1. Unidad 1: Funciones de Variable Compleja

Objetivos: Adquirir dominio en el manejo de funciones de variable compleja. Aplicar los teoremas correspondientes a límites y continuidad. Determinar las condiciones de analiticidad de una función de variable compleja, dominios y regiones.

PROPIEDADES DE FUNCIONES

1. Exprese $w(z)$ en términos de sus partes real e imaginaria, $w(z) = u(x, y) + Jv(x, y)$, para las siguientes funciones:

   a) $w(z) = z^2 + 6z + 10$; b) $w(z) = \frac{z}{z+1}$;

   c) $w(z) = e^{z^2}$; d) $w(z) = \overline{z}\, e^z$.

2. En cada caso, evalúe la función en los puntos indicados y represente los correspondientes valores en los planos $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{W}$:

   a) $w(z) = z(2 - z)$ en $z_1 = 1 + J$ y $z_2 = 2 - J2$;

   b) $w(z) = \frac{(1+z)}{(1-z)}$ en $z_1 = J$ y $z_2 = 1 - J$;

   c) $w(z) = \frac{(1+z)}{(1-\overline{z})}$ en $z_1 = 1 - J$, $z_2 = w(z_1)$ y $z_3 = w(z_2)$.

   d) $w(z) = \frac{Re(z)\ Im(z)}{z}$ en $z_1 = 1$ y $z_2 = 1/w(z_1)$.

   Sugerencia: Comience expresando cada función en términos de sus partes real e imaginaria.

3. Sea
   $$f(z) = \frac{2z+1}{3z-2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{2}{3}\}.$$
   Calcule las siguientes funciones:

   a) $g(z) = f(1/z)$; b) $h(z) = f(f(z))$;

   c) $r(z) = f(g(z))$; d) $t(z) = g(1/g(z))$.

   En cada caso determine el dominio maximal de definición.

LIMITE DE FUNCIONES

4. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim_{z\to J}\ (z^2+2z)\,;$ b) $\lim_{z\to 1+J}\ \dfrac{z^2-z+1-J}{z^2-2z+2}\,;$

   c) $\lim_{z\to J/2}\ \frac{(2z-3)(4z+J)}{(Jz-1)^2}\,;$ d) $\lim_{z\to J2}\ (Jz^4+3z^2-J10)\,;$

   e) $\lim_{z\to 2+J}\ \frac{1-z}{1+z}\,;$ f) $\lim_{z\to e^{J\frac{\pi}{4}}}\ \frac{z^2}{z^4+z+1}\,;$

   g) $\lim_{z\to e^{J\frac{\pi}{3}}}\ \frac{(z-e^{J\frac{\pi}{3}})z}{z^3+1}\,;$ h) $\lim_{z\to J}\ \frac{z^2+1}{z^6+1}\,.$

   Sugerencia: En los casos de cocientes con límites indeterminados, determine las factorizaciones apropiadas del numerador y el denominador. Use la regla de L'Hôpital, para verificar los resultados.

5. Evalue los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

   a) $\lim_{z\to J}\ \frac{(z-J)+(z^2-1)}{z^2-3Jz-2}\,;$ b) $\lim_{z\to J}\ \frac{z^3+J}{(z^2+1)z}\,;$

   c) $\lim_{z\to m\pi}\ (z-m\pi)\frac{e^z}{\text{sen}(z)}\,,\ m\in\mathbb{Z};$ d) $\lim_{z\to 0}\ \frac{z-\text{sen}(z)}{z^3}\,.$

6. Demuestre los siguientes límites:

   a) $\lim_{z\to\infty}\ \frac{z+1}{z^2-1}=0\,;$ b) $\lim_{z\to\infty}\ \frac{z^2+z}{Jz^2-(1-J)z-1}=-J\,;$

   c) $\lim_{z\to J\frac{\pi}{2}}\ \frac{1}{e^z-J}=\infty\,;$ d) $\lim_{z\to\infty}\ (e^{1/z}-1)^{-1}=\infty\,.$

   Recuerde que $\lim_{z\to\infty}\ f(z)=\lim_{z\to 0}\ f(1/z)$ (si el límite existe), en tanto $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ es equivalente a $\lim_{z\to z_0}(1/f(z))=0\,.$

7. Demuestre que los siguientes límites **no** existen:

   a) $\lim_{z\to 0}\ \frac{\overline{z}}{z}\,;$ b) $\lim_{z\to\infty}\ e^{-z}\,;$

   c) $\lim_{z\to 0}\ \left(\frac{x^2+x}{x+y}+J\frac{y^2+y}{x+y}\right);$ d) $\lim_{z\to J}\ \frac{\text{sen}(z+J)}{\text{sen}(z-J)}\,.$

DERIVADA Y ANALITICIDAD DE FUNCIONES

8. Recordando que

   $$f'(z):=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

   (cuando el límite existe y es finito), calcule la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f(z)=\frac{1+z}{1-z}\,,\quad z=-1\,;$ b) $f(z)=z^3\,,\quad z=0\,;$

   c) $f(z)=3z^2-4Jz-5+J\,,\quad z=2\,;$ d) $f(z)=3z^{-2}-2\,,\quad z=1+J\,.$

9. Para cada una de las siguientes funciones determine los puntos del plano complejo $z = x + Jy$ donde son derivables, obtenga la expresión de $f'(z)$ y diga cuáles de ellas son analíticas en algún dominio:

   a) $f(z) = z\ Im(z)\,;$
   b) $f(z) = x^2 + Jy^2\,;$
   c) $f(z) = 1/\overline{z}\,;$
   d) $f(z) = (x^2 - y^2) + J(2xy + x^2 - y^2)\,;$
   e) $f(z) = x^3 + J(1 - 3y + 3y^2 - y^3)\,;$
   f) $f(z) = e^x \cos(y) + Je^x \operatorname{sen}(y)\,;$
   g) $f(z) = (z + \overline{z})^2 + J(z - \overline{z})\,;$
   h) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-z}\,;$
   i) $f(z) = z\,\overline{z}\,;$
   j) $f(z) = z^3 + 3z^2 - 6z - 6.$

10. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, verifique que las siguientes funciones **no** son derivables en los puntos $z = x + Jy$ del plano complejo indicados en cada caso:

    a) $f(z) = z - \overline{z}\,,$ para todo $z \in \mathbb{C}\,;$
    b) $f(z) = |z|^2\,,$ para todo $z \neq 0$ (¿qué sucede en $z = 0$? Explique);
    c) $f(z) = 2Re(z) + JRe(z)[Im(z)]^2\,,$ para todo $z \in \mathbb{C}\,;$
    d) $f(z) = \overline{z}^2\,,$ para todo $z \neq 0$ (explique qué sucede en $z = 0$).
    e) $f(z) = e^{\overline{z}},$ para todo $z \in \mathbb{C}\,.$

    Sugerencia: Exprese cada función en términos de sus partes real e imaginaria.

11. Considerando la función

$$f(z) = [Re(z)]^2 + J[Im(z)]^2\,,$$

    determine el conjunto de puntos en donde:
    (a) satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann;
    (b) es derivable;
    (c) es analítica. Explique.

12. Recordando que

$$\cos(z) := \frac{1}{2}[e^{Jz} + e^{-Jz}] \text{ y } \operatorname{sen}(z) := -\frac{J}{2}[e^{Jz} - e^{-Jz}]$$

    (a) Calcular la derivada $f'(z)$;
    (b) Determinar las componentes armónicas conjugadas $f(z+Jy) = u(x,y) + Jv(x,y)$;
    (c) Verificar $\begin{cases} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + J\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ f'(z) = -J\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + J\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right] \end{cases}$
    para las siguientes funciones:

    a) $f(z) = e^z\,;$ b) $f(z) = \operatorname{sen}(z)\,;$ c) $f(z) = \cos(z)\,;$ d) $f(z) = \tan(z);$

13. Similarmente, sabiendo que

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}[e^z + e^{-z}], \text{ y } \operatorname{senh}(z) := \frac{1}{2}[e^z - e^{-z}]$$

(a) Calcular la derivada $f'(z)$;
(b) Determinar las componentes armónicas conjugadas $f(x+Jy) = u(x,y)+Jv(x,y)$;
(c) Verificar las identidades $\begin{cases} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + J\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ f'(z) = -J\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + J\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right] \end{cases}$
para las siguientes funciones:

a) $f(z) = \operatorname{senh}(z)$; b) $f(z) = \cosh(z)$; c) $f(z) = \tanh(z)$;

En cada caso determine el correspondiente dominio de analiticidad.

14. Verificar las siguientes identidades:

a) $\begin{cases} \cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1 \\ \cosh^2(z) - \operatorname{senh}(z)^2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos^2(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2z)) \\ \operatorname{sen}^2(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2z)) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z) \\ \operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z) \end{cases}$ d) $\begin{cases} \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w) \\ \cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) - \operatorname{senh}(z)\operatorname{senh}(w) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos(-z) = \cos(z) \\ \cosh(-z) = \cosh(z) \end{cases}$ f) $\begin{cases} \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\operatorname{sen}(w) \\ \operatorname{senh}(z+w) = \operatorname{senh}(z)\cosh(w) + \cosh(z)\operatorname{senh}(w) \end{cases}$

15. Halle todos los valores de z para cada una de las siguientes igualdades:

a) $\cos(z) = 2$; b) $\operatorname{sen}(z) = \cosh(4)$

c) $\cos(z) = \operatorname{senh}(4)$ d) $\operatorname{senh}(z) = -J$

FUNCIONES DE TIPO LOGARITMO Y ARMONICAS

Nota: Recuerde que **una rama de la función logaritmo** se define como

$$\log_\alpha(z) := \ln|z| + J\arg_\alpha(z)$$

para $z \neq 0$ y $\arg_\alpha(z) \in (\alpha, 2\pi+\alpha)$ en donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Así definida, $\log_\alpha$ es analítica en plano cortado $\mathbb{C}\setminus\{r\,e^{J\alpha} : r \geq 0\}$. La **rama principal del logaritmo** corresponde (usualmente, y así se hará en este curso, aunque hay variantes en la literatura) a elegir $\alpha = -\pi$ y se denota *Log*. Dicho de otro modo,

$$Log(z) = \ln r + J\theta \text{ tal que } z = r\,e^{J\theta};\ r > 0;\ \theta \in (-\pi,\pi).$$

16. Calcule todos los valores posibles de $log_\alpha(z)$ y determine el (único) valor de $Log(z)$ (si existe) cuando es evaluada en los siguientes puntos:

a) $z = -10$; b) $z = -J4$; c) $z = 1/2$. d) $z = e + J\pi$;

17. Determine el dominio maximal de analiticidad de las siguientes funciones:

    a) $f(z) = Log(z - (3 + J4))$; b) $f(z) = Log(e^{J\frac{\pi}{4}} z - J)$;

    c) $f(z) = Log(z^2 + 1)$; d) $f(z) = Log(Log(z))$.

Nota: Determine el conjunto maximal $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ del plano complejo en el cual se cumple la identidad

$$log_\alpha\ (e^z) = z\,, \quad z \in \mathbb{F}\,,$$

en donde $\log_\alpha\ (w)$ es la rama del logaritmo correspondiente a $\arg_\alpha\ (w) \in (\alpha, 2\pi + \alpha)$. ¿Bajo cuáles condiciones se cumple la identidad $\exp(log_\alpha\ (z)) = z$? Explique.

La **potencia compleja** de $z, w \in \mathbb{C}$ se define como

$$z^w := e^{w\ log_\alpha\ (z)}$$

Como tal, es multivaluada salvo que cuando se restringe log_α a una rama, en cuyo caso $f_\alpha(z) = z^c$ deviene analítica en el dominio de analiticidad de la rama del logaritmo elegida. El **valor principal** de z^c corresponde a elegir la rama principal del logaritmo; es decir,

$$z^w := e^{w\ Log(z)} \text{ con } \arg(z) \in (-\pi, \pi).$$

18. Calcule todos los valores de las siguientes potencias complejas y determine el valor principal:

    a) 1^{J2}; b) $(\sqrt{3} + J)^{1-J2}$;

    c) $(e^J)^J$; d) $(Log(J))^{\pi/2}$.

19. Calcule todos los valores de las siguientes formulas:

    a) $z^{1+J} - 3 + J4 = 0$; b) $(\sqrt{3} + J)^{1-J2}$;

    c) $z^{J/5} + 16 - J16\sqrt{3} = 0$; d) $z^{J/6} + J27 = 0$.

20. Usando la rama principal del logaritmo en cada caso, calcule la derivada de las siguientes funciones y evalúe el resultado en el punto indicado:

    a) $f(z) = z^{1/3+J}\,, \quad z = -J8$; b) $f(z) = z^z\,, \quad z = J$;

    c) $f(z) = J^{e^z}\,, \quad z = 1 + J$; d) $f(z) = z^{\operatorname{sen}(z)}\,, \quad z = J$.

21. Para cada una de las siguientes funciones, determine la región en la cual cada una es armónica, y en cada caso encuentre una función armónica conjugada:

    a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$; b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$;

    c) $u(x, y) = \operatorname{senh}(x) \operatorname{sen}(y)$; d) $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$.