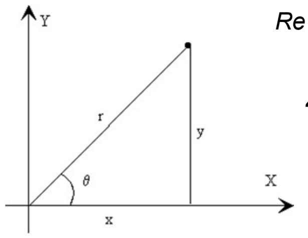
Introducción

*El **análisis de variable compleja** es la rama de las matemáticas que en parte investiga las funciones holomorfas, también llamadas funciones analíticas. Una función es holomorfa en una región abierta del plano complejo si está definida en esta región, toma valores complejos y por último es diferenciable en cada punto de esta región abierta con derivadas continuas.*

Números Complejos

*Los números complejos Z se pueden definir como pares ordenados (x,y), de números reales **x** e **y**, donde **x** es la parte real e **y** es la parte imaginaria,*

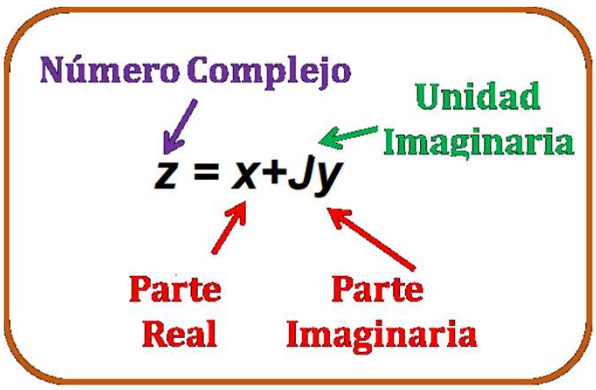


Re Z = x *Im Z = y*

$$Z = x + Jy = r\,e^{J\varphi} = r\left(Cos\,\varphi + J Sen\,\varphi\right)$$

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = Tg^{-1}\frac{y}{x}$$

25/3/2021 Mario Modesti 1



25/3/2021 Mario Modesti 2

Lugar geométrico de los complejos

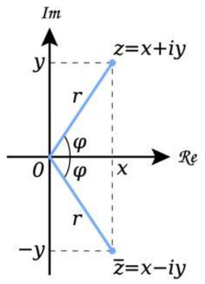
Se dice que los números complejos , son iguales si tienen las mismas partes reales y las mismas partes imaginarias, es decir

$z_1 = x_1 + Jy_1$

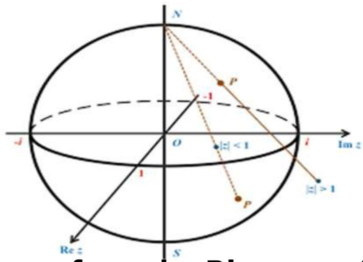
$z_2 = x_2 + Jy_2$

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad sii \quad x_1 = x_2 \ e \ y_1 = y_2$$

*Se verifica que a cada número complejo **z** corresponde un punto específico en el plano denominado de **ARGAND**.*
*De modo similar las ecuaciones con variable **z** pueden representarse por medio de curvas y áreas en el plano de Argand.*



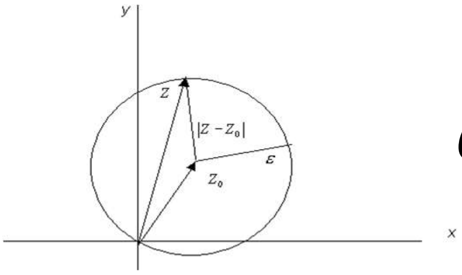
El punto del infinito, punto en el infinito o punto impropio en el Plano Complejo



En matemática, la **esfera de Riemann** (o **plano complejo extendido**), es una esfera obtenida del plano complejo mediante la adición de un punto del infinito. La esfera es la representación geométrica de los **números complejos extendidos**, la cual consiste en los números complejos ordinarios para representar el infinito. Los números complejos extendidos son comunes en análisis complejo porque permiten la división por cero en algunas circunstancias, en el sentido de hacer expresiones bien definidas .

Concepto de vecindad o entorno

*La herramienta primaria para el estudio de límite y continuidad de funciones es el concepto de vecindad de un punto dado que consta de todos los puntos **Z** situados dentro de un circulo pero no sobre la circunferencia que tiene centro en **Z_0** con un radio específico y positivo y sobre el mismo punto, de esta definición se desprende que un punto puede tener varias vecindades, ya que es posible construirlas de radios diferentes alrededor del punto en cuestión*



$$0 < \left| z - z_0 \right| < \varepsilon$$

Punto interior

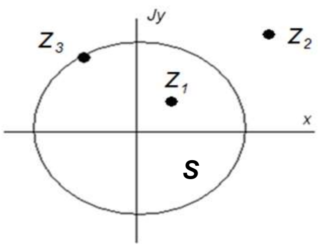
Z_1** es un punto interior de un conjunto **S**, siempre que exista una vecindad de que contenga solo puntos de **S

Punto exterior

Z_2** será un punto exterior de **S** cuando exista una vecindad del punto que no contiene puntos de **S

Punto frontera

***Z_3** no es ninguno de los anteriores*



La totalidad de los puntos frontera es la frontera del conjunto ***S.*** *En caso de la figura anterior,* Z_1 *es interior,* Z_2 *es exterior, y* Z_3 *no es ninguno de estos tipos de puntos entonces se dice que es frontera.*

Un ***punto frontera*** *es por tanto un punto para el que todas las vecindades contienen puntos de* ***S*** *y puntos que no están en* ***S****, y la totalidad de todos los puntos frontera se denomina frontera de* ***S****.*

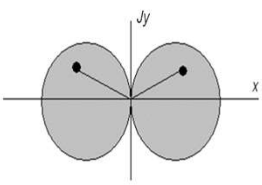
Conjunto es abierto (Si no contiene ninguno de los puntos de su frontera)
$|z|<1$ *Es un conjunto abierto porque esta asignación describe todos los puntos que están dentro del círculo excluido la frontera y con centro en el origen.*
Alrededor de cada punto se puede trazar un círculo tan pequeño como se quiera de modo que todos los puntos dentro del círculo pequeño pertenezcan al conjunto de la asignación.

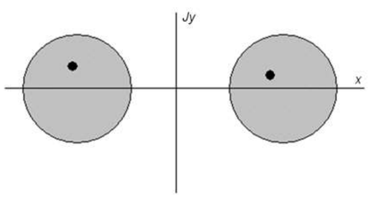
Conjunto cerrado (Si contiene todos los puntos de su frontera)
El conjunto $|z|\leq 1$ *es cerrado, no es abierto porque si se sitúa un punto en la frontera del conjunto que pertenece al conjunto de la asignación, es posible trazar un círculo alrededor del mismo que contenga puntos que no pertenecen al rango de la asignación.*

Ejemplo
La circunferencia $|z|=1$ *es la frontera de cada uno de los conjuntos*

$$|z|<1 \qquad |z|\leq 1$$

Conjunto conexo
Un conjunto abierto ***S*** *es conexo si cada par de puntos en el mismo se pueden unir por medio de una poligonal que está conformado por un número finito de segmentos unidos entre sí que se encuentren totalmente en* ***S*** *como puede apreciarse en la figura.*

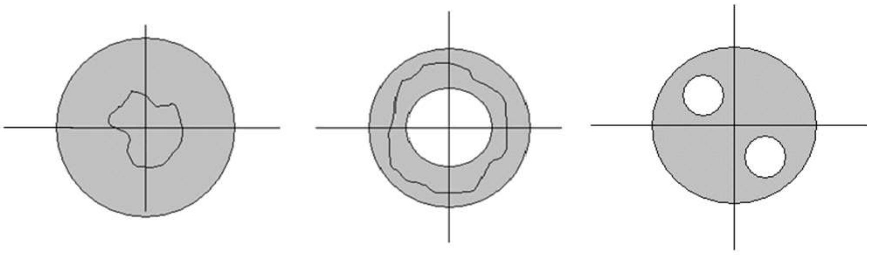




$$|Z+1|\leq 1 \ \cup\ |Z-1|\leq 1 \qquad |Z+1|\leq \frac{1}{2} \ \cup\ |Z-1|\leq \frac{1}{2}$$

Dominio en el plano complejo

Cualquier vecindad es un dominio y un dominio junto con algunos, ninguno, o todos sus puntos frontera se denomina región. Un dominio puede ser simplemente conexo si no tiene agujeros, en tanto un dominio múltiplemente conexo contiene uno o varios agujeros



Un modo más preciso de definir este tipo de dominios es determinar una curva cerrada cualquiera, en un dominio simplemente conexo todos los puntos encerrados por la curva son pertenecientes al dominio, un caso muy utilizado es el dominio anular. En un dominio múltiplemente conexo es posible construir una curva cerrada que contenga uno o más puntos que no pertenezcan al dominio

Ejemplo: Delinear el conjunto y determinar el dominio de :

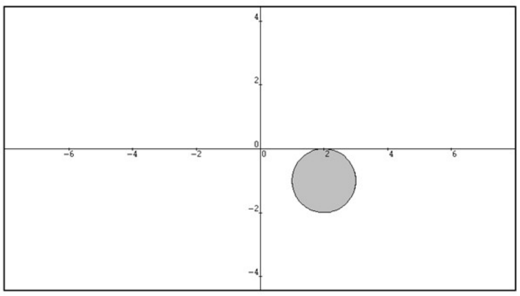
$$\left| Z - 2 + J \right| \leq 1$$

$$\left| (x + Jy) - 2 + J \right| \leq 1$$

$$\left| (x - 2) + J(y + 1) \right| \leq 1$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 1$$



La función de variable compleja

Introducción

*Haciendo una comparación con funciones de variable real, cuando se tiene $y = f_{(x)}$ significa que dado un valor de **x** se dispone de un método para disponer del valor de **y**. Asociando a **x** con el término de variable independiente e **y** a el término de variable dependiente (de **x** en este caso).*
En el caso que la dependencia esté vinculada a un determinado intervalo, es posible además especificar la región de validez, ejemplo $0 \le x \le \infty$

Se puede disponer de una función multivaluada como $y = x^{\frac{1}{2}}$ *, que significa obtener dos valores de **y**, que solo difieren en el signo, para uno positivo de **x**.*

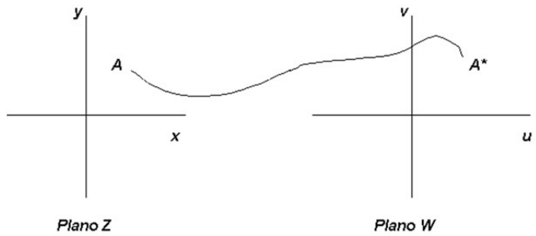
La manera más sencilla de representar la mayoría de las relaciones funcionales es por medio de una gráfica en diferentes tipos de coordenadas como podría ser el sistema cartesiano.

*Debido que la variable **Z** es un complejo que puede expresarse por sus componentes* $z = x + Jy$ *, la función de variable compleja también podrá expresarse en estos términos*

$$W = f_{(z)} = f_{(x,y)} = u_{(x,y)} + J\, v_{(x,y)} = 2x^2 + Jy$$

*Una diferencia fundamental entre las funciones de variable real y las de variable compleja, es que mientras las primeras pueden representarse en el plano cartesiano, no es tan fácil elaborar la representación gráfica de las segundas, debido que se requieren dos componentes para hacerlo, **x** e **y** solo para la variable independiente **Z**. Esto lleva a disponer de un plano de cuatro dimensiones para representar gráficamente .*

$$W = f_{(z)}$$



Esto es, dos dimensiones para representar a la variable independiente ***Z*** *y otras dos para representar a la variable dependiente* ***W****, como puede apreciarse en la Figura.*
A *es un punto en el plano complejo en que está definido, el valor de* ***W*** *que corresponde a* ***A*** *corresponde a* ***A**** *en el plano de la función y es la imagen de* ***A*** *por medio de la aplicación* $W = f_{(z)}$.

$$W = f_{(z)} = f_{(x,y)} = u_{(x,y)} + J\, v_{(x,y)}$$

Límite de una función de variable real

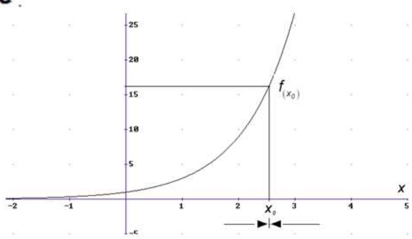
El concepto de continuidad de una función de variable real es aplicable a variable compleja con algunas consideraciones particulares.

En el caso real la función $f_{(x)}$ *se dice que tiene límite* $f_{(x_0)}$ *cuando* $X \rightarrow X_0$ *, y se dice que*

$$Lim_{x \rightarrow x_0} f_{(x)} = f_{(x_0)}$$

Si la diferencia entre la función y su límite puede hacerse tan pequeña como se quiera, seleccionando X *suficientemente cercano a* X_0*, se expresa matemáticamente* $\left| f_{(x)} - f_{(x_0)} \right| < \varepsilon$ *si se satisface que* $0 < |X - X_0| < \delta$*, donde* δ *es un número positivo que en general depende de* ε .

En el caso de variable real cuando se estudia el límite de una función, se toman valores de la variable a la derecha tanto como a la izquierda. Si existe el límite la función debe acercarse al mismo conforme la variable tiende al punto por la derecha o por la izquierda.



Límite de una función de variable compleja

Sea $f_{(z)}$ una función de variable compleja z y sea $f_{(z_0)}$ una constante compleja, si para todo real $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ de manera que se cumpla para todo z tal que $0 < |z - z_0| < \delta$, se dice entonces que:

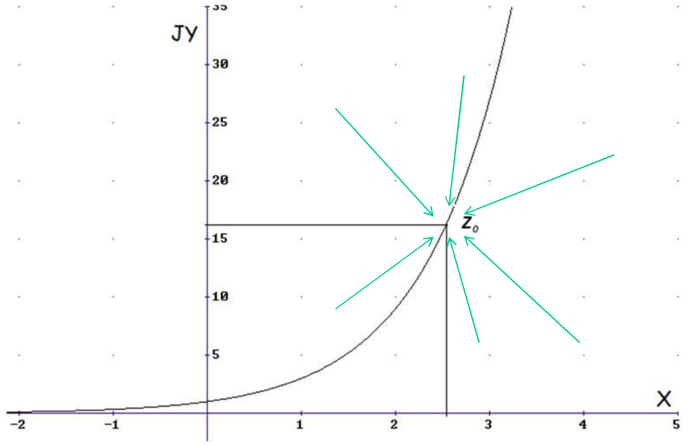
$$Lim_{z \to z_0} f_{(z)} = f_{(z_0)}$$

Esta definición significa geométricamente que por cada ε vecindad $|f_{(z)} - f_{(z_0)}| < \varepsilon$ o $|W - W_{(z_0)}| < \varepsilon$ de existe una δ vecindad tal que $|z - z_0| < \delta$ de z_0 tal que las imágenes de todos los puntos de la δ vecindad, o con la posible excepción de z_0 se encuentren en la ε vecindad.

$$W = f_{(z)} \qquad\qquad Lim_{z \to z_0} f_{(z)} = f_{(z_0)}$$

Aunque esta definición proporciona un medio para comprobar si un punto dado es un límite, no permite directamente un método para determinarlo

En el plano complejo el concepto es más complicado dado que existe un número infinito de trayectorias y no solo dos direcciones como en el caso de variable real



Ejemplo
Evaluar el límite a continuación $Lim_{Z \to J}\left(z + J\right) = J2$

$$f_{(z)} = \left(z + J\right) \;\; y \;\; f_{(z_0)} = J2 \quad para \; Z_0 = J$$

Ejemplo *Dada la función*

$$f_{(Z)} = \frac{x^2 + x}{x + y} + J\frac{\left(y^2 + y\right)}{x + y}$$

*Demostrar que la función no está definida en **Z=0**, demostrar que **no existe** el límite en ese punto.*

25/3/2021 Mario Modesti 17

$$f_{(Z)} = \frac{x^2 + x}{x + y} + J\frac{\left(y^2 + y\right)}{x + y}$$

Comenzar la aproximación al origen a lo largo del eje y, y tomando x=0, la función resulta:

$$f_{(z)} = \frac{J\left(y^2 + y\right)}{y} = J\left(y + 1\right)$$

Conforme se aproxima al origen, la función se acerca a J. Proceder la aproximación por eje X, tomando y=0, la función resulta y conforme se aproxime al origen, la función tiende a 1.

Como ambos resultados son diferentes se concluye que el límite no existe.

$$f_{(z)} = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1$$

25/3/2021 Mario Modesti 18

Continuidad de funciones de variable compleja

Sea $f_{(z)}$ definida y unívoca en una vecindad $z = z_0$. La función se llama continua en el punto si se cumplen las condiciones a continuación enumeradas:

$$1)\lim_{z->z_0} f_{(z)} = L \quad debe \quad existir$$

$$2) f_{(z_0)} \quad debe \quad existir$$

$$3) \lim_{z->z_0} f_{(z)} = f_{(z_0)}$$

Se dice que una función de variable compleja es continua en **R**, si es continua en todos los puntos de **R**. Una composición de funciones continuas es continua.

En general el análisis se ocupa de funciones que son continuas en todo el plano **Z** excepto en algún lugar geométrico definido del plano, a menudo los puntos de discontinuidad son fácilmente reconocibles, como puntos donde la función se hace infinito, no está definida o presenta un cambio muy brusco de valores.

Teoremas sobre límite

Dados los límites de dos funciones complejas como expresado, se pueden aplicar algunas propiedades similares a las aplicables para variable real.

$$Si \quad \lim_{z->z_0} f_{(z)} = A \quad y \quad \lim_{z->z_0} g_{(z)} = B$$

$$1) \lim_{z->z_0} \{f_{(z)} + g_{(z)}\} = \lim_{z->z_0} f_{(z)} + \lim_{z->z_0} g_{(z)} = A + B$$

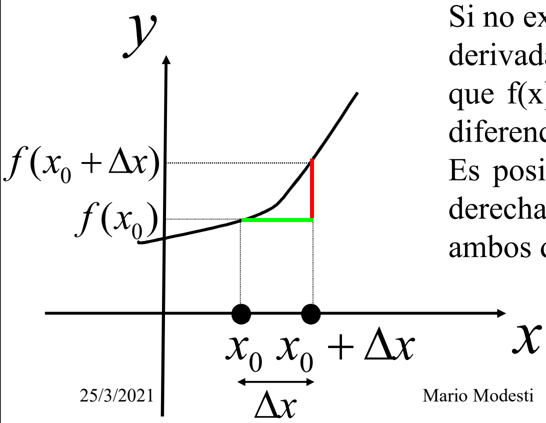
$$2) \lim_{z->z_0} \{f_{(z)} - g_{(z)}\} = \lim_{z->z_0} f_{(z)} - \lim_{z->z_0} g_{(z)} = A - B$$

$$3) \lim_{z->z_0} \{f_{(z)} g_{(z)}\} = \lim_{z->z_0} f_{(z)} \lim_{z->z_0} g_{(z)} = A.B$$

$$4) \lim_{z->z_0} \left\{ \frac{f_{(z)}}{g_{(z)}} \right\} = \frac{\lim_{z->z_0} f_{(z)}}{\lim_{z->z_0} g_{(z)}} = \frac{A}{B} \quad si \quad B \neq 0$$

Derivada de una función real

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$



Si no existe el límite, no existe la derivada en x_0. Se dice entonces que f(x) no es derivable o no es diferenciable en x_0.
Es posible hacer el límite por la derecha y por la izquierda, y ambos deben coincidir.

Derivada de una función de variable compleja

Para el caso de variable compleja, dada una función $f_{(z)}$, la derivada en el punto z_0, denominada $f'_{(z_0)}$ se define del siguiente modo siempre y cuando existan los límites indicados, y la función debe ser continua en el punto, aunque el hecho de ser continua no garantiza la existencia de la derivada.

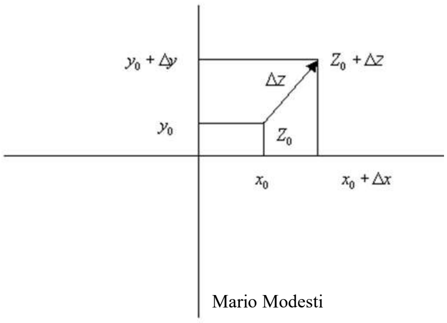
Para $W = f_{(z)}$ $\qquad \Delta W = f_{(z+\Delta z)} - f_{(z)}$

$$f'_{(z_0)} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{(z_0)}}{\Delta z} \quad \text{para} \quad \Delta z = z - z_0 \qquad f'_{(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f_{(z)} - f_{(z_0)}}{z - z_0}$$

$$\frac{dW}{dz} = Lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}$$

$$\frac{dW}{dz} = Lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}$$

Esta expresión es similar a la de la derivada de una función de variable real, con la diferencia que en el primer caso, el acercamiento al punto x_0 se puede realizar por dos direcciones posibles, en cambio en el caso de variable compleja, las trayectorias de acercamiento son infinitas, además no debe ser necesariamente una recta, pudiendo elegir cualquier función de acercamiento.

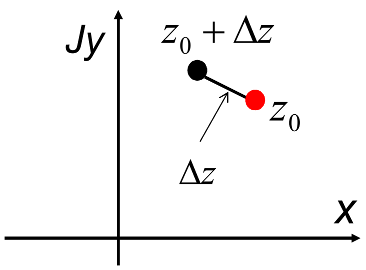


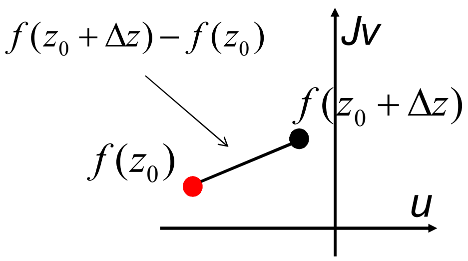
25/3/2021 Mario Modesti 23

Derivada de una función compleja

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}}$$

Observar que ahora el límite se puede hacer no solamente por la derecha o por la izquierda, sino por infinitos caminos. Para que la derivada esté definida el límite debe existir y ser el mismo independientemente del camino.





25/3/2021 Mario Modesti 24

Suponer el caso de una función $f_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$, si las variables **x** e **y** se incrementan en la forma Δx y Δy, el incremento Δz, se transforma en $\Delta x + J\Delta y$.

$$f^{I}_{(Z_0)} = \underset{(\Delta x, \Delta y)\to 0}{Lim} \frac{u_{(x_0+\Delta x\,,\,y_0+\Delta y)} + Jv_{(x_0+\Delta x\,,\,y_0+\Delta y)} - u_{(x_0\,,\,y_0)} - Jv_{(x_0\,,\,y_0)}}{\Delta x + J\Delta y}$$

Aplicar ahora la aproximación al punto por medio de la recta horizontal a **y** constante, entonces $\Delta Z = \Delta x$ pasando por el punto z_0, entonces la expresión de la derivada se convierte en:

$$\Delta Z = \Delta x \qquad f'_{(z_0)} = \underset{\Delta x\to 0}{Lim} \frac{f_{(z_0+\Delta x)} - f_{(z_0)}}{\Delta x}$$

$$f^{I}_{(Z_0)} = \underset{\Delta x\to 0}{Lim} \frac{u_{(x_0+\Delta x\,,\,y_0)} + Jv_{(x_0+\Delta x\,,\,y_0)} - u_{(x_0\,,\,y_0)} - Jv_{(x_0\,,\,y_0)}}{\Delta x}$$

$$f^{I}_{(Z_0)} = \underset{\Delta x\to 0}{Lim} \left[\frac{u_{(x_0+\Delta x\,,\,y_0)} - u_{(x_0\,,\,y_0)}}{\Delta x} + J\frac{v_{(x_0+\Delta x\,,\,y_0)} - v_{(x_0\,,\,y_0)}}{\Delta x} \right] \qquad f^{I}_{(Z_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + J\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}$$

25/3/2021 Mario Modesti 25

Realizando la aproximación a eje y, se obtiene una expresión similar correspondiente a $\Delta Z = J\Delta y$, de manera que:

$$f^{I}_{(Z_0)} = \underset{\Delta y\to 0}{Lim} \frac{f_{(z_0+\Delta y)} - f_{(z_0)}}{J\Delta y} \qquad f^{I}_{(Z_0)} = \left(-J\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}$$

Ecuaciones de Cauchy Riemann (CR)

Para una función $f_{(z)}$ definida en la vecindad de un punto $z = z_0$ por medio de la ecuación $f_{(z)} = u_{(x,y)} + Jv_{(x,y)}$, se verifican algunas de las condiciones de **u** y **v** necesarias para que exista la derivada de $f_{(z)}$ en z_0.

$$f^{I}_{(Z_0)} = \underset{z->z_0}{Lim} \frac{f_{(z)} - f_{(z_0)}}{z - z_0} \qquad para \qquad \Delta z = z - z_0$$

25/3/2021 Mario Modesti 26

Considerando $Z_0 = x_0 + Jy_0$ *y* $\Delta Z = \Delta x + J\Delta y$ *, y evaluando las expresiones de la derivada en términos reales e imaginarios, se tienen las expresiones*

$$Re\left[f^{I}_{(Z_0)}\right] = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} Re\left[\frac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{(z_0)}}{\Delta z}\right] \qquad Im\left[f^{I}_{(Z_0)}\right] = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} Im\left[\frac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{(z_0)}}{\Delta z}\right]$$

Si en particular $\Delta Z = \Delta x + J0$*, el punto* $z_0 + \Delta z$ *se transforma en* $(x_0 + \Delta x, y_0)$*, y las ecuaciones se transforman en:*

$$Re\left[f^{I}_{(Z_0)}\right] = \lim_{\Delta x\to 0} Re\left[\frac{u_{(x_0+\Delta x, y_0)} - u_{(x_0,y_0)}}{\Delta x}\right] \qquad Im\left[f^{I}_{(Z_0)}\right] = \lim_{\Delta x\to 0} Im\left[\frac{v_{(x_0+\Delta x, y_0)} - v_{(x_0,y_0)}}{\Delta x}\right]$$

$$f^{I}_{(Z_0)} = u_{x(x_0,y_0)} + Jv_{x(x_0,y_0)} = \frac{\partial u}{\partial x} + J\frac{\partial v}{\partial x}$$

25/3/2021 Mario Modesti 27

Considerando ahora $\Delta Z = 0 + J\Delta y$ *es posible obtener las derivadas parciales respecto a* ***y***.

$$Re\left[f^{I}_{(Z_0)}\right] = \lim_{\Delta y\to 0} Re\left[\frac{u_{(x_0,y_0+\Delta y)} - u_{(x_0,y_0)}}{J\Delta y}\right] \qquad Im\left[f^{I}_{(Z_0)}\right] = \lim_{\Delta y\to 0} Im\left[\frac{v_{(x_0,y_0+\Delta y)} - v_{(x_0,y_0)}}{J\Delta y}\right]$$

$$f^{I}_{(Z_0)} = v_{y(x_0,y_0)} - J\,u_{y(x_0,y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y} - J\frac{\partial u}{\partial y}$$

Suponer que $f_{(z)} = u_{(x,y)} + J\,v_{(x,y)}$ *y además que* $f^{I}_{(z_0)}$ *existe en un punto* $z_0 = x_0 + Jy_0$*. Entonces las primeras derivadas parciales de* ***u*** *y* ***v*** *con respecto a* ***x*** *e* ***y*** *existen en* (x_0, y_0) *y satisfacen las ecuaciones de CR en dicho punto.*

$$f^{I}_{(Z_0)} = u_{x(x_0,y_0)} + Jv_{x(x_0,y_0)} = \frac{\partial u}{\partial x} + J\frac{\partial v}{\partial x} \qquad u_{x(x_0,y_0)} = v_{y(x_0,y_0)} \;\; \text{y} \;\; u_{y(x_0,y_0)} = -v_{x(x_0,y_0)}$$

$$f^{I}_{(Z_0)} = v_{y(x_0,y_0)} - J\,u_{y(x_0,y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y} - J\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

25/3/2021 Mario Modesti 28

Estas ecuaciones resultan de suma importancia y se las conoce en conjunto como ecuaciones de CR (Cauchy Riemman).

Debido que las ecuaciones de CR son necesarias para la existencia de la derivada , se suelen usar frecuentemente para localizar puntos donde una función determinada no tenga derivada.

*Si las ecuaciones no son válidas en cierto valor de **Z**, la derivada no puede existir, pues dos trayectorias diferentes para conducirán a valores de límite diferentes.*

El hecho que las ecuaciones de CR se cumplan en no es suficiente para que exista la derivada de la función en ese punto.

Por medio de una transformación de coordenadas se pueden expresar las ecuaciones de CR en forma polar.

$$z = x + Jy = r\,e^{J\vartheta} = r\left(Cos\,\vartheta + J\,Sen\,\vartheta\right) \qquad x_{(r,\vartheta)} = r\,Cos\,\vartheta \qquad y_{(r,\vartheta)} = r\,Sen\,\vartheta$$

25/3/2021 Mario Modesti 29

Ecuaciones de CR en forma polar

$$x_{(r,\vartheta)} = r\,Cos\,\vartheta$$

$$W = f_{(r,\vartheta)} = u_{(r,\vartheta)} + Jv_{(r,\vartheta)} \qquad u_r\,,\,v_r\,,\,u_\vartheta\,,\,v_\vartheta \qquad y_{(r,\vartheta)} = r\,Sen\,\vartheta$$

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u_x\,Cos\,\vartheta + u_y\,Sen\,\vartheta = v_y\,Cos\,\vartheta - v_x\,Sen\,\vartheta$$

$$u_\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -u_x\,r\,Sen\,\vartheta + u_y\,r\,Cos\,\vartheta = -v_y\,r\,Sen\,\vartheta - v_x\,r\,Cos\,\vartheta$$

$$v_r = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = v_x\,Cos\,\vartheta + v_y\,Sen\,\vartheta$$

$$v_\vartheta = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -v_x\,r\,Sen\,\vartheta + v_y\,r\,Cos\,\vartheta$$

$$r\,u_r = v_\vartheta \qquad r\,v_r = -u_\vartheta$$

25/3/2021 Mario Modesti 30

Ejemplo

Determinar la derivada de $W = f_{(z)} = z^2$

$$\frac{dW}{dz} = f'_{(z)} = Lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = Lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} =$$

$$= Lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} =$$

$$= 2z + \Delta z \Big|_{\Delta z = 0} = 2z$$

$$W = f_{(z)} = (x + Jy)^2 = x^2 + J2xy - y^2 = x^2 - y^2 + J2xy$$

$$u_{(x,y)} = x^2 - y^2$$

$$v_{(x,y)} = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

Ejemplo

Demostrar que $\frac{dz^*}{dz}$ no existe para ningún punto del plano Z. Aplicar las ecuaciones de CR

$$f_{(Z)} = Z^* = x - Jy = u + Jv$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

$$\frac{dz^*}{dz} = f'_{(z)} = Lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = Lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^* - (z)^*}{\Delta z} =$$

$$= Lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta Y \to 0}} \frac{(x + Jy + \Delta x + J\Delta y)^* - (x + Jy)^*}{(\Delta x + J\Delta y)} =$$

$$= Lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta Y \to 0}} \frac{x + \Delta x - x + J(y - \Delta y + y)}{(\Delta x + J\Delta y)} =$$

$$Lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + J(-\Delta y)}{(\Delta x + J\Delta y)} \Bigg|_{y = cte \Rightarrow \Delta y = 0} = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Ejemplo

Determinar la derivada y aplicar CR en $f_{(z)} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{dW}{dZ} = f'_{(z)} = Lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta Z} = Lim_{\Delta Z \to 0} \frac{|Z+\Delta Z|^2 - |Z|^2}{\Delta Z} =$$

$$= Lim_{\Delta Z \to 0} \frac{(Z+\Delta Z)(Z^* + (\Delta Z)^*) - ZZ^*}{\Delta Z} =$$

$$= Lim_{\Delta Z \to 0} \frac{ZZ^* + Z^*\Delta Z + Z(\Delta Z)^* + \Delta Z(\Delta Z)^* - ZZ^*}{\Delta Z} =$$

$$= Z^* + Z\frac{(\Delta Z)^*}{\Delta Z} + (\Delta Z)^*$$

$$u_{(x,y)} = x^2 + y^2$$

$$v_{(x,y)} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Teoremas sobre derivadas

Una función formada por adición, sustracción, multiplicación o división de funciones diferenciables, es diferenciable.

$$Si \quad \frac{d}{dZ} f_{(z)} = f'_{(z)} = A \quad y \quad \frac{d}{dZ} g_{(z)} = g'_{(z)} = B$$

$$1) \quad \frac{d}{dZ}\{f_{(z)} \pm g_{(z)}\} = \frac{d}{dZ} f_{(z)} \pm \frac{d}{dZ} g_{(z)} = A \pm B$$

$$2) \quad \frac{d}{dZ}\{f_{(z)} g_{(z)}\} = f'_{(z)} g_{(z)} + g'_{(z)} f_{(z)}$$

$$3) \quad \frac{d}{dZ}\left\{\frac{f_{(z)}}{g_{(z)}}\right\} = \frac{f'_{(z)} g_{(z)} - g'_{(z)} f_{(z)}}{\left[g_{(z)}\right]^2}$$

Estas expresiones no son útiles para establecer la diferenciabilidad de una función ni calcular la derivada de expresiones en las que intervengan $|z|$ o z^* por lo que se recomienda en estos casos evaluar las funciones escritas en sus términos componentes, sean de la forma $u_{(x,y)} + J v_{(x,y)}$, y comenzar aplicando las ecuaciones de CR para verificar la diferenciabilidad, para luego derivar por el método elemental

Partiendo de la definición de derivada de una función es posible obtener la Regla de L´Hospital para funciones de variable compleja, enunciándola del siguiente modo

Para el caso las funciones $f_{(z)}$ y $g_{(z)}$ sean diferenciables en z_0

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_{(z)}}{g_{(z)}} = \frac{f^{I}_{(z_0)}}{g^{I}_{(z_0)}}$$

Desde el punto de vista formal es idéntica a la que se emplea en el cálculo elemental para evaluar formas indeterminadas con funciones de variable real. Se procederá a la demostración visto que $f_{(z_0)} = 0$ y $g_{(z_0)} = 0$ es posible expresar del siguiente modo la ecuación anterior.

$$\frac{f_{(z)}}{g_{(z)}} = \frac{\dfrac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{(z_0)}}{\Delta z}}{\dfrac{g_{(z_0+\Delta z)} - g_{(z_0)}}{\Delta z}} \qquad z = z_0 + \Delta z$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_{(z)}}{g_{(z)}} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{(z_0)}}{\Delta z}}{\dfrac{g_{(z_0+\Delta z)} - g_{(z_0)}}{\Delta z}} = \frac{\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{(z_0)}}{\Delta z}}{\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{g_{(z_0+\Delta z)} - g_{(z_0)}}{\Delta z}} = \frac{f^{I}_{(z_0)}}{g^{I}_{(z_0)}}$$

$$\frac{f_{(z)}}{g_{(z)}} = \frac{\dfrac{f_{(z)} - f_{(z_0)}}{z - z_0}}{\dfrac{g_{(z)} - g_{(z_0)}}{z - z_0}} \qquad z = z_0$$

En las dos últimas expresiones se puede tomar límite en las siguientes condiciones, para $z \to z_0$ en el primer caso y $\Delta z \to 0$ en el segundo caso.

$$\frac{f_{(z)}}{g_{(z)}} = \frac{\dfrac{f_{(z_0+\Delta z)} - f_{(z_0)}}{\Delta z}}{\dfrac{g_{(z_0+\Delta z)} - g_{(z_0)}}{\Delta z}} \qquad z = z_0 + \Delta z$$

Funciones analíticas

El concepto de analiticidad de funciones de variable compleja es el centro de la teoría de variable compleja, por esta razón resulta conveniente comprender su significado en lo esencial.

*Una función es **analítica u holomorfa** en el punto, y su derivada existe no solo en sino en todos los puntos de una vecindad.*

*Es analítica en una región **R** si lo es en cada punto de **R**.*

Son holomorfas las funciones que en un punto de una zona, tienen en cada punto, y una vecindad del mismo.

- *Derivadas iguales en todas las direcciones.*
- *Pueden ser desarrolladas en series de potencias*

Si una función deja de ser analítica en un punto, pero es analítica en algún punto de cualquier vecindad del punto, se dice que el punto es singular o es una singularidad

25/3/2021 Mario Modesti 37

*Suponer la función $f_{(z)} = \frac{1}{z}$, cuya derivada es $f'_{(z)} = -\frac{1}{z^2}$, la función es analítica en todo el dominio, excepto en **Z=0,** que resulta ser un punto singular, en cambio la función $f_{(z)} = |z|^2$ no tiene puntos singulares visto que no es analítica en ningún punto.*

*Una condición necesaria pero no suficiente para que una función sea analítica en un dominio **D** es evidentemente la continuidad de la función en todo el dominio, y que se cumplan las condiciones de CR.*

*Si dos funciones son analíticas en un dominio **D**, su suma y producto también serán analíticos en el dominio, de la misma manera, el cociente será analítico en el dominio en tanto el denominador no se anule en algún punto del dominio.*

25/3/2021 Mario Modesti 38

Funciones armónicas

*Se dice que una función de valor real **h** de dos variables reales **x** e **y** es armónica en un dominio dado del plano **xy**, si en todo punto de ese dominio tiene derivadas parciales primera y segunda continuas y satisface la ecuación diferencial parcial.*

$$h_{xx} + h_{yy} = 0 \qquad \textit{Ecuación de Laplace}$$

*Para una función de variable compleja analítica en un dominio **D**, se verifica que sus funciones componentes son armónicas en **D**.*

$$f_{(z)} = u_{(x,y)} + J\, v_{(x,y)}$$

Si la función es analítica en un punto, se cumple que sus partes real e imaginaria tienen derivadas parciales de todos los órdenes continuos en dicho punto.

25/3/2021 Mario Modesti 39

Las funciones holomorfas son armónicas, y éstas satisfacen las ecuaciones de CR. De la expresión, que pueden expresarse a su vez como si fueran subíndices que implican el orden y variable de derivación como a continuación, expresado en forma simplificada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

Diferenciando ambos miembros respecto de x

$$u_{xx} = v_{yx} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$u_{yx} = -v_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x^2}$$

Diferenciando ambos miembros respecto a y

$$u_{xy} = v_{yy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y^2}$$

$$u_{yy} = -v_{xy} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

25/3/2021 Mario Modesti 40

Combinando las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones conocidas como Laplacianos.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

*Vale decir que una función $f_{(z)} = u_{(x,y)} + J\,v_{(x,y)}$ es analítica en un dominio **D** y sus funciones componentes son armónicas en **D**, si las funciones **u** y **v** dadas son armónicas en **D** y sus primeras derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de CR.*

Ejemplo: Determinar a continuación si W es armónica

$$W = f_{(z)} = z^2 = (x + Jy)^2 = x^2 - y^2 + J2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Resumen: ¿Es $f_{(z)}$ analítica ?

1. Escribir $f(z)$ como $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.
2. Encontrar $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $v_x(x,y)$ y $v_y(x,y)$.
3. Comprobar que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

   $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$

   $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$
4. Comprobar que $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$,$v_x(x,y)$ y $v_y(x,y)$ son continuas en (x_0,y_0).
5. Estas condiciones se cumplen en una vecindad de Z_0

25/3/2021 Mario Modesti 43