Guía de Trabajos Prácticos N1

Unidad 1: Funciones de Variable Compleja

Mgter. In. Silvia Carrera

Comisiones: 2R1 , 2R3

Marzo, 2021

Objetivos de Aprendizaje:

- ❖ Reconocer la parte real de la imaginaria de f(z) para separarlas en ejercicios pedagógicos .
- ❖ Adquirir habilidad en el cálculo de límites de una f (z) para incorporar los conceptos y relaciones subyacentes en la resolución de ejercicios pedagógicos con el propósito de mejorar la capacidad de abstracción mental.
- ❖ Interpretar la información contenida en el análisis de límites de f(z).
- ❖ Juzgar la existencia de f´(z_0) todo punto de un entorno de z_0 para concluir sobre la analiticidad de la misma.
- ❖ Diferenciar el logaritmo de z de una función logarítmica f(z).
- ❖ Crear ramas de log z analíticas en un dominio D.
- ❖ Elaborar estrategias metodológicas para resolver exponenciales complejas.

1.Exprese w(z) en términos de sus partes real e imaginaria, w(z) = u(x, y)+Jv(x, y), para las siguientes funciones:

a) w(z) = z^2 + 6z + 10 (1)

Reemplazamos en (1) z = x +j y

w(z) = $(x+jy)^2$ + 6 (x +jy) + 10

w(z) = $(x)^2$ + j 2x y - y^2+ 6 x +j 6y + 10

w(z) = x^2 - y^2+ 6 x +10 +j 6y + j 2x y

w(z) = x^2 - y^2+ 6 x +10 +j (6y + 2x y)

u (x,y) = x^2 - y^2+ 6 x +10
v (x,y) = 6y + 2x y

<u>Construimos conocimiento</u>: Tanto u (x,y) como v(x,y) son siempre funciones reales

1.Exprese w(z) en términos de sus partes real e imaginaria, w(z) = u(x, y)+Jv(x, y), para las siguientes funciones:

c) w(z) = e^{z^2} (1)

Reemplazamos en (1) z = x +j y

w(z) = $e^{(x+jy)^2}$

w(z) =$e^{(x^2 + j2xy - y^2)}$

w(z) = $e^{x^2} . e^{j2xy} . e^{-y^2}$

w(z) = $e^{x^2} . e^{-y^2} . e^{j2xy}$

w(z) = $e^{x^2} . e^{-y^2}$ [cos (2xy) + j sen (2xy)]

w(z) = $e^{x^2} . e^{-y^2}$ [cos (2xy) + j sen (2xy)]

u(x,y) = $e^{x^2} . e^{-y^2}$ cos (2xy)

v(x,y) = $e^{x^2} . e^{-y^2}$ sen (2xy)

2.En cada caso, evalúe la función en los puntos indicados y represente los correspondientes valores en los planos Z y W:

a) w(z) = z(2 − z) (1)

para z1 = 1 + J y z2 = 2 − J2

Reemplazamos en (1) por z1

w(z1) = (1+j)[2 − (1+j)]

w(z1) = (1+j)(2 − 1-j)

w(z1) = (1+j)(1-j)

w(z1) = 1+1 recordar que j^2 = -1

w(z1) = 2

Reemplazamos en (1) por z2

w(z2) = (2-j2)[2 − (2-j2)]

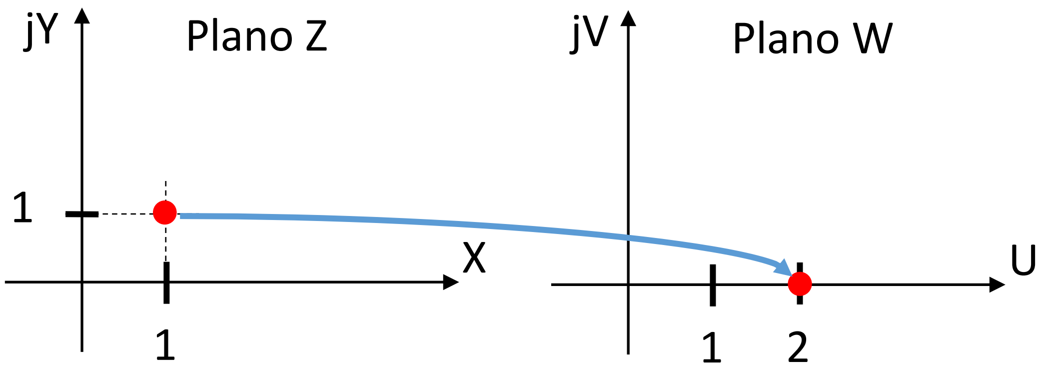
w(z2) = (2-j2)(2 − 2 + j2)

w(z2) = (2-j2)(2j)

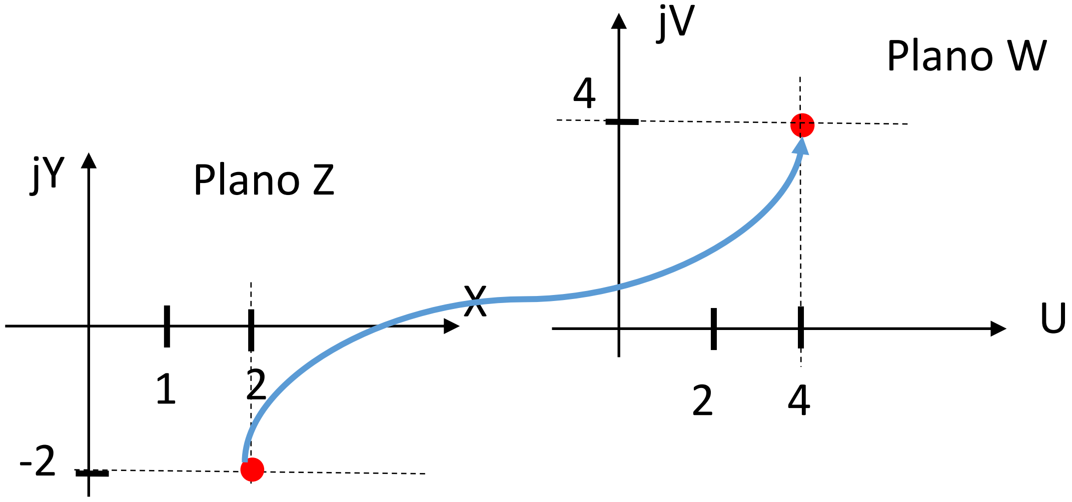
w(z2) = 4 + j4

2.En cada caso, evalúe la función en los puntos indicados y represente los correspondientes valores en los planos Z y W:

a) w(z1) = 2 **es la imagen** de z1 = 1 + J



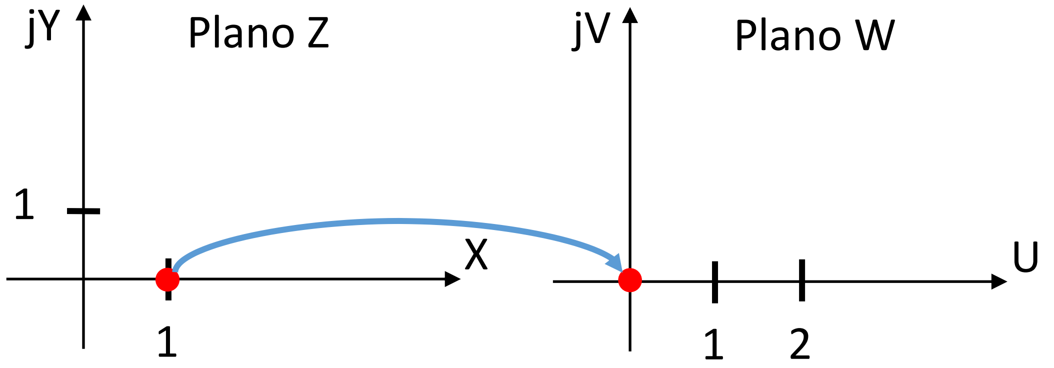
a) w(z2) = 4 +j4 **es la imagen de** z2 = 2 - J2



2.En cada caso, evalúe la función en los puntos indicados y represente los correspondientes valores en los planos Z y W:

d) w(z) = [Re(z) Im(z)] /z (1)

en z1 = 1 y z2 = 1/w(z1)



Reemplazamos en (1) por z1

w(z1) = [1 . 0] /1

w(z1) = 0 **es la imagen de** z_1 =1

2d) $w(z) = [Re(z)\ Im(z)] / z$ (1)

$z2 = 1/w(z1)$

Continuación del ejercicio 2d, para el punto z2

Calculamos el valor de z2:

$z2 = 1/w(z1)$ siendo $W(z1) = 0$

$z2 = 1/0$

$z2 = \infty$

Reemplazamos en (1) por z2:

$w(z2) = [Re(z2)\ Im(z2)] / (z2)$

$w(z2) = \infty / \infty$ No está definido

$z = \infty$ no tiene ni signo ni argumento. Significa que su módulo es mayor que cualquier número real.

Construimos conocimiento

Las expresiones: ∞ / ∞, $\infty + \infty$, $\infty - \infty$

No están definidas

Continuación ejercicio 2d

Cuando el plano Z incluye el punto al infinito, se llama **"plano Z extendido"**

En este curso no consideraremos al infinito un número a menos que forma explícita lo enunciemos así.

Plano Z extendido ∞ satisface las reglas:

$z/\infty = 0$; $z \pm \infty = \infty$ con $Z \neq \infty$;

$z/0 = \infty$ con $Z \neq 0$; $z \cdot \infty = \infty$ con $Z \neq 0$;

$\infty / z = \infty$ con $Z \neq \infty$

3. Sea $f(z) = (2z + 1)/(3z - 2)$, $z \in C \setminus \{ 2/ 3 \}$. Calcule las siguientes funciones:

$f(z) = (2z + 1)/[3(z - 2/3)]$

a) $g(z) = f(1/z)$ (1)

Calculamos f(z) a z por 1/z :

$f(1/z) = [2 (1/z) + 1]/[3(1/z) - 2]$

Reemplazamos la expresión anterior en (1)

$g(z) = [2 (1/z) + 1]/[3(1/z) - 2]$

$g(z) = (2 +z) /(3 - 2z)$

$g(z) = (2 +z)]/ [-2 (z - 3/2)]$

$g(z) = - (2 +z) / [2 (z - 3/2)]$

Rta: **El dominio maximal** de:

$g(z) = - (2 +z) / [2 (z - 3/2)]$, $\mathbf{z \in C \setminus \{ 3/2\}}$

4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{z\to j}(z^2 + 2z)$ (1)

Reemplazamos en (1) por la tendencia :

$$\lim_{z\to j}(z^2 + 2z) = (j^2 + 2j)$$

$$\lim_{z\to j}(z^2 + 2z) = -1 + 2j$$

4. Calcule los siguientes límites:

b) $\lim\limits_{z \to 1+j} (z^2 - z + 1 - j) / (z^2 - 2z + 2)$

$= [(1+j)^2 - (1+j) + 1 - j] / [(1+j)^2 - 2(1+j) + 2]$
$= (1+j2-1-1-j+1-j) / (1+j2-1-2-j2+2)$
$= 0/0$ indeterminación

factorizamos:

$(z^2 - z + 1 - j) = (z+j)(z-1-j)$
$= (z+j)[z-(1+j)]$

$z^2 - 2z + 2 = (z-1-j)(z-1+j)$
$= [z-(1-j)].[z-(1+j)]$

El tipo de indeterminación implica que el polinomio numerador y el polinomio denominador tienen raíces comunes. Ambos polinomios son divisible para z=1+j porque hace 0 la evaluación del límite para cada uno de ellos.

Recordemos la división entre polinomios:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & (z^2 - z + 1 - j) & (z-1-j) \\
\cline{3-3}
+ & -z^2 + z + jz & \mathbf{z + j} \\
\cline{2-2}
 & 0 + 0 + jz + 1 - j & \\
+ & - jz - 1 + j & \\
\cline{2-2}
 & \mathbf{0} &
\end{array}
$$

4. Calcule los siguientes límites:

Continuación 4b)

b) $\lim_{z \to 1+j} (z^2$ – z +1–j) / $(z^2$ – 2z +2)

Factorizamos el planteo original:

$\lim_{z \to 1+j} [(z + j)(z - 1 - j)]/[(z - 1 - j)(z - 1 + j)]$ simplificamos factores comunes

$$\lim_{z \to 1+j} \frac{[(z + j)]}{z - 1 + j} =$$

$\lim_{z \to 1+j} \frac{[(z+j)]}{z-1+j}$ =(1+j+j)/ (1+j-1+j)

= (1+j2) / j2 multiplico y divido por j para eliminar la j del denominador

=1- j /2

5. Evalue los siguientes límites usando la regla de L’Hôpital:

a) $\lim_{z \to 0} (z - sen\ z)/z^3$ = 0/0 indeterminación, levantamos por L´ Hôpital

$\lim_{z \to 0} (1 - cos\ z)/3z^2$ = 1- 1/0

= 0/0 indeterminación, levantamos por L´ Hôpital

$\lim_{z \to 0} (sen\ z)/6z^1$ = 0/0 indeterminación, levantamos por L´ Hôpital

$\lim_{z \to 0} (cos\ z)/6$ = 1/6

7. Demuestre que los siguientes límites no existen:

a) $\lim\limits_{z \to 0} \bar{z}/z$

$\lim\limits_{x \to 0} (x - jy)/(x + jy)$ Tendemos a z→0, usando x→0 , y permanece constante

= - jy / jy

= -1

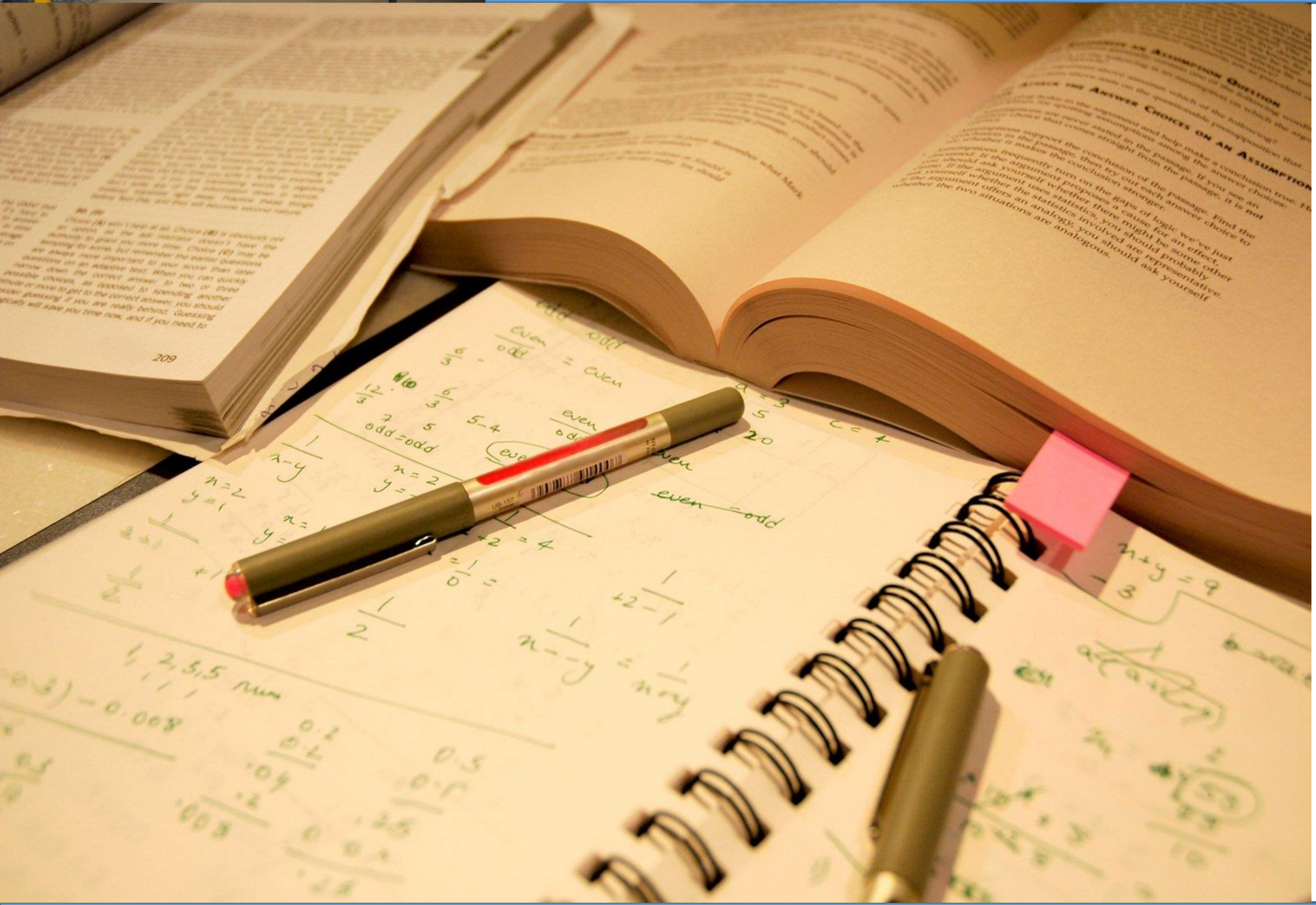
$\lim\limits_{y \to 0} (x - jy)/(x + jy)$ Tendemos a z→0, usando y→0 , x permanece constante

= x / x

= 1

El límite propuesto no existe porque cualquiera sea la trayectoria que tomemos para hacer la aproximación a z→0, debe ser el mismo límite. Recordemos que existen infinitas trayectorias en el entorno de z →0

Unidad 1: Funciones de Variable Compleja



Tomamos tiempo suficiente para estudiar de libros, tópicos referidos a la derivada de una función de variable compleja.

Observamos analogías entre la definición de derivada en el plano real y el complejo

Derivada de una función de variable real **por definición** es:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta z) - f(x_0)] / (\Delta x)$$

Cuando el límite no existe $f'(x_0)$ no está definida,
decimos que f(x) no tiene derivada en x_0 ,
o no es diferenciable en x_0.
Además, cuando f(x) no es continua en x_0 , $f'(x_0)$ no existe.
Entonces, hay dos requerimientos para existencia de $f'(x_0)$:

- Debe existir el límite en x_0
- f(x) debe ser continua en x_0

Peculiaridad: el hecho de que f(x) sea continua en x_0 no asegura la existencia de $f'(x_0)$.

Observamos analogías entre la definición de derivada en el plano real y el complejo

Derivada de una función compleja **por definición** es:

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)]/(\Delta z)$$

Es la misma estructura matemática que para f (x) ……pero…..

Observamos analogías entre la definición de derivada en el plano real y el complejo

Derivada de una función compleja **por definición** es:

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] / (\Delta z)$$

Diferenciar los análisis de esta expresión matemática

f(z) está expresada en z

f(z) está expresada u(x,y) y v(x,y)

Observamos analogías entre la definición de derivada en el plano real y el complejo

Derivada de una función compleja **por definición** es:

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] / (\Delta z)$$

f(z) está expresada en z

Cuando el límite existe de f ′ (z_0), debe ser el mismo cualquiera sea la trayectoria o lugar geométrico con el que Δz → 0 , lo cual implica que las posibilidades de tendencia son INFINITA.

“f(x) tiene dos direcciones para tender a x_0”.

Observamos analogías entre la definición de derivada en el plano real y el complejo

f(z) expresada en u(x,y) y v(x,y), $f'(z_0)$ se calcula de 2 formas equivalentes:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x_0,y_0}$$

$$f'(z_0) = \left(-j\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x_0,y_0}$$

De aquí surgen las expresiones matemáticas de las ecuaciones de Cauchy Riemann

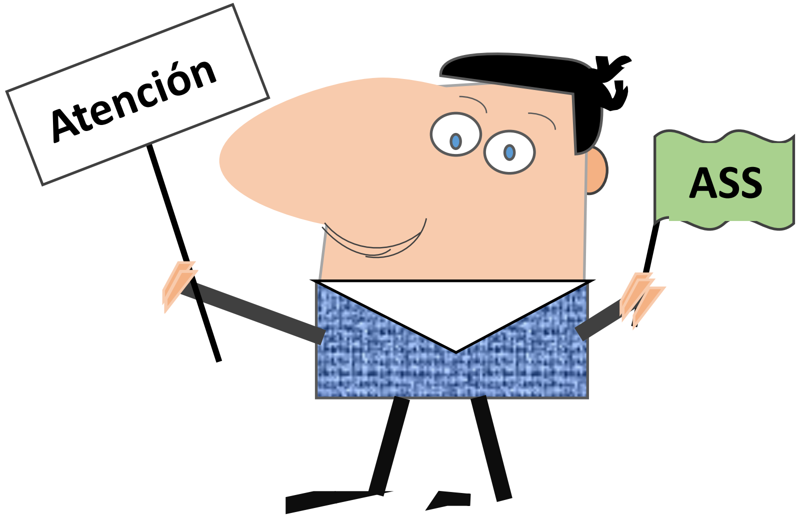
f(z) expresada en u(x,y) y v(x,y)

↓ uso de

Ecuaciones de Cauchy Riemann

↓ implicancias

Condición



Condición NECESARIA + Condición SUFICIENTE

“cumplimiento de las ecuaciones de C-R en un punto para que exista la derivada en ese punto”.

“ u(x,y), v (x,y) y sus primeras derivadas parciales deben ser continuas en alguna vecindad del punto z_0”.

f(z) expresada en u(x,y) y v(x,y)

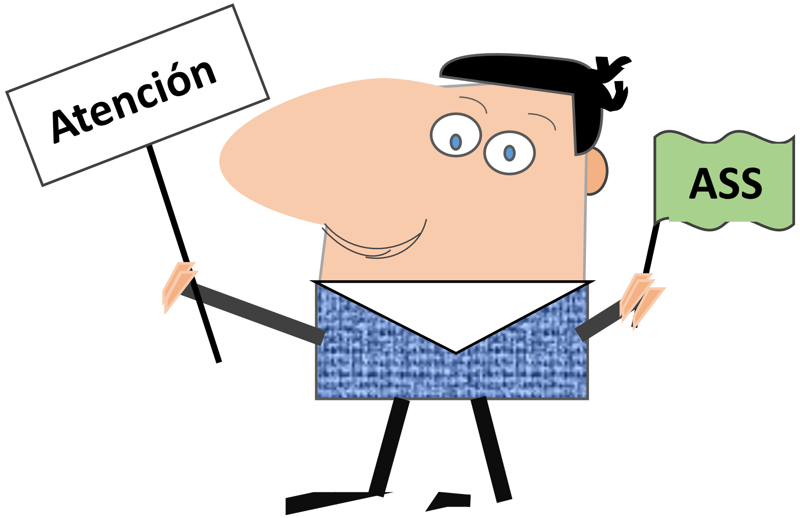
↓ uso de

Ecuaciones de Cauchy Riemann

↓ implicancias

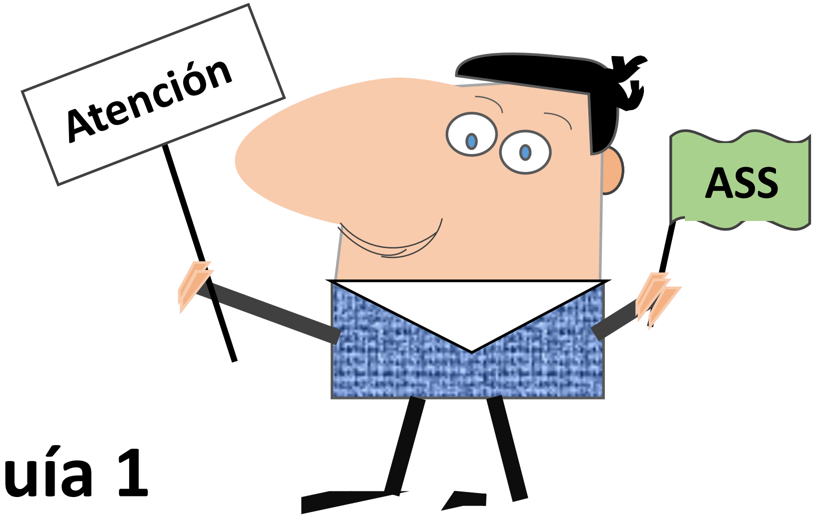
Teorema

↓



“ Si tanto u, v y sus primeras derivadas parciales son continuas en alguna vecindad del punto z_0 la validez de las ecuaciones de C-R es una condición necesaria y suficiente para que exista la derivada primera en ese punto”.

Unidad 1: Funciones de Variable Compleja



Continuamos con los ejercicios de la guía 1

8. Recordando que $f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} [f(z + \Delta z) - f(z)] / \Delta z$ (cuando el límite existe y es finito), calcule la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

b) $f(z) = z^3$, $z = 0$;

Aplicamos la definición de derivada

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} [(z + \Delta z)^3 - z^3] / \Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} [\cancel{z^3} + 3z^2 \Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - \cancel{z^3}] / \Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} [3z^2 \Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3] / \Delta z$$ distribuimos el denominador Δz

$$= \lim_{\Delta z \to 0} [3z^2 + 3z.\Delta z + (\Delta z)^2]$$ resolviendo el límite:

$$= 3z^2$$

$f'(z=0) = 0$

8. Recordando que $f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} [f(z + \Delta z) - f(z)]/\Delta z$ (cuando el límite existe y es finito), calcule la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

c) $f(z) = 3z^2 - j4z - 5 + j$, $z = 2$;

Aplicamos la definición de derivada

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \{[3(z + \Delta z)^2 - j4(z + \Delta z) - 5 + j] - [3z^2 - j4z - 5 + j]\}/\Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} [\cancel{3z^2} + 6z\Delta z + 3(\Delta z)^2 - \cancel{j4z} - j4\Delta z \cancel{-5} \cancel{+j} \cancel{-3z^2} \cancel{+j4z} \cancel{+5} \cancel{-j}]/\Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} [6z\Delta z + 3(\Delta z)^2 - j4\Delta z]/\Delta z$$ distribuimos el denominador Δz

$$= \lim_{\Delta z \to 0} [6z + 3\Delta z - j4]$$ resolviendo el límite:

$$= 6z - j4$$

$$f'(z=2) = 12 - j4$$

9. Para cada una de las siguientes funciones determine los puntos del plano complejo z = x+Jy donde son derivables, obtenga la expresión de f ′ (z) y diga cuáles de ellas son analíticas en algún dominio:

j) f(z)= z^3 + 3 z^2 -6z - 6 ;

u(x,y) = x^3 $-$ 3 xy^2 +3 x^2 -3 y^2 -6x -6

v(x,y) = 3x^2 y $-$ y^3 +6xy -6y

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 + 6x - 6\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 + 6x - 6\end{aligned}\right\}$$

Se satisfacen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy - 6y\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy + 6y\end{aligned}\right\}$$

Se satisfacen

Las expresiones de: u, v son funciones continuas

$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existen y son continuas

f´(z) existe en todo el plano complejo

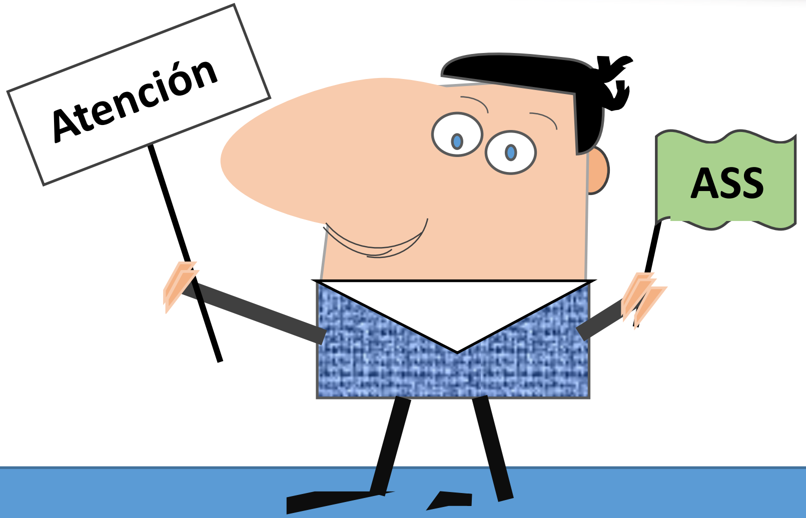
f ´(z)= 3z^2+ 6 z-6

f(z) es analítica en todo el plano complejo

Construimos conocimiento

Las funciones polinómicas en z con exponente entero no negativo son analíticas en todo el plano complejo

Si una función f(z) es analítica en todo el plano complejo finito se llama función ENTERA.



10. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, verifique que las siguientes funciones no son derivables en los puntos z = x + Jy del plano complejo indicados en cada caso:

a) $f(z) = z - \overline{z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$;

f(z) = x +jy –x+ jy

f(z) = j2y

u (x,y) = 0   v(x,y) = 2y

Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Las ecuaciones de CR no se satisfacen, luego la f(z) no es derivable en ningún punto del plano complejo

NO SE CUMPLE la condición necesaria para la existencia de f´(z) en un punto z_0

10. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, verifique que las siguientes funciones no son derivables en los puntos z = x + Jy del plano complejo indicados en cada caso:

b) f(z) = $|z|^2$ para todo $z \neq 0$ (¿qué sucede en z = 0? Explique);

f(z) = $x^2 + y^2$

u (x,y) = $x^2 + y^2$ v(x,y) = 0

Cálculo de las 1°derivadas parciales de u y v:

$\frac{\partial u}{\partial x}$=2x ; $\frac{\partial u}{\partial y}$ =2y ; $\frac{\partial v}{\partial x}$ =0 ; $\frac{\partial v}{\partial y}$ =0

Ecuaciones de Cauchy-Riemman:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; reemplazando: $2x \neq 0$ ¿Qué significa?

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$; reemplazando: $2y \neq 0$ ¿Qué significa?

Las ecuaciones de CR no se satisfacen para cualquier $z_0 \neq 0$

NO SE CUMPLE LA CONDICIÓN NECESARIA para la existencia de f´(z) en un punto $z_0 \neq 0$

10. b) continuación

b) f(z) = $|z|^2$ para todo $z \neq 0$ **(¿qué sucede en z = 0? Explique**);

f(z) = $x^2 + y^2$ donde u (x,y) = $x^2 + y^2$; v(x,y) = 0

Las 1° derivadas parciales : $\frac{\partial u}{\partial x}$ =2x; $\frac{\partial u}{\partial y}$ =2y; $\frac{\partial v}{\partial y}$ =0; $\frac{\partial v}{\partial x}$ =0

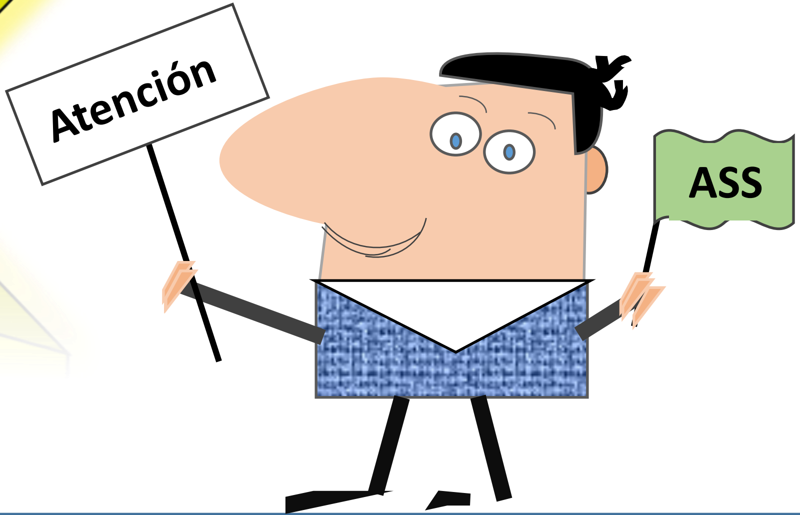
Se debe verificar que: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ reemplazando y evaluamos : $2.\mathbf{0} = 0$ (1)

Se debe verificar que: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ reemplazando y evaluando: 2. **0** = 0 (2)

(1) y (2) son válidas al mismo tiempo solo para x=0 e y=0 → z=0
lo que significa que la **condición necesaria** para la existencia de la f´(z) sólo se cumple en z=0

Construimos conocimiento

Cuando la condición necesaria para la existencia de la f´(z_0) no se satisface, luego no existe la f´(z_0)



10. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, verifique que las siguientes funciones no son derivables en los puntos z = x + Jy del plano complejo indicados en cada caso:

c) f(z) = 2 Re(z) +jRe(z). $[Im\ (z)]^2$,para todo z ∈ $\mathbb{C}$;

f(z) = 2x + j x . y^2

u (x,y) = 2x ; v(x,y) = x. y^2

Las derivadas parciales son: $\frac{\partial u}{\partial x}$ =2 ; $\frac{\partial u}{\partial y}$ =0 ; $\frac{\partial v}{\partial x}$ =y^2 ; $\frac{\partial v}{\partial y}$ = 2xy

Ecuaciones de Cauchy-Riemman:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; 2 ≠ 2xy

$\frac{\partial u}{\partial y}$ = - $\frac{\partial v}{\partial x}$; 0 ≠- y^2

Las ecuaciones de CR no se satisfacen para ningún punto z_0 del plano complejo

f(z) NO ES DERIVABLE EN NINGUN z_0

11. Considerando la función f(z) = $[\mathrm{Re}(z)]^2 + j\,[\mathrm{Im}(z)]^2$, determine el conjunto de puntos en donde: (a) satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann; (b) es derivable; (c) es analítica. Explique.

f(z) = x^2 +j y^2

u (x,y) = x^2

v(x,y) = y^2

$\frac{\partial u}{\partial x}$ =2x $\quad \frac{\partial u}{\partial y}$ =0

$\frac{\partial v}{\partial x}$ =0 $\quad \frac{\partial v}{\partial y}$ = 2y

a) Ecuaciones de C-R: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ → 0=0 ; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ → 2x = 2y

Análisis: para que se satisfagan: y =x "recta que pasa por el origen" → para los puntos z que están sobre la recta y =x

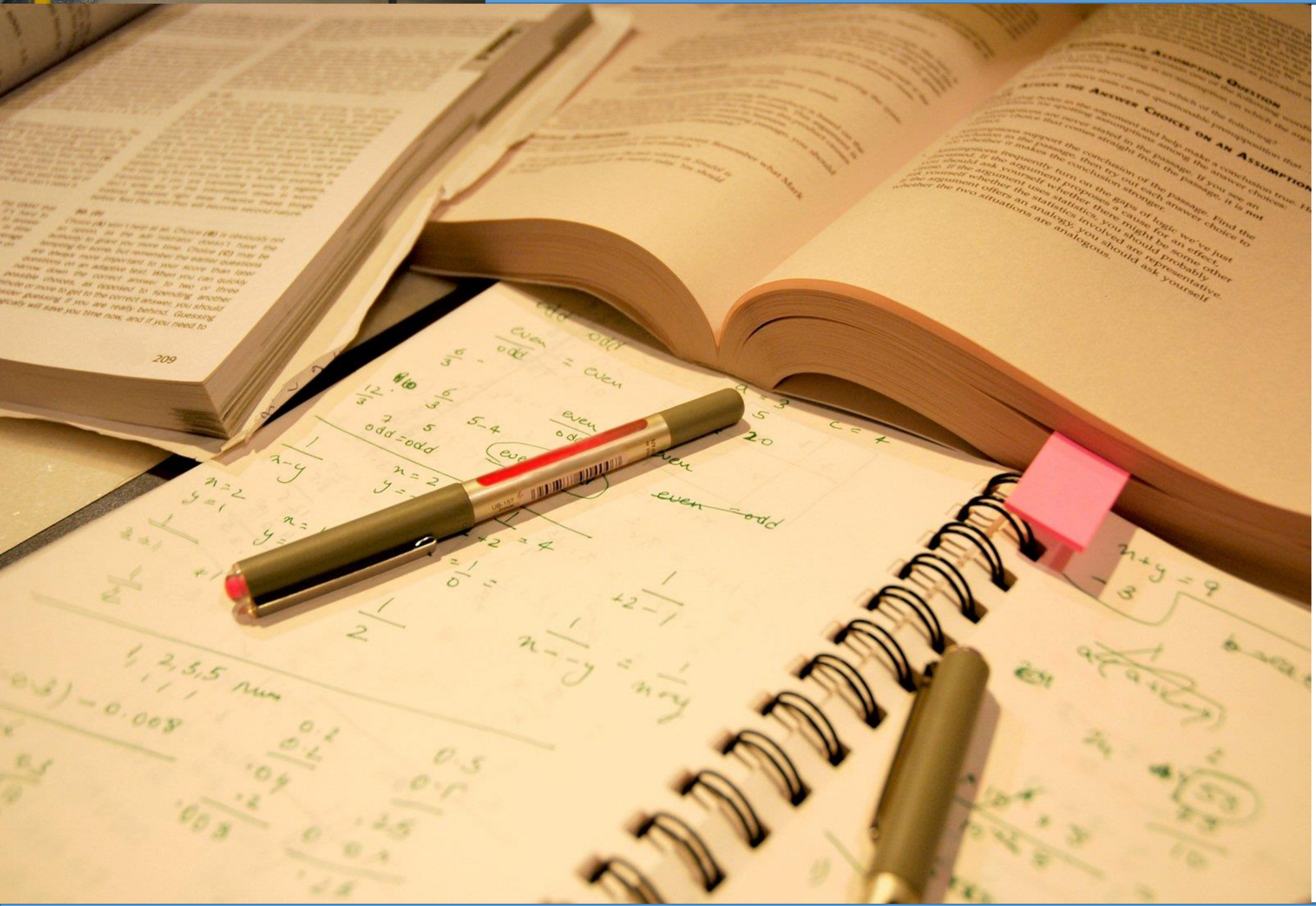
Dominio: z ∈ C: y =x

b) La función **es diferenciable** (se cumple condición necesaria y suficiente) para los puntos z que pertenecen a la recta y =x.

Dominio para f´(z): {z ∈ C , y =x }

c) La función **no es analítica** en ningún punto del plano, porque todo entorno ε de puntos z contenido en la recta y =x siempre contendrá puntos para los que f´(z) no existe.

Unidad 1: Funciones de Variable Compleja



Tomamos tiempo suficiente para investigar y estudiar de libros (fuentes confiables de información),tópicos referidos a la analiticidad de una función de variable compleja.

Comisiones: 2R1, 2R3

Fecha: Marzo 2021

Análisis de Señales y Sistemas

Autor: Mgter. Ing. Silvia Carrera

¿Cuando una función compleja es analítica?

¿..............?

Peculiaridad: La analiticidad es el núcleo de la teoría de variable compleja.

12. Recordando que cos(z) := (1/ 2) $[e^{jz}+ e^{-jz}]$ y sen(z) := − J (1/2) $[e^{jz}- e^{-jz}]$
(a) Calcular la derivada f ′ (z); (b) Determinar las componentes armónicas conjugadas f(x+Jy) = u(x, y)+Jv(x, y); (c) Verificar { $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + J\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$; $f'(z) = -J\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + J\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right]$ para las siguientes funciones:

b) f(z) = sen(z);

$= -J(1/2)\,[e^{jz}- e^{-jz}]$

$f'(z) = -j.\,[je^{jz}- (-j)e^{-jz}]\,(1/2)$

$f'(z) = -j^2[e^{jz} + e^{-jz}].(1/2)$

$f'(z) = (1/2).[e^{jz} + e^{-jz}]$

f´ (z) = cos (z)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + J\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

$\text{sen}(z) = -J(1/2)\,[e^{jz}- e^{-jz}]$

$\text{Sen}(z) = -J(1/2)\,[e^{j(x+jy)}- e^{-j(x+jy)}]$

$\text{Sen}(z) = -J(1/2)\,[e^{jx}.e^{-y}-e^{-jx}.e^{y}]$

$\text{Sen}(z) = -J(1/2)\,[\,(cosx + jsenx)e^{-y}-(\text{cosx} - \text{jsenx}).e^{y}]$

12. Recordando que cos(z) := (1/ 2) [e^{jz}+ e^{-jz}] y sen(z) := – J (1/2) [e^{jz}– e^{-jz}]

Continuación

Verificar { f ′ (z) = $\frac{\partial u}{\partial x}$(x, y) + J$\frac{\partial v}{\partial x}$ (x, y) ; f ′ (z) = –J [$\frac{\partial u}{\partial y}$(x, y) + J $\frac{\partial v}{\partial y}$ (x, y)]

sen (z) = – J(1/ 2) [$e^{-y}.(cosx + jsenx)$ – (cos x- j sen x)e^{y}]

sen (z) = – J(1/ 2) $e^{-y}.cosx$ + (1/ 2) $e^{-y}senx +\ j\ (\frac{1}{2})e^{y}$cos x + (1/2)$e^{y}$ sen x

sen (z) = (1/ 2) $e^{-y}senx$ + (1/2)e^{y} sen x $+j[\ (\frac{1}{2})e^{y}$cos x –(1/ 2) $e^{-y}.cosx]$

u(x,y) = (1/ 2) $e^{-y}senx$ + (1/2)e^{y} sen x

v(x,y) = [$(\frac{1}{2})e^{y}$cos x –(1/ 2) $e^{-y}.cosx$

12. Recordando que cos(z) := (1/ 2) $[e^{jz} + e^{-jz}]$ y sen(z) := – J (1/2) $[e^{jz} - e^{-jz}]$

Continuación

Verificar { f ′ (z) = $\frac{\partial u}{\partial x}$(x, y) + J$\frac{\partial v}{\partial x}$ (x, y) ; f ′ (z) = –J [$\frac{\partial u}{\partial y}$(x, y) + J $\frac{\partial v}{\partial y}$ (x, y)]

u(x,y) = (1/ 2) $e^{-y} sen\, x$ + (1/2)e^{y} sen x

u(x,y)= $\boldsymbol{senx}$ **. cosh y**

f ′ (z) =cos x. cosh y – j sen x .senh y

v(x,y) = $(\frac{1}{2})e^{y}$cos x –(1/ 2) $e^{-y}.\, cosx$

v(x,y)= $\boldsymbol{senh\ y}$ **.cos x**

f´(z)=-j [sen x . Senh y + j cos x. cosh y]

f ′ (z) =cos x. cosh y – j sen x .senh y

IGUALES

16. Calcule todos los valores posibles de logα (z) y determine el (único) valor de Log(z) (si existe) cuando es evaluada en los siguientes puntos: a) z = −10 ;

Recordemos: Log(z) = ln r + Jθ tal que z = r eJθ; r > 0; θ ∈ (−π, π].

z = −10

Log (-10) = ln 10 +j arc tg (0/-10) ángulo de la forma polar de z=-10 (2° cuadrante del plano Z)

Log (-10) = ln 10 +j π

log (-10) = ln 10 +j $(\pi + 2k\ \pi)$ (1) con k = 0, ± 1, ± 2, ± 03.....

El único valor de Log (-10) = ln 10 +j π se encuentra cuando se hace k=0 en (1)

16. Calcule todos los valores posibles de logα (z) y determine el (único) valor de Log(z) (si existe) cuando es evaluada en los siguientes puntos: b) z = −J4 ;

Recordemos: Log(z) = ln r + Jθ tal que z = r eJθ; r > 0; θ ∈ (−π, π].

z = 0 −j 4

Log (-j4) = ln 4 +j arc tg (-4/0) ángulo de la forma polar de z=-j4 (4° cuadrante del plano Z)

log (-j4) = ln 4 -j ($\frac{\pi}{2} + 2k\,\pi$) (1) con k = 0, ± 1, ± 2, ± 03.....

El único valor de Log (- j4) = ln 4 - j $\pi/2$ se obtiene cuando hacemos k=0 en (1)

17. Determine el dominio maximal de analiticidad de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \text{Log}(z - (3 + J4))$;

Recordemos: $\text{Log}(z) = \ln r + J\theta$ tal ; $r > 0$; $\theta \in (-\pi, \pi)$. La función logarítmica no es continua en z=0. No es continua sobre el eje real negativo, porque el ángulo ϑ *no tiene* limite en ningún punto de este eje real negativo.

$f(z) = \text{Log}(x + jy - 3 - J4)$;

$f(z) = \text{Log}\,[(x - 3) + j\,(y - 4)]$;

La función logarítmica no está definida para la semirecta infinita: $\text{Re}(w) \leq 0$ e $\text{Im}(w) = 0$

Entonces:

$\text{Re}(w) \leq 0$

$(x - 3) \leq 0 \rightarrow \quad x \leq 3$

$\text{Im}(w) = 0$

$Y - 4 = 0 \rightarrow y = 4$

17. Determine el dominio maximal de analiticidad de las siguientes funciones:

continuación

a) $f(z) = \mathrm{Log}(z - (3 + J4))$;

$\mathrm{Re}(w) \leq 0$ e $\mathrm{Im}(w) = 0$

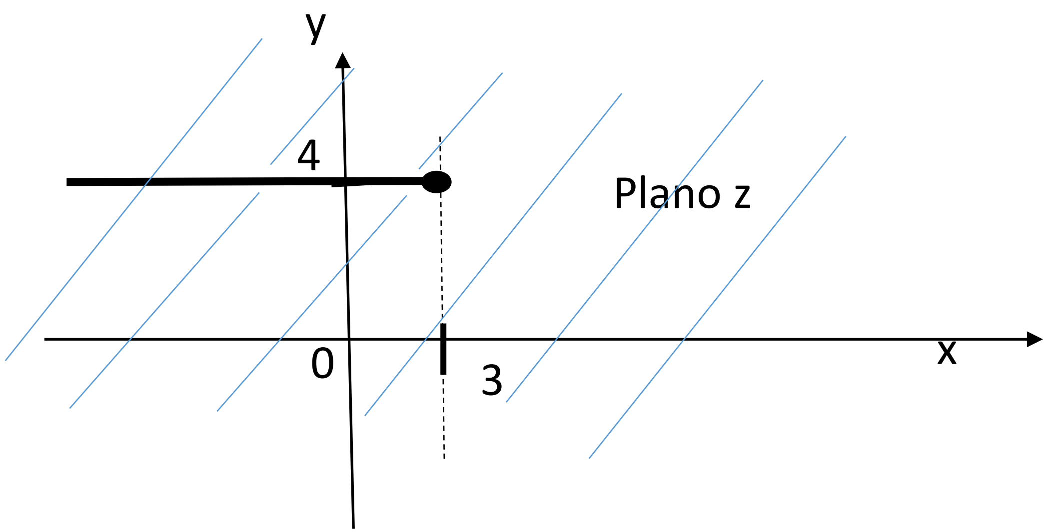
$(x - 3) \leq 0 \rightarrow \quad x \leq 3$

$\mathrm{Im}(w) = 0$

$Y - 4 = 0 \rightarrow y = 4$

El dominio maximal de analiticidad:

$z \in C \setminus \{x \leq 3 \, , \, y = 4 \}$



18. Calcule todos los valores de las siguientes potencias complejas y determine el valor principal: a) 1^{j2}

La potencia compleja de z, w ∈ C se define como $z^{w} := e^{w\, Log\,(z)}$ con arg(z) ∈ (−π, π).

$1^{j2} = e^{j2\, Log\,(1+j0)}$

$1^{j2} = e^{j2\,[\,Ln\,(1)+j(0+2k\pi]}$

$1^{j2} = e^{j2\,[\,Ln\,(1)+j2k\pi]}$

$1^{j2} = e^{j2\,[\,0+j2k\pi]}$

$1^{j2} = e^{j2\,(j2k\pi)}$

$1^{j2} = e^{-\,4k\pi}$

$1^{j2} = e^{-\,4k\pi}$

1^{j2} = cos (2k. 2π) – j sen (2k. 2π)

Cualquiera sea el valor de k (entero) al multiplicarse por 2 siempre da un número par de veces 2π

1^{j2} = 1– j 0

1^{j2} = 1

El valor principal de $1^{j2} = e^{j2\,0}$
= 1

19. Calcule todos los valores de las siguientes formulas:

b) $(\sqrt{3}+j)^{(1-j2)}$

La potencia compleja de z, w ∈ C se define como $z^{w} := e^{w\,Log\,(z)}$ con arg(z) ∈ (−π, π).

$(\sqrt{3}+j)^{(1-j2)} = z^{w}$

$Z = \sqrt{3}+j$

W = 1-j2

$(\sqrt{3}+j)^{(1-j2)} = e^{(1-j2)Log\,(\sqrt{3}+j)}$

$= e^{(1-j2)\,\{\left[Ln\,2+\;j[\,(\frac{\pi}{6})+2\,k\pi\,]\right\}}$

$= e^{(1-j2)\,\{\left[Ln\,2+\;j[\,(\frac{\pi}{6})+2\,k\pi\,]\right\}}$

Unidad 1: Funciones de Variable Compleja

¡Ahora trabajan ustedes!

Enunciar:

- ❑ **Lo que me pareció difícil**
- ❑ **Lo que comprendí**

BIBLIOGRAFÍA:

Título: “VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES”.
Autores: Ruel V. Churchill/james Waed Brown.
Edición: Quinta. E
Editorial Mc Graw Hill

Mail   scarrera@frc.utn.edu.ar

¡Muchas gracias!

Mail scarrera@frc.utn.edu.ar