# PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

## REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Obtener la representación gráfica de los siguientes números complejos:

   a) $z = 6\left[\cos(\frac{4}{3}\pi) + J\,\mathrm{sen}(\frac{4}{3}\pi)\right]$ ;  b) $z = 4\,e^{J\frac{3}{5}\pi}$ ;

   c) $z = 2\,e^{-J\frac{\pi}{4}}$ ;  d) $z = (\pi^{-1}, -\pi)$ .

2. Obtener la representación rectangular (o binomial) $a + Jb$, con $a$ y $b$ reales, de los siguientes números complejos:

   a) $z = \dfrac{1}{1+J2}$ ;  b) $z = \left(J + \dfrac{1}{1-J2}\right)^2$;

   c) $z = \left(\dfrac{4-J4}{2+J2}\right)^7$;  d) $z = \dfrac{3-J4}{1+J2} + \dfrac{3+J4}{1-J2}$ .

3. Obtener la representación polar $r\ e^{J\theta}$, con $r > 0$ y $\theta \in [-\pi, \pi)$, de los siguientes números complejos:

   a) $z = (5+J5)(3-J4)$ ;  b) $z = \dfrac{3-J2}{-1+J}$ ;

   c) $z = (6-J3)^2$ ;  d) $z = \dfrac{1/J + J/2}{J4 - 2/J}$ .

4. Obtener la representación polar $r\ e^{J\alpha}$, con $r > 0$, pero ahora, $\alpha \in [-\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$, de los siguientes números complejos:

   a) $z = (5+J5)(3-J4)$ ;  b) $z = \dfrac{3-J4}{-1+J}$ ;

   c) $z = (6-J3)^2$ ;  d) $z = \dfrac{1/J + J/2}{J4 - 2/J}$ .

## ÁLGEBRA DE NÚMEROS COMPLEJOS

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con $Z, W$ números complejos:

   a) $\begin{cases} (3+J4)\ Z + (3\ e^{-J\frac{\pi}{4}})\ W = 13\cos(\frac{\pi}{3}) + J\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}) \\ J\ Z + (1-J)\ W = 13 + J \end{cases}$

   b) $\begin{cases} e^{-J\pi}\ Z + (\frac{\sqrt{2}}{2} + J\frac{\sqrt{2}}{2})\ W = J \\ J(1+J)\ Z - J\ W = 0 \end{cases}$

6. Resolver y graficar las siguientes ecuaciones de números complejos (obtener las raíces del polinomio):

   a) $z^2 - 2z + 2 = 0$ b) $z^2 + (3 + J)z + 4 + J3 = 0$

   c) $z^2 - 2\sqrt{3} + J2 = 0$ ; d) $z^5 + 4 - J4 = 0$ ;

   e) $z^4 + J16 = 0$ ; f) $z^3 - J^2 = 0$ ;

   g) $z^5 + 16 - J16\sqrt{3} = 0$ ; h) $z^6 + J27 = 0$ .

7. Sean $z_1 = x_1 + Jy_1,\ z_2 = x_2 + Jy_2$, $z = x + Jy$, números complejos.
   Comprobar las siguientes identidades:

   a) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ ; b) $Im(z) = \frac{1}{J2}(z + \overline{z})$ ;

   c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ ; d) $\overline{z_1\ z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

   e) $z\ \overline{z} = |z|^2$ ; f) $|z_1\ z_2| = |z_1|\ |z_2|$ ;

   g) $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |Jz_1| = 1 \\ |z_1\ z_2| = 1 \end{cases}$ ; h) $z \cdot Jz = 0$ ($\cdot$ producto escalar);

   i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdad triangular); j) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

8. Verificar las siguientes identidades usando la fórmula de Euler:

   a) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{J\theta} + e^{-J\theta})$ ;

   b) $\operatorname{sen}(\theta) = -\frac{J}{2}(e^{J\theta} - e^{-J\theta})$ ;

   c) $\operatorname{sen}^3(\theta) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3\theta)$ ;

   d) $\cos^3(\theta) = \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)$ ;

   e) $\cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \cos(\alpha + \beta)$ ;

   f) $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$.

## DOMINIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

9. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos de números complejos $A$ y $B$, represente gráficamente su unión $A \cup B$ y su intersección $A \cap B$ :

   a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 3\}$ ,
   $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - J2| \leq 2\}$ ;

   b) $A = \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| \leq |Re(z)|\}$ ,
   $B = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \leq 0\}$ ;

   c) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq Re(z) \leq 3\}$ ,
   $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq Im(z) \leq 3\}$ ;

   d) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq Re(z) \leq 3\,,\ -2 \leq Im(z) \leq 2\}$ ,
   $B = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq Re(z)\,,\ -1 \leq Im(z) \leq 1\}$ .