Transformaciones y Mapeo

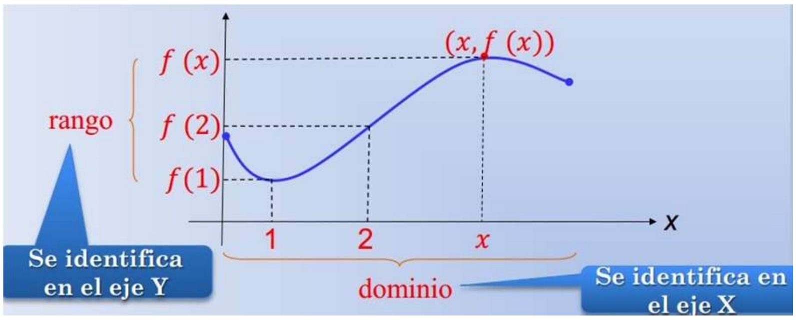
En general el concepto de transformación esta vinculado al estudio analítico de la función que aplica un determinado dominio de la variable al dominio de la función, esta aplicación tendrá un cambio de la función que define el dominio en el plano de la función y en general se lo estudia como correspondencias graficas de las imágenes respectivas. Considerando las imágenes entre el **plano Z** y el **Plano W** como el mapeo entre las mismas.

$$W = f_{(z)} = f_{(x+Jy)} = u_{(x,y)} + J\,v_{(x,y)}$$

$$W = f_{(z)} = f_{\left(r\,e^{J\theta}\right)} = r\left(Cos\,\theta + JSen\,\theta\right) = u_{(r,\theta)} + J\,v_{(r,\theta)}$$

Para la representación grafica de funciones de variable real, es posible en un único grafico desarrollar los valores de la función evaluada para diferentes valores de la variable, permitiendo de esta manera estudiar la función en una determinada región o dominio.

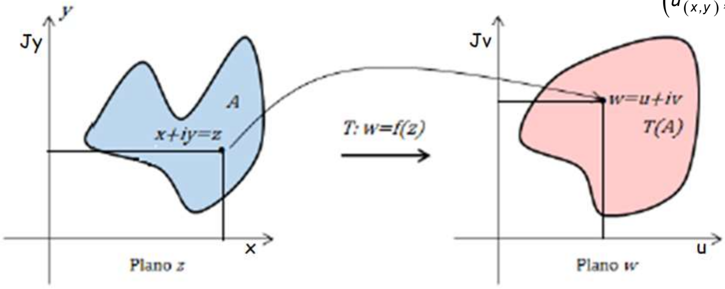
$$y = f_{(x)}$$



En el caso de una función de variable compleja, para visualizar la función w = $f_{(z)}$, a diferencia de una función de variable real, se requieren dos planos , correspondientes a la variable Z y a la función W. En general si A es un subconjunto del dominio de T se define la imagen por T de A como el conjunto que reúne a las imágenes de los puntos de A por medio de la transformación T en el plano W.

$$W = f_{(z)} = f_{(x+Jy)} = u_{(x,y)} + J\, v_{(x,y)} \qquad z = f_{(x,y)}$$

$$W = f_{\left(u_{(x,y)},\, v_{(x,y)}\right)}$$

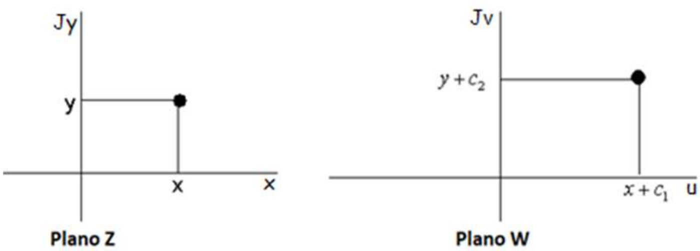


8/4/2021 Mario Modesti 3

Transformaciones elementales de variable compleja $z = x + Jy = \rho e^{J\theta}$

Translación $W = z + C = x + Jy + c_1 + Jc_2 = x + c_1 + J\left(y + c_2\right)$

$$Z\{x,y\} \longrightarrow W\{x+c_1, y+c_2\}$$



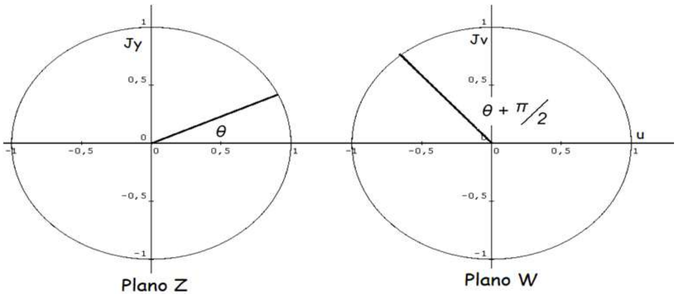
8/4/2021 Mario Modesti 4

Transformaciones elementales de variable compleja $z = x + Jy = \rho e^{J\theta}$

Rotación

$$W = Jz = e^{J\pi/2} r\, e^{J\theta} = r\, e^{J(\theta + \pi/2)} = r\left[Cos\left(\theta + \pi/2\right) + JSen\left(\theta + \pi/2\right)\right]$$

$$Z\left\{r\, e^{J\theta}\right\} \longrightarrow W\left\{r\, e^{J(\theta+\pi/2)}\right\}$$

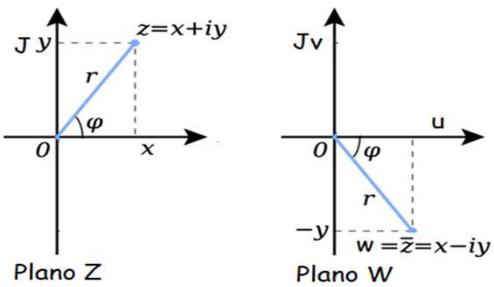


Transformaciones elementales de variable compleja $z = x + Jy = \rho e^{J\theta}$

Reflexión

$$W = z^* = x - Jy$$

$$Z\{x,y\} \longrightarrow W\{x,-y\}$$



Transformaciones lineales $z = x + Jy = \rho e^{J\theta}$

Combinando las transformaciones elementales en una única transformación, se obtiene la transformación lineal general a continuación, considerando dos complejos ***B*** *y* ***C***

$$W = Bz + C$$

$$B = be^{J\beta}$$

$$C = c_1 + Jc_2$$

$$Bz = \rho e^{J\theta} b e^{J\beta} = \rho b\left[Cos(\theta+\beta) + JSen(\theta+\beta)\right]$$

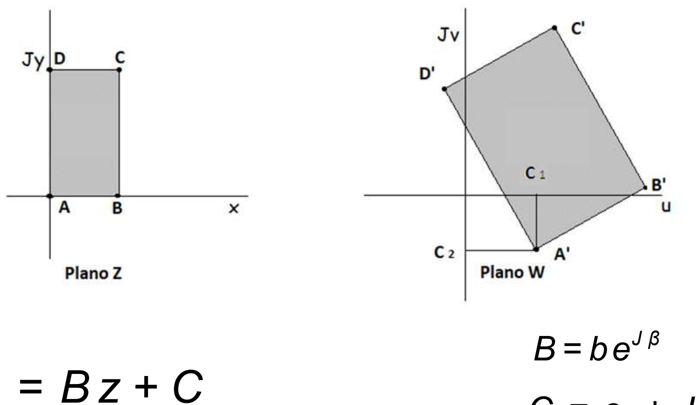
$$W = \rho\, b\, Cos(\theta+\beta) + J\ \rho\, b\, Sen(\theta+\beta) + c_1 + Jc_2$$

$$W = \left[\rho\, b\, Cos(\theta+\beta) + c_1\right] + J\left[\rho\, b\, Sen(\theta+\beta) + c_2\right]$$

$$\begin{cases} u = \rho\, b\, Cos(\theta+\beta) + c_1 \\ v = \rho\, b\, Sen(\theta+\beta) + c_2 \end{cases}$$

Considerar para la transformación lineal, los puntos del plano Z, A, B, C y D

que corresponden a los puntos del plano W, A’, B’, C’, y D’ respectivamente



$$W = Bz + C$$

$$B = be^{J\beta}$$

$$C = c_1 + Jc_2$$

Transformación potencial $z = x + Jy = \rho e^{J\theta}$

A continuación la función, en la medida que el exponente varia, se pueden considerar tres casos básicos que servirán como referencia de exponentes mayores.

$1°\ Caso\ \ Z^n$

$$W = f_{(z)} = z^2 = (x+Jy)^2 = x^2 - y^2 + J2yx \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2yx \end{cases}$$

$2°\ Caso\ \ Z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{Z}$

$$W = f_{(z)} = z^{\frac{1}{2}} = (\rho e^{J\theta})^{\frac{1}{2}} = \rho e^{J\left(\frac{\theta+k2\pi}{2}\right)} = \rho^{\frac{1}{2}}\left(Cos\left[\frac{\theta+k2\pi}{2}\right] + J\ Sen\left[\frac{\theta+k2\pi}{2}\right]\right) = \begin{cases} u = \rho^{\frac{1}{2}} Cos\left[\frac{\theta+k2\pi}{2}\right] \\ v = \rho^{\frac{1}{2}} Sen\left[\frac{\theta+k2\pi}{2}\right] \end{cases}$$

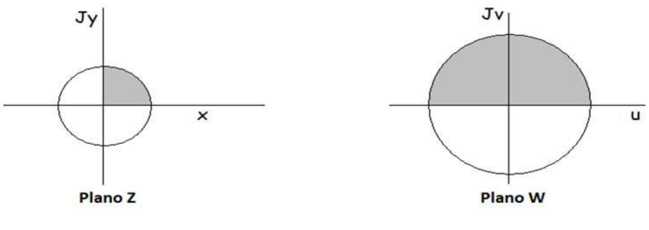
$3°\ Caso\ Z^{-n}$

$$W = f_{(z)} = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+Jy}\frac{(x-Jy)}{(x-Jy)} = \frac{x-Jy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - J\frac{y}{x^2+y^2} \begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$1°\ Caso\ \ Z^2$ Mapeo de la transformación en polar $z = \rho e^{J\theta}$

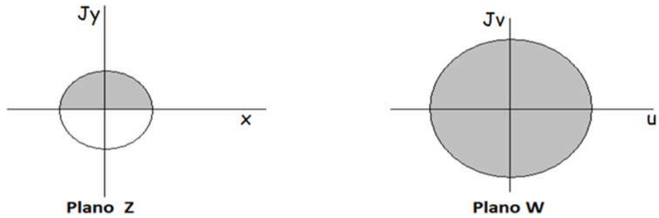
$$W = Z^2 = (\rho e^{J\theta})^2 = \rho^2 e^{J2\theta}$$

$$|W| = |Z|^2 \quad y \quad Arg\ W = 2\ Arg\ Z$$



$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad r = \rho^2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

*El módulo del complejo se eleva al cuadrado y el argumento se duplica en la transformación. Pero en el último caso no es un mapeo de uno a uno, porque los ejes real positivo y negativo de **Z** se mapean sobre el eje real positivo de **W**, visto que la transformación duplica los argumentos. Por esta razón los puntos correspondientes al primer cuadrante de **Z** pasarán al semiplano superior de **W***



$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad\qquad r = \rho^2, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

8/4/2021 Mario Modesti 11

Mapeo de la transformación en notación rectangular

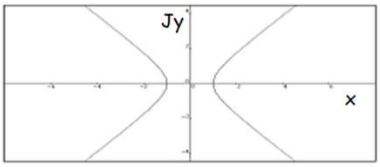
$$W = f_{(z)} = z^2 = (x + Jy)^2 = x^2 - y^2 + J2yx \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2yx \end{cases}$$

Se verifica que la parte real e imaginaria de la transformación corresponden a hipérbolas, equiláteras en el caso de v. Para llevar a cabo la discusión de este tipo de mapeos resulta útil partir de la definición de constantes en las diferentes partes de la función, para de esta manera poder estudiar la imagen de la función resultante en términos de las componentes de la variable.

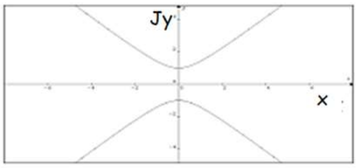
*Para llevar a cabo la discusión de este tipo de mapeos resulta útil partir de la definición de constantes en las diferentes partes de la función, para de esta manera poder estudiar la función resultante en términos de las componentes de la variable. Considerar **u=cte** en el plano **W** para diferentes valores de **u**. . Esto permite desarrollar una flia. de hiperbolas en el plano **Z.***

$$u = x^2 - y^2 = cte \qquad u = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \qquad y = f_{(x)}$$

8/4/2021 Mario Modesti 12



Plano Z para $x^2 - y^2 = u$



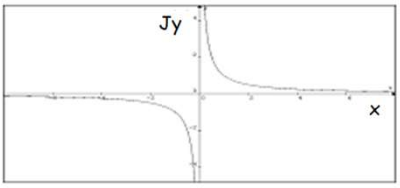
Plano Z para $x^2 - y^2 = -u$

*Considerar el caso particular para **u=0**, que equivale a las directrices de las hipérbolas.*

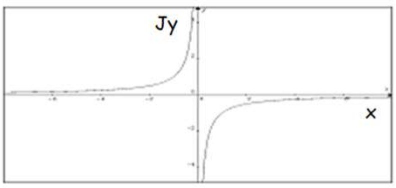
*De igual modo, considerar **v=cte** en el plano **W** para diferentes valores de **v**. Esto permite desarrollar una flia. de hiperbolas equilateras en el plano **Z.***

$$v = 2yx \qquad v = \{-2,-1,0,1,2\} \qquad y = f_{(x)}$$

8/4/2021 Mario Modesti 13



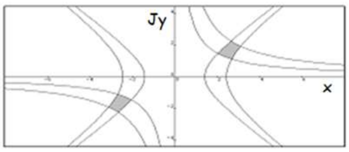
Plano Z para $2xy = v$



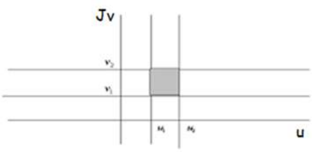
Plano Z para $2xy = -v$

*Considerar el caso particular para **v=0**, que equivale a las directrices de las hipérbolas.*

Ver graphmat



Plano Z



Plano W

8/4/2021 Mario Modesti 14

*Suponer ahora la correspondencia del plano **Z** al plano **W**, a **x=cte** e **y=cte**, se procederá al análisis de la correspondencia en el plano **W** por medio de las expresiones a continuación.*

$$x = C_1 = constante \qquad\qquad y = C_1 = constante$$

$$u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy \quad \therefore \; y = \frac{v}{2x} \qquad\qquad u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy \quad \therefore \; x = \frac{v}{2y}$$

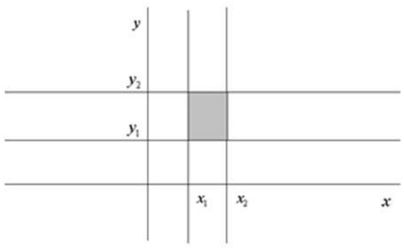
$$u = x^2 - \left(\frac{v}{2x}\right)^2 = a - b\,v^2 \qquad\qquad u = \left(\frac{v}{2y}\right)^2 - y^2 = a\,v^2 - b$$

$$u = f_{(v)} \qquad\qquad u = f_{(v)}$$

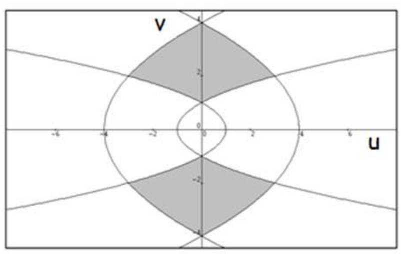
*Como se puede ver en la expresión final cuando se considera **x=cte** e **y=cte**, en W se desarrollan parábolas con diferentes parámetros, que llevados a su representación grafica, permite desarrollar dominios equivalentes de imagen.*

$$x = constante \qquad\qquad y = constante$$

$$u = x^2 - \left(\frac{v}{2x}\right)^2 = a - b\,v^2 \qquad\qquad u = \left(\frac{v}{2y}\right)^2 - y^2 = a\,v^2 - b$$



Plano Z



Plano W

*Por lo que los puntos situados en rectas a **x=cte** y **y=cte** en el plano Z, se representarán en parábolas en el plano **W** las mismas modificarán su fisonomía de acuerdo al valor de **x** e **y** respectivamente en cada caso.*

$2°\ Caso\ \ Z^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} u = Cos\left[\dfrac{\theta + k2\pi}{2}\right] \\ v = Sen\left[\dfrac{\theta + k2\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad W = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{z}$$

Si bien es posible desarrollar todo el análisis de la Transformación considerando que $W^2 = z$

La funci*ó*n $W = z^{-n}$

Considerar como caso de estudio $W = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ *. Esta función establece una correspondencia 1 a 1 para los puntos diferentes de cero entre el plano **Z** y **W** ya que* $\mathbf{ZZ^* = |Z|^2}$ *se puede describir el mapeo mediante las transformaciones consecutivas.*

$$W = u + Jv = \frac{1}{x+Jy}\,\frac{x-Jy}{x-Jy} = \frac{x-Jy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - J\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

*Se analizará en primer lugar el mapeo para **u=cte** en el plano **W**, lo que equivale a una función de tipo*

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{u} \quad \therefore \quad x^2 + y^2 - \frac{x}{u} = 0$$

Aplicando la ecuación general de la circunferencia, lo que equivale a el centro no coincidente con el origen, es posible decir

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{u} = 0 \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

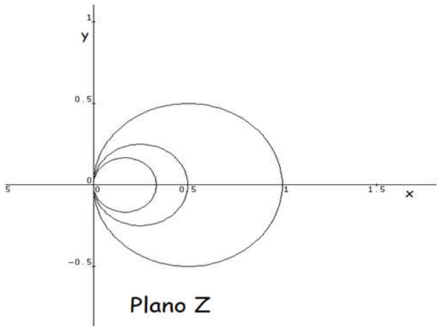
Equiparando este resultado con la ecuación obtenida se observa que la ecuación para ser equiparada requiere ser:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \quad \therefore \quad x^2 + y^2 - \frac{x}{u} = 0$$

$$a = \frac{1}{2u} \qquad a^2 - r^2 = 0 \quad \therefore \quad a = r$$

8/4/2021 Mario Modesti 19

que es una circunferencia cuyo radio y centro dependen del valor de ***u****, a continuación la Figura representa la imagen en el plano* ***Z*** *para diferentes valores de* ***u,*** *desarrollando una familia de circunferencias descentradas a eje* ***x***

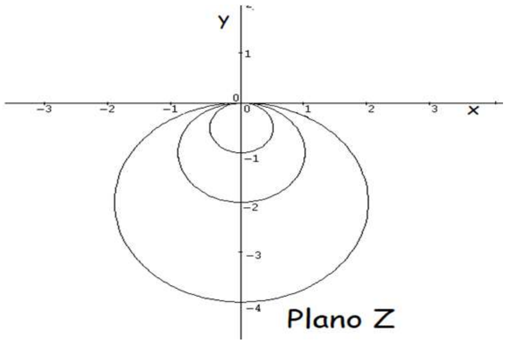


8/4/2021 Mario Modesti 20

*Planteando el caso de **v=cte** en el plano **W**, se obtiene en el plano Z*

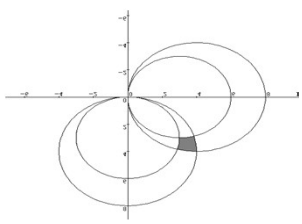
$$v=-\frac{y}{x^2+y^2} \quad \therefore \quad x^2+y^2+\frac{y}{v}=0 \qquad\qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

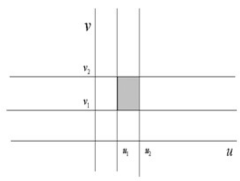
$$b=-\frac{1}{2v} \qquad\qquad b^2-r^2=0 \quad \therefore \quad b=r$$



8/4/2021 Mario Modesti 21

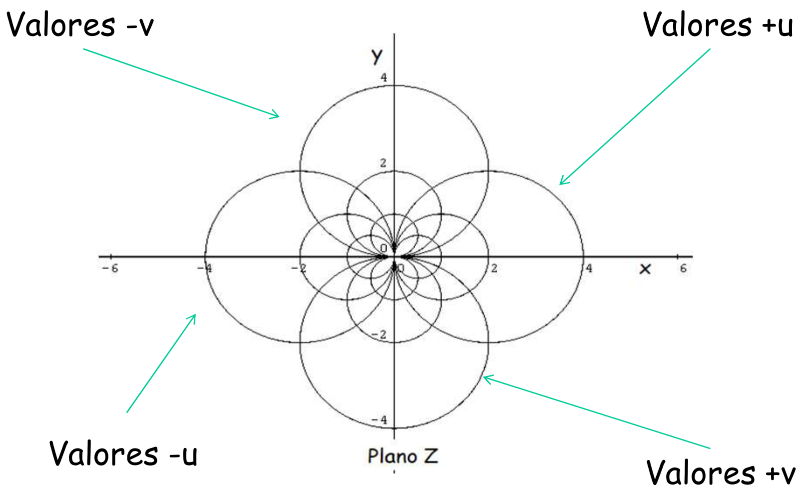
*Para mapear una región en el plano Z es suficiente plantear una zona delimitada entre dos rectas en el plano **W a u=cte** e **v=cte** como en la Figura, y verificar las imágenes en **Z** como se muestra a continuación.*





Plano Z ***Plano W***

8/4/2021 Mario Modesti 22



De la misma manera que fueron obtenidas las funciones de ***u*** *y* ***v*** *en función de* ***x,y****, se pueden obtener las funciones* ***x*** *e* ***y*** *en función de* ***u,v****. Asumiendo que si* $w=\frac{1}{z}$ *, se cumplirá* $z=\frac{1}{w}$

$$W = u + Jv = \frac{1}{x+Jy} \quad \therefore \quad x + Jy = \frac{1}{u+Jv}\frac{u-Jv}{u-Jv} = \frac{u-Jv}{u^2+v^2}$$

$$Z = \frac{u}{u^2+v^2} - J\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \therefore u^2+v^2 = \frac{u}{x} \quad \therefore u^2+v^2-\frac{u}{x}=0$$

$$y = -\frac{v}{u^2+v^2} \quad \therefore \quad u^2+v^2 = -\frac{v}{y} \quad \therefore u^2+v^2+\frac{v}{y}=0$$

Si ahora se considera una ecuación general de la circunferencia en el plano W

$$(u - a)^2 + (v - b)^2 = r^2$$

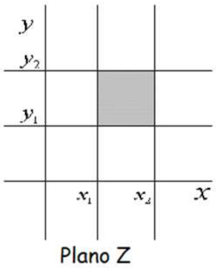
*Considerando constantes **x,y** en el plano **Z**, se obtienen circunferencias descentradas en el plano W de forma similar al anterior desarrollo, donde las leyes de variación de ambas funciones*

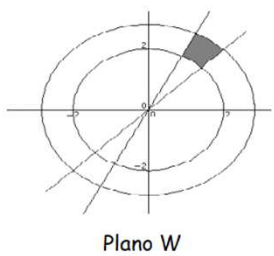
$$u^2 + v^2 - \frac{u}{x} = 0 \qquad u^2 + v^2 + \frac{v}{y} = 0$$

Mapeo $W = e^z$ $\qquad W = e^z = e^{(x+Jy)} = e^x e^{Jy}$

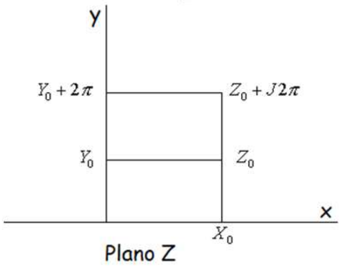
*Suponer el caso de **x=cte** en **Z**, equivale a circunferencias de diferentes radio en **W** para todos los valores de **y**, debido que el módulo de la función es función solo de **x**.*
*En el caso de plantear **y=cte**, los puntos en **W** se moverán sobre un rayo de argumento fijo y módulo variable, debido que solo depende de **y**.*

$$\begin{cases} u = e^x \,Cos\, y \\ v = e^x \,Sen\, y \end{cases}$$





Una consecuencia importante de la expresión del módulo es que la expresión $e^x = 0$ *no tiene solución en el campo de los complejos. Así como su argumento está definido por la componente imaginaria, pero en virtud que el argumento de un complejo es multivaluado, se puede decir*



$$Arg\left(e^z\right) = y + k2\pi$$

$$e^{Z_0} = e^{Z_0 + Jk2\pi}$$

Si bien la exponencial no es una función periódica en ***x*** *, la misma varía periódicamente al avanzar en el plano* ***Z*** *sobre cualquier recta paralela del eje* ***y.***

La transformación $W = e^z$

La función exponencial es de vital importancia en el estudio de variable compleja porque da lugar a numerosas aplicaciones y transformaciones

$$W = e^z = e^{x+Jy} = e^x e^{Jy}$$

$$W = e^x\left(Cos\, y + J\, Sen\, y\right)\begin{cases} u = e^x\, Cos\, y \\ v = Je^x\, Sen\, y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\, Cos\, y \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\, Sen\ y$$

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{d}{dx}\left(e^x\, Cos\ y\right) + J\frac{d}{dx}\left(e^x\, Sen\ y\right)$$

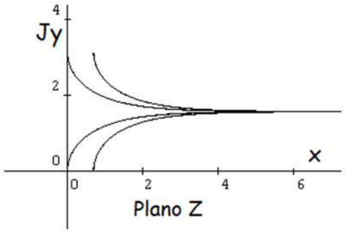
$$= e^x\, Cos\ y + J\, e^x\, Sen\ y = e^z$$

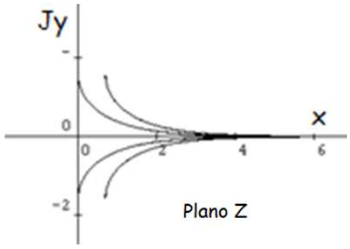
En el caso de evaluar un dominio en ***W*** *donde aceptando* ***u=cte*** *y* ***v=cte****.*

$$u = e^x \, Cos\, y \;\therefore\; \frac{u}{e^x} = Cos\, y \;\therefore\; y = Cos^{-1}\left(\frac{u}{e^x}\right) = Cos^{-1}\left(ue^{-x}\right)$$

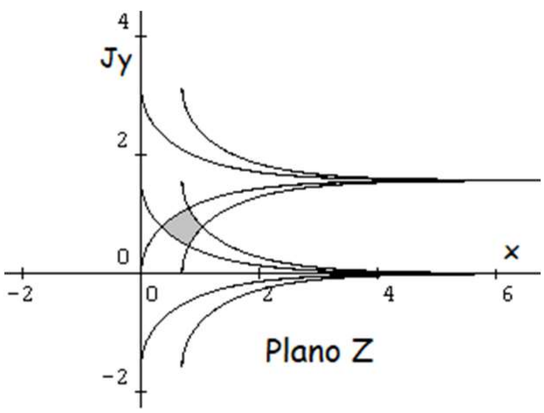
$$v = e^x \, Sen\, y \;\therefore\; \frac{v}{e^x} = Sen\, y \;\therefore\; y = Sen^{-1}\left(\frac{v}{e^x}\right) = Sen^{-1}\left(ve^{-x}\right)$$

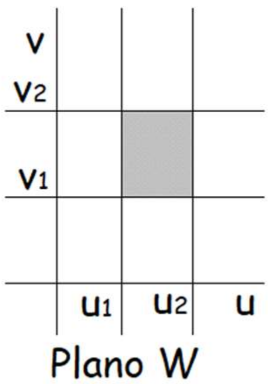
Ver graphmat





u=constante ***v=constante***





La transformación $W = Ln\ z$

$$z = \rho e^{J\theta} \qquad Ln\, z = Ln\left(\rho e^{J\theta}\right) = Ln\,\rho + Ln\left(e^{J\theta}\right) =$$
$$= Ln\,\rho + J\theta\, Ln\, e = Ln\,\rho + J\theta$$

$$Ln\ z = Ln\left|z\right| + J\,Arg\left(z\right) \qquad para \qquad Z \neq 0$$

$$e^{Ln Z} = e^{Ln\rho + J\theta} = e^{Ln\rho} e^{J\theta} = \rho e^{J\theta} = z$$

$$Ln\ z = Ln\,\rho + J\left(\theta + k2\pi\right)$$

Observar que la parte real de la función, es el logaritmo de una función real positiva, magnitud que puede evaluarse del modo usual para logaritmos. La parte imaginaria es el argumento expresado en radianes.

$$e^{Ln\rho + J\theta} = e^{Ln\rho} e^{J\theta} = e^{Ln\rho}\left(Cos\,\theta + J\,Sen\,\theta\right)$$

8/4/2021 Mario Modesti 31

El análisis de la transformación ***W = Ln Z*** *es monovaluado y su dominio de definición es el conjunto de los complejos en el rango* $-\pi < \theta \leq \pi$ *. Considerando las partes de la función* ***W = Ln Z****, es posible decir que:*

$$Ln\ z = Ln\ \rho + J\theta$$

$$u_{(\rho,\theta)} = Ln\,\rho \qquad y \qquad v_{(\rho,\theta)} = \theta$$

$$\begin{cases} u_{(x,y)} = Ln\sqrt{x^2 + y^2} \\ v_{(x,y)} = Tg^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$W = Ln\ z = Ln\sqrt{x^2 + y^2} + J\,Tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} Ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial x} Ln\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} 2x}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} Tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

8/4/2021 Mario Modesti 32

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}Ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\partial}{\partial y}Ln\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}2y}{\left(x^2+y^2\right)}=\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}Tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{d}{dZ}Ln\ z=\frac{\partial u}{\partial x}+J\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}-J\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x-Jy}{x^2+y^2}=\frac{Z^*}{ZZ^*}=\frac{1}{Z}$$

$$Z_1=\rho_1 e^{J\theta_1}\quad y\quad Z_2=\rho_2 e^{J\theta_2}$$

$$Ln\left(Z_1 Z_2\right)=Ln Z_1+Ln Z_2$$

$$Ln\left(z_1 z_2\right)=Ln\left(|z_1|e^{J\theta_1}|z_2|e^{J\theta_2}\right)=$$
$$=Ln|z_1|+Ln\,e^{J\theta_1}+Ln|z_2|+Ln\,e^{J\theta_2}=$$
$$=Ln|z_1|+Ln|z_2|+J\left(Arg\,z_1+Arg\,z_2\right)$$

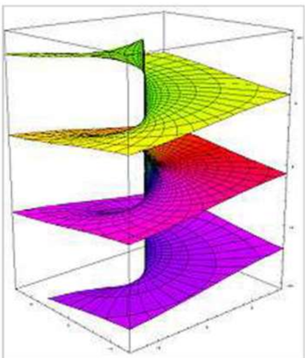
Demostrar

$$Ln\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=Ln Z_1-Ln Z_2$$

$$Ln\,\rho_1+Ln\,\rho_2=Ln\left(\rho_1\rho_2\right)\qquad Arg\,z_1+Arg\,z_2=Arg\left(z_1+z_2\right)$$

La dificultad más grave que presenta esta función es que $\theta=Arg\,(Z)$ *no está definido en forma unívoca, de manera que la parte imaginaria de la función logarítmica está directamente afectada por este concepto en el argumento de* ***Z****, por lo que se dice que* ***Ln Z*** *es multivaluada de* ***Z*** *.El valor principal es el valor obtenido cuando se usa el argumento principal de* ***Z*** *que satisface* $-\pi\leq\theta\leq\pi$

La función es discontinua para los reales negativos, ya que aproximarse a un complejo por el semiplano superior, implica un argumento Pi, y aproximarse por el semiplano negativo, un argumento –Pi, entonces en el límite hay un salto de 2Pi cuando cruza el eje real negativo. No obstante se puede seleccionar la región del corte o ramificación de acuerdo a la región que se desee trabajar en la aplicación.

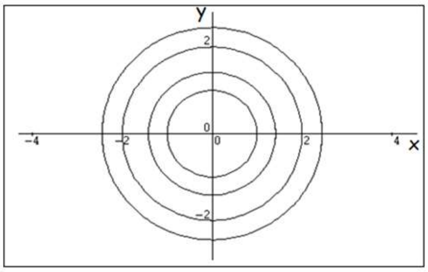


Mapeo $\begin{cases} u_{(x,y)} = Ln\sqrt{x^2+y^2} \\ v_{(x,y)} = Tg^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$

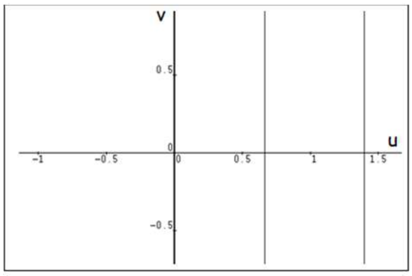
W Considerar u=cte

$$e^u = \sqrt{x^2+y^2} \quad \therefore \quad e^{2u} = x^2+y^2$$

$$u = Ln\sqrt{x^2+y^2} = Ln\, r \begin{cases} r=1 & u=0 \\ r=2 & u=0.69 \\ r=4 & u=1.38 \end{cases} \qquad v = Tg^{-1}\frac{y}{x}$$



Plano Z

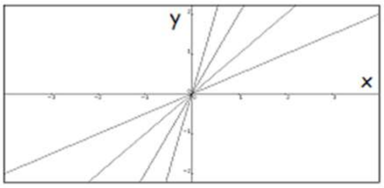


Plano W

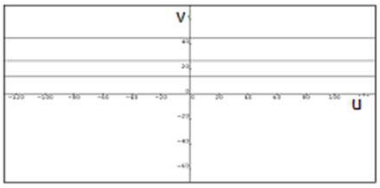
W Considerar v=cte

$$v = Tg^{-1}\frac{y}{x} \begin{cases} Tg^{-1}1 = 45 \\ Tg^{-1}\dfrac{1}{2} = 26.56 \\ Tg^{-1}\dfrac{1}{4} = 14.03 \end{cases} \qquad u = Ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$v = Tg^{-1}\left[\frac{y}{x}\right] \quad \therefore \quad Tg\ v = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad y = Tg\ v\ x$$



Plano Z



Plano W

Las funciones trigonométricas

$$|z| = 1$$

$$e^{J\theta} = z = Cos\left[\theta\right] + J\,Sen\left[\theta\right] \qquad e^{-J\theta} = z^{-1} = Cos\left[\theta\right] - J\,Sen\left[\theta\right]$$

$$e^{J\theta} + e^{-J\theta} = Cos\left[\theta\right] + J\,Sen\left[\theta\right] + Cos\left[\theta\right] - J\,Sen\left[\theta\right] = $$
$$z + z^{-1} \quad = 2Cos\left[\theta\right]$$

$$Cos\,\theta = \frac{e^{J\theta} + e^{-J\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$e^{J\theta} - e^{-J\theta} = Cos\left[\theta\right] + J\,Sen\left[\theta\right] - Cos\left[\theta\right] + J\,Sen\left[\theta\right] = $$
$$z - z^{-1} \quad = 2\,J\,Sen\left[\theta\right]$$

$$Sen\,\theta = \frac{e^{J\theta} - e^{-J\theta}}{2J} = \frac{z - z^{-1}}{2J}$$

Estas ecuaciones son útiles para definir las funciones trigonométricas básicas de un número real en términos de complejos, de igual modo es posible expresar las funciones trigonométricas de un complejo

$$Sen\,z = \frac{e^{Jz} - e^{-Jz}}{2J} \qquad Cos\,z = \frac{e^{Jz} + e^{-Jz}}{2}$$

8/4/2021 Mario Modesti 37

$$\frac{d\,Sen\,z}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{Jz} - e^{-Jz}}{2J}\right) = \frac{d}{dz}\frac{e^{Jz}}{2J} - \frac{d}{dz}\frac{e^{-Jz}}{2J} = J\frac{e^{Jz}}{2J} + J\frac{e^{-Jz}}{2J} =$$
$$= \frac{e^{Jz} + e^{-Jz}}{2} = Cos\,z$$

Se pueden demostrar las demás igualdades que se cumplen para una función trigonométrica de variable real como

$$Sen\left(z_1 \pm z_2\right) = Sen\,z_1\,Cos\,z_2 \pm Cos\,z_1\,Sen\,z_2$$
$$Cos\left(z_1 \pm z_2\right) = Cos\,z_1\,Cos\,z_2 \mp Sen\,z_1\,Sen\,z_2$$

$$Sen\left(x \pm Jy\right) = Sen\,x\,Cos\,Jy \pm Cos\,x\,Sen\,Jy$$
$$Cos\left(x \pm Jy\right) = Cos\,x\,Cos\,Jy \mp Sen\,x\,Sen\,Jy$$

8/4/2021 Mario Modesti 38

La transformación W = Sen Z

$$Sen\, z = Sen\, x\ \ Cosh\, y + J\, Cos\, x\ \ Senh\, y = u + J\, v$$

$$u = Sen\, x\ \ Cosh\, y \qquad y \qquad v = Cos\, x\ \ Senh\, y$$

$$Cosh\, y = \frac{u}{Sen\, x} \qquad y \qquad Senh\, y = \frac{v}{Cos\, x}$$

$$Sen\, x = \frac{u}{Cosh\, y} \qquad y \qquad Cos\, x = \frac{v}{Senh\, y}$$

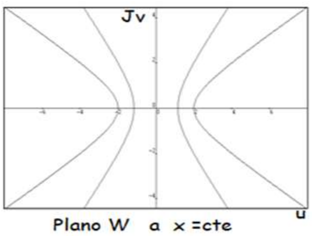
*De las expresiones así obtenidas, se puede extraer una relación entre **u** y **v** que permita vincularlas en el mismo plano, sea esta donde se relacionan por medio de una hipérbola o por medio de elipses, de acuerdo a la relación utilizada.*

$$Cosh^2 y - Senh^2\, y = 1 \qquad \left(\frac{u}{Sen\, x}\right)^2 - \left(\frac{v}{Cos\, x}\right)^2 = \frac{u^2}{Sen^2\, x} - \frac{v^2}{Cos^2\, x} = 1$$

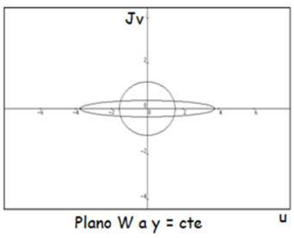
*Lo que equivale a una hipérbola en el plano **W** cuyas directrices dependen de **x** por medio de una función trigonométrica.*

$$Sen^2\, x + Cos^2 x = 1 \qquad \left(\frac{u}{Cosh\, y}\right)^2 + \left(\frac{v}{Senh\, y}\right)^2 = \frac{u^2}{Cosh^2\, y} + \frac{v^2}{Senh^2\, y} = 1$$

*Lo que equivale a una elipse en el plano **W** cuyas directrices dependen de **y** por medio de una función trigonométrica.*

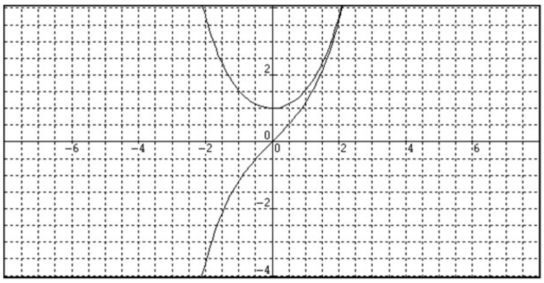


Plano W a x =cte



Plano W a y = cte

Funciones hiperbólicas



Seno y Coseno Hiperbólico

$$Senh\ \ X = \frac{e^{X} - e^{-X}}{2} \qquad Cosh\ \ X = \frac{e^{X} + e^{-X}}{2}$$

$$Senh\ \ Z = \frac{e^{Z} - e^{-Z}}{2} \qquad Cosh\ \ Z = \frac{e^{Z} + e^{-Z}}{2}$$

Existen relaciones que vinculan las funciones trigonométricas básicas con sus equivalentes hiperbólicas

$$Sen\ z = \frac{e^{Jz} - e^{-Jz}}{2J} = \frac{e^{J(X+JY)} - e^{-J(X+JY)}}{2J} = \frac{e^{JX}e^{-Y} - e^{-JX}e^{Y}}{2J}$$

$$= \frac{(Cos\ X + J\ Sen\ X)e^{-Y} - (Cos\ X - J\ Sen\ X)e^{Y}}{2J} =$$

$$= (Cos\ X + J\ Sen\ X)\frac{e^{-Y}}{2J} - (Cos\ X - J\ Sen\ X)\frac{e^{Y}}{2J} =$$

$$= Cos\ X\frac{e^{-Y}}{2J} + J\ Sen\ X\frac{e^{-Y}}{2J} - Cos\ X\frac{e^{Y}}{2J} + J\ Sen\ X\frac{e^{Y}}{2J} =$$

$$= Cos\ X\left(\frac{e^{-Y}}{2J} - \frac{e^{Y}}{2J}\right) + J\ Sen\ X\left(\frac{e^{-Y}}{2J} + \frac{e^{Y}}{2J}\right) =$$

$$= Sen\ X\left(\frac{e^{-Y} + e^{Y}}{2}\right) - J\,Cos\ X\left(\frac{e^{-Y} - e^{Y}}{2}\right) = Sen\ X\left(\frac{e^{Y} + e^{-Y}}{2}\right) + J\,Cos\ X\left(\frac{e^{Y} - e^{-Y}}{2}\right)$$

$$Sen\ z = Sen\ x\ \ Cosh\ y + J\,Cos\ x\ \ Senh\ y$$

$$Sen\ z = Sen\ x\ Cosh\ y + J\ Cos\ x\ Senh\ y$$

Aplicando expresiones conocidas, se puede obtener por comparación que :

$$Sen\left(Z_1 + Z_2\right) = Sen\ Z_1\ Cos\ Z_2 + Cos\ Z_1\ Sen\ Z_2$$
$$Sen\left(x + Jy\right) = Sen\ x\ Cos\ Jy + Cos\ x\ Sen\ Jy$$

$$Sen\ z = Sen\ x\ Cos\ Jy + Cos\ x\ Sen\ Jy$$

$Cos\ (Jy) = Cosh\ y$ $\qquad$ $J\ Senh\ y = Sen\left(Jy\right)$

8/4/2021 Mario Modesti 43

Transformación lineal fraccionaria o bilineal $\quad W = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$

denominada transformación de ***Möbius,*** *donde* ***a,b,c,*** *y* ***d*** *son constantes complejas, y debe verificarse que* $ad - bc \neq 0$ *. La transformación puede expresarse en forma matricial del siguiente modo:*

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

En el caso de cumplirse $ad = bc$ *, la función racional expresada se convierte en una constante. La condición* $ad - bc \neq 0$ *, permite que el determinante sea no nulo.*
Simplemente es una transformación lineal cuando ***c = 0****. Cuando se operan las fracciones se puede expresar una ecuación que resulta lineal en* ***Z*** *y lineal en* ***W****, por lo que le dá el nombre de transformación bilineal.*

8/4/2021 Mario Modesti 44

$$W = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$Wcz+Wd = az+b$$
$$Wcz - az + wd - b = 0$$
$$AzW + Bz + CW + D = 0$$

$$Wcz + Wd = az + b$$
$$Wcz - az + Wd - b = 0$$
$$z(Wc - a) = b - wd$$
$$z = \frac{b - Wd}{Wc - a} = \frac{-dW + b}{cW - a}$$

Existe una transformación bilineal que mapea tres puntos ***Z*** *en el plano* ***W*** *y viceversa, a continuación la ecuación:*

$$\frac{(W-W_1)(W_2-W_3)}{(W-W_3)(W_2-W_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

8/4/2021 Mario Modesti 45

Ejemplo : *Desarrollar la ecuación bilineal que transforma los puntos*

$$z\{-2,0,2\} \quad en \quad W\left\{\infty, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\}$$

$$\frac{(W-W_1)(W_2-W_3)}{(W-W_3)(W_2-W_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

$$\frac{(W-\infty)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\right)}{\left(W-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{4}-\infty\right)} = \frac{(z+2)(0-2)}{(z-2)(0+2)}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\right)}{\left(W-\frac{3}{8}\right)} = \frac{-2(z+2)}{2(z-2)} = -\frac{(z+2)}{(z-2)}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\right)}{\left(W-\frac{3}{8}\right)} = \frac{\left(\frac{2-3}{8}\right)}{\left(\frac{8W-3}{8}\right)} = -\frac{1}{8W-3}$$

$$\frac{1}{8W-3} = \frac{(z+2)}{(z-2)} \quad \therefore \quad (z+2)(8W-3) = (z-2)$$

$$8Wz - 3z + 16W - 6 = z - 2$$
$$W(8z+16) = z - 2 + 3z + 6 = 4z + 4$$
$$W = \frac{4(z+1)}{4(2z+4)} = \frac{(z+1)}{(2z+4)}$$

8/4/2021 Mario Modesti 46