Funciones de Variable Compleja

Clase 2

Dimas Benasulin

Universidad Tecnológica Nacional

22 de marzo de 2021

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = z^2 + 6z + 10$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = z^2 + 6z + 10$$

$$w_{(z)} = (x + Jy)^2 + 6(x + Jy) + 10$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = z^2 + 6z + 10$$

$$w_{(z)} = (x + Jy)^2 + 6(x + Jy) + 10$$

$$w_{(z)} = x^2 + J2xy + J^2y^2 + 6x + J6y + 10$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = z^2 + 6z + 10$$

$$w_{(z)} = (x + Jy)^2 + 6(x + Jy) + 10$$

$$w_{(z)} = x^2 + J2xy + J^2y^2 + 6x + J6y + 10$$

$$w_{(z)} = (x^2 - y^2 + 6x + 10) + J(2xy + 6y)$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = z^2 + 6z + 10$$

$$w_{(z)} = (x + Jy)^2 + 6(x + Jy) + 10$$

$$w_{(z)} = x^2 + J2xy + J^2y^2 + 6x + J6y + 10$$

$$w_{(z)} = (x^2 - y^2 + 6x + 10) + J(2xy + 6y)$$

Resultado

$$u_{(x,y)} = x^2 - y^2 + 6x + 10$$

$$v_{(x,y)} = 2xy + 6y$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \frac{z}{z+1}$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \frac{z}{z+1}$$

$$w_{(z)} = \frac{z}{z+1} = \frac{x+Jy}{(x+Jy)+1} * \frac{(x+1-Jy)}{(x+1-Jy)}$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \frac{z}{z+1}$$

$$w_{(z)} = \frac{z}{z+1} = \frac{x+Jy}{(x+Jy)+1} * \frac{(x+1-Jy)}{(x+1-Jy)}$$

$$w_{(z)} = \frac{x^2+x-Jxy+Jxy+Jy-J^2y^2}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+x+y^2+Jy}{(x+1)^2+y^2}$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \frac{z}{z+1}$$

$$w_{(z)} = \frac{z}{z+1} = \frac{x+Jy}{(x+Jy)+1} * \frac{(x+1-Jy)}{(x+1-Jy)}$$

$$w_{(z)} = \frac{x^2+x-Jxy+Jxy+Jy-J^2y^2}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+x+y^2+Jy}{(x+1)^2+y^2}$$

Resultado

$$u_{(x,y)} = \frac{x^2+x+y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$v_{(x,y)} = \frac{y}{(x+1)^2+y^2}$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = e^{z^2}$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = e^{z^2}$$

$$w_{(z)} = e^{(x+Jy)^2} = e^{x^2+2Jxy-y^2} = e^{x^2-y^2+J2xy}$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = e^{z^2}$$

$$w_{(z)} = e^{(x+Jy)^2} = e^{x^2+2Jxy-y^2} = e^{x^2-y^2+J2xy}$$

$$w_{(z)} = e^{x^2-y^2}e^{J2xy} = e^{x^2-y^2}.[cos(2xy) + Jsen(2xy)]$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = e^{z^2}$$

$$w_{(z)} = e^{(x+Jy)^2} = e^{x^2+2Jxy-y^2} = e^{x^2-y^2+J2xy}$$

$$w_{(z)} = e^{x^2-y^2} e^{J2xy} = e^{x^2-y^2}.[cos(2xy) + Jsen(2xy)]$$

Resultado

$$u_{(x,y)} = e^{x^2-y^2}.cos(2xy)$$

$$v_{(x,y)} = e^{x^2-y^2}.sen(2xy)$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \bar{z}e^{z}$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \bar{z}e^{z}$$

Resultado

$$u_{(x,y)} = e^{x}[xcos(y) + ysen(y)]$$
$$v_{(x,y)} = e^{x}[xsen(y) - ysen(y)]$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \bar{z}e^{z}$$

$$w_{(z)} = (x - Jy)e^{x+Jy} = (x - Jy)e^{x}[cos(y) + Jsen(y)]$$

Resultado

$$u_{(x,y)} = e^{x}[xcos(y) + ysen(y)]$$
$$v_{(x,y)} = e^{x}[xsen(y) - ysen(y)]$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \bar{z}e^{z}$$

$$w_{(z)} = (x - Jy)e^{x+Jy} = (x - Jy)e^{x}[cos(y) + Jsen(y)]$$

$$w_{(z)} = xe^{x}cos(y) + Jxe^{x}sen(y) - Jye^{x}cos(y) - J^{2}e^{x}ysen(y)$$

Resultado

$$u_{(x,y)} = e^{x}[xcos(y) + ysen(y)]$$
$$v_{(x,y)} = e^{x}[xsen(y) - ysen(y)]$$

Descomposición en parte real e imaginaría

Obtener la forma $w_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$

$$w_{(z)} = \bar{z}e^{z}$$

$$w_{(z)} = (x - Jy)e^{x+Jy} = (x - Jy)e^{x}[cos(y) + Jsen(y)]$$

$$w_{(z)} = xe^{x}cos(y) + Jxe^{x}sen(y) - Jye^{x}cos(y) - J^{2}e^{x}ysen(y)$$

$$w_{(z)} = xe^{x}cos(y) + ye^{x}sen(y) + Je^{x}[xsen(y) - ysen(y)]$$

Resultado

$$u_{(x,y)} = e^{x}[xcos(y) + ysen(y)]$$
$$v_{(x,y)} = e^{x}[xsen(y) - ysen(y)]$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = z(2 - z) \qquad z_1 = 1 + J \qquad z_2 = 2 - 2J$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = z(2 - z) \qquad z_1 = 1 + J \qquad z_2 = 2 - 2J$$

$$u_{(x,y)} = 2x - x^2 + y^2$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = z(2 - z) \qquad z_1 = 1 + J \qquad z_2 = 2 - 2J$$

$$u_{(x,y)} = 2x - x^2 + y^2$$

$$v_{(x,y)} = 2y(1 - x)$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = z(2-z) \qquad z_1 = 1 + J \qquad z_2 = 2 - 2J$$

$$u_{(x,y)} = 2x - x^2 + y^2$$

$$v_{(x,y)} = 2y(1-x)$$

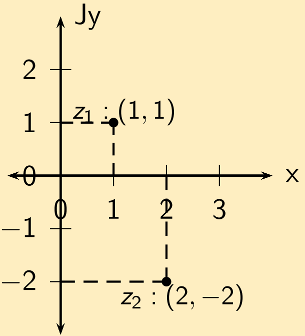
Mapeo

$$z_1 = 1 + J \rightarrow w_1 = 2$$

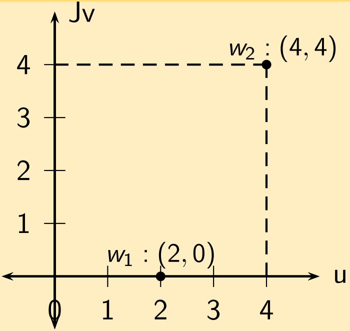
$$z_2 = 2 - 2J \rightarrow w_2 = 4 + J4$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Plano Z



Plano W



Representación gráfica de Funciones de V.C.

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = \frac{1+z}{1-z} \qquad z_1 = J \qquad z_2 = 1 - J$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = \frac{1+z}{1-z} \qquad z_1 = J \qquad z_2 = 1 - J$$

$$u_{(x,y)} = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = \frac{1+z}{1-z} \qquad z_1 = J \qquad z_2 = 1 - J$$

$$u_{(x,y)} = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}$$

$$v_{(x,y)} = \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2}$$

Obtener el mapeo de los siguintes puntos

$$W_{(z)} = \frac{1+z}{1-z} \qquad z_1 = J \qquad z_2 = 1 - J$$

$$u_{(x,y)} = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}$$

$$v_{(x,y)} = \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2}$$

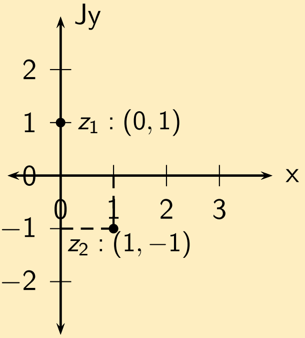
Mapeo

$$z_1 = J \rightarrow w_1 = J$$

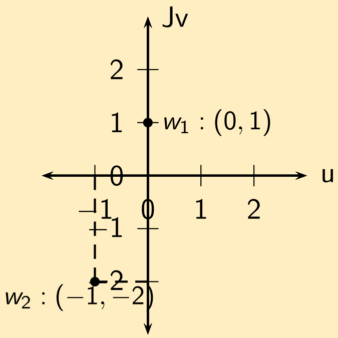
$$z_2 = 1 - J \rightarrow w_2 = -1 - J2$$

Representación gráfica de Funciones de V.C.

Plano Z



Plano W



Límites en Funciones de V.C.

Obtener los límites propuestos

$$\lim_{z \to J} (z^2 + 2z) = (J)^2 + J2 = -1 + J2$$

Límites en Funciones de V.C.

Obtener los límites propuestos

$$\lim_{z \to J} (z^2 + 2z) = (J)^2 + J2 = -1 + J2$$

$$\lim_{z \to 1+J} = \frac{z^2 - z + 1 - J}{z^2 - 2z + 2} = \frac{(1+J)^2 - (1+J) + 1 - J}{(1+J)^2 - 2(1+J) + 2}$$

Límites en Funciones de V.C.

Obtener los límites propuestos

$$\lim_{z \to J}(z^2 + 2z) = (J)^2 + J2 = -1 + J2$$

$$\lim_{z \to 1+J} = \frac{z^2 - z + 1 - J}{z^2 - 2z + 2} = \frac{(1+J)^2 - (1+J) + 1 - J}{(1+J)^2 - 2(1+J) + 2}$$

$$\lim_{z \to 1+J} = \frac{1 + 2J - 1 - 2J}{1 + 2J - 1 - 2 - J2 + 2} = \frac{0}{0}$$

Límites en Funciones de V.C.

Factorización de numerador y denominador

$$\lim_{z \to 1+J} \frac{z^2 - z + 1 - J}{z^2 - 2z + 2} = \frac{(z - (-J))(z - (1 + J))}{(z - (1 - J))(z - (1 + J))}$$

Límites en Funciones de V.C.

Factorización de numerador y denominador

$$\lim_{z \to 1+J} \frac{z^2 - z + 1 - J}{z^2 - 2z + 2} = \frac{(z - (-J))(z - (1 + J))}{(z - (1 - J))(z - (1 + J))}$$

$$\lim_{z \to 1+J} = \frac{z + J}{z - (1 - J)} = \frac{(1 + J) + J}{(1 + J) - (1 - J}$$

Límites en Funciones de V.C.

Factorización de numerador y denominador

$$\lim_{z\to 1+J} \frac{z^2 - z + 1 - J}{z^2 - 2z + 2} = \frac{(z - (-J))(z - (1 + J))}{(z - (1 - J))(z - (1 + J))}$$

$$\lim_{z\to 1+J} = \frac{z + J}{z - (1 - J)} = \frac{(1 + J) + J}{(1 + J) - (1 - J}$$

$$\lim_{z\to 1+J} = \frac{1 + 2J}{2J} = \frac{J - 2}{-2} = 1 - J\frac{1}{2}$$

Límites en Funciones de V.C.

Obtener el límite propuesto

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1}$$

Límites en Funciones de V.C.

Obtener el límite propuesto

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1}$$

$$(z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1} \bigg|_{z = e^{\frac{\pi}{3}}} = \frac{0}{0}$$

Límites en Funciones de V.C.

Obtener el límite propuesto

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1}$$

$$(z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1}\Bigg|_{z = e^{\frac{\pi}{3}}} = \frac{0}{0}$$

$$(z^3 + 1) = (z - (-1))(z - e^{\frac{\pi}{3}})(z - e^{\frac{5\pi}{3}})$$

Límites en Funciones de V.C.

Obtener el límite propuesto

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1}$$

$$(z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1} \bigg|_{z = e^{\frac{\pi}{3}}} = \frac{0}{0}$$

$$(z^3 + 1) = (z - (-1))(z - e^{\frac{\pi}{3}})(z - e^{\frac{5\pi}{3}})$$

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} = \frac{z}{(z + 1)(z - e^{\frac{5\pi}{3}})}$$

Límites en Funciones de V.C.

Obtener el límite propuesto

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1}$$

$$(z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1}\bigg|_{z = e^{\frac{\pi}{3}}} = \frac{0}{0}$$

$$(z^3 + 1) = (z - (-1))(z - e^{\frac{\pi}{3}})(z - e^{\frac{5\pi}{3}})$$

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} = \frac{z}{(z + 1)(z - e^{\frac{5\pi}{3}})}$$

Paso al límite

$$\lim_{z \to e^{J\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{\pi}{3}}) \frac{z}{z^3 + 1} = \frac{1}{6} - J\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Derivadas de Funciones de V.C.

$$\acute{f}_{(z)} \coloneqq \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

a) $f_{(z)} = \frac{1+z}{1-z}, z = -1$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{z_0}}{\Delta z} = \frac{\frac{1+(-1+\Delta z)}{1-(-1+\Delta z)} - \frac{1+(-1)}{1-(-1)}}{\Delta z} = \frac{\frac{\Delta z}{1+1-\Delta z} - \frac{0}{2}}{\Delta z} = \frac{\Delta z}{2-\Delta z} * \frac{1}{\Delta z} = \frac{1}{2}$$

b)

$f_{(z)} = z^3, z = 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{z_0}}{\Delta z} = \frac{(z_0+\Delta z)^3 - {z_0}^3}{\Delta z} = \frac{z_0^3 + 3z_0^2\Delta z + 3z_0\Delta z^2 + \Delta z^3 - {z_0}^3}{\Delta z} = \frac{3z_0^2\Delta z + 3z_0\Delta z^2 + \Delta z^3}{\Delta z}$$

$$= \frac{\Delta z(3z_0^2 + 3z_0\Delta z + \Delta z^2)}{\Delta z} = 3{z_0}^2$$

Z=0

$\acute{f}_{(z_0)} = 3(0)^2 = 0$

Derivadas de Funciones de V.C.

c)

$f_{(z)} = 3z^2 - j4z - 5 + j, z = 2$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{z_0}}{\Delta z} = \frac{3(z+\Delta z)^2 - j4(z+\Delta z) - 5 + j - (3z^2 - j4z - 5 + j)}{\Delta z}$$

$$= \frac{3(z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2) - j4\Delta z - 3z^2}{\Delta z} = \frac{6z\Delta z + 3\Delta z^2 - j4\Delta z}{\Delta z} = 6z + 3\Delta z - j4 = 6z - j4$$

Valuado en z=2

$\acute{f}_{(z_0)} = 6(2) - j4 = 12 - j4$

Derivadas de Funciones de V.C.

d)

$f_{(z)} = 3z^{-2} - 2, z = 1 + j$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{z_0}}{\Delta z} = \frac{3(z+\Delta z)^{-2} - 2 - (3z^{-2} - 2)}{\Delta z} = \frac{\frac{3}{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2} - \left(\frac{3}{z^2}\right)}{\Delta z} = \frac{\frac{3z^2 - 3(z+\Delta z)^2}{(z+\Delta z)^2 z^2}}{\Delta z}$$

$$= \frac{3z^2 - 3z^2 - 6z\Delta z - 3\Delta z^2}{(z+\Delta z)^2 z^2 \Delta z} = \frac{-6z\Delta z - 3\Delta z^2}{(z+\Delta z)^2 z^2 \Delta z} = \frac{-6z - 3\Delta z}{(z+\Delta z)^2 z^2} = \frac{-6z}{z^2 z^2} = \frac{-6z}{z^4} = -6z^{-3}$$

Valuado en z=1+j

$$\acute{f}_{(z_0)} = -6(1+j)^{-3} = -\frac{3}{2} - j\frac{3}{2}$$

Condiciones de analiticidad - Cauchy - Riemann

$f_{(z)} = |z|^2$ para todo $z \neq 0$

$$f_{(z)} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$

Aplicando C-R

$u_{(x,y)} = x^2 + y^2$
$v_{(x,y)} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$2x = 0$ Condición 1
$2y = 0$ Condición 2

Para que se cumplan las condiciones de C-R simultáneamente x=y=0 por lo tanto f(z) solo es derivable en el origen.

Condiciones de analiticidad - Cauchy - Riemann

9) Considere la función

$$f_{(z)} = Re_{(z)}{}^2 + jIm_{(z)}{}^2$$

a) Satisface C-R

$$f_{(z)} = x^2 + jy^2 \therefore u = x^2 \wedge v = y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$2x = 2y$ condición 1

$0 = 0$ condición 2

Las condiciones de C-R se cumplen solo para x=y.

Condiciones de analiticidad - Cauchy - Riemann

b) Es derivable?

Es derivable para todo z / x=y.

c) Es analítica?

La condición de analiticidad exige que $f_{(z)}$ no solo sea derivable en Z_0 sino en toda una vecindad del mismo. Por lo tanto para x=y no existe un punto en el que la derivada este definida en toda una vecindad de radio r respecto de Z_0

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$$

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 6x$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 6x$$

Condición de Laplace

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = -6x + 6x = 0$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

$$-\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy = \frac{\delta v}{\delta x} \qquad (2)$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

$$-\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy = \frac{\delta v}{\delta x} \qquad (2)$$

Integramos (1) respecto de v

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

$$-\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy = \frac{\delta v}{\delta x} \qquad (2)$$

Integramos (1) respecto de v

$$\int (2 - 3x^2 + 3y^2)\delta y = y^3 + y(2 - 3x^2) + C_{(x)}$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Reemplazando en (2) para obtener $C_{(x)}$

$$-6xy = \frac{\delta v}{\delta x} = -6xy + \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} \rightarrow \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} = 0$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Reemplazando en (2) para obtener $C_{(x)}$

$$-6xy = \frac{\delta v}{\delta x} = -6xy + \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} \rightarrow \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} = 0$$

$$v_{(x,y)} = y^3 + 2y - 3x^2 y$$

Reemplazando en (2) para obtener $C_{(x)}$

$$-6xy = \frac{\delta v}{\delta x} = -6xy + \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} \rightarrow \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} = 0$$

$$v_{(x,y)} = y^3 + 2y - 3x^2y$$

Función analítica

$$u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)} = (2x - x^3 + 3xy^2) + J(y^3 + 2y - 3x^2y)$$

Funciones de Variable Compleja

Clase 3

Dimas Benasulin

Universidad Tecnológica Nacional

29 de marzo de 2021

Analiticidad de Funciones de Variable Compleja

9. Para cada un de las siguientes funciones determinar los puntos del plano complejo $z = x + Jy$ donde son derivables, obtenga la expresion de $f'_{(z)}$, mencionando cuales son analíticas en algún dominio.

$f_{(z)} = zIm_{(z)}$
$f_{(z)} = (x + Jy)y = xy + Jy^2$

$u_{(x,y)} = xy$
$v_{(x,y)} = y^2$

Aplicamos C-R para determinar derivabilidad

$$\frac{\delta u}{\delta x} = y \quad \frac{\delta u}{\delta y} = x$$
$$\frac{\delta v}{\delta x} = 0 \quad \frac{\delta v}{\delta y} = y$$

Analiticidad de Funciones de Variable Compleja

1er Condición : $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = y = \frac{\delta v}{\delta y}$$

2da Condición : $\frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{\delta u}{\delta y}$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = 0 = -\frac{\delta u}{\delta y} = x$$

Condiciones de analiticidad - Cauchy - Riemann

$f_{(z)} = |z|^2$ para todo $z \neq 0$

$f_{(z)} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

Aplicando C-R

$u_{(x,y)} = x^2 + y^2$
$v_{(x,y)} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$2x = 0$ Condición 1
$2y = 0$ Condición 2

Para que se cumplan las condiciones de C-R simultáneamente x=y=0 por lo tanto f(z) solo es derivable en el origen.

Condiciones de analiticidad - Cauchy - Riemann

9) Considere la función

$$f_{(z)} = Re_{(z)}{}^2 + jIm_{(z)}{}^2$$

a) Satisface C-R

$$f_{(z)} = x^2 + jy^2 \therefore u = x^2 \wedge v = y^2$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y$

$2x = 2y$ condición 1

$0 = 0$ condición 2

Las condiciones de C-R se cumplen solo para x=y.

Condiciones de analiticidad - Cauchy - Riemann

b) Es derivable?

Es derivable para todo z / x=y.

c) Es analítica?

La condición de analiticidad exige que $f_{(z)}$ no solo sea derivable en Z_0 sino en toda una vecindad del mismo. Por lo tanto para x=y no existe un punto en el que la derivada este definida en toda una vecindad de radio r respecto de Z_0

Funciones Trigonométricas

Hallar todos los valores de z para cada una de las siguientes igualdades

$cos(z) = 2$

De la ec. $cos(w) = z$ podemos despejar w, siendo el arc cos de z

$$z = \frac{e^{Jw} + e^{-Jw}}{2}$$

Haciendo $p = e^{Jw}$ y $1/p = e^{-Jw}$

$$z = \frac{p + 1/p}{2}$$

Multiplicando por $2p$ y reordendo la expresion:

$$2zp = p^2 - 1 \qquad o \qquad p^2 - 2zp - 1 = 0$$

Funciones Trigonométricas

Despejando p mediante la función cuadrática

$$p_{1,2} = \frac{-(-2z) \pm \sqrt{(2z)^2 - 4(-1)}}{2}$$

$$p_{1,2} = z \pm \sqrt{\frac{(2z)^2}{4} + \frac{4}{4}}$$

$$p_{1,2} = z \pm J\sqrt{1 - z^2}$$

$$p = z \pm J(1 + z^2)^{1/2} \qquad o \qquad e^{Jw} = z \pm J(1 + z^2)^{1/2}$$

Tomamos logaritmo de ambos lados de la úlitma ecuación

$$w = -Jlog\left(z \pm J(1 - z^2)^{1/2}\right)$$

Funciones Trigonométricas

$$cos^{-1}(2) = -Jlog[2 + J(1 - 2^2)^{1/2}]$$

$$cos^{-1}(2) = -Jlog[2 + J(-3)^2] = -Jlog[2 \pm \sqrt{3}]$$

Tomamos el valor positivo de la raiz

$$-Jlog[2 + \sqrt{3}] = -J[log[2 + \sqrt{3}] + J(2k\pi)] = 2k\pi - Jlog(2 + \sqrt{3})$$

$$w = 2k\pi - J1{,}316957897 \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Funciones Trigonométricas

Tomamos el valor negativo de la raiz

$$-Jlog[2-\sqrt{3}] = -J[log[2-\sqrt{3}] + J(2k\pi)] = 2k\pi - Jlog(2-\sqrt{3})$$

$$w = 2k\pi + J1{,}316957897 \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$$

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 6x$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Ejercicio 19.b

$$u_{(x,y)} = 2x - x^3 + 3xy^2$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 6x$$

Condición de Laplace

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = -6x + 6x = 0$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

$$-\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy = \frac{\delta v}{\delta x} \qquad (2)$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

$$-\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy = \frac{\delta v}{\delta x} \qquad (2)$$

Integramos (1) respecto de v

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Función armónica conjugada

$$u_{(x,y)} = \phi_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

$$-\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy = \frac{\delta v}{\delta x} \qquad (2)$$

Integramos (1) respecto de v

$$\int (2 - 3x^2 + 3y^2)\delta y = y^3 + y(2 - 3x^2) + C_{(x)}$$

Funciones Armónicas - Ec. de Laplace

Reemplazando en (2) para obtener $C_{(x)}$

$$-6xy = \frac{\delta v}{\delta x} = -6xy + \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} \rightarrow \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} = 0$$

Reemplazando en (2) para obtener $C_{(x)}$

$$-6xy = \frac{\delta v}{\delta x} = -6xy + \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} \rightarrow \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} = 0$$

$$v_{(x,y)} = y^3 + 2y - 3x^2 y$$

Reemplazando en (2) para obtener $C_{(x)}$

$$-6xy = \frac{\delta v}{\delta x} = -6xy + \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} \rightarrow \frac{\delta C_{(x)}}{\delta x} = 0$$

$$v_{(x,y)} = y^3 + 2y - 3x^2y$$

Función analítica

$$u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)} = (2x - x^3 + 3xy^2) + J(y^3 + 2y - 3x^2y)$$