Tareas Discretas II

Juan Esteban Mahecha Trujillo

February 2023

Tarea #1:

Si se tiene un conjunto finito de n elementos (G), entonces podemos escribir como una tabla de multiplicación. Demuestre la asociatividad de la operación con base a la siguiente tabla.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Un contraejemplo que muestra que la tabla no es asociativa es el siguiente:

$$(b \cdot c) \cdot d = b \cdot (c \cdot d)$$
$$b \cdot c = d \cdot d$$
$$d = b$$

No se cumple la asociatividad ya que los resultados son diferentes.

Tarea #2:

Demuestre que la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa.
Tenemos las siguientes matrices:

$$A, B, C \in M_{2x2}, n \in N$$
$$\text{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\text{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$\text{C} = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

Para obtener un resultado, basta con realizar la demostración de las matrices 2x2.

$$(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ec+dg & cf+dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ie+fk & ej+lf \\ ig+kh & gj+hl \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} iae+ibg+kaf+kbh & jae+jbg+laf+lbh \\ iec+idg+kcf+kdh & jec+jdg+lcf+ldh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aie+afk+big+bkh & aej+alf+bgj+bhl \\ cie+cfk+dig+dkh & cej+clf+dgj+dhl \end{bmatrix}$$

De este modo queda demostrada la asociatividad entre matrices cuadradas.

Tarea #3

Dada la siguiente definición de número complejo, demostrar que la multiplicación de numeros complejos es asociativa.

$$(a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)] = [(a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)]$$

$$(a+bi)\cdot[ce+(de+cf)i-df] = [ac+(bc+ad)i-bd]\cdot(e+fi)$$

$$(a+bi)\cdot[(ce-df)+(de+cf)i] = [(ac-bd)+(bc+ad)i]\cdot(e+fi)$$

$$a(ce-df)+[b(ce-df)+a(de+cf)]i-b(de+cf) = e(ac-bd)+[e(bc+ad)+f(ac-bd)i-f(bc+ad)]$$

$$ace-adf-bde-bcf+(bce-bdf+ade+acf)i = ace-bde-bcf-adf+(bce+ade+acf-bdf)i$$

Tenemos que si se cumple la asociatividad.