Primer parcial - 1/10/2025

Ejercicio 1 (Algoritmo de Metropolis-Hastings: cambio del modelo de propuesta). (2.5 puntos)

Se considera la función R `one_mh_iteration()`, presentada en la sección 7.2 "The Metropolis-Hastings algorithm" del libro "Bayes Rules!".

- Crear una nueva función R `one_mh_iteration_normal()`, la cual utiliza un modelo de propuesta Normal simétrica, centrada en el valor actual de la cadena μ, con desviación estándar s:

$$\mu' \mid \mu \sim N(\mu, s^2).$$

- Comenzando desde un valor inicial de $\mu = 3$ y con `set.seed(1)`, ejecutar la nueva función `one_mh_iteration_normal` bajo cada una de las siguientes configuraciones:

  1. `one_mh_iteration_normal(s = 0.01, current = 3)`
  2. `one_mh_iteration_normal(s = 0.5, current = 3)`
  3. `one_mh_iteration_normal(s = 1, current = 3)`
  4. `one_mh_iteration_normal(s = 3, current = 3)`

- Comentar sobre los valores obtenidos de `proposal`, `alpha` y `next_stop`.

Ejercicio 2 (Recorrido de Metropolis-Hastings con propuestas Normales). (3 puntos)

- Emplear la nueva función `one_mh_iteration_normal()`, creada resolviendo el ejercicio anterior, a los efectos de modificar la función R `mh_tour()`, presentada en la sección 7.3 "Implementing the Metropolis-Hastings" del libro "Bayes Rules!", para crear una nueva función R `mh_tour_normal()`, la cual construye una cadena de valores de μ utilizando un modelo de propuestas Normal con desviación estándar s.

- Utilizando `set.seed(84735)`, ejecutar la nueva función `mh_tour_normal()` bajo cada una de las siguientes configuraciones y construir un gráfico de la traza (trace plot) de cada cadena:

  a) 20 iteraciones, $s = 0.01$
  b) 20 iteraciones, $s = 10$
  c) 1000 iteraciones, $s = 0.01$
  d) 1000 iteraciones, $s = 10$

- Comparar los gráficos de traza de los incisos a) y b). Explique en términos sencillos por qué cambiar la desviación estándar del modelo de propuestas Normal causa estas diferencias.

- Reflexionando sobre los resultados anteriores, ajustar su algoritmo de Metropolis-Hastings. Es decir, identificar un valor razonable de la desviación estándar s y proporcionar un gráfico de traza como evidencia.

Ejercicio 3 (Modelo Normal-Normal). (3 puntos)

Se considera el modelo Normal-Normal de μ con

$$Y_i \mid \mu \sim N(\mu, 8^2) \quad \text{y} \quad \mu \sim N(-14, 2^2).$$

Suponer que con $n = 5$ observaciones independientes se obtienen los siguientes datos:

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) = (-10.1,\ 5.5,\ 0.1,\ -1.4,\ 11.5).$$

1. Simular el modelo a posteriori de μ (`set.seed(84735)`) utilizando `RStan` con 4 cadenas y 10000 iteraciones por cadena.
2. Generar los gráficos de traza (trace plots) y de densidad (density plots) para las cuatro cadenas.
3. A partir de los gráficos de densidad, ¿cuál parece ser el valor más plausible a posteriori de μ?
4. Especificar el modelo a posteriori exacto de μ (sección 5.3.3 "Normal-Normal conjugacy" del libro "Bayes Rules!"). ¿Cómo se compara su aproximación MCMC?

Ejercicio 4 (El modelo Beta-Geométrico). (3.5 puntos)

Se considera el siguiente modelo bayesiano:

$$Y \mid \theta \sim \text{Geométrica}(\theta), \quad \theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta),$$

donde el modelo Geométrico tiene función de masa de la probabilidad

$$f(y \mid \theta) = \theta(1-\theta)^{y-1}, \quad y \in \{1, 2, \dots\}.$$

- Hallar el modelo a posteriori de θ dada una muestra de n observaciones independientes $(Y_1, \cdots, Y_n) = (y_1, \cdots, y_n)$.
- Identificar el nombre de la familia de la distribución a posteriori de θ y cuáles son sus parámetros.
- ¿Es el modelo Beta una distribución a priori conjugada para el modelo de datos Geométrico?
- Suponer que $\theta \sim \text{Beta}(2, 5)$, y que con $n = 6$ observaciones independientes se obtienen los siguientes datos:

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6) = (3,\ 5,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5).$$

- Simular el modelo a posteriori de θ (`set.seed(84735)`) utilizando `RStan` con 4 cadenas y 10000 iteraciones por cadena.
- Generar los gráficos de traza (trace plots) y de densidad (density plots) para las cuatro cadenas.
- A partir de los gráficos de densidad, ¿cuál parece ser el valor más plausible a posteriori de θ?
- Especificar el modelo a posteriori exacto de θ. ¿Cómo se compara su aproximación MCMC?