Taller 4. Integración

Juan José Gaitán - 201912484
Juan Daniel Rodriguez - 201921704

Punto 4

Verificar el resultado presentado en la ecuación (1,89).

$$E = \int_a^b \epsilon(x)dx = \int_a^b \frac{f'''(\xi)}{4!}(x-a)(x-b)(x-(a+b)/2)dx = 0, \qquad a \leq \xi \leq b. \quad (1.89)$$

$$E = \int_a^b \varepsilon(x)dx = \int_a^b \frac{f'''(\xi)}{4!}(x-a)(x-b)\left(x - \frac{(a+b)}{2}\right)dx = 0, \quad a \leq \xi \leq b$$

Suponiendo que $f(x)$ es continua y derivable de clase C^3 en $[a,b]$.

$$f(x) = P_2(x) + \varepsilon(x)$$

$$E = \int_a^b \varepsilon(x)dx = \int_a^b f(x) - P_2(x)\, dx \qquad x_m = \frac{a+b}{2}$$

$$E = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_2(x)\, dx$$

Por el punto anterior $\int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + f(x_m) + f(b)\right]$

$$E = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + f(x_m) + f(b)\right]$$

Expansión en series de Taylor alrededor del punto a

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(h)^k + \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi)(h)^{n+1}$$

$$f(a) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right]$$

Con el límite superior se tiene

$$E_i \leq \max\left|\frac{f'''(\xi)}{6}\right| \int_a^b (x-a)(x-x_m)(x-b)dx$$

$$E_i = \max \frac{f''(\xi)}{12}(x-a)(x-x_m)(x-b)dx \qquad 24 = 4!$$

Por lo que $|E| = |n E_i| \leq \max \left|\frac{f''''(\xi)}{12}\right| |(x-a)(x-b)(x-x_m)|$ R/.

$$E = \frac{f'''(\xi)}{24}(x-a)(x-b)(x-x_m) \rightarrow |E| \leq \frac{h^3}{4!} \max f'''(\xi)(b-a)$$