Taller 4. Integración

Juan José Gaitán - 201912484
Juan Daniel Rodriguez - 201921704

Punto 1

Hacer pasos intermedios para regla de trapecio simple.

Método del trapecio simple → Cambio el integrando por un polinomio interpolador de primer grado.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Se considera $x_0 = a$, $x_1 = b$ con los puntos $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$

$$f(x) \approx p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot L_i(x) = f(x_0)\cdot L_0(x) + f(x_1)\cdot L_1(x)$$

Conociendo que $L_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Por lo que $p_1(x) = f(x_0)\,\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Usando las consideraciones $x_0 - x_1 = a - b$ y $x_1 - x_0 = b - a$

Entonces $I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b \left[f(a)\cdot\frac{x-b}{a-b} + f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a} \right] dx$

$$I = \frac{f(a)}{a-b}\cdot\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\cdot\int_a^b (x-a)\,dx$$

$$I = \frac{f(a)}{a-b}\cdot\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\cdot\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b$$

$$I = \frac{f(a)}{a-b}\cdot\left(\frac{b^2}{2} - b^2 - \frac{a^2}{2} + ab\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2\right)$$

$$I = -\frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2}\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2}\right)$$

$$I = -\frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2}\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2}\right)$$

$$I = -\frac{f(a)}{a-b} \cdot \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{f(b)}{b-a} \quad \frac{(a-b)^2}{2}$$

$$I = -\frac{f(a)}{\cancel{a-b}} \cdot \frac{(a-b)^{\cancel{2}}}{2} + \frac{f(b)}{-\cancel{(a-b)}} \cdot \frac{(a-b)^{\cancel{2}}}{2}$$

$$I = -f(a) \cdot \frac{(a-b)}{2} - f(b) \cdot \frac{(a-b)}{2}$$

$$I = -\frac{(a-b)}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) \right]$$

$$I = \frac{(b-a)}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) \right]$$

R/=

La integral tiene un valor aproximado

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \cong \int_a^b P_1(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) \right]$$