UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Universidad de Málaga

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Teoría de Homotopía

Juan Antonio Macías García

Junio 2014

Trabajo Fin de Grado

Teoría de Homotopía

Juan Antonio Macías García

Tutor:

Prof. Dr. Aniceto Murillo Mas

Palabras Clave:

Homotopía, CW-complejos, suspensión de espacios, espacio de lazos, cofibraciones, fibraciones, grupos de homotopía.

Índice general

Resumen

En este trabajo se estudian herramientas básicas de la Teoría de Homotopía. Primero se introducen brevemente conceptos básicos sobre homotopía, para proceder a introducir la suspensión ΣX de un espacio y el espacio de lazos ΩX. Se continúa con fibraciones y cofibraciones, viendo resultados y ejemplos sobre estos conceptos. Finalmente, se estudian los grupos de homotopía de orden superior y se relacionan con lo anteriormente visto.

Abstract

In this paper we study the basic tools in Homotopy Theory. First, we briefly introduce basic concepts in homotopy theory. Then we define the suspension ΣX and the loop space ΩX of a given space X. To follow up, fibrations and cofibrations are introduced along with some examples. Finally, we study higher order homotopy groups and stablish a connection between them and the concepts previously defined.

Introducción

Los problemas clásicos de levantamiento, extensión y clasificación

En distintos contextos matemáticos encontramos dos problemas básicos, común a todos ellos: los problemas de extensión y levantamiento.

El problema de la extensión

Dado un diagrama de aplicaciones continuas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es una inclusión en un contexto dado, ¿cuándo existe $\widetilde{f}$ extensión de f?

La respuesta no es trivial. Para que esto ocurra, aunque i no sea inclusión, ha de verificarse que si $i(a) = i(b)$ entonces $f(a) = f(b)$. Pero incluso si i es biyectiva es necesario exigirle a X, para que la única $\widetilde{f}$ posible sea continua, que posea la topología de la identificación determinada por i:

$$\theta \subset X \text{ es abierto si y sólo si } i^{-1}(\theta) \text{ es abierto de } A.$$

Hay varios ejemplos de resultados que dan respuesta a este problema. Algunos dan una respuesta positiva:

Teorema: Si X, Y son espacios métricos, Y completo, y A es denso en X, toda aplicación uniformemente continua $f : A \longrightarrow Y$ se extiende a una uniformemente continua $\widetilde{f} : X \to Y$. $\square$

Teorema de Extensión de Tietze: Sea X normal, $A \subset X$ cerrado, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo. Entonces toda $f : A \to I$ admite una extensión $\widetilde{f} : X \to I$. $\square$

Mientras que la de otros es negativa:

Teorema: La esfera S^n no es un retracto del disco D^{n+1}. En otras palabras, la identidad $S^n \to S^n$ no se extiende a D^{n+1}. $\square$

Muchas veces, el problema de la extensión es puramente homotópico: existen algunas aplicaciones $i : A \longrightarrow X$ para las que existe una extensión de $g : A \longrightarrow Y$ si y sólo si existe alguna extensión para una "deformada" de g.

Para intentar dar una respuesta la pregunta de la extensión, veremos la *propiedad de extensión homotópica*, introduciremos las cofibraciones y algunos resultados sobre éstas.

El problema del levantamiento

Dualmente [1], nos encontramos con el problema del levantamiento de aplicaciones continuas. Es el siguiente: dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

donde p es sobreyectiva, ¿cuándo existe $\widetilde{f}$ levantamiento de f?

La respuesta tampoco es elemental. Incluso si p es biyectiva hay que exigirle que sea homeomorfismo para que la única $\widetilde{f}$ sea continua.

Al igual que para el problema de la extensión, para el levantamiento hay resultados clásicos en distintos ambientes que contestan parcialmente esta cuestión.

[1] Dual en el sentido de "Eckmann-Hilton", dualidad de la que se hablará más adelante.

Teorema: Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto estrellado respecto a $x_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow S^1$ una aplicación continua. Entonces f queda determinada de forma continua por su función angular, esto es, existe una aplicación $\widetilde{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "exp"] \\ A \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Esto es, $f(x) = \left(\cos\widetilde{f}(x),\ \operatorname{sen}\widetilde{f}(x)\right)$. Es más, dos tales funciones $\widetilde{f}$ se diferencian en un múltiplo entero de 2π. □

Al igual que para el problema de la extensión, el del levantamiento es también homotópico: hay aplicaciones $p : X \longrightarrow B$ para las que existe el levantamiento de $f : Y \longrightarrow B$ si existe el levantamiento de una “deformada” de f.

Para el estudio de este problema, haremos uso de la *propiedad del levantamiento homotópico* y de las fibraciones.

Estos problemas son, en parte, origen de la teoría de homotopía. Introduzcamos entonces el concepto de deformación en homotopía:

Definición: Dos aplicaciones $f, g : X \longrightarrow Y$ se dicen homótopas (deformables la una en la otra), denotado por $f \simeq g$, si existe $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ una aplicación tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$.

De esta forma, los problemas de extensión y levantamiento nos llevan ahora a un problema común de clasificación. ¿Cuándo dos aplicaciones $X \longrightarrow Y$ son homótopas? ¿Cómo es el conjunto $[X,Y]$ de clases de homotopía de aplicaciones $X \longrightarrow Y$?

Los métodos que se siguen son de dos enfoques distintos:

Por una parte, a los espacios se le asocian modelos algebraicos y morfismos entre los respectivos modelos algebraicos a las aplicaciones. Estas asociaciones permiten parcialmente su clasificación.

Como ejemplo, probemos el teorema anterior por el que S^n no es un retracto de D^{n+1}. Para ello, asociemos a S^n un invariante algebraico no nulo (como por ejemplo el grupo de homología n-ésimo). Como el disco D^{n+1} es deformable a un punto, todos esos invariantes se hacen 0. Si S^n fuese retracto de D^{n+1} existiría un diagrama como el siguiente:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "Id_{S^n}"] \arrow[dr, "i"] & & S^n \\ & D^{n+1} \arrow[ur, "r"] & \end{tikzcd}$$

que algebraicamente daría lugar a

$$\begin{tikzcd} 0 \neq F(S^n) \arrow[rr, "Id"] \arrow[dr] & & F(S^n) \neq 0 \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

lo que resulta contradictorio. □

Por otra parte, para saber más sobre $[X, Y]$ es habitual tratar de dotar a este conjunto de otras estructuras (grupo, módulo...) que den luz sobre su comportamiento.

Capítulo 1

Homotopía: Nociones básicas

La relación de homotopía es básica y formaliza la noción de deformación continua de dos espacios:

Definición: Dos aplicaciones $f, g : X \longrightarrow Y$ se dicen homótopas (deformables la una en la otra), denotado por $f \simeq g$, si existe $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ una aplicación tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$.

Proposición: La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y.

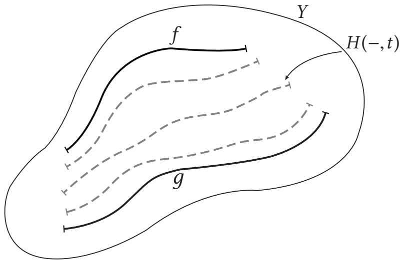
Demostración: La propiedad reflexiva es clara sin más que tomar la aplicación $F(x,t) = x$.
Para la simétrica, si $H : f \simeq g$ entonces $F : X \times I \longrightarrow Y$, $F(x,t) = H(x, 1-t)$ es una homotopía de g a f.
Veamos ahora la transitiva. Si $F : f \simeq g$, $H : g \simeq h$ entonces $G : X \times I \longrightarrow Y$,

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ H(x,2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

es una homotopía de f a h. □

Ejemplos:

(1) Cuando $X = I$, esto es, al trabajar con curvas, se observa mejor la deformación:



(2) Sean $X = Y = \mathbb{R}^n$, y consideremos las aplicaciones $f = Id_{\mathbb{R}^n}$ y $g \equiv 0$. Entonces $f \simeq g$ mediante la aplicación

$$H : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$H(x,t) = tx.$$

A menudo estamos interesados en aplicaciones entre pares

$$f : (X,A) \longrightarrow (Y,B),$$

la cual definimos como una aplicación continua tal que $f(A) \subset B$. En este caso, $f,g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ son homótopas si existe $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que

$$H_t = H(-,t) : (X,A) \longrightarrow (Y,B) \quad \forall t \in I.$$

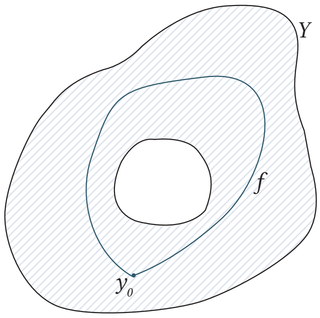
Un caso particular de suma importancia es el de los espacios punteados (X,x_0). En este caso, $f \simeq g : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ si existe $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$ y $H(x_0,t) = y_0$ $\forall t \in I$.

Ejemplos:

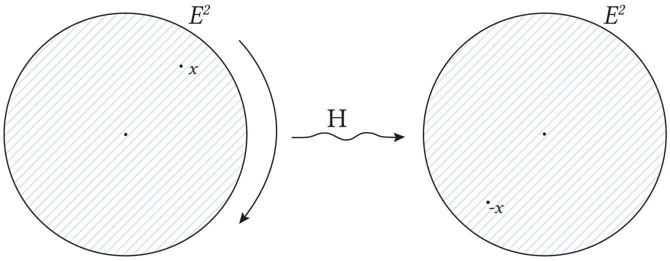
(1) En el ejemplo anterior (2), podemos considerar $f \simeq g : (\mathbb{R}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,0)$, tomando como homotopía la misma función H.

(2) Si consideramos un espacio como el siguiente:

Tenemos que $f : I \longrightarrow Y$ es obviamente homótopa a la constante en y_0 que denominamos c_{y_0}. Pero la aplicación de pares $f : (I,\{0,1\}) \longrightarrow (Y,y_0)$ no es homótopa a la constante c_{y_0}.



(3) Dado $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$, tenemos que $Id \simeq a$ donde a es la función antípoda mediante la hopotopía de la rotación: $H : D^2 \times I \longrightarrow D^2$ dada por $H(x,t) = H(\rho e^{i\theta}, t) = \rho e^{i(\theta + t\pi)}$.



Como aplicaciones de pares, $Id \simeq a$ mediante $H : (D^2, S^1) \times I \longrightarrow (D^2, S^1)$. Sin embargo, no existe ningún punto $x_0 \neq 0$ tal que $Id \simeq a$ como aplicaciones $(D^2, x_0) \longrightarrow (D^2, x_0)$.

Al conjunto cociente formado por las clases de homotopía de aplicaciones continuas de (X, A) en (Y, B) se le denota por $[(X, A), (Y, B)]$.

Veamos ahora la definición de que dos espacios sean "deformables" el uno en el otro:

Definición: Dos espacios X e Y son homotópicamente equivalentes si existen aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. A las aplicaciones f y g se les denomina equivalencias de homotopía.

Ejemplos:

(1) **Retractos**: La aplicación $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ es un retracto de X si existe una aplicación $r : X \longrightarrow A$ tal que $r \circ i = Id_A$. Decimos que A es un retracto de deformación de X si además $i \circ r \simeq Id_X$.

Como ejemplo, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. En efecto, si consideramos

$$r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n,$$
$$x \longmapsto \frac{x}{||x||},$$

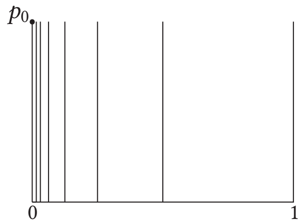
entonces

$$H : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\},$$
$$H(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{||x||},$$

es una homotopía entre $Id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ e $i \circ r$.

(2) **Espacios contráctiles**: Un espacio X es contráctil si tiene el mismo tipo de homotopía de un punto, o equivalentemente, la identidad en X es homótopa a una constante. Por ejemplo, como hemos visto en uno de los ejemplos anteriores, $\mathbb{R}^n$ y D^n son espacios contráctiles.

(3) **El espacio peine** P es un espacio contráctil. P es el conjunto definido de la siguiente forma:



$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\},$$

que obviamente es contráctil, aunque $Id_P \not\simeq_{p_0} c_{p_0}$ para un $p_0 \notin [0,1] \times \{0\}$.

Relacionado con el ejemplo (2) y con el problema de la extensión tenemos el siguiente resultado:

Teorema: Sea $f : S^n \longrightarrow X$ una aplicación continua. Entonces f es homótopa a una constante si y sólo si f se extiende al disco:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & X \\ & D^{n+1} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd} .$$

<u>*Demostración:*</u> Supongamos $H : f \simeq c_{x_0}$. Definimos entonces $\widetilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$ dada por:

$$\widetilde{f}(p) = \begin{cases} x_0 & \text{si } \|p\| \leq \frac{1}{2}, \\ H(\frac{p}{\|p\|}, 2-2\|p\|) & \text{si } \|p\| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

que es la extensión que queríamos.

Recíprocamente, si $\widetilde{f}$ es una extensión, $H(x,t) = \widetilde{f}((1-t)x)$ es una homotopía de f a la constante. $\square$

1.1 Espacios comúnmente utilizados

Algunas de las construcciones que son de gran utilidad son las siguientes:

- **El producto de espacios** $X \times Y$.
- **La suma puntual** o "wedge", denotado por $X \vee Y$ que puede verse como el conjunto cociente $X\dot{\cup}Y/_{x_0 \sim y_0}$ o como un subconjunto de $X \times Y$, esto es,

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y.$$

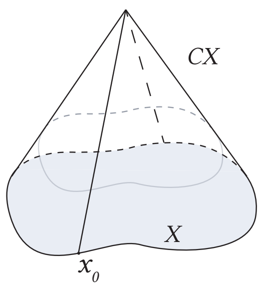
- **El smash** definido como

$$X \wedge Y = {X \times Y}/_{X \vee Y}.$$

Esto es, el producto en el que identificamos "los ejes" a un punto.

- **El cono de** X**.** Dado un espacio topológico X, el cono de X se define como

$$CX = {X \times I}/_{X \times \{0\}}.$$



Si queremos puntear el espacio, hacemos además

$$CX = {X \times I}/_{X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I}$$

donde el punto base es $[x_0, t]$. La aplicación

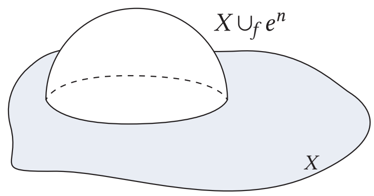
$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow CX, \\ x &\longmapsto [(x,1)], \end{aligned}$$

es un homeomorfismo en su imagen por lo que podemos pensar en X como un subespacio del cono. Además, el espacio CX es contráctil.

1.2 Adjunción de celdas a un espacio

Sea X un espacio topológico y D^n un disco de dimensión $n \geq 1$. Sea $f : S^{n-1} \longrightarrow X$ una aplicación continua. Definimos $X \cup_f e^n$, el espacio obtenido adjuntando a X una n-celda mediante f, como

$$X \cup_f e^n := {}^{X \dot{\cup} D^n}\!/\!\sim,$$



donde $\sim$ es la menor relación de equivalencia que contiene a $x \in S^{n-1} \sim f(x)$.

Proposición: La adjunción de una celda sólo depende del tipo de homotopía de la aplicación de adjunción.

Demostración: Sean $f, g : S^{n-1} \longrightarrow X$ dos funciones con el mismo tipo de homotopía, $f \simeq g$. Veamos que entonces que $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$.

Si $H : f \simeq g$, definimos las siguientes funciones:

$$k : X \cup_f e^n \longrightarrow X \cup_g e^n \text{ dada por } k(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X, \\ 2x & \text{si } x \in e^n,\ \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ H(\frac{x}{\|x\|},\ 2-2\|x\|) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$h : X \cup_g e^n \longrightarrow X \cup_f e^n \text{ dada por } h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X, \\ 2x & \text{si } x \in e^n,\ \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ H(\frac{x}{\|x\|},\ 2\|x\|-1) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Y tenemos que $h \circ k \simeq 1_{X \cup_f e^n}$ mediante la función $F : X \cup_f e^n \times I \longrightarrow X \cup_f e^n$ dada por:

$$F(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X, \\ 4x & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{4}, \\ H(\frac{x}{\|x\|}, (4\|x\|-1)t) & \text{si } \frac{1}{4} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ H(\frac{x}{\|x\|}, (2-2\|x\|)t) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

De forma análoga se prueba que $k \circ h \simeq 1_{X \cup_g e^n}$. □

Corolario: Si X es arcoconexo, $X \cup_f e^1 \simeq X \vee S^1$ y si f es homótopa a una constante (o nulhomótopa), entonces $X \cup_f e^n \simeq X \vee S^n$. □

Teorema: Una aplicación $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es nulhomótopa si y sólo si se extiende a CX:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, hook] & Y \\ & CX \arrow[u, dashed, "h"'] \end{tikzcd}.$$

<u>*Demostración:*</u> Sea $H : f \simeq c_{y_0}$ una homotopía. Definimos entonces la aplicación $h : CX \longrightarrow Y$, dada por $h([x,t]) = H(x,t)$. Está bien definida, ya que se tiene que $H(X\times\{0\}\cup\{x_0\}\times I) = y_0$ y se extiende a f.

Recíprocamente, dada $h : (CX,*) \longrightarrow (Y,y_0)$ extensión de f, definimos una homotopía $H : X\times I \longrightarrow Y$ como $H = h\circ\pi$ (donde $\pi : X\times I \longrightarrow CX$ es la proyección canónica) y se tiene que $H(x,0) = y_0$, $H(x,1) = f(x)$ y $H(x_0,t) = y_0$. □

1.3 Dualidad de Eckmann-Hilton

Este principio de dualidad, en su forma más básica, consiste en la idea de, dado un diagrama para una construcción, invertir el sentido de las flechas de dicho diagrama.

Un ejemplo de esto son las fibraciones y cofibraciones. Estas dos construcciones son duales en el sentido de Eckmann-Hilton.

Una fibración $p : E \longrightarrow B$ verifica que posee la HLP, que se representa por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i_o"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

Y una cofibración $i : A \longrightarrow X$ es tal que posee la HEP, que viene dada por el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "i_0"] \arrow[rrd, bend left, "f"] & & \\
A \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "i_0"] & & X\times I \arrow[r, dashed, "F"] & Y \\
 & A\times I \arrow[ur, hook] \arrow[rru, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Éste último diagrama podemos cambiarlo haciendo uso de la identificación entre aplicaciones de $X\times I$ en Y con aplicaciones de X en Y^I. Así, tendríamos que el diagrama queda de la siguiente forma:

$$
\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, dashed, "\widetilde{F}"] \\
Y^I \arrow[u, "\pi"] & A \arrow[l, "G"] \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}
$$

En el cual se ve que el sentido de las flechas es el contrario que en la fibración.

Capítulo 2

Suspensión y lazos de un espacio

Primero veamos un tipo de espacios topológicos que nos será de gran utilidad de aquí en adelante.

2.1 CW-complejos

Un CW-complejo es un tipo particular de espacio topológico muy útil en la teoría de homotopía. Veamos su construcción:

Comenzamos con X^0 un espacio topológico discreto compuesto por las 0-celdas. Adjuntamos I_1 1-celdas a X^0 para formar el 1-esqueleto.

$$X^1 = X^0 \cup_{f_\alpha} \left(\dot\cup\, e^1_\alpha \right) \quad \alpha \in I_1$$

Inductivamente, suponemos construido el $(n-1)$-esqueleto X^{n-1} al que adjuntamos una familia de n-celdas $\{e^n_\alpha\}_{\alpha \in I_n}$ mediante las correspondientes aplicaciones de adjunción $f_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$.

Llegado a este punto, tenemos entonces dos opciones: el proceso se detiene en un n, en cuyo caso la topología ya está definida, o podemos seguir indefinidamente en la sucesión

$$X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots$$

y consideramos $X = \cup_{n \geq 0} X^n$ al que asignamos la topología débil heredada de los esqueletos, esto es, $A \subset X$ es abierto si y sólo si $A \cap X^n$ es abierto de X^n para todo $n \geq 0$.

A todo espacio X así construido se le denomina CW-complejo, y se denomina CW-descomposición al conjunto de todas las celdas adjuntadas, $\xi = \{e^k_\alpha\}_{k \in \mathbb{N},\, \alpha \in I_k}$.

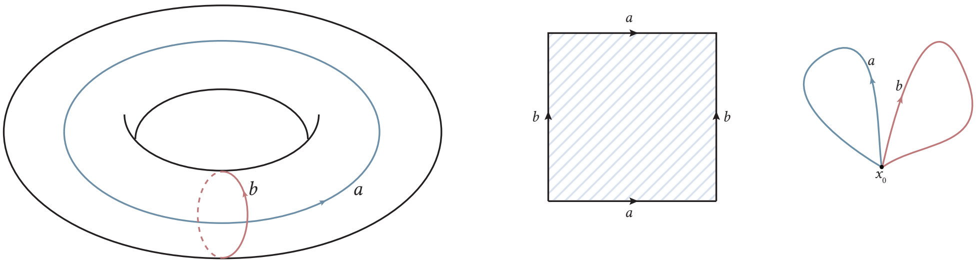
Diremos que el CW-complejo es finito si el número de celdas de la CW-descomposición es finito. Asimismo X es de dimensión finita si $X = X^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y se denomina dimensión del CW-complejo al menor n para el que ocurra ésto.

Si $\varphi : E^n \hookrightarrow X \dot{\cup} e^n \longrightarrow X \cup_f e^n$ es la aplicación característica de la adjunción de una celda, llamaremos a $\varphi(E^n)$ "celda" y a su interior "celda abierta". Nótese no obstante que en un CW-complejo una "n-celda abierta" sólo es abierta en el n-esqueleto, pero en general no lo es en el complejo.

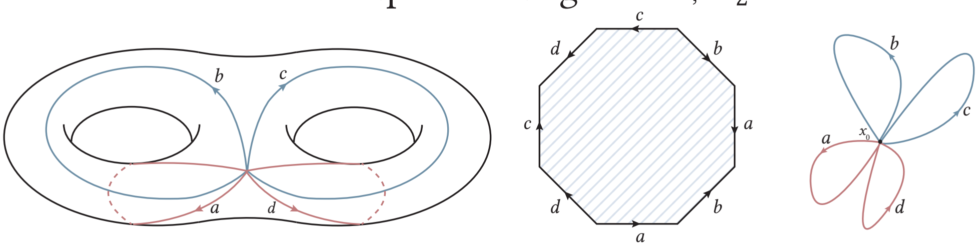
Ejemplos:

(1) Una superficie orientable compacta M_g de género g ($g \geq 1$) puede ser construida a partir de un polígono de $4g$ lados identificando los lados de forma que se alternan pares de éstos. Para mayor claridad, a continuación se presentan algunos casos:

Superficie de género 1, M_1



Superficie de género 2, M_2



Con estas identificaciones, los $4g$ lados del polígono se transforman en $2g$ circunferencias unidas por un punto, es decir, la adjunción a $X^0 = \{*\}$ de $2g$ 1-celdas mediante la única posible aplicación de adjunción $S^0 \longrightarrow X^0$. Una vez adjuntadas estas celdas, se le adjunta una 2-celda que es el interior de dicho polígono.

Así pues, $M_g = X^2$ con

$$X^0 = \{*\}, X^1 = \bigvee_{2g} S^1$$
$$M_g = X^2 = X^1 \cup_f e^2$$

- La esfera S^n, con $n \geq 0$, tiene estructura de CW-complejo. Existen dos descomposiciones diferentes muy intuitivas:

  (1) La primera consiste en dividir la esfera en una 0-celda y una n-celda. Por ejemplo, como 0-celda podemos tomar el polo norte $\{N\}$, y como n-celda tomar $S^n - \{N\}$.

  (2) Otra CW-descomposición consiste en comenzar con el 0-esqueleto formado por dos puntos, esto es, S^0. A éstos les adjuntamos dos 1-celdas, obteniendo S^1. Y vamos adjuntando para cada dimensión 2 k-celdas hasta llegar a S^n. Así, tendríamos una CW-descomposición formada por 2 celdas en cada dimensión hasta la n-ésima.

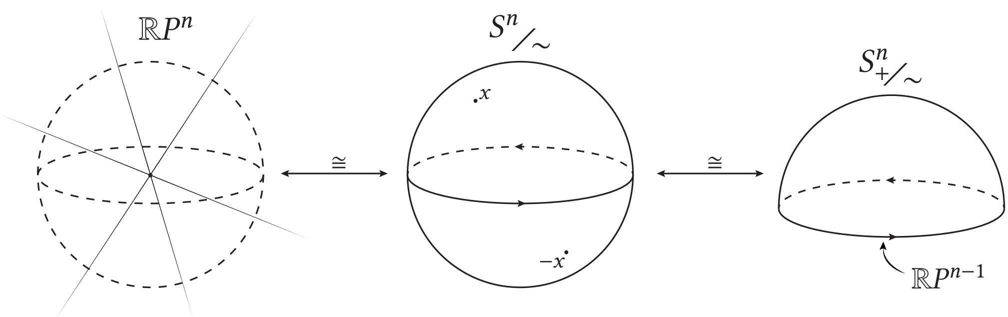
- El espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n = {}^{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}\!/\!\sim$ donde la relación $\sim$ viene dada por $x \sim y$ si $\exists \lambda \neq 0$ tal que $\lambda x = y$. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

induce un homeomorfismo

$$\mathbb{R}P^n = {}^{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}\!/\!\sim \xrightarrow{\cong} {}^{S^n}\!/\!_{x \sim -x}$$

Por otra parte, la inclusión de un hemisferio $S^n_+ \hookrightarrow S^n$ también induce de forma obvia un homeomorfismo ${}^{S^n_+}\!/\!\sim \xrightarrow{\cong} {}^{S^n}\!/\!\sim$ donde $x \in S^{n-1} \sim -x$



Así vemos que $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n-1} \cup_p e^n$, con $p : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ la proyección. De esta forma $\mathbb{R}P^n$ admite una estructura con una i-celda, $i = 0, 1, \ldots, n$.

De igual forma $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}P^n$ es un CW-complejo con una celda de cada dimensión.

2.1.1 Construcciones básicas con CW-complejos

Subcomplejos: Dado un CW-complejo X, un subcomplejo A de X es un subespacio de X obtenido adjuntando celdas de la CW-descomposición y de forma que A sea también CW-complejo.

Por ejemplo, el n-esqueleto de un complejo es un subcomplejo. O la semiesfera S^n_+ es un subcomplejo de S^n.

Productos: Si X e Y son CW-complejos (localmente finitos), entonces $X \times Y$ hereda una estructura de CW-complejo donde:

$$(X \times Y)^n = \bigcup_{i+j=n} X^i \times Y^j$$

Si e_i (resp. e_j) es una i-celda de X (resp. j-celda de Y) con $i + j = n$, con aplicación de adjunción $\varphi_i : S^{i-1} \longrightarrow X^{i-1}$ (resp. $\varphi_j : S^{j-1} \longrightarrow X^{j-1}$), consideramos:

$$\begin{aligned} e^{i+j} &= e^i \times e^j \text{ donde} \\ S^{n-1} = S^{i+j-1} &= \partial e^{i+j} = \partial e^i \times e^j \cup e^i \times \partial e^j \\ &= S^{i-1} \times e^j \cup e^i \times S^{j-1} \end{aligned}$$

Entonces, φ_i y φ_j definen $\psi : S^{n-1} \longrightarrow (X \times Y)^{n-1}$ dada por

$$\psi = \begin{cases} \varphi_i \times \phi_j & \text{en } S^{i-1} \times e^j \\ \phi_i \times \varphi_j & \text{en } e^i \times S^{j-1} \end{cases}$$

donde ϕ_i y ϕ_j son las aplicaciones características.

Cocientes: Si (X, A) es un CW-par (A es un subcomplejo de X) el cociente ${}^{X}\!/_{A}$ hereda de forma natural una estructura de CW-complejo. Las celdas de ${}^{X}\!/_{A}$ son las de $X - A$ más una 0-celda nueva, la imagen de A en ${}^{X}\!/_{A}$. Para cada n-celda e^n en $X - A$ con adjunción $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ la correspondiente adjunción en ${}^{X}\!/_{A}$ es $S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow {}^{X^{n-1}}\!/_{A^{n-1}}$.

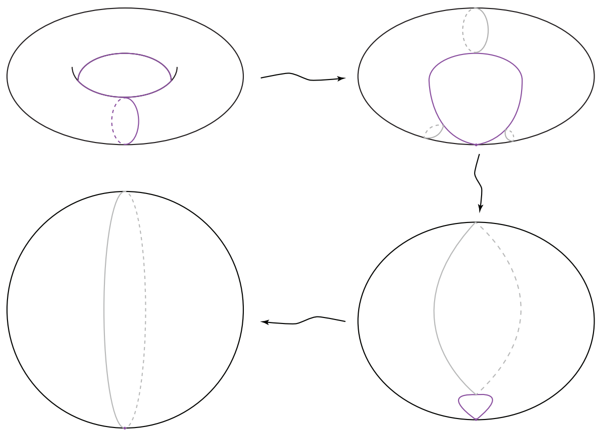
Por ejemplo, si en S^{n-1} tomamos cualquier CW-estructura y construimos D^n adjuntando una n-celda a S^{n-1}. ${D^n}/{S^{n-1}} = S^n$ con la estructura usual. Otro ejemplo, si en la superficie M_g de género g, "colapsamos" el 1-esqueleto ${M_g}/{M_g^1} = S^2$.

Nótese también que ${X^n}/{X^{n-1}} = \bigvee_{\alpha} S^n_\alpha$ con α variando en el número de n-celdas.

Wedge o suma puntual: Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ son CW-complejos y $x_0^\alpha \in X_\alpha$ son 0-celdas, el wedge $\bigvee_{\alpha\in I} X_\alpha$ obtenido al identificar puntos $\{x_0^\alpha\}$ no es más que el cociente ${\dot\cup X_\alpha}/{\{x_0^\alpha\}}$ y tiene por lo anterior estructura de CW-complejo.

Smash: El smash de 2 espacios X e Y se define como $X \wedge Y = {X\times Y}/{X\vee Y}$ entendiendo $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$.

Si x_0 e y_0 son 0-celdas de X e Y respectivamente, entonces $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ es un subcomplejo de $X \times Y$ y podemos tomar el cociente considerando la estructura cociente $X \wedge Y$.
Por ejemplo, $S^m \wedge S^n = {S^m\times S^n}/{S^m \vee S^n}$ tiene pues una 0-celda y una $(n+m)$-celda, por lo cual $S^m \wedge S^n = S^{m+n}$. En particular, $S^1 \wedge S^1 = {T^2}/{S^1 \vee S^1} = S^2$:



Espacios de aplicaciones: Si X es un CW-complejo con finitas celdas e Y tiene un número numerable de ellas, entonces los espacios $map(X,Y)$, Y^X ó $(Y,y_0)^{(X,\,x_0)}$ tienen el tipo de homotopía de CW-complejos. En los espacios de aplicaciones tomamos siempre la topología compacto abierta, es decir, la que tiene por subbase a los conjuntos

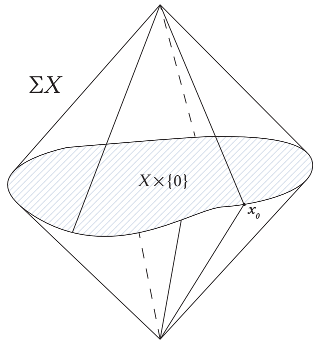
$$\langle K,\theta\rangle = \{f : X \longrightarrow Y : f(K) \subset \theta\},$$

donde K es compacto de X y θ es abierto de Y.

2.2 Suspensión de un espacio y espacio de lazos

Como ya hemos visto, el cono de X, CX, es el espacio contráctil $CX = {}^{X\times I}\big/_{X\times\{0\}}$. De igual forma, la suspensión de X, denotada por ΣX, se define como

$$\Sigma X = {}^{X\times I}\big/_{\substack{(x,1)\sim(x',1)\\ (x,0)\sim(x',0)}}$$



Si x_0 es el punto base de X, el cono punteado es

$$CX = {}^{X\times I}\big/_{X\times\{1\}\cup\{x_0\}\times I}$$

De igual forma la suspensión punteada es

$$\Sigma X = {}^{X\times I}\big/_{\substack{(x,1)\sim(x',1)\\ (x,0)\sim(x',0)\\ (x_0,t)\sim(x_0,t')}}$$

En el caso de que X sea un CW-complejo, si a I le damos una estructura de CW-complejo cuya CW-descomposición consiste en dos 0-celdas y una 1-celda, tanto el cono CX como la suspensión ΣX (que no es más que $CX\big/X\times\{0\}$) tienen estructura de CW-complejos.

Además toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se puede suspender $\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ de forma obvia:

$$\Sigma f[x,t] = [f(x),t].$$

Por otro lado tenemos los lazos en un espacio topológico punteado (X,x_0) que se definen como

$$\begin{aligned}\Omega X = (X,x_0)^{(S^1,\,p_0)} &= \{f : S^1 \longrightarrow X \mid f(p_0) = x_0\}\\ &= \{f : I \longrightarrow X \mid f(0) = f(1) = x_0\}\end{aligned}$$

Se tiene que ΩX resulta ser CW-complejo si X lo es. ΩX está punteado por la constante en x_0, c_{x_0}. Se tiene entonces:

Teorema: Para cualesquiera espacios punteados X e Y se tiene que

$$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]\ ^{1}.$$

Demostración: En general, veamos que

$$(Y, y_0)^{(\Sigma X,\, *)} \cong (\Omega Y, *)^{(X,\, x_0)}.$$

En efecto, la aplicación

$$\varphi : (\Omega Y, *)^{(X,\, x_0)} \longrightarrow (Y, y_0)^{(\Sigma X,\, *)},$$

dada por

$$\begin{aligned} \varphi(g) &: \Sigma X \longrightarrow Y, \\ \varphi(g)[x,t] &= g(x)(t), \end{aligned}$$

está bien definida y tiene por inversa a

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} &: (Y, y_0)^{(\Sigma X,\, *)} \longrightarrow (\Omega Y, *)^{(X,\, x_0)}, \\ \varphi^{-1}(f) &: X \longrightarrow \Omega Y, \\ \varphi^{-1}(f)(x)(t) &= f[x,t]. \end{aligned}$$

Veamos que φ induce una aplicación $\overline{\varphi} : [X, \Omega Y] \longrightarrow [\Sigma X, Y]$. Hemos de ver que si $f \simeq_{\{x_0\}} g$ entonces $\varphi(f) \simeq_* \varphi(g)$.

Sabemos pues que existe una homotopía $H : X \times I \longrightarrow \Omega Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ y $H(x_0,t) = c_{y_0}$ $\forall t \in I$.
Definimos entonces

$$\begin{aligned} F &: \Sigma X \times I \longrightarrow Y, \\ F([x,t],s) &= H(x,s)(t), \\ F([x,t],0) &= H(x,0)(t) = f(x)(t) = \varphi(f)[x,t], \\ F([x,t],1) &= \varphi(g)[x,t], \\ F([x_0,t],s) &= H(x_0,s)(t) = y_0, \end{aligned}$$

que es una homotopía entre $\varphi(f)$ y $\varphi(g)$. De igual forma, φ^{-1} induce la aplicación $\overline{\varphi^{-1}} : [\Sigma X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$ y se tiene que $\overline{\varphi}^{-1} = \overline{\varphi^{-1}}$.

□

[1] Siempre que se escriban clases de homotopía, se referirá a clases de homotopía de espacios punteados.

Observación: Ω y Σ son duales en el sentido de Eckmann-Hilton.

En ΩX podemos definir la operación $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$

$$\mu(\omega,\omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ \omega'(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\mu(\omega,\omega')$ está bien definida y para ver que es continua basta observar que la aplicación

$$\Omega X \times \Omega X \times I \longrightarrow \Omega X \times I \longrightarrow X,$$
$$(\omega,\omega',t) \longmapsto \begin{cases} \omega(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ \omega'(2t-1) & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

es continua.
Esta operación permite definir otra en $[X,\Omega Y]$, dada por

$$[f]\cdot[g] = [\mu(f,g)]$$

Veamos que μ hace de ΩY un grupo homotópico, esto es, un grupo en la categoría homotópica de los espacios topológicos. Demostremos la siguiente proposición:

Proposición: Sea (Y,y_0) un espacio topológico punteado. Consideremos el espacio de lazos ΩY. Entonces

1. c_{y_0} es el neutro homotópico.
2. μ es homotópicamente asociativa.
3. Si $\omega \in \Omega Y$, entonces el inverso homotópico de ω es $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$.

Demostración:

1. Veamos que c_{y_0} es neutro por la derecha. Consideramos

$$\mu(-,c_{y_0}) : \Omega Y \longrightarrow \Omega Y,$$
$$\omega \longmapsto \omega\cdot c_{y_0}.$$

Tenemos que ver que es homótopa a la identidad. Para ello basta considerar la homotopía

$$F : \Omega Y \times I \longrightarrow \Omega Y,$$
$$F(\omega,t)(s) = \begin{cases} \omega\left(\frac{2s}{t+1}\right) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}, \\ y_0 & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Igualmente se demuestra que $\mu(c_{y_0},-) \simeq Id_{\Omega Y}$.

2. Para ver que μ es asociativa, tenemos que ver que el siguiente diagrama es homotópicamente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Omega Y\times\Omega Y\times\Omega Y \arrow[r, "\mu\times Id_{\Omega Y}"] \arrow[d, "Id_{\Omega Y}\times\mu"] & \Omega Y\times\Omega Y \arrow[d, "\mu"] \\ \Omega Y\times\Omega Y \arrow[r, "\mu"] & \Omega Y\ . \end{tikzcd}$$

La homotopía necesaria para esto es:

$$G:\Omega Y\times\Omega Y\times\Omega Y\times I\longrightarrow\Omega Y,$$
$$G(\omega,\omega'\omega'',t)(s)=\begin{cases}\omega\left(\frac{4s}{t+1}\right) & 0\le s\le\frac{t+1}{4},\\ \omega'(4s-t-1) & \frac{t+1}{4}\le s\le\frac{t+2}{2},\\ \omega''\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right) & \frac{t+2}{4}\le s\le 1.\end{cases}$$

3. Por último, definimos el morfismo inverso $\Phi:\Omega Y\longrightarrow\Omega Y$ dado por $\Phi(\omega)=\omega^{-1}$. Tenemos que ver que $\omega\cdot\omega^{-1}\simeq c_{y_0}$. Para ello consideramos la homotopía:

$$H:\Omega Y\times I\longrightarrow\Omega Y,$$
$$H(\omega,t)(s)=\begin{cases}y_0 & 0\le s\le\frac{t}{2},\\ \omega(2s-t) & \frac{t}{2}\le s\le\frac{1}{2},\\ \omega(2-2s-t) & \frac{1}{2}\le s\le 1-\frac{t}{2},\\ y_0 & 1-\frac{t}{2}\le s\le 1.\end{cases}$$

□

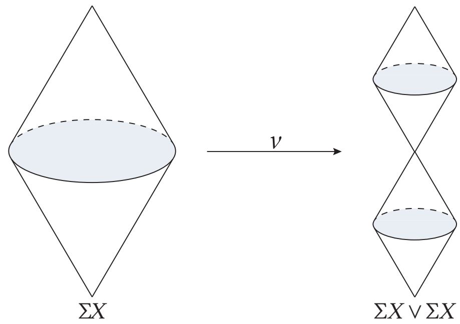
Vista esta proposición, de forma inmediata se tiene que:

Teorema: $[X,\Omega Y]$ es un grupo. □

Este proceso que hemos seguido puede realizarse de forma dual para la suspensión ΣX:

En la suspensión de un espacio existe una co-operación natural

$$\Sigma X\xrightarrow{\nu}\Sigma X\vee\Sigma X,$$
$$\nu[x,t]=\begin{cases}([x,2t],*) & t\le\frac{1}{2},\\ (*,[x,2t-1]) & t\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$$



que resulta ser co-asociativa con co-elemento neutro y con co-elemento inverso homotópico:

Proposición:

1. Asociatividad:
$$\begin{tikzcd}
\Sigma X \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\nu"] & \Sigma X \vee \Sigma X \arrow[d, "1\vee\nu"] \\
\Sigma X \vee \Sigma X \arrow[r, "\nu\vee 1"] & \Sigma X \vee \Sigma X \vee \Sigma X.
\end{tikzcd}$$

2. Elemento neutro:
$$\begin{tikzcd}
\Sigma X \arrow[r, "\nu"] \arrow[rrr, bend right, "1"'] & \Sigma X \vee \Sigma X \arrow[r, "c_{x_0}\vee 1"] & \Sigma X \vee \Sigma X \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma X.
\end{tikzcd}$$

3. Elemento inverso:
$$\begin{tikzcd}
\Sigma X \arrow[r, "\nu"] \arrow[rrr, bend right, "c_{x_0}"'] & \Sigma X \vee \Sigma X \arrow[r, "1\vee\eta"] & \Sigma X \vee \Sigma X \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma X,
\end{tikzcd}$$

   donde $\eta : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X$, $\eta[x,t] = [x, 1-t]$.

Esta co-operación define en $[\Sigma X, Y]$ una operación

$$\Sigma X \xrightarrow{\nu} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f\vee g} Y \vee Y \xrightarrow{\sigma} Y$$

que por la proposición anterior implica:

Teorema: $[\Sigma X, Y]$ es un grupo. □

Es fácil ver el siguiente resultado.

Teorema: La aplicación $\overline{\varphi} : [\Sigma X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$ es un isomorfismo de grupos.

2.2.1 Caso particular grupos de homotopía: $X = S^n$

Como ya definiremos con más detalle en el capítulo 4, se define el grupo de homotopía n-ésimo relativo al punto base x_0 como

$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)].$$

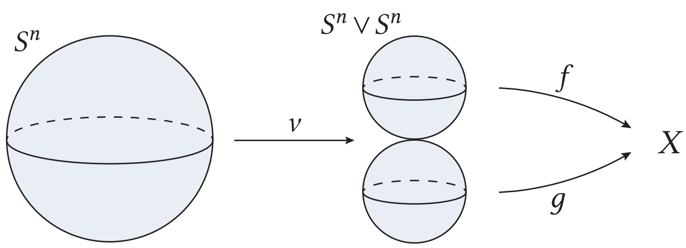
Las aplicaciones $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ pueden verse como aplicaciones

$$(S^n, p_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

ya que ${}^{I^n}\!/_{\partial I^n} = S^n$ y ${}^{\partial I^n}\!/_{\partial I^n} = p_0$.
De esta forma, el grupo de homotopía n-ésimo es:

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X].$$

La operación interna de este grupo se ve muy bien de forma geométrica en esta interpretación del grupo de homotopía:



Ahora bien, teniendo en cuenta que $\Sigma S^n = S^{n+1}$ $\forall n \geq 0$, y el teorema anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema: $\pi_n(X) = [S^n, X] = [S^{n-1}, \Omega X] = \pi_{n-1}(\Omega X)$. $\square$

Capítulo 3

Fibraciones y Cofibraciones

En esta parte introduciremos los conceptos de fibraciones y cofibraciones, relacionándolas con lo anteriormente visto.

3.1 Cofibraciones

Definición: Sea $A \subset X$ un subespacio. Decimos que $i : A \hookrightarrow X$ o el par (X, A) tiene la propiedad de extensión homotópica (HEP) con respecto al espacio Y si dada una homotopía

$$G : A \times I \longrightarrow Y$$

que tiene una extensión a X en su inicio, esto es, si existe $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(a) = G(a, 0)\ \forall\ a \in A$, entonces G se extiende a todo $X \times I$, es decir, existe $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = F(x, 0)$ y $F(a, t) = G(a, t)\ \forall\ t \in I,\ a \in A$.

De forma equivalente, (X, A) tiene la HEP si el siguiente diagrama puede completarse con el morfismo punteado:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
A \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[r, dashed, "F"] & Y \\
 & A \times I \arrow[ur, hook] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

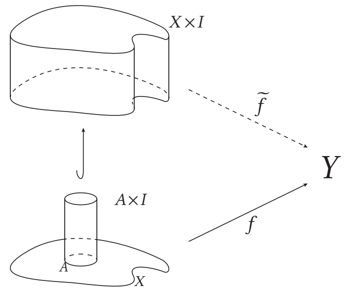
Definición: Decimos que un par (X,A) (o la inclusión $i : A \hookrightarrow X$) es una cofibración si posee la HEP con respecto a todo espacio Y.

Es decir, $A \subset X$ es cofibración si toda aplicación

$$f : X\times\{0\}\cup A\times I \longrightarrow Y$$

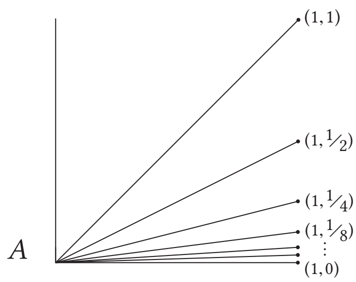
se extiende a $X\times I$.

O de forma gráfica:



Observaciones:

1. No todas las inclusiones $A \subset X$ son cofibraciones. Un contraejemplo de esto es el espacio formado por los segmentos de $(0,0)$ en $(1,\frac{1}{n})$. Esto es, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(t,\frac{t}{n}) : t \in [0,1]\}\cup\{0\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0\}$.



   A no es un retracto de I^2, luego no se tiene la extensión para la identidad

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "Id"] \arrow[dr, hook] & & A . \\ & X \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

2. Una definición alternativa de la cofibración consiste en sustituir la inclusión por una aplicación $f : A \longrightarrow X$ cualquiera. Podemos demostrar entonces que f es inyectiva pero no es necesariamente un homeomorfismo sobre su imagen.

Si suponemos que el par (X,A) es una cofibración y que X es Hausdorff, entonces se puede probar que A es cerrado, teniendo así el homeomorfismo sobre su imagen. Podemos suponer esto a partir de ahora, ya que el caso más general rara vez es necesario.

Teorema: El par (X,A) es una cofibración si y sólo si $X\times\{0\}\cup A\times I$ es un retracto de $X\times I$.

<u>*Demostración:*</u> Para la implicación directa, como (X,A) es una cofibración, la identidad

$$X\times\{0\}\cup A\times I \xrightarrow{Id} X\times\{0\}\cup A\times I$$

se extiende como el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X\times\{0\}\cup A\times I \arrow[rr, "Id"] \arrow[dr, hook] & & X\times\{0\}\cup A\times I\,. \\
& X\times I \arrow[ur, dashed, "r"] &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $X\times I \xrightarrow{r} X\times\{0\}\cup A\times I$ es una retracción.

Recíprocamente, al suponer que A es cerrado, dadas dos aplicaciones cualesquiera

$$\begin{cases} X\times\{0\} \longrightarrow Y, \\ A\times I \longrightarrow Y, \end{cases}$$

que coinciden en $A\times\{0\}$, obtenemos una aplicación $X\times\{0\}\cup A\times I \longrightarrow Y$ que es continua por el lema del pegamiento. Componiendo esta aplicación con una retracción obtenemos la extensión que queríamos. □

También hay resultados que relacionan cofibraciones con CW-complejos.

Teorema: Si (X,A) es un par de CW-complejos, entonces $X\times\{0\}\cup A\times I$ es un retracto de deformación de $X\times I$.

<u>*Demostración:*</u> Por el teorema anterior, existe una retracción

$$r: D^n\times I \longrightarrow D^n\times\{0\}\cup\partial D^n\times I.$$

La homotopía

$$H: (D^n\times I)\times I \longrightarrow D^n\times I,$$
$$H(p,s) = sr(p)+(1-s)p,$$

induce una homotopía entre $Id_{D^n\times I}$ e ir. Por tanto, r es un retracto de deformación de $D^n\times I$. Este retracto de deformación se amplía a un retracto

$$X^n\times I \longrightarrow X^n\times\{0\}\cup(X^{n-1}\cup A^n)\times I$$

de la siguiente forma: como X^n se obtiene adjuntando n-celdas a $X^{n-1}\cup A^n$, obtenemos $X^n\times I$ a partir de $X^n\times\{0\}\cup(X^{n-1}\cup A^n)\times I$ adjuntando copias de $D^n\times I$ a lo largo de $D^n\times\{0\}\cup\partial D^n\times I$.

Si aplicamos el retracto de deformación de $X^n\times I$ en $X^n\times\{0\}\cup(X^{n-1}\cup A^n)\times I$ en los intervalos $\left[{}^{1}\!/_{2^{n+1}}, {}^{1}\!/_{2^n}\right]$ y las concatenamos, obtenemos un retracto de deformación de $X\times I$ en $X\times\{0\}\cup A\times I$. $\square$

Teorema: Si el par (X,A) es una cofibración y A es contráctil, entonces la aplicación $q: X\longrightarrow {}^{X}\!/_{A}$ es una equivalencia de homotopía.

Demostración: Sea $H: X\times I\longrightarrow X$ una homotopía que extiende a la contracción $F: A\times I\longrightarrow A$, que tiene como inicio a la identidad, $H(x,0)=x$, y verifica que $H(A,t)=F(A,t)\subset A\ \forall t$.

La composición $q\circ H_t: X\longrightarrow {}^{X}\!/_{A}$ envía A a un punto. Por tanto, factoriza como el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_t"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\overline{H}_t"] & X/A . \end{tikzcd}$$

Tomando $t=1$, $H(A,1)=F(A,1)=*$, el punto donde A se contrae, luego existe una aplicación g tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\overline{H}_1"] \arrow[ur, "g"] & X/A . \end{tikzcd}$$

En principio tenemos que conmuta el triángulo superior $gq=H_1$. Para el triángulo inferior, tenemos que $qg(\overline{x})=qgq(x)=qH_1(x)=\overline{H}_1q(x)=\overline{H}_1(\overline{x})$ teniendo en cuenta que el primer diagrama conmuta para todo t. Por tanto, tenemos que q y g son inversos homotópicos, como queríamos ver:

$$\begin{aligned} gq &= H_1 \simeq H_0 = Id_X, \\ qg &= \overline{H}_1 \simeq \overline{H}_0 = Id_{X/A}. \end{aligned}$$

□

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplos:

(1) **Grafos:** Si G es un grafo finito, toda arista con distintos finales se puede contraer a un punto. En este caso, toda componente de G es homótopa o bien a un punto o a una suma puntual de S^1.

(2) Consideremos X el espacio formado por la unión de una S^2 y una 1-celda por los polos. Por el teorema anterior, si identificamos los polos al mismo punto sobre la esfera o contraemos la 1-celda a un punto, obtenemos dos espacios homotópicamente equivalentes. Así, tenemos que

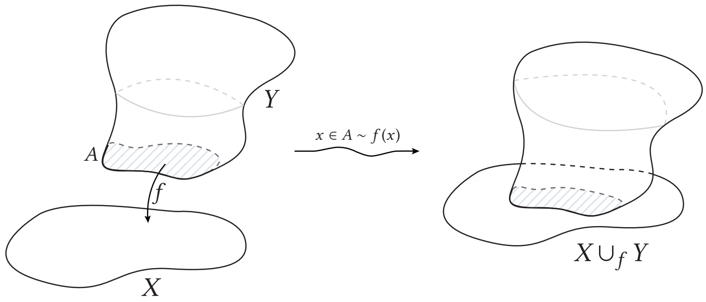
$$S^2 \cup e^1 = S^1 \vee S^2 = S^2/S^0\,.$$

3.1.1 Cómo pegar espacios en general

Anteriormente se definió el concepto de adjunción de n-celdas a un espacio X. Ahora vamos a generalizar este concepto. Para ello, consideramos un subespacio $A \subset Y$ y una aplicación $f : A \longrightarrow X$. El subespacio A será el punto de unión de ambos espacios, mientras que la aplicación es la forma de pegarlos. Una vez dados estos dos elementos, definimos:

$$X \cup_f Y := X\dot{\cup}Y/\sim\,, \qquad \text{donde } x \in A \sim f(x).$$

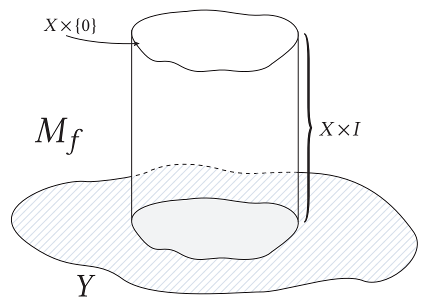
Como hemos observado, pegar una celda es un caso particular de la unión de espacios, donde el espacio Y es la n-celda y el subespacio de unión es la frontera de la celda.



Cilindro y cono de una aplicación f

Otro caso interesante de pegado de espacios es el llamado cilindro de una aplicación.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Definimos el cilindro de f como



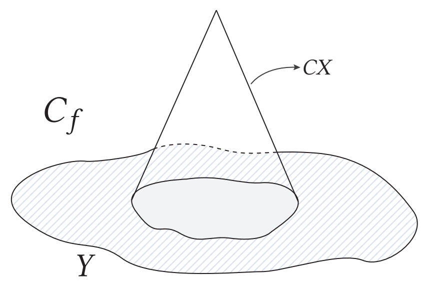
$$M_f = Y \cup_{\widetilde{f}} (X \times I),$$

donde

$$\widetilde{f} : X \times I \longrightarrow Y,$$
$$\widetilde{f}(x,1) = f(x).$$

Esto es,

$$M_f = {Y \dot{\cup} (X \times I)} \big/ {(x,1) \sim f(x)} \, .$$



Si además colapsamos $X \times \{0\}$ a un punto, obtenemos el cono de f, que también lo podemos definir como

$$C_f = {Y \dot{\cup} CX} \big/ {(x,1) \sim f(x)} \, .$$

Visto esto, podemos factorizar la función f como la composición $f = p \circ i$, donde i es la inclusión y p es la aplicación de retracción del cilindro al espacio Y, esto es $i(x) = (x,0)$ y $p : M_f \longrightarrow Y$ es tal que $p|_Y = Id_Y$, $p(x,t) = f(x)$.

Visto esto último, tenemos el siguiente resultado:

Teorema: Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y consideremos la factorización anterior, $f = p \circ i$. Entonces i es una cofibración y p una equivalencia de homotopía. En particular, toda aplicación f es, salvo homotopía, una cofibración.

<u>*Demostración:*</u> En efecto, $X \hookrightarrow M_f$ es una cofibración, pues la retracción

$$I \times I \xrightarrow{r} I \times \{0\} \cup \partial I \times I$$

induce una retracción de $M_f \times I$ en $M_f \times \{0\} \cup X \times I$.

Por otra parte, la inclusión $j : Y \longrightarrow M_f$ es una equivalencia de homotopía inversa de p: $p \circ j = Id_Y$, $j \circ p \simeq Id_{M_f}$. $\square$

En general, si $A \hookrightarrow X$ es una cofibración, llamamos cofibra de A a X/A, de forma que una cofibración es análogo a una sucesión exacta corta

$$A \hookrightarrow X \longrightarrow X/A \,.$$

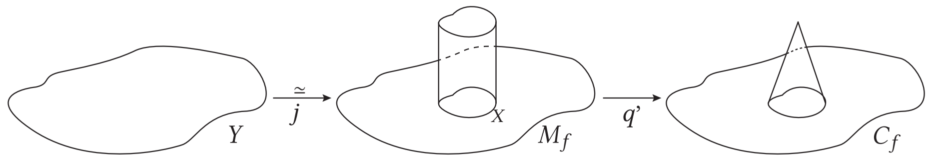
Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cualquiera, la cofibra de f es la cofibra de la cofibración asociada

$$X \longrightarrow M_f \longrightarrow M_f/X = C_f$$

que escribimos como:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f \,.$$

donde $q : Y \overset{j}{\hookrightarrow} M_f \xrightarrow{q'} C_f$



que es una cofibración de cofibra ΣX.

Tenemos entonces una sucesión

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f \xrightarrow{\delta} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma C_f \longrightarrow \dots$$

que es la sucesión de *Barratt-Puppe*. Esta da lugar a una sucesión exacta larga de grupos,

$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{q^*} [C_f, Z] \xleftarrow{\delta^*} [\Sigma X, Z] \xleftarrow{\Sigma f^*} [\Sigma Y, Z] \xleftarrow{\Sigma q^*} \dots \,,$$

que se deduce del siguiente resultado:

Teorema: Para todo espacio Z, la sucesión

$$[C_f, Z] \xrightarrow{q^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$$

inducida por $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f$ es exacta.

Demostración: Tenemos que $f^* \circ q^* = (q \circ f)^* = (c_{x_0})^* = c$, ya que la sucesión inicial es exacta por hipótesis. Por tanto, tenemos que $Im\ q^* \subset Ker\ f^*$.

Veamos la otra inclusión. Sea $g : Y \longrightarrow Z$ tal que $f^*(g) \simeq c$, esto es:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "c"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Como toda aplicación homótopa a la constante se extiende al cono de X, tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & CX \arrow[dr, bend left, "h"] & \\ X \arrow[ur, hook] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Definimos entonces $k : C_f \longrightarrow Z$ tal que $k|_Y = g$ y $k|_{CX} = h$.
De esta forma, tenemos que

$$q^*(k) = k \circ q = k \circ q' \circ j = g,$$

lo cual nos dice que $Ker\ f^* \subset Im\ q^*$.

□

3.2 Fibraciones

Definición: Una aplicación $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad de levantamiento homotópico (HLP) con respecto a un espacio X si dada una homotopía

$$G : X \times I \longrightarrow B$$

que tiene levantamiento en su inicio, entonces se levanta toda ella, esto es, si existe $g : X \longrightarrow E$ tal que $G(x, 0) = pg(x)$, existe entonces $\widetilde{G} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $\widetilde{G}(x, 0) = g(x)$ y $G = p \circ \widetilde{G}$.

Dicho de otra forma, el diagrama conmutativo siguiente puede completarse con la aplicación punteada $\widetilde{G}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i_o"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B\,. \end{tikzcd}$$

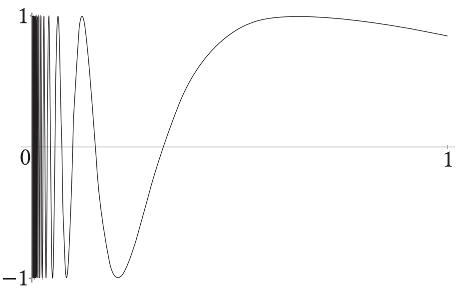
Definición: Decimos que la aplicación $p : E \longrightarrow B$ es una fibración (de Hurewicz)[1] si posee la HLP con respecto a cualquier espacio.

A continuación veremos un resultado que nos dice que toda fibración es sobreyectiva, pero existen ejemplos de aplicaciones sobreyectivas que no son fibraciones:

Ejemplo: Sea X el "seno del topólogo", es decir, la adherencia del grafo de la función $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ con $x \in (0,1]$. Esto es:

$$X = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) : x \in (0,1]\right\} \cup \{0\}\times[-1,1].$$

Tomemos $B = [0,1]$ junto con la proyección $p : X \longrightarrow B$ sobre la primera componente.



Es claro que la aplicación p es sobreyectiva y la identidad $B \longrightarrow B$ no puede levantarse a x ya que no existe una extensión continua de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ a 0. Por lo tanto, la proyección p no es una fibración.

Proposición: Toda fibración con base arcoconexa es sobreyectiva.

<u>*Demostración:*</u> Sea $b, b_0 \in B$ con b_0 en la imagen de p, $p(e_0) = b_0$. Sea $\alpha : I \longrightarrow B$

[1]Otro tipo de fibración, de Serre, es una fibración más debil, que tiene la HLP para los discos D^n. Se puede probar que éstas también tienen la HLP para los CW-complejos.

curva tal que $\alpha(0) = b_0$, $\alpha(1) = b$. Entonces, por ser p fibración, existe $\widetilde{\alpha}$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
\{z\} \arrow[r, "z \longmapsto e_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
\{z\} \times I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\alpha}"] & B
\end{tikzcd}$$

y obviamente $p\widetilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = b$. □

Esta misma demostración nos dice que todas las curvas se levantan.

Teorema: Todas las fibras tienen el mismo tipo de homotopía.

<u>*Demostración:*</u> Denotemos por $F_b = p^{-1}(b)$ la fibra en b. Así, para cada $b_0, b_1 \in B$ y cada curva $\omega : I \longrightarrow B$ curva en B uniendo b_0 con b_1, definimos una aplicación continua $h_{[\omega]} : F_{b_0} \longrightarrow F_{b_1}$ de la siguiente forma:

Por la HLP, si consideramos

$$\begin{aligned} F_{b_0} \times I &\longrightarrow B\,, \\ (e,t) &\longmapsto \omega(t)\,, \end{aligned}$$

existe un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F_{b_0} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "i_0"] & E \arrow[d, "p"] \\
F_{b_0} \times I \arrow[r] \arrow[ur, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

tal que $pG(e,t) = \omega(t)$.

Para cada $e \in F_{b_0}$, $G(e,-)$ es una curva en E de tal forma que $G(e,t) \in F_{\omega(t)} \forall t$.

Definimos entonces

$$\begin{aligned} h_{[\omega]} : F_{b_0} &\longrightarrow F_{[b_1]}\,, \\ e &\longmapsto G(e,1)\,. \end{aligned}$$

Es más, si $\omega \simeq_{\{0,1\}} \omega'$ entonces $h_{[\omega]} \simeq h_{[\omega']}$.

Tomemos ahora ω y τ curvas en B que unen a b_0 con b_1 y b_1 con b_2 respectivamente. Sean $F : F_{b_0} \times I \longrightarrow E$, $G : F_{b_1} \times I \longrightarrow E$ tales que $pF(e,t) = \omega(t)$ y

$pG(e,t) = \tau(t)$. Definimos

$$H : F_{b_0} \times I \longrightarrow E\,,$$
$$H(e,t) = \begin{cases} F(e,2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ G(h_{[\omega]}(e), 2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se tiene entonces $pH(e,t) = (\omega \cdot \tau)(t)$, por lo que

$$h_{[\omega\cdot\tau]}(e) = H(e,1) = G(h_{[\omega]}(e),1) = h_{[\tau]} \circ h_{[\omega]}(e),$$

esto es:

$$h_{[\omega\cdot\tau]} = h_{[\tau]} \circ h_{[\omega]}.$$

Por tanto, $h_{[\omega]} \circ h_{[\omega^{-1}]} = h_{[\omega^{-1}\cdot\omega]} = h_{[c_b]} = Id_{F_b}$. □

Ejemplos:

(1) La proyección $X \times Y \longrightarrow X$ es una fibración de forma elemental, llamada fibración trivial. Su fibra es Y.

(2) Hurewicz probó que dada una aplicación continua $p : E \longrightarrow B$, si existe un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de B tal que $p|_{p^{-1}(U_i)} : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ es una fibración para todo i y B es paracompacto, entonces p es una fibración.

Con esto, todo fibrado con base paracompacta es una fibración. Para verlo, basta con aplicar el resultado de Hurewicz a una trivialización del fibrado $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ recubrimiento de B, donde para cada α existe

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times F \xrightarrow{\cong} p^{-1}(U_\alpha)\,,$$

tal que

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p_1"'] & & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "p"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}\,.$$

(3) Todo espacio recubridor es una fibración con fibra discreta.

3.2.1 Fibraciones inducidas o pullbacks

Primero introduzcamos el concepto de pullback en un ámbito general.

Definición: Sean $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones con un codominio común. El pullback de las aplicaciones f y g consiste en el conjunto definido por $P = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$. Nótese que si p_X y p_Y denotan las proyecciones entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

A menudo el pullback se denota por $P = X \times_Z Y$.

Vista esta definición, veamos la particularización para fibraciones.

Dada $p : E \longrightarrow B$ una fibración y $f : X \longrightarrow B$ una aplicación consideramos su pullback

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "p_E"] \arrow[d, "p_X"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

donde, como antes, $f^*(E) = \{(x,e) \in X \times E : f(x) = p(e)\}$.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema: La aplicación $f^*(E) \xrightarrow{p_X} X$ es una fibración.

<u>*Demostración:*</u> Por ser p fibración, existe $\widetilde{H}$ como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i_0"] & f^*(E) \arrow[r, "p_E"] \arrow[d, "p_X"] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "G"] \arrow[urr, dashed, bend right=15, "\widetilde{H}"'] & X \arrow[r, "f"'] & B\,. \end{tikzcd}$$

Definimos $G(z,t) = \left(H(z,t), \widetilde{H}(z,t)\right)$. Entonces:

1. $G(z,t) \in f^*(E)$ ya que $f \circ H(z,t) = p \circ \widetilde{H}(z,t)$.
2. Claramente $p_X \circ G = H$.
3. $G \circ i_0 = g$. Sabemos que $\widetilde{H} \circ i_0 = p_e \circ g$ por lo que la segunda coordenada de g es la segunda coordenada de $G \circ i_0$ (que es $\widetilde{H}$) y la primera coordenada de g es $H(z,0)$ que es la primera de $G \circ i_0$.

$\square$

Si consideramos ahora $A \subset B$ tenemos el siguiente resultado:

Corolario: Si $p : E \longrightarrow B$ es fibración, entonces $p : p^{-1}(A) \longrightarrow A$ también lo es. $\square$

Proposición: En un pullback las fibras coinciden.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "Id"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
f^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "p_X"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración: Sea b_0 el punto base de B y sea $F = p^{-1}(b_0)$.
Si x_0 es el punto base de X, entonces

$$p_X^{-1}(x_0) = \{(x_0, e) \mid p(e) = f(x_0) = b_0\} \cong F_{b_0}$$

$\square$

Vamos ahora a ver un caso particular importante. Primero necesitaremos el siguiente resultado:

Proposición: La aplicación $X^I \xrightarrow{\gamma} X$ definida por $\gamma(\omega) = \omega(1)$ es una fibración.

Demostración: Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & X^I \arrow[d, "\gamma"] \\ Z\times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Definimos $\widetilde{H}$ como sigue:

$$\widetilde{H}(z,t) = g(z)\cdot H(z,[0,t])$$

esto es, como la composición de la curva $g(z)$ con la curva H_z de 0 a t. Está bien definido ya que

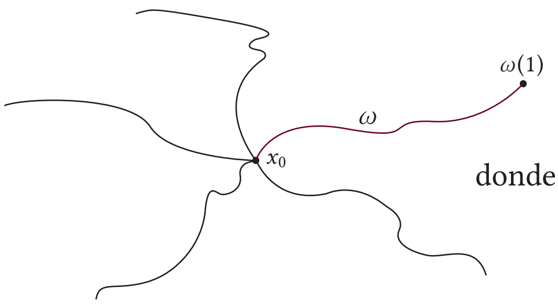
$$\begin{aligned} H(z,0) &= g(z)(1) = \gamma(g(z)), \\ \widetilde{H}(z,0) &= g(z), \\ \widetilde{H}(z,t)(1) &= \gamma\circ\widetilde{H}(z,t) = H(z,t). \end{aligned}$$

De forma explícita:

$$\widetilde{H}(z,t)(s) = \begin{cases} g(z)(s(t+1)) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{t+1}, \\ H(z,s(t+1)-1) & \text{si } \frac{1}{t+1} \le s \le 1. \end{cases}$$

□

Se deduce inmediatamente de esta proposición, que la “fibración de caminos” es, en efecto, una fibración. Ésta viene dada de la siguiente forma:



$$\begin{aligned} PX &\longrightarrow X \\ \omega &\longmapsto \omega(1) \end{aligned}$$

donde $PX = \left\{\omega \in X^I \mid \omega(0) = x_0\right\}$.

Nótese que la fibra de esta fibración es ΩX,

$$\Omega X \longrightarrow PX \longrightarrow X\,.$$

Por otra parte, dada $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación cualquiera, podemos descomponerla de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \\ & E_f = \{(x,\omega) \in X\times Y^I \mid f(x) = \omega(0)\} \arrow[ur, "p_1"'] & \end{tikzcd}$$

donde E_f es el pullback de p_1 y f y las aplicaciones φ y p_1 vienen definidas como

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (x, c_{f(x)}),\\ p_1(x,\omega) &= \omega(1).\end{aligned}$$

La aplicación p_1 es la composición de una proyección de un producto (que es fibración) y de la evaluación en 1, que acabamos de ver que también lo es. Luego p_1 es una fibración.

Por otra parte, φ es también de forma obvia una equivalencia de homotopía. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Teorema: Toda aplicación es, salvo homotopía, una fibración.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \\ & E_f \arrow[ur, "p_1"'] & \end{tikzcd}$$

□

A la fibra de p_1 se le denomina fibra homotópica de f y es:

$$F \longrightarrow E_f \xrightarrow{p_1} Y\,,$$
$$F = \{(x,\omega) \mid \omega(1) = y_0,\ \omega(0) = f(x)\}\,.$$

Si consideramos la inversa homotópica de φ, $E_f \xrightarrow{\phi} X$, definida por $\phi(x,\omega) = x$, entonces la composición

$$\begin{aligned} F \longrightarrow E_f &\xrightarrow{\phi} X\,,\\ (x,\omega) &\longmapsto x\,,\end{aligned}$$

es fibración cuya fibra típica es $\{(x_0,\omega) \mid \omega(0) = f(x_0) = y_0,\ \omega(1) = y_0\} = \Omega Y$.

Esto da lugar a la sucesión

$$\Omega Y \longrightarrow F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y\,.$$

Volviendo a realizar este razonamiento de forma iterativa, obtenemos la siguiente sucesión:

$$\ldots \longrightarrow \Omega^2 Y \longrightarrow \Omega F \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

que es dual en el sentido de Eckmann-Hilton de la sucesión de Barratt-Puppe, como indicamos cuando definimos esta dualidad.

Aplicando $[Z,-]$ obtenemos:

$$\ldots \longrightarrow [Z,\Omega F] \longrightarrow [Z,\Omega X] \longrightarrow [Z,\Omega Y] \longrightarrow [Z,F] \longrightarrow [Z,X] \longrightarrow [Z,Y]\,.$$

Se puede demostrar que:

Teorema: La sucesión

$$\ldots \longrightarrow [Z,\Omega F] \longrightarrow [Z,\Omega X] \longrightarrow [Z,\Omega Y] \longrightarrow [Z,F] \longrightarrow [Z,X] \longrightarrow [Z,Y]$$

es una sucesión exacta de grupos (o de acción o conjuntos en los casos pertinentes). □

Entonces, tomando en el teorema $Z = S^0$, obtenemos la sucesión

$$\ldots \longrightarrow [S^0,\Omega^n X] \longrightarrow [S^0,\Omega^n Y] \longrightarrow [S^0,\Omega^{n-1} F] \longrightarrow [S^0,\Omega^{n-1} X] \longrightarrow \ldots \quad .$$

Pero ya vimos que $[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$, luego tenemos la sucesión exacta:

$$\ldots \longrightarrow [\Sigma^n S^0,X] \longrightarrow [\Sigma^n S^0,Y] \longrightarrow [\Sigma^{n-1} S^0,F] \longrightarrow [\Sigma^{n-1} S^0,X] \longrightarrow \ldots \quad .$$

Y al ser $\Sigma^n S^0 = S^n$ y $[S^n,X] = \pi_n(X)$, tenemos el siguiente resultado, que volveremos a ver en el próximo capítulo:

Teorema: Se tiene la siguiente sucesión exacta larga en homotopía de una fibración:

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \pi_{n-1}(E) \longrightarrow \ldots \quad .$$

□

Capítulo 4

Grupos de Homotopía

4.1 Grupos de homotopía n-ésimos

El grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ ya es conocido. Además, anteriormente ya hemos definido los grupos de homotopía de un espacio:

$$\pi_n(X,x_0) = [(I^n,\partial I^n),(X,x_0)], \text{ donde } I^n = [0,1]^n.$$

Definimos, dadas $f,g : (I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,x_0)$,

$$(f+g)(s_1,\dots,s_n) = \begin{cases} f(2s_1,s_2,\dots,s_n) & \text{si } s_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s_1-1,s_2,\dots,s_n) & \text{si } s_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta operación induce en las clases de homotopía una operación que es asociativa

$$(f+g)+h \simeq f+(g+h) \qquad \text{(relativa a } \partial I^n\text{)},$$

admite elemento neutro

$$f+c_{x_0} \simeq f \simeq c_{x_0}+f \qquad \text{(relativa a } \partial I^n\text{)},$$

y elemento inverso

$$f^{-1}(s_1,\dots,s_n) = f(1-s_1,\dots,s_n) \qquad \text{(relativa a } \partial I^n\text{)}.$$

Se podrían considerar otras posibles operaciones variando la coordenada elegida. Podemos definir las operaciones

$$(f+_i g)(s_1,\dots,s_n) = \begin{cases} f(s_1,\dots,2s_i,\dots,s_n) & \text{si } s_i \leq \frac{1}{2}, \\ g(s_1,\dots,2s_i-1,\dots,s_n) & \text{si } s_i \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pero todas estas operaciones coinciden. Esto puede demostrarse haciendo uso del siguiente resultado:

Proposición (Argumento de Eckmann-Hilton): Sea X un conjunto dotado de dos operaciones $\bullet$, $\circ$, y supongamos que

1. $\bullet$ y $\circ$ poseen la misma unidad.
2. $\forall a, b, c, d \in X$ se verifica que
$$(a \bullet b) \circ (c \bullet d) = (a \circ c) \bullet (b \circ d).$$

Entonces $\bullet$ y $\circ$ coinciden, y son asociativas y conmutativas.

Demostración: Sean $a, b \in X$ y sea 1 la unidad de ambas operaciones. Entonces

$$\begin{aligned} a \circ b &= (1 \bullet a) \circ (b \bullet 1) = (1 \circ b) \bullet (a \circ 1) = b \bullet a \\ &= (b \circ 1) \bullet (1 \circ a) = (b \bullet 1) \circ (1 \bullet a) = b \circ a. \end{aligned}$$

Esto demuestra la igualdad de las operaciones y la conmutatividad. Veamos la asociatividad:

$$(a \bullet b) \bullet c = (a \bullet b) \bullet (1 \bullet c) = (a \bullet 1) \bullet (b \bullet c) = a \bullet (b \bullet c).$$

□

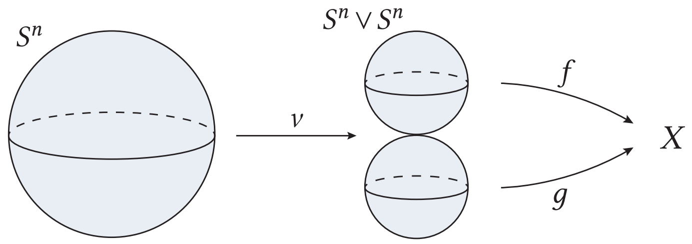
Por tanto, como estas operaciones verifican las condiciones de la proposición, obtenemos el siguiente resultado inmediatamente:

Teorema: Si $n \geq 2$, entonces $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano.

El caso $n = 1$ no puede contemplarse ya que al trabajar únicamente con una coordenada no disponemos de otra operación distinta con la que aplicar el Argumento de Eckmann-Hilton. Es bien sabido que el grupo fundamental de un espacio no es abeliano en general.

Observaciones:

1. En el caso que tengamos C componente arcoconexa que contiene a x_0, entonces $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(C, x_0)$. Por lo tanto, supondremos X arcoconexo.
2. Las aplicaciones $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ coinciden con las aplicaciones definidas en el cociente $({}^{I^n}\!/_{\partial I^n}, *) \longrightarrow (X, x_0)$. Pero $S^n = {}^{I^n}\!/_{\partial I^n}$ y con estas identificaciones, la estructura de grupo es la que conocíamos



$$S^n \longrightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X.$$

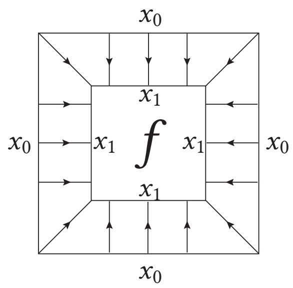
Veamos ahora que si cambiamos el punto base obtenemos grupos de homotopía isomorfos (al igual que ocurría para π_1):

Tomamos dos puntos $x_0,\ x_1 \in X$ y un camino $\gamma : I \longrightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. A cada aplicación $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ le asociamos la aplicación

$$\gamma_f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$$

definida de la siguiente forma:

Encogemos el dominio de f a un cubo menor concéntrico en I^n, e insertamos el camino γ en cada segmento radial entre este cubo y ∂I^n.



Se tienen entonces las siguientes propiedades:

i) $\gamma_{(f+g)} \simeq \gamma_f + \gamma_g$

ii) $(\gamma\eta)_f \simeq \gamma_{\eta_f}$

iii) $c_{x_1 f} \simeq f$

Entonces, para cada γ definimos

$$\begin{aligned} \beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) &\longrightarrow \pi_n(X, x_0), \\ [f] &\longmapsto [\gamma_f], \end{aligned}$$

que es un morfismo de grupos, cuyo inverso es $\beta_{\gamma^{-1}}$. Por tanto:

Teorema: Dados $x_0, x_1 \in X$, se tiene que $\pi_n(X, x_1) \cong \pi_n(X, x_0)$ mediante β_γ. Es más, si $n = 1$,

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0), \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma\alpha\gamma^{-1}]. \end{aligned}$$

De las propiedades también se obtiene

Teorema: La aplicación

$$\begin{aligned} \pi_1(X,x_0)\times\pi_n(X,x_0) &\longrightarrow \pi_n(X,x_0),\\ [\gamma],[f] &\longmapsto [\gamma_f], \end{aligned}$$

es una acción. □

Cuando $n = 1$, la acción es por conjugación, y hace al grupo abeliano $\pi_n(X,x_0)$ un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-módulo mediante

$$\left(\sum_i n_i\gamma_i\right)\alpha = \sum_i n_i{\gamma_i}_\alpha.$$

Decimos que el espacio es abeliano si la acción de $\pi_1(X,x_0)$ en $\pi_n(X,x_0)$ es trivial. En particular, si $n = 1$, esta condición nos dice que $\pi_1(X,x_0)$ es abeliano.

Si tenemos $f : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ aplicación continua, podemos definir una aplicación inducida entre los respectivos grupos de homotopía n-ésimos, que viene dada como

$$\begin{aligned} \pi_n(f) : \pi_n(X,x_0) &\longrightarrow \pi_n(Y,y_0),\\ [\alpha] &\longmapsto [f\circ\alpha], \end{aligned}$$

donde $\alpha : (S^n,p_0) \longrightarrow (X,x_0)$. Con esta definición, tenemos:

Proposición: π_n es un funtor en la categoría homotópica con valores en la categoría de los grupos:

1. $\pi_n(f\circ g) = \pi_n(f)\circ\pi_n(g)$.
2. $\pi_n(Id) = Id_{\pi_n(X)}$.

Además, si $f,g : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ son dos aplicaciones tales que $f \simeq_{\{x_0\}} g$, entonces $\pi_n(f) = \pi_n(g)$.

Demostración:

1. Sean $f : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ y $g : (Y,y_0) \longrightarrow (Z,z_0)$ y sea $[\alpha] \in \pi_n(X,x_0)$. Entonces,

$$\pi_n(f\circ g)([\alpha]) = [f\circ g\circ\alpha] = \pi_n(f)([g\circ\alpha]) = \pi_n(f)\circ\pi_n(g)([\alpha]),$$

que es lo que se quería probar.

2. Esta parte se obtiene sin más que aplicar la definición de la aplicación inducida:
$$\pi_n(Id)([\alpha]) = [Id \circ \alpha] = [\alpha] = Id_{\pi_n(X)}([\alpha]).$$

Para la última parte, si tenemos que $f \simeq_{\{x_0\}} g$, entonces existe una homotopía tal que

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow Y, \\ H(x,0) &= f(x), \\ H(x,1) &= g(x), \\ H(x_0,t) &= x_0. \end{aligned}$$

Es necesario ver que $\pi_n(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = \pi_n(g)([\alpha])$. Pero esto es claro sin más que considerar la homotopía

$$\begin{aligned} F : S^n \times I &\longrightarrow Y, \\ F(x,t) &= H(\alpha(x),t), \end{aligned}$$

que es una homotopía entre $f \circ \alpha$ y $g \circ \alpha$. □

En particular, si $f : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ es una equivalencia de homotopía, entonces $\pi_n(f)$ es un isomorfismo para todo $n \geq 1$. En efecto, existe g tal que $f \circ g \simeq Id_{(Y,\, y_0)}$ y $g \circ f \simeq Id_{(X,\, x_0)}$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_n(f \circ g) &= \pi_n(f) \circ \pi_n(g) = Id, \\ \pi_n(g \circ f) &= \pi_n(g) \circ \pi_n(f) = Id. \end{aligned}$$

Y así, $\pi_n(f)$ es un isomorfismo.

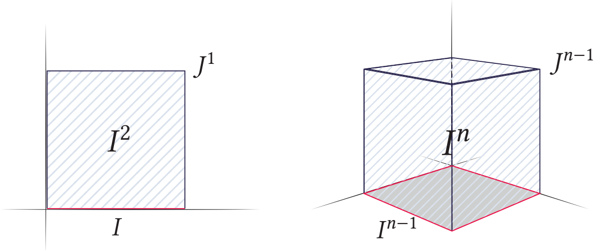
4.2 Grupos de homotopía relativa

Vamos a generalizar los grupos de homotopía. Para ello construiremos los llamados grupos de homotopía relativa. Para ello tomamos $x_0 \in A \subset X$ y consideramos $I^{n-1} \subset I^n$ como los puntos con última coordenada 0 y definimos $J^{n-1} = \partial I^n - I^{n-1}$.

Se define entonces el grupo de homotopía relativa n-ésimo como

$$\pi_n(X,A,x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X,A,x_0)]$$

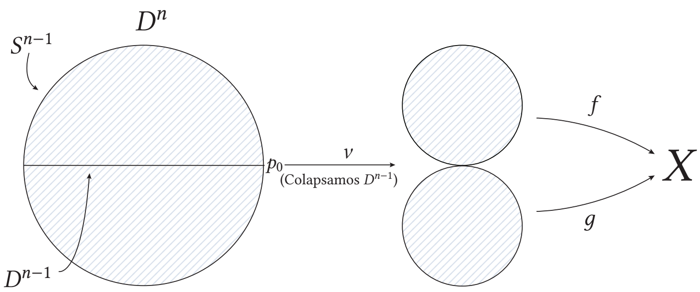
De esta forma, se verifica que $\pi_n(X,x_0) = \pi_n(X,x_0,x_0)$.



Con la anterior operación definida, $\pi_n(X,A,x_0)$ es un grupo si $n \geq 2$ y es abeliano si $n \geq 3$.

En el caso $n = 1$ tenemos que $\partial I = \{0,1\}$, $I^{n-1} = I^0 = \{0\}$ y $J^0 = \{1\}$, por lo que $\pi_1(X,A,x_0)$ son las clases de homotopía relativa a x_0 de caminos que van de algún punto de A en x_0, que no es un grupo.

También podemos ver $\pi_n(X,A,x_0)$ como $[(D^n,S^{n-1},p_0),(X,A,x_0)]$, ya que colapsando J^{n-1} a un punto, transforma $(I^n,\partial I^n,J^{n-1})$ en (D^n,S^{n-1},p_0) y le damos la estructura de grupo



Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema: La aplicación $f : (D^n,S^{n-1},p_0) \longrightarrow (X,A,x_0)$ representa al elemento neutro de $\pi_n(X,A,x_0)$ si y sólo si $f \simeq g$ relativa a S^{n-1} para algún g con $Im\, g \subset A$.

Demostración: Supongamos que $f \simeq g$ relativo a S^{n-1} e $Im\, g \subset A$. Entonces existe $H : (D^n,S^{n-1},p_0) \longrightarrow (X,A,x_0)$. Por tanto, $[f] = [g]$ en $\pi_n(X,A,x_0)$. Si tomamos

$F : (D^n, p_0) \times I \longrightarrow (D^n, p_0)$ un retracto de deformación de D^n en p_0, entonces

$$\begin{aligned} g \circ F : D^n \times I &\longrightarrow X, \\ g \circ F(p,0) &= g(p) \in A, \\ g \circ F(p,1) &= g(p_0) = x_0, \\ g \circ F(p_0,t) &= x_0 \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $g \simeq 0$ y así $[f] = [g] = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $[f] = 0$ en $\pi_n(X,A,x_0)$. Existe entonces una homotopía

$$H : (D^n, S^{n-1}, p_0) \longrightarrow (X,A,x_0)$$

de f en una aplicación constante $D^n \longrightarrow x_0$.

Definimos entonces una homotopía H' relativa a S^{n-1} de f en una aplicación $g : D^n \longrightarrow A$ que viene dada por

$$H'(x,t) = \begin{cases} H\left(\frac{x}{1-\frac{t}{2}}, t\right) & 0 \le \|x\| \le 1 - \frac{t}{2}, \\ H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\right) & 1 - \frac{t}{2} \le \|x\| \le 1, \end{cases}$$

la cual verifica las condiciones que queríamos, $f \simeq g$ e $Im\, g \subset A$. □

Al igual que hicimos para los grupos de homotopía, si tenemos una aplicación $\varphi : (X,A,x_0) \longrightarrow (Y,B,y_0)$, esta induce un morfismo entre los grupos de homotopía relativa, $\pi_n(\varphi) : \pi_n(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_n(Y,B,y_0)$. Así, considerando las inclusiones $i : (A,x_0) \longrightarrow (X,x_0)$ y $j : (X,x_0,x_0) \longrightarrow (X,A,x_0)$, éstas determinan morfismos

$$\begin{aligned} \pi_n(i) &: \pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0), \\ \pi_n(j) &: \pi_n(X,x_0,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,A,x_0). \end{aligned}$$

Por otra parte, dada una aplicación $f : (D^n, S^{n-1}, p_0) \longrightarrow (X,A,x_0)$, la restricción $f|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, p_0) \longrightarrow (A,x_0)$ determina un morfismo

$$\partial : \pi_n(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A,x_0),$$

llamado aplicación borde. Obtenemos el mismo morfismo si restringimos a I^{n-1} considerando $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X,A,x_0)$.

De esta forma, se tiene el siguiente resultado:

Teorema: La sucesión

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \pi_n(A,x_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(X,x_0) \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(X,A,x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A,x_0) \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow \pi_1(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_0(A,x_0) \longrightarrow \pi_0(X,x_0) \end{aligned}$$

es exacta.

Demostración:

• Exactitud en $\pi_n(X,x_0)$: Consideremos la composición $\pi_n(i)\circ\pi_n(j) = \pi_n(k)$, donde $k = i\circ j : (A,x_0,x_0) \longrightarrow (X,A,x_0)$. Veamos que es la aplicación nula. Consideremos una función $f : (D^n,S^{n-1},p_0) \longrightarrow (A,x_0,x_0)$. La composición $k\circ f : (D^n,S^{n-1},p_0) \longrightarrow (X,A,x_0)$ representa al neutro de $\pi_n(X,A,x_0)$ por el teorema anterior, luego $\pi_n(k)([f]) = [k\circ f] = 0$.

Veamos ahora que $Ker\ \pi_n(j) \subset Im\ \pi_n(i)$. Sea $[f] \in Ker\ \pi_n(j)$. Entonces f representa al neutro en $\pi_n(X,x_0)$. Por tanto, existirá g tal que $f \simeq g$ relativa a S^{n-1} con $Im\ g \subset A$. De este modo, $\pi_n(i)([g]) = [f] \in Im\ \pi_n(i)$.

• Exactitud en $\pi_n(X,A,x_0)$: La composición $\partial\circ\pi_n(j)$ es cero ya que la restricción de una aplicación $(D^n,S^{n-1},p_0) \longrightarrow (X,x_0,x_0)$ a S^{n-1} tiene su imagen en x_0, por tanto, representa al neutro en $\pi_n(X,A,x_0)$.

Veamos ahora que $Ker\ \partial \subset Im\ \pi_n(j)$. Sea $[f] \in Ker\ \partial$, esto es, la aplicación $f : (I^n,\partial I^n,J^{n-1}) \longrightarrow (X,A,x_0)$ es tal que $f|_{I^{n-1}}$ representa al cero en $\pi_{n-1}(A,x_0)$. Existe entonces una

$$F : I^{n-1}\times I \longrightarrow A \quad \text{relativa a } \partial I^{n-1},$$

entre $f|_{I^{n-1}}$ y una aplicación con imagen en x_0. Concatenando entonces las aplicaciones F y f, obtenemos una aplicación $(I^n,\partial I^n,J^{n-1}) \longrightarrow (X,x_0,x_0)$, que vista como una aplicación hasta (X,A,x_0), es homótopa a f. Por tanto, $[f] \in Im\ \pi_n(j)$.

• Exactitud en $\pi_n(A,x_0)$: La composición $\pi_n(i)\circ\partial$ es cero ya que la restricción de una aplicación $f : (I^{n+1},\partial I^{n+1},J^n) \longrightarrow (X,A,x_0)$ a I^n es homótopa relativa a ∂I^n a una aplicación constante (mediante f propiamente).

Si tomamos ahora $[f] \in Ker\ \pi_n(i)$ con $f : (I^n,\partial I^n) \longrightarrow (A,x_0)$, f representa al neutro en $\pi_n(A,x_0)$. Tenemos entonces una homotopía entre f y la constante,

$$F : (I^{n+1},\partial I^{n+1},J^n) \longrightarrow (X,A,x_0),$$

tal que $\partial([F]) = [f]$. □

4.3 n-conexidad de un espacio

Definición: Un espacio topológico X con punto base x_0 se dice n-conexo si $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$.

Con esta definición, que un espacio sea 0-conexo quiere decir que es arcoconexo, y que sea 1-conexo significa que el espacio es simplemente conexo.

Como n-conexidad implica 0-conexidad, la mención del punto base de un espacio n-conexo no es importante.

Así, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\pi_n(X, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$ y todo $x_0 \in A$.
2. Cada aplicación $S^i \longrightarrow X$ es homotópicamente trivial para todo $i \leq n$.
3. Cada aplicación $S^i \longrightarrow X$ se extiende a D^{n+1} para todo $i \leq n$.

De la misma forma, para un par (X, A) son equivalentes las siguientes condiciones:

1. Cada aplicación $(D^i, S^{i-1}) \longrightarrow (X, A)$ es homótopa relativa a S^{n-1} a una aplicación $D^i \longrightarrow A$.
2. Cada aplicación $(D^i, S^{i-1}) \longrightarrow (X, A)$ es homótopa en $[(D^i, S^{i-1}), (X, A)]$ a una aplicación $D^i \longrightarrow A$.
3. Cada aplicación $(D^i, S^{i-1}) \longrightarrow (X, A)$ es homótopa en $[(D^i, S^{i-1}), (X, A)]$ a una constante $D^i \longrightarrow A$.
4. $\pi_n(X, A, x_0) = 0 \ \forall x_0 \in A$.

Para el caso $i = 0$, $\pi_0(X, A, x_0)$ no está definido, por tanto, decimos que el par (X, A) es n-conexo si se verifica una de las cuatro condiciones para $i > 0$ y si se verifica una de las tres primeras cuando $i = 0$.

4.4 Aplicaciones de la sucesión exacta de un par (X, A)

Veamos ahora varios resultados que hacen uso de esta sucesión exacta.

Teorema: Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración. Tomamos $b_0 \in B$ y un elemento x_0 de la fibra de b_0, $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Entonces

$$\pi_n(p) : \pi_n(E,F,x_0) \longrightarrow \pi_n(B,b_0)$$

es isomorfismo si $n \geq 1$.

<u>*Demostración:*</u>

Veamos que $\pi_n(p)$ es sobreyectiva. Sea $[f] \in \pi_n(B,b_0)$, con

$$f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (B, b_0).$$

Consideramos $g : I^{n-1} \longrightarrow E$ la aplicación constante en x_0. Entonces, al ser $p : E \longrightarrow B$ una fibración, la propiedad del levantamiento homotópico nos dice existe $\widetilde{f}$ tal que podemos completar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I^{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
I^{n-1} \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\widetilde{f}"] & B
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que $\widetilde{f}(\partial I^n) \subset F$ ya que $f(\partial I^n) = p\,\widetilde{f}(\partial I^n) = b_0$. Así, $[\widetilde{f}] \in \pi_n(E,F,x_0)$ y $\pi_n(p)[\widetilde{f}] = [f]$.

Veamos que $\pi_n(p)$ es inyectiva. Sean $\widetilde{f_0}, \widetilde{f_1} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (E,F,x_0)$ tales que $\pi_n(p)([\widetilde{f_0}]) = \pi_n(p)([\widetilde{f_1}])$, esto es, $p \circ \widetilde{f_0} \simeq p \circ \widetilde{f_1}$ mediante la homotopía:

$$G : (I^n, \partial I^n) \times I \longrightarrow (B, b_0).$$

Tenemos un levantamiento parcial g de G en $I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I$ dado por $\widetilde{f_0}$ en $I^n \times \{0\}$, $\widetilde{f_1}$ en $I^n \times \{1\}$ y la aplicación constante en x_0 en $J^{n-1} \times I$. De este modo, por la HLP existe un levantamiento $\widetilde{G}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B.
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{G} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \longrightarrow (E, F, x_0)$ es una homotopía de $\widetilde{f}_0$ a $\widetilde{f}_1$, luego $\pi_n(p)$ es inyectiva. □

Visto este resultado, si consideramos la sucesión exacta larga del par (E, F) e incluimos el isomorfismo que acabamos de ver, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \pi_n(E, x_0) \arrow[r, "\pi_n(i)"] \arrow[dr, "\pi_n(p)"'] & \pi_n(E, F, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n(p)", "\cong"'] & \pi_{n-1}(F, x_0) \arrow[r] & \dots \\
& & \pi_n(B, b_0) & &
\end{tikzcd}$$

Del cual obtenemos el siguiente teorema:

Teorema: Si B es arcoconexo, se tiene la sucesión exacta de homotopía de una fibración:

$$\begin{gathered}
\dots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \dots \\
\dots \longrightarrow \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \pi_0(F, x_0) \longrightarrow \pi_0(E, x_0) \longrightarrow \pi_0(B, b_0).
\end{gathered}$$

□

4.4.1 Aplicaciones de la sucesión en homotopía de una fibración

1. Un espacio recubridor es una fibración con fibra discreta, por lo tanto $\pi_i(F, x_0) = 0 \ \forall i \geq 1$ y $\pi_0(F, x_0)$ es el conjunto de componentes arcoconexas punteadas que contienen al punto base x_0.

   Por tanto, de la sucesión exacta en homotopía tenemos que:

   $$0 \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \overset{\cong}{\longrightarrow} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \geq 2,$$

   $$\text{y } \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \quad \text{es inyectiva.}$$

   En particular, dado un espacio X, un recubridor universal $\widetilde{X}$ es tal que $\pi_1(\widetilde{X}) = 0$, $\pi_i(\widetilde{X}) = \pi_i(X)$, $i \geq 2$.

   Un par de casos particulares son S^1 y T^n. Para el primero $exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ es un espacio recubridor, luego tenemos que

   $$\pi_i(S^1) = 0, \ i \geq 2; \qquad \pi_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

y usando que $\pi_n(\prod_i X_i) \cong \prod_i \pi_n(X_i)$, se ve que

$$\pi_i(T^n) = 0,\ i \geq 2; \qquad \pi_1(T^n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z}.$$

2. Un fibrado con fibra discreta es un espacio recubridor, y recíprocamente, un espacio recubridor es un fibrado con fibra discreta.

   Veamos entonces algunos ejemplos de fibrados:

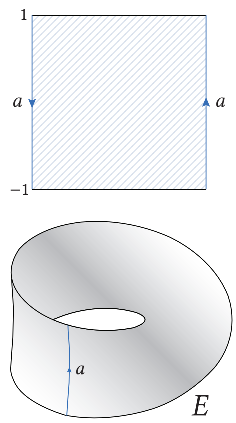
   (a) Un ejemplo es la banda de Möbius, definida como

   $$E = {I \times [-1,1]}\big/_{(0,v)\sim(1,-v)}$$

   Si tomamos como fibración

   $$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow S^1 = I\big/_{(0\sim 1)} \\ [x,t] &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

   tenemos un fibrado con fibra $\{x_0\}\times[-1,1]$.



   (b) Si unimos dos bandas de Möbius por su borde, obtenemos la botella de Klein

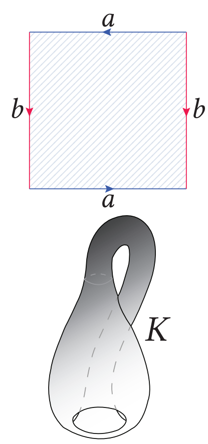
   $$K = E\dot{\cup}E\big/_{\sim}$$

   donde la relación $\sim$ viene dada por $[x,-1] \sim [x',-1]$ y $[x,1] \sim [x',1]$.

   Al igual que antes, consideramos la aplicación

   $$\begin{aligned} p : K &\longrightarrow S^1 \\ [x,t] &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

   Como la fibra de la banda de Möbius era $\{x_0\}\times[-1,1]$, para la botella de Klein la fibra es la siguiente:



$$\{x_0\}\times[-1,1] \ \dot{\cup}\ \{x_0'\}\times[-1,1] \cong {[-1,1] \ \dot{\cup}\ [-1,1]}\big/_{\sim} \cong S^1$$

Podemos entonces utilizar la sucesión exacta de una fibración vista anteriormente para obtener

$$\pi_2(S^1) \longrightarrow \pi_2(K) \longrightarrow \pi_2(S^1) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0$$

Por tanto, como tenemos que $\pi_n(S^1) = 0\ si\ n \geq 2$, entonces se tiene que $\pi_2(K) = 0\ si\ n \geq 2$. Por otra parte, $\pi_1(K)$ es una extensión de un producto de $\mathbb{Z}$, este viene dado por

$$\pi_1(K) = {F(a,b)}/{abab^{-1}} = \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$$

donde $F(a,b)$ es el grupo libre generado por a y b, y $\rtimes_\varphi$ es el producto semidirecto [1], donde, en este caso, $\varphi(h)(g) = (-1)^h g$.

3. De los espacios proyectivos también se obtienen fibrados de gran utilidad, en especial para el cálculo de los grupos de homotopía de las esferas.

   En el caso real, tomamos el espacio recubridor de dos hojas de $\mathbb{R}P^n$, $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$. De esta forma, obtenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$$
$$\pi_m(\mathbb{R}P^n) = \pi_m(S^n)\ m \geq 2$$

   El espacio proyectivo complejo lo definimos como $\mathbb{C}P^n = {S^{2n+1}}/{\sim}$, donde la relación de equivalencia $\sim$ viene dada por $z \sim z'$ si y sólo si $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tal que $z = \lambda z'$.

   De esta forma, obtenemos un fibrado

$$S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n.$$

   Para el caso $n = 1$, tenemos que $\mathbb{C}P^1 = {D^2}/{S^1} = S^2$, ya que podemos ver la identificación anterior como

$$\mathbb{C}P^n = {D^{2n}}/{u \in S^{2n-1} \sim \lambda u}$$

   De esta forma, tenemos un fibrado llamado *Fibración de Hopf*:

$$S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

[1] El producto semidirecto de dos grupos G y H se define, dado $\varphi : H \longrightarrow Aut(G)$ un homomorfismo de grupos, como $G \rtimes_\varphi H = G \times H$ dotándolo de la operación

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1\varphi(h_1)(g_2), h_1 h_2)$$

donde la proyección es $p(z_0, z_1) = {}^{z_0}\!/_{z_1} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$.

De esta forma, usando la sucesión en homotopía, tenemos que

$$\underbrace{\pi_n(S^1)}_{=0} \longrightarrow \pi_n(S^3) \xrightarrow{\cong} \pi_n(S^2) \longrightarrow \underbrace{\pi_{n-1}(S^1)}_{=0} \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow \underbrace{\pi_2(S^1)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longrightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\cong} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{=\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^2)}_{=0}$$

Por tanto, obtenemos que

$$\begin{cases} \pi_n(S^3) = \pi_n(S^2) & \text{si } n \geq 3 \\ \pi_2(S^2) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

También se pueden utilizar los espacios proyectivos sobre los *cuaterniones de Hamilton* y construir $\mathbb{H}P^n$ o los *octoniones de Cayley* para tener $\mathbb{O}P^n$ y obtener fibrados de Hopf similares al visto para $\mathbb{C}$. Concretamente, son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} S^3 \longrightarrow S^7 \longrightarrow S^4 & \text{para } \mathbb{H}P^1 \\ S^7 \longrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8 & \text{para } \mathbb{O}P^1 \end{array}$$

Bibliografía

[1] Allen Hatcher. Algebraic topology. http://www.math.cornell.edu/~hatcher/#ATI, 2001.

[2] Czes Kosniowski. *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980.

[3] Albert T. Lundell and Stephen Weingram. *The Topology of CW Complexes*. Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

[4] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1991.

[5] J. Peter May. A concise course in algebraic topology. http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf.

[6] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer, 1988.

[7] Edward H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1996.