Taller 4. Integración

Juan José Gaitán - 201912484
Juan Daniel Rodriguez - 201921704

Punto 3

Hacer los pasos intermedios para encontrar la regla de Simpson simple.

Regla de Simpson Simple $\left(\frac{1}{3}\right)$ → Cambia el integrando por un polinomio interpolador de grado dos

Para la integral definida $I = \int_a^b f(x)dx$

Conjunto $\Omega = \{(a, f(a)), (x_m, f(x_m)), (b, f(b))\}$ donde $x_m = \frac{a+b}{2}$

Entonces se da la aproximación

$$f(x) \cong P_2(x) = f(a).\frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)} + f(x_m).\frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} + f(b)\cdot\frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}$$

Entonces

$$I = \int_a^b \overbrace{f(a).\frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)}}^{I_1} + \overbrace{f(x_m).\frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}}^{I_2} + \overbrace{f(b)\cdot\frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}}^{I_3}\, dx$$

Que al usar la integración por partes y propiedades de la integral

- $I_1 = \int_a^b f(a)\cdot\frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)}\cdot dx = \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\cdot\int_a^b (x-b)(x-x_m)\cdot dx$

Usando $x_m = a+h \rightarrow a - x_m = -h$

$h = \frac{(b-a)}{2} \longrightarrow b-a = 2h \rightarrow a-b = -2h$

$x_m - b = -h$

Se tiene $x-b = dv$ y $x - x_m = u$

$$\int_a^b (x-b)(x-x_m)\,dx = \left[(x-x_m).\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-b)^3}{3}\right]_a^b$$

$$= -(a-x_m)\frac{(a-b)^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{(a-b)^3}{3}$$

$$= -(-h)\frac{(-2h)^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{(-2h)^3}{3} = 2h^3 - \frac{8h^3}{6} = \frac{2h^3}{3}$$

Entonces I_1

$$I_1 = \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)} \cdot \frac{2h^3}{3} = \frac{f(a)}{\cancel{2h^2}} \cdot \frac{\cancel{2h^3}}{3} = f(a) \cdot \frac{h}{3}$$

- $$I_2 = \int_a^b f(x_m) \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} = \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)} \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

Resolviendo la integral

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \left[(x-a)\cancelto{0}{\frac{(x-b)^2}{2}} \right]_a^b - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-b)^3}{3} \right]_a^b$$

Rempl...

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(a-b)^3}{3} = \frac{1}{6}(a-b)^3 = \frac{1}{6}(-2h)^3 = -\frac{8h^3}{6} = -\frac{4}{3}h^3$$

Entonces I_2

$$I_2 = \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)} \cdot -\frac{4}{3}h^3 = \frac{f(x_m)}{\cancel{-h^2}} \cdot \frac{\cancel{-}4\cancel{h^3}}{3} = f(x_m) \cdot \frac{4}{3}h$$

- $$I_3 = \int_a^b f(b) \cdot \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)} = \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)} \int_a^b (x-a)(x-x_m)\,dx$$

Resolviendo la integral

$$\int_a^b (x-a)(x-x_m)\,dx = \left[(x-x_m)\frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_a^b$$

$$= (b-x_m) \cdot \frac{(b-a)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)^3}{3}$$

Rempl...

$$= h\,\frac{(2h)^2}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{(2h)^3}{3} = 2h^3 - \frac{4}{3}h^3 = \frac{2h^3}{3}$$

Entonces I_3

$$I_2 = \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)} \cdot \frac{2}{3}h^3 = \frac{f(b)}{\cancel{2h^2}} \cdot \frac{\cancel{2h^3}}{3} = f(b) \cdot \frac{h}{3}$$

Por lo que $I = I_1 + I_2 + I_3$

R/=

$$I = f(a) \cdot \frac{h}{3} + f(x_m) \cdot \frac{4}{3}h + f(b) \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b) \right)$$

La integral tiene un valor aproximado de:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(x_m) + f(b) \right]$$