Taller 2. Metodos Computacionales.

Juan José Gaitán - 201912484
Juan Daniel Rodriguez - 201922001

Punto 1.5

Mostrar que D^4_f es dado por $$D^4_f(x_j) \equiv \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

$$D^4_f(x_j) = f^{iv}(x_j)$$

Realizando una expansion en series de Taylor de $f(x+h)$ y $(x-h)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \frac{h^6}{6!}f^{vi}(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) - \frac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \frac{h^6}{6!}f^{vi}(x) + \dots$$

Al sumar estas dos expresiones tenemos:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!}f^{iv}(x) + \frac{2h^6}{6!}f^{vi}(x) + \dots$$

Luego

$$f^{iv}(x) = \frac{12(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - h^2 f''(x))}{h^4} - \frac{2h^2}{15}f^{vi}(x)$$

Como demostramos en el punto anterior que

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}$$

Luego

$$f^{iv}(x) = \frac{12\left(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4}\right)}{h^4} + O(h^2)$$

$$f^{iv}(x) = \frac{-3(f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h))}{-3h^4} + O(h^2)$$

$$f^{iv}(x_j) = \frac{f(x_j+2) - 4f(x_j+1) + 6f(x_j) - 4f(x_j-1) + f(x_j-2)}{h^4} + O(h^2)$$

R/=

$$D^4_f(x_j) \equiv \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

La aproximacion es de orden $O(h^2)$