.7}$$

metendiolo en las ecuaciones originales

$$E_x = , \propto E_0 \sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi\frac{y}{a}\right) \tag{1.8}$$

$$E_y = , \propto E_0 \sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi\frac{y}{a}\right) \tag{1.9}$$

$$E_z = \tag{1.10}$$

$$B_x = , \propto B_0 \cos\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi\frac{y}{a}\right) \tag{1.11}$$

$$B_y = , \propto B_0 \cos\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi\frac{y}{a}\right) \tag{1.12}$$

$$B_z = \tag{1.13}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{w}{v}\right)^2 - \pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}, \tag{1.14}$$

### Guías esféricas

Las ecuaciones de Helmholtz en coordenadas cilindricas toman la forma

$$E_\rho = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[ \beta_z \partial_\rho E_z + \frac{w\mu}{\rho} \partial_\phi B_z \right] \tag{1.15}$$

$$E_\phi = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[ \frac{-\beta_z}{\rho} \partial_\phi E_z + w\mu \partial_\rho B_z \right] \tag{1.16}$$

$$B_\rho = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[ \frac{w\epsilon}{\rho} \partial_\phi E_z - \beta_z \partial_\rho B_z \right] \tag{1.17}$$

$$B_\phi = \frac{i}{\beta_z^2 - \beta^2} \left[ w\epsilon \partial_\rho E_z + \frac{\beta_z}{\rho} \partial_\phi B_z \right], \tag{1.18}$$

Satisfaciendo en laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho B_z) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 B_z - (\beta_z^2 - \beta^2)B_z = 0, \quad (1.19)$$

Donde

$$\beta_c^2 = \beta^2 - \beta_z^2, \quad (1.20)$$

Utilizando separación de variables de la forma

$$B_z = R(\rho)\Phi(\phi)e^{-i\beta_z z}, \quad (1.21)$$

Sustituyendo 1.21 en 1.19 y acomodando, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\rho}{R}(R' + \rho R'') + \beta_c^2 \rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = n^2, \quad (1.22)$$

Que tiene soluciones de la forma

$$\Phi(\phi) = A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi) \quad (1.23)$$

$$R(\rho) = C_n J_n(\beta_c \rho), \quad (1.24)$$

y que tiene las soluciones generales

$$E_\rho = i\frac{iw\mu n}{\beta_c^2 \rho} J_n(\beta_c \rho)(A_n \sin(n\phi) - B_n \cos(n\phi))e^{-i\beta_z z} \quad (1.25)$$

$$E_\phi = i\frac{iw\mu}{\beta_c} J_n(\beta_c \rho)(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi))e^{-i\beta_z z} \quad (1.26)$$

$$B_\rho = -\frac{\beta_z}{w\mu} E_\phi \quad (1.27)$$

$$B_\phi = \frac{\beta_z}{w\mu} E_\rho \quad (1.28)$$

$$B_z = J_n(\beta_c \rho)(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi))e^{-i\beta_z z}, \quad (1.29)$$

Donde  $J_n(\beta_c \rho)$  son los polinomios de Bessel.

### 1.0.3. Guías dieléctricas

Que son las ecuaciones de Helmholtz en dos dimensiones. Estas ecuaciones pueden ser generalizadas a

$$B_t = \frac{1}{\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2}[D_t(\partial_z B_z) + i\mu\epsilon\frac{w}{v}e_3 \times D_t E_z] \quad (1.30a)$$

$$E_t = \frac{1}{\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2}[D_t(\partial_z E_z) - i\frac{w}{v}e_3 \times D_t B_z], \quad (1.30b)$$

---

Donde  $t$  es la componente transversal

$$B_t = \frac{1}{\gamma^2} [D_t(\partial_z B_z) + i\mu\epsilon \frac{w}{v} e_3 \times D_t E_z], \quad (1.31a)$$

Desarrollando todas las componentes implicada

$$B_{rho} = \frac{ik}{\gamma^2} \partial_{rho} B_z \quad B_\phi = \frac{i\epsilon w}{\gamma^2 v} \partial_\rho E_z \quad (1.32a)$$

$$E_\phi = \frac{-w}{vk} B_\rho \quad E_\rho = \frac{vk}{\epsilon w} B_\phi, \quad (1.32b)$$

Con soluciones

$$\left. \begin{aligned} B_z &= J_0(\gamma\rho) \\ B_\rho &= \frac{-ik}{\gamma} J_1(\gamma\rho) \\ E_\phi &= \frac{iw}{v\gamma} J_1(\gamma\rho) \end{aligned} \right\} \quad \text{para} \quad \rho \leq a,$$

$$\left. \begin{aligned} B_z &= AK_0(\beta\rho) \\ B_\rho &= \frac{ikA}{\beta} K_1(\beta\rho) \\ E_\phi &= \frac{-iwA}{v\beta} K_1(\beta\rho) \end{aligned} \right\} \quad \text{para} \quad \rho \geq a,$$

Condiciones de frontera a  $\rho = a$

$$AK_0(\beta a) = J_0(\gamma a) \quad (1.33)$$

$$-\frac{A}{B} K_1(\beta a) = \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma}, \quad (1.34)$$

Despejando A

$$A = \frac{J_0(\beta A)}{k_0(\beta a)}, \quad (1.35)$$

Si sumamos y despejamos

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0, \quad (1.36)$$

Con la condición

$$\gamma^2 + \beta^2 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{w^2}{v^2}, \quad (1.37)$$

## Guías cuadradas

Las misma ecuaciones para los campos que se obtuvieron en el caso de fibras metálicas cuadradas siguen siendo validas para este caso, solo que ahora tendremos que empatar en la fronteras para respetar la evolución de los campos en todo el espacio. Primeramente definamos las ecuaciones que describen los campos pero ahora con un desfase.

$$E_z = E_0 \sin(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.38)$$

$$B_z = B_0 \cos(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y), \quad (1.39)$$

Se tienen soluciones oscilatorias dentro de la fibra y con caída exponencial fuera de ella. Se puede usar el hecho de que para que la formulación sea valida el campo eléctrico debe de ser un mínimo o máximo en la frontera.

$$\sin\left(\frac{k_x a}{2} + \phi_x\right) = \sin\left(\frac{k_y b}{2} + \phi_y\right) = \pm 1 \quad \vee \quad 0, \quad (1.40)$$

Utilizando las ecuaciones de Helmholtz en forma cartesiana

$$B_x = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_x B_z - w \epsilon \partial_y E_z) \quad (1.41)$$

$$B_y = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_y B_z - w \epsilon \partial_x E_z) \quad (1.42)$$

$$E_x = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_x E_z - w \mu \partial_y B_z) \quad (1.43)$$

$$E_y = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z \partial_y E_z - w \mu \partial_x B_z), \quad (1.44)$$

$$(1.45)$$

Operando con 1.38 en 1.41 obtenemos las ecuaciones de los campos en todo el espacio.

$$B_x = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_x B_0 + w \epsilon k_y E_0) \sin(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.46)$$

$$B_y = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_y B_0 + w \epsilon k_x E_0) \cos(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.47)$$

$$E_x = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_x E_0 + w \mu k_y B_0) \cos(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (1.48)$$

$$E_y = \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} (k_z k_y E_0 + w \mu k_x B_0) \sin(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y), \quad (1.49)$$

$$(1.50)$$

---

## Guías esféricas

$$\gamma^2 = \mu_1 \epsilon_1 \frac{w^2}{v^2} - k^2 \quad \text{Dentro} \quad (1.51a)$$

$$\beta^2 = k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{w^2}{v^2} \quad \text{Fuera (onda desvaneciente),} \quad (1.51b)$$

La ecuacion de Helmholtz para variación azimutal toma la forma

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1} \partial_\rho + \gamma^2) \psi = 0 \quad (1.52a)$$

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1} \partial_\rho - \beta^2) \psi = 0, \quad (1.52b)$$

Que es la ecuación diferencial de Bessel y cuya solución toma la forma

$$\psi = \begin{cases} J_0(\gamma \rho), \rho \leq a \\ A k_0(\beta \rho), \rho > a, \end{cases} \quad (1.53)$$

### 1.0.4. Acoplamientos

Las ecuaciones de Maxwell en el interior de una fibra metálica tiene la forma.

### 1.0.5. Separación de constante de propagación

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.54a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{B}, \quad (1.54b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.54c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \mathbf{E} + \mu \sigma \mathbf{E}, \quad (1.54d)$$

Operando el rotaciones en la ultima ecuación y usando la identidad del triple producto vectorial obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{E} + \mu \sigma \partial_t \mathbf{E} \quad (1.55a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{B} + \mu \sigma \partial_t \mathbf{B}, \quad (1.55b)$$

Utilizando la formulación imaginaria de los campos, Eq.(1.2), puedo encontrar la relación de dispersión para Operando con ellas y usando las ecuaciones 1.55, obtenemos una ecuación para el numero de onda

$$k^2 = \mu \epsilon w^2 + i \mu \sigma w, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \mu, \epsilon, \sigma \in \mathbb{R}, \quad (1.56)$$

Quitando la dependencia de la frecuencia  $w$

$$\begin{aligned}(k + i\kappa)^2 &= k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa = \mu\epsilon w^2 + i\mu\sigma w \\ k^2 - \kappa^2 &= \mu\epsilon w^2,\end{aligned}\tag{1.57a}$$

$$2k\kappa = \mu\sigma w,\tag{1.57b}$$

por lo que

$$\kappa = \frac{\mu\epsilon w}{2k},\tag{1.58}$$

Metiendo las equivalencias obtenidas a las ecuaciones originales

$$k^4 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4} - \mu\epsilon w^2 = 0,\tag{1.59a}$$

Completando cuadrados llegamos a

$$k = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}},\tag{1.60a}$$

como  $\kappa^2 = k^2 - \mu\epsilon w^2$  luego

$$\kappa = w\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon w}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}},\tag{1.61a}$$

## Capítulo 2





## Capítulo 3



## Capítulo 4



## Apéndice A

### Simulación cuántica con iones atrapados



# Bibliografía

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, 2012.