

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Los problemas clásicos de levantamiento: extensión y clasificación	2
1.2. Homotopía: Nociones básicas . . . . .	5
1.2.1. Espacios comúnmente utilizados . . . . .	9
1.2.2. Adjuntando celdas o cómo pegar un disco a un espacio .	10
1.3. Suspensión y lazos de un espacio . . . . .	11
1.3.1. Caso particular grupos de homotopía: $X = S^n$ . . . . .	16
1.4. CW-complejos . . . . .	17
1.4.1. Construcciones básicas con CW-complejos . . . . .	19
<b>2. Fibraciones y Cofibraciones</b>	<b>22</b>
2.1. Cofibraciones . . . . .	22
2.1.1. Cómo pegar espacios en general . . . . .	26
2.2. Fibraciones . . . . .	28
<b>3. Grupos de Homotopía</b>	<b>36</b>
3.1. Grupos de homotopía de mayor orden . . . . .	36
3.2. Grupos de homotopía relativa . . . . .	39
3.3. $n$ -conexidad de un espacio . . . . .	41
<b>4. Resultados (por añadir)</b>	<b>43</b>
4.1. Dualidad de Eckmann-Hilton . . . . .	43
4.2. Espacios de Eilenberg-MacLane . . . . .	44

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Los problemas clásicos de levantamiento: extensión y clasificación

En distintos contextos matemáticos encontramos dos problemas básicos, común a todos ellos, si los despojamos de las características propias de un entorno: los problemas de extensión y levantamiento.

#### El problema de la extensión

Dado un diagrama de aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \\ X & & \end{array}$$

donde  $i$  es una “inclusión” en un contexto dado, ¿cuándo existe  $\tilde{f}$ , extensión de  $f$ ?

La respuesta no es trivial. Es claro que, incluso si  $i$  no es inclusión, ha de verificarse que si  $i(a) = i(b)$  entonces  $f(a) = f(b)$ . Pero incluso si  $i$  es biyectiva es necesario exigirle a  $X$ , para que la única  $\tilde{f}$  posible sea continua, que posea la topología de la identificación determinada por  $i$ :

$$\theta \subset X \text{ es abierto si y sólo si } i^{-1}(\theta) \text{ es abierto de } A.$$

Hay varios ejemplos de resultados que dan respuesta a este problema. Algunos dan una respuesta positiva:

**Teorema:** Si  $X, Y$  son espacios métricos,  $Y$  completo, y  $A$  es denso en  $X$ , toda aplicación uniformemente continua  $f : A \rightarrow Y$  se extiende a una uniformemente continua  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ .

**Teorema de Extensión de Tietze:** Sea  $X$  normal,  $A \subset X$  cerrado,  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo. Entonces toda  $f : A \rightarrow I$  admite una extensión  $\tilde{f} : X \rightarrow I$ .

Mientras que la de otros es negativa:

**Teorema:** La esfera  $S^n$  no es un retracto del disco  $D^{n+1}$ . En otras palabras, la identidad  $S^n \rightarrow S^n$  no se extiende a  $D^{n+1}$ .

## El problema del levantamiento

Dualmente <sup>1</sup>, nos encontramos con el problema del levantamiento de aplicaciones continuas. Es el siguiente: dado un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde  $p$  es sobreyectiva ¿cuándo existe  $\tilde{f}$ , levantamiento de  $f$ ?

La respuesta tampoco es elemental. Incluso si  $p$  es biyectiva hay que exigirle que sea homeomorfismo para que la única  $\tilde{f}$  sea continua.

Igualmente hay resultados clásicos en distintos ambientes que contestan parcialmente esta cuestión.

**Teorema:** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto estrellado respecto a  $x_0 \in A$  y  $f : A \rightarrow S^1$  una aplicación continua. Entonces  $f$  queda determinada de forma continua por su función angular, esto es, existe una aplicación  $\tilde{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$  de tal forma que el

<sup>1</sup>Dual en el sentido de “Eckmann-Hilton”, dualidad que se definirá más adelante.

siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \exp \\ A & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Esto es,  $f(x) = (\cos \tilde{f}(x), \sin \tilde{f}(x))$ . Es más, dos tales funciones  $\tilde{f}$  se diferencian en un múltiplo entero de  $2\pi$ .

Estos problemas son, en parte, origen de la teoría de homotopía. Muchas veces, los problemas de extensión y levantamiento son puramente homotópicos:

Hay aplicaciones  $p : X \rightarrow B$  para las que existe el levantamiento de  $f : Y \rightarrow B$  si existe el levantamiento de una “deformada” de  $f$ . De igual forma existen algunas aplicaciones  $i : A \rightarrow X$  para las que existe una extensión de  $g : A \rightarrow Y$  si y sólo si existe alguna extensión para una “deformada” de  $g$ .

Introduzcamos el concepto de deformación en homotopía:

**Definición:** Dos aplicaciones  $f, g : X \rightarrow Y$  se dicen homótopas (deformables la una en la otra), denotado por  $f \simeq g$ , si existe  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  una aplicación tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ .

Llegados a este punto, los problemas de extensión y levantamiento deparan ahora a un problema común de clasificación. ¿Cuándo dos aplicaciones  $X \rightarrow Y$  son homótopas? ¿Cómo es el conjunto  $[X, Y]$  de clases de homotopía de aplicaciones  $X \rightarrow Y$ ?

Los métodos que se siguen son, a grosso modo, de dos enfoques distintos: Por una parte, a los espacios se le asocian modelos algebraicos y morfismos entre los respectivos modelos algebraicos a las aplicaciones. Estas asociaciones permiten parcialmente su clasificación.

Como ejemplo, probemos el teorema anterior por el que  $S^n$  no es un retracto de  $D^{n+1}$ . Para ello, asociemos a  $S^n$  un invariante algebraico no nulo (como por ejemplo el grupo de homología  $n$ -ésimo). Como el disco  $D^{n+1}$  es deformable a un punto, todos esos invariantes se hacen 0. Si  $S^n$  fuese retracto de  $D^{n+1}$  existiría un

diagrama como el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{Id_{S^n}} & S^n \\ & \searrow i \quad \nearrow r & \\ & D^{n+1} & \end{array}$$

que algebraicamente daría lugar a

$$\begin{array}{ccc} 0 \neq F(S^n) & \xrightarrow{Id} & F(S^n) \neq 0 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & 0 & \end{array}$$

lo que resulta contradictorio.

Por otra parte, para saber más sobre  $[X, Y]$  es habitual tratar de dotar a este conjunto de otras estructuras (grupo, módulo...) que den luz sobre su comportamiento.

## 1.2. Homotopía: Nociones básicas

La relación de homotopía es básica y formaliza la noción de deformación continua de dos espacios: dos aplicaciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son homótopas si existe  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$ .

**Proposición:** La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de  $X$  a  $Y$ .

*Demostración:* La propiedad reflexiva es clara sin más que tomar la aplicación  $F(x, t) = x$ .

Para la simétrica, si  $H : f \simeq g$  entonces  $F : X \times I \rightarrow Y$ ,  $F(x, t) = H(x, 1 - t)$  es una homotopía de  $g$  a  $f$ .

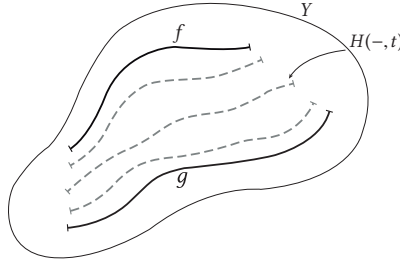
Veamos ahora la transitiva. Si  $F : f \simeq g$ ,  $H : g \simeq h$  entonces  $G : X \times I \rightarrow Y$ ,

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

es una homotopía de  $f$  a  $h$ . □

**Ejemplos:**

- (1) Cuando  $X = I$ , esto es, al trabajar con curvas, se observa mejor la deformación:



- (2) Sean  $X = Y = \mathbb{R}^n$ , y consideremos las aplicaciones  $f = Id_{\mathbb{R}^n}$  y  $g \equiv 0$ . Entonces  $f \simeq g$  mediante la aplicación

$$H : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$H(x, t) = tx$$

A menudo estamos interesados en aplicaciones entre pares

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

que no es más que una aplicación continua tal que  $f(A) \subset B$ . En este caso,  $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  son homótopas si existe  $H : X \times I \longrightarrow Y$  tal que  $\forall t \in I$ ,  $H_t = H(-, t) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ .

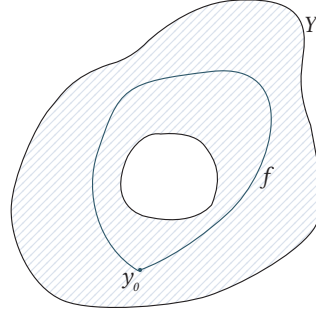
Un caso particular de suma importancia es el de los espacios punteados  $(X, x_0)$ . En este caso,  $f \simeq g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  si existe  $H : X \times I \longrightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$  y  $H(x_0, t) = y_0 \forall t \in I$ .

**Ejemplos:**

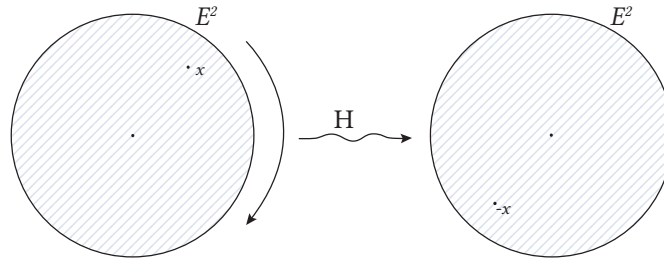
- (1) En el ejemplo anterior (2), podemos considerar  $f \simeq g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tomando como homotopía la misma función  $H$ .

(2) Si consideramos un espacio como el siguiente:

Tenemos que  $f : I \rightarrow Y$  es obviamente homótopa a la constante en  $y_0$  que denominamos  $c_{y_0}$ . Pero la aplicación de pares  $f : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (Y, y_0)$  no es homótopa a la constante  $c_{y_0}$ .



(3) Dado  $E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ , tenemos que  $Id \simeq a$  donde  $a$  es la función antípoda mediante la homotopía de la rotación:  $H : E^2 \times I \rightarrow E^2$  dada por  $H(x, t) = H(\rho e^{i\theta}, t) = \rho e^{i(\theta + t\pi)}$



Es más, como aplicaciones de pares,  $Id \simeq a$  mediante  $H : (E^2, S^1) \times I \rightarrow (E^2, S^1)$ . Sin embargo,  $\nexists x_0 \neq 0$  tal que  $Id \simeq a$  como aplicaciones  $(E^2, x_0) \rightarrow (E^2, -x_0)$ .

Al conjunto cociente formado por las clases de homotopía de aplicaciones continuas de  $(X, A)$  en  $(Y, B)$  se le denota por  $[(X, A), (Y, B)]$ .

Por tanto, ya podemos definir nuestros “objetos deformables”.

**Definición:** Dos espacios  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes si existen aplicaciones  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq 1_X$  y  $f \circ g \simeq 1_Y$ . A las aplicaciones  $f$  y  $g$  se les denomina equivalencias de homotopía.

**Ejemplos:**

(1) **Retratos:**  $A \xhookrightarrow{i} X$  es un retracts de  $X$  si existe una aplicación  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = 1_A$ . Decimos que  $A$  es un retracto de deformación de  $X$  si además  $i \circ r \simeq 1_X$ . Como ejemplo,  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  es un retracto de deformación

de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ . En efecto, si consideramos

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

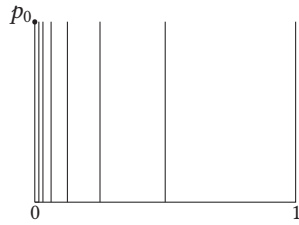
entonces

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \\ H(x, t) &= (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|} \end{aligned}$$

es una homotopía entre  $Id_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$  e  $i \circ r$ .

(2) **Espacios contráctiles:** Un espacio  $X$  es contráctil si tiene el mismo tipo de homotopía de un punto, o equivalentemente, la identidad en  $X$  es homotopa a una constante, o un punto es retracto de deformación del espacio. Antes hemos visto que  $\mathbb{R}^n \simeq * \simeq D^n$ .

(3) **El espacio peine**  $P$  es un espacio contráctil.  $P$  es el conjunto definido de la siguiente forma:



$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \cup \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\}$$

que obviamente es contráctil, aunque  $Id_P \not\simeq_{p_0} c_{p_0}$  para un  $p_0 \notin [0, 1] \times \{0\}$ .

Relacionado con el ejemplo (2) y con el problema de la extensión tenemos el siguiente resultado:

**Teorema:** Sea  $f : S^n \longrightarrow X$  una aplicación continua. Entonces  $f \simeq *$  si y sólo si  $f$  se extiende al disco.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow & \nearrow \tilde{f} \\ & D^{n+1} & \end{array}$$

*Demostración:* Supongamos  $H : f \simeq c_{x_0}$ . Definimos entonces  $\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$  dada



por:

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} x_0 & \text{si } \|p\| \leq \frac{1}{2} \\ H(\frac{p}{\|p\|}, 2 - 2\|p\|) & \text{si } \|p\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

que es la extensión que queríamos.

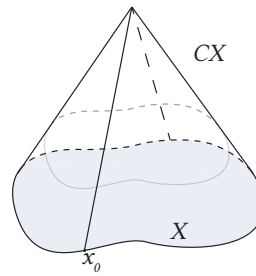
Recíprocamente, si  $\tilde{f}$  es una extensión,  $H(x, t) = \tilde{f}((1-t)x)$  es una homotopía de  $f$  a la constante.  $\square$

### 1.2.1. Espacios comúnmente utilizados

Algunas de las construcciones que serán de utilidad son las siguientes:

- **El producto de espacios**  $X \times Y$
- **La suma puntual** o “wedge”, denotado por  $X \vee Y$  que puede verse como el conjunto cociente  $X \dot{\cup} Y / x_0 \sim y_0$  o como un subconjunto de  $X \times Y$ , esto es,  $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$
- **El smash** definido como  $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ . Esto es, el producto en el que identificamos “los ejes” a un punto.
- **El cono de  $X$** . Dado  $X$ , el cono de  $X$  se define como  $CX = X \times I / X \times \{0\}$ . Si queremos “puntearlo”, hacemos además

$$CX = X \times I / X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I$$



y el punto base es  $[x_0, t]$ . Claramente la aplicación

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow CX \\ x &\mapsto [(x, 1)] \end{aligned}$$

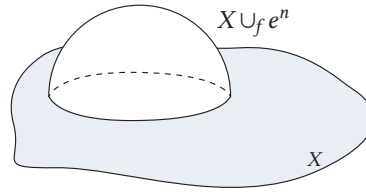
es un homeomorfismo en su imagen por lo que podemos pensar en  $X$  como un subespacio del cono. Además  $CX$  es contráctil.

### 1.2.2. Adjuntando celdas o cómo pegar un disco a un espacio

Sea  $X$  un espacio topológico y  $E^n$  un disco de dimensión  $n \geq 1$ .

Sea  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  una aplicación continua. Definimos  $X \cup_f E^n$ , el espacio obtenido adjuntando a  $X$  una  $n$ -celda mediante  $f$ :

$$X \cup_f E^n := X \dot{\cup} E^n / \sim$$



donde  $\sim$  es la menor relación de equivalencia que contiene a  $x \in S^{n-1} \sim f(x)$

**Proposición:** La adjunción de una celda sólo depende del tipo de homotopía de la aplicación de adjunción.

*Demostración:* Sean  $f, g : S^{n-1} \rightarrow X$  dos funciones con el mismo tipo de homotopía,  $f \simeq g$ . Veamos que entonces que  $X \cup_f E^n \simeq X \cup_g E^n$ .

Si  $H : f \simeq g$ , definimos las siguientes funciones:

$$k : X \cup_f E^n \rightarrow X \cup_g E^n \text{ dada por } k(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ 2x & \text{si } x \in E^n, \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ H(\frac{x}{\|x\|}, 2-2\|x\|) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$h : X \cup_g E^n \rightarrow X \cup_f E^n \text{ dada por } h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ 2x & \text{si } x \in E^n, \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ H(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

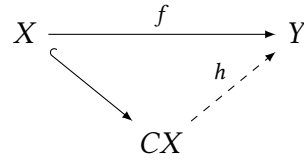
Y tenemos que  $h \circ k \simeq 1_{X \cup_f E^n}$  mediante la función  $F : X \cup_f E^n \times I \rightarrow X \cup_f E^n$  dada por:

$$F(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ 4x & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{4} \\ H(\frac{x}{\|x\|}, (4\|x\| - 1)t) & \text{si } \frac{1}{4} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ H(\frac{x}{\|x\|}, (2-2\|x\|)t) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

De forma análoga se prueba que  $k \circ h \simeq 1_{X \cup_g e^n}$ .  $\square$

**Consecuencia:** Si  $X$  es arcoconexo,  $X \cup_f e^1 \simeq X \vee S^1$  y si  $f \simeq *$ , entonces  $X \cup_f e^n \simeq X \vee S^n$ .

**Teorema:** Una aplicación  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  es null-homotopa si y sólo si se extiende a  $CX$ :



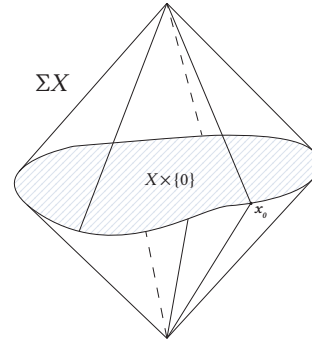
*Demostración:* Sea  $H : f \simeq c_{y_0}$  una homotopía. Definimos entonces la aplicación  $h : CX \longrightarrow Y$ , dada por  $h([x, t]) = H(x, t)$ . Está bien definida, ya que  $H(X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I) = y_0$  y se extiende a  $f$ .

Recíprocamente, dada  $h : (CX, *) \longrightarrow (Y, y_0)$  extensión de  $f$ , definimos  $H : X \times I \longrightarrow Y$  como  $H = h \circ \pi$  (donde  $\pi : X \times I \longrightarrow CX$  es la proyección canónica) y se tiene que  $H(x, 0) = y_0$ ,  $H(x, 1) = f(x)$  y  $H(x_0, t) = y_0$ .  $\square$

### 1.3. Suspensión y lazos de un espacio

Como ya hemos visto, el cono de  $X$ ,  $CX$ , es el espacio contráctil  $CX = X \times I / X \times \{0\}$ . De igual forma, la suspensión de  $X$ , denotada por  $\Sigma X$ , se define como

$$\Sigma X = X \times I / \begin{matrix} (x, 1) \sim (x', 1) \\ (x, 0) \sim (x', 0) \end{matrix}$$



Si  $x_0$  es el punto base de  $X$ , el cono punteado era

$$CX = X \times I / X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$$

De igual forma la suspensión punteada es

$$\Sigma X = X \times I / \begin{array}{l} (x, 1) \sim (x', 1) \\ (x, 0) \sim (x', 0) \\ (x_0, t) \sim (x_0, t') \end{array}$$

Obviamente, si a  $I$  le damos la estructura de  $CW$ -complejo con dos 0-celdas  $\{0\}, \{1\}$  y una 1-celda, tanto el cono  $CX$  como la suspensión  $\Sigma X$  (que no es más que  $CX/X \times \{0\}$ ) tienen estructura de  $CW$ -complejo. Nótese además que toda aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se puede suspender  $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  de forma obvia:  $\Sigma f[x, t] = [f(x), t]$ .

Por otro lado tenemos los lazos en un espacio topológico punteado  $(X, x_0)$  que se definen como

$$\begin{aligned} \Omega X &= (X, x_0)^{(S^1, p_0)} = \{f : S^1 \rightarrow X : f(p_0) = x_0\} \\ &= \{f : I \rightarrow X : f(0) = f(1) = x_0\} \end{aligned}$$

$\Omega X$  resulta ser  $CW$ -complejo si  $X$  lo es.  $\Omega X$  está punteado por la constante en  $x_0$ ,  $c_{x_0}$ . Se tiene entonces:

**Teorema:** Para cualesquiera espacios punteados  $X$  e  $Y$  se tiene que

$$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]^2$$

*Demostración:* En general, el conjunto de aplicaciones continuas

$$(Y, y_0)^{(\Sigma X, *)} \cong (\Omega Y, *)^{(X, x_0)}$$

En efecto, la aplicación

$$\varphi : (\Omega Y, *)^{(X, x_0)} \rightarrow (Y, y_0)^{(\Sigma X, *)}$$

dada por

$$\begin{aligned} \varphi(g) &: \Sigma X \longrightarrow Y \\ \varphi(g)[x, t] &= g(x)(t) \end{aligned}$$

está bien definida y tiene por inversa a

$$\varphi^{-1} : (Y, y_0)^{(\Sigma X, *)} \rightarrow (\Omega Y, *)^{(X, x_0)}$$

---

<sup>2</sup>Siempre que escribamos clases de homotopía, nos referiremos a espacios punteados.

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(f) : X &\rightarrow \Omega Y \\ \varphi^{-1}(f)(x)(t) &= f[x, t]\end{aligned}$$

Veamos que  $\varphi$  induce una aplicación  $\bar{\varphi} : [X, \Omega Y] \rightarrow [\Sigma X, Y]$  para lo que hemos de ver que si  $f \simeq_{\{x_0\}} g$  entonces  $\varphi(f) \simeq_* \varphi(g)$ .

Sabemos pues que existe una homotopía  $H : X \times I \rightarrow \Omega Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$  y  $H(x_0, t) = c_{y_0} \forall t \in I$ .

Definimos entonces

$$\begin{aligned}F : \Sigma X \times I &\longrightarrow Y \\ F([x, t], s) &= H(x, s)(t) \\ F([x, t], 0) &= H(x, 0)(t) = f(x)(t) = \varphi(f)[x, t] \\ F([x, t], 1) &= \varphi(g)[x, t]_j \\ F([x_0, t], s) &= H(x_0, s)(t) = y_0\end{aligned}$$

que es una homotopía entre  $\varphi(f)$  y  $\varphi(g)$ . De igual forma  $\varphi^{-1}$  induce  $\overline{\varphi^{-1}} : [\Sigma X, Y] \rightarrow [X, \Omega Y]$  y  $\bar{\varphi}^{-1} = \overline{\varphi^{-1}}$

□

**Nota:**  $\Omega$  y  $\Sigma$  son duales en el sentido de Eckman-Hilton.

En  $\Sigma X$  podemos definir la operación  $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$

$$\mu(\omega, \omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\mu(\omega, \omega')$  está bien definida y para ver que es continua basta ver

$$\begin{aligned}\Omega X \times \Omega X \times I &\longrightarrow \Omega X \times I \longrightarrow X \\ (\omega, \omega', t) &\longmapsto \begin{cases} \omega(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

que obviamente es continua.

Esta operación permite definir otra en  $[X, \Omega Y]$ , dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \mu(f(x), g(x))$$

Veamos que  $\mu$  hace de  $\Omega Y$  un “grupo homotópico”, esto es, un H-grupo. Demostremos la siguiente proposición:

**Proposición:** Consideremos el espacio de los lazos  $\Omega Y$ . Entonces

1.  $c_{y_0}$  es el neutro homotópico.
2.  $\mu$  es homotópicamente asociativa.
3. Si  $\omega \in \Omega Y$ , entonces el inverso homotópico de  $\omega$  es  $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$ .

*Demostración:*

1. Veamos que  $c_{y_0}$  es neutro por la derecha. Consideramos

$$\begin{aligned} \mu(-, c_{y_0}) : \Omega Y &\longrightarrow \Omega Y \\ \omega &\longmapsto \omega \cdot c_{y_0} \end{aligned}$$

y tenemos que ver que es homótopa a la identidad. Para ello basta considerar la homotopía

$$\begin{aligned} F : \Omega Y \times I &\longrightarrow \Omega Y \\ F(\omega, t)(s) &= \begin{cases} \omega\left(\frac{2s}{t+1}\right) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ y_0 & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Igualmente se demuestra que  $\mu(c_{y_0}, -) \simeq Id_{\Omega Y}$ .

2. Para ver que  $\mu$  es asociativa, tenemos que ver que el siguiente diagrama es homotópicamente conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y & \xrightarrow{\mu \times Id_{\Omega Y}} & \Omega Y \times \Omega Y \\ \downarrow Id_{\Omega Y} \times \mu & & \downarrow \mu \\ \Omega Y \times \Omega Y & \xrightarrow{\mu} & \Omega Y \end{array}$$

La homotopía necesaria para esto es:

$$\begin{aligned} G : \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \times I &\longrightarrow \Omega Y \\ G(\omega, \omega' \omega'', t)(s) &= \begin{cases} \omega\left(\frac{4s}{t+1}\right) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \omega'(4s-t-1) & \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{2} \\ \omega''\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right) & \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Por último definimos el morfismo inverso  $\Phi : \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$  dado por  $\Phi(\omega) = \omega^{-1}$ . Tenemos que ver que  $\omega \cdot \omega^{-1} \simeq c_{y_0}$ . Para ello consideramos la homo-

topía:

$$H : \Omega Y \times \longrightarrow \Omega Y$$

$$H(\omega, t)(s) = \begin{cases} y_0 & 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ \omega(2s - t) & \frac{t}{2} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2 - 2s - t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ y_0 & 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

Vista esta proposición, tenemos que:

**Teorema:**  $[X, \Omega Y]$  es un grupo.

*Demostración:*

1. Asociatividad:  $((f \cdot g) \cdot h) \simeq (f \cdot (g \cdot h))$
2. Elemento neutro:  $f \cdot c_{y_0} \simeq f \simeq c_{y_0} \cdot f$
3. Elemento inverso:  $f \cdot f^{-1} \simeq c_{y_0} \simeq f^{-1} \cdot f$

□

Todo puede hacerse dualmente: En la suspensión de un espacio existe una “co-operación” natural

$$\Sigma X \xrightarrow{\nu} \Sigma X \vee \Sigma X$$

$$\nu[x, t] = \begin{cases} ([x, 2t], *) & t \leq \frac{1}{2} \\ (*, [x, 2t - 1]) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

que resulta ser “co-asociativa” con “co-elemento neutro” y con “co-elemento inverso” homotópico:

**Proposición:**

$$\begin{array}{l}
 \text{1. Asociatividad:} \quad \begin{array}{ccc} \Sigma X & \xrightarrow{\nu} & \Sigma X \vee \Sigma X \\ \downarrow \nu & & \downarrow 1 \vee \nu \\ \Sigma X \vee \Sigma X & \xrightarrow{\nu \vee 1} & \Sigma X \vee \Sigma X \vee \Sigma X \end{array} \\
 \\
 \text{2. Elemento neutro:} \quad \begin{array}{ccccccc} \Sigma X & \xrightarrow{\nu} & \Sigma X \vee \Sigma X & \xrightarrow{c_{x_0} \vee 1} & \Sigma X \vee \Sigma X & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma X \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & 1 & & & & \end{array} \\
 \\
 \text{3. Elemento inverso:} \quad \begin{array}{ccccccc} \Sigma X & \xrightarrow{\nu} & \Sigma X \vee \Sigma X & \xrightarrow{1 \vee \eta} & \Sigma X \vee \Sigma X & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma X \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & c_{x_0} & & & & \end{array} \quad \text{don-} \\
 \text{de } \eta : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X, \eta[x, t] = [x, 1-t]
 \end{array}$$

Esta co-operación define en  $[\Sigma X, Y]$  una operación

$$\Sigma X \xrightarrow{\nu} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y \vee Y \xrightarrow{\sigma} Y$$

que por la proposición anterior implica:

**Teorema:**  $[\Sigma X, Y]$  es un grupo.

Y es fácil ver el siguiente resultado.

**Teorema:** La aplicación  $\bar{\varphi} : [\Sigma X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$  es un isomorfismo de grupos.

### 1.3.1. Caso particular grupos de homotopía: $X = S^n$

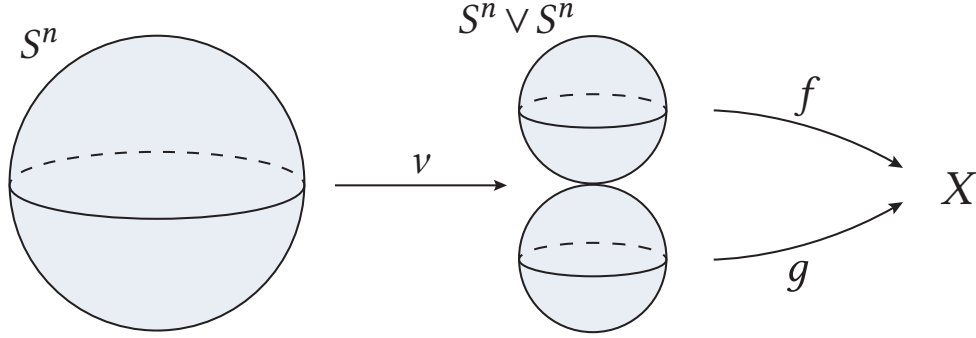
Cuando  $X = S^{n-1}$ ,  $\Sigma X \cong S^n$  y al grupo de clases de homotopía punteada

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]$$

se le denomina  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $X$  relativo al punto base  $x_0$ .

La composición es por tanto bastante geométrica:





Se tiene asimismo, en virtud de todo lo anterior

**Teorema:**  $\pi_n(X) = [S^n, X] = [S^{n-1}, \Omega X] = \pi_{n-1}(\Omega X)$

## 1.4. CW-complejos

Es una clase especial de complejos celulares.

Sea  $X^0$  un espacio topológico discreto: las 0-celdas. Adjuntamos  $I_1$  1-celdas a  $X^0$  para formar el 1-esqueleto.

$$X^1 = X^0 \cup_{\{f_\alpha\}} \left( \dot{\cup} e_\alpha^1 \right)$$

Inductivamente, suponemos construido el  $(n-1)$ -esqueleto  $X^{n-1}$  al que adjuntamos una familia de  $n$ -celdas  $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$  mediante las correspondientes aplicaciones de adjuncion  $f_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ .

Tenemos entonces dos opciones: el proceso se detiene en un  $n$ , en cuyo caso la topología ya está definida, o podemos seguir indefinidamente en la sucesion

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$$

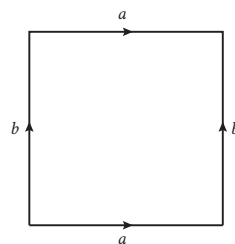
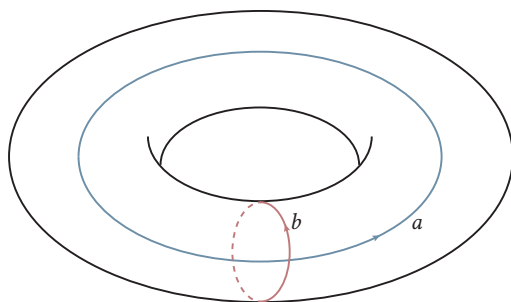
y consideramos  $X = \cup_{n \geq 0} X^n$  al que asignamos la topología débil heredada de los esqueletos, esto es  $A \subset X$  es abierto si y sólo si  $A \cap X^n$  es abierto de  $X^n$  para todo  $n \geq 0$ .

A todo espacio  $X$  así construido se le denomina CW-complejo.

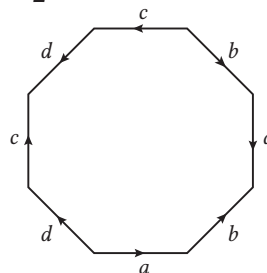
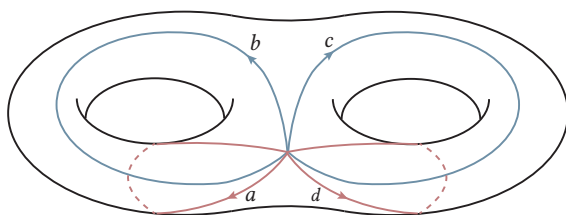
**Ejemplos:**

- (1) Una superficie orientable compacta  $M_g$  de género  $g$  ( $g \geq 1$ ) puede ser construida a partir de un polígono de  $4g$  lados identificando los lados de forma que se alternan pares de éstos. Para más claridad, a continuación se presentan algunos casos:

### Superficie de género 1 $M_1$



### Superficie de género 2 $M_2$



Con estas identificaciones, los  $4g$  lados del polígono se transforman en  $2g$  circunferencias unidas por un punto, esto es, adjuntar a  $X^0 = \{*\}$   $2g$  1-celdas mediante la única posible aplicación de adjunción  $S^0 \rightarrow X^0$ . Así pues,  $M_g = X^2$  con

$$X^0 = \{*\}, X^1 = \bigvee_{2g} S^1$$

$$M_g = X^2 = X^1 \cup_f e^2$$

- $S^n$  tiene estructura de CW-complejo con 1 0-celda y 1  $n$ -celda.
- El espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R} - \{0\} / \sim$  donde la relación  $\sim$  viene dada por  $x \sim y$  si  $\exists \lambda \neq 0$  tal que  $\lambda x = y$ . La aplicación

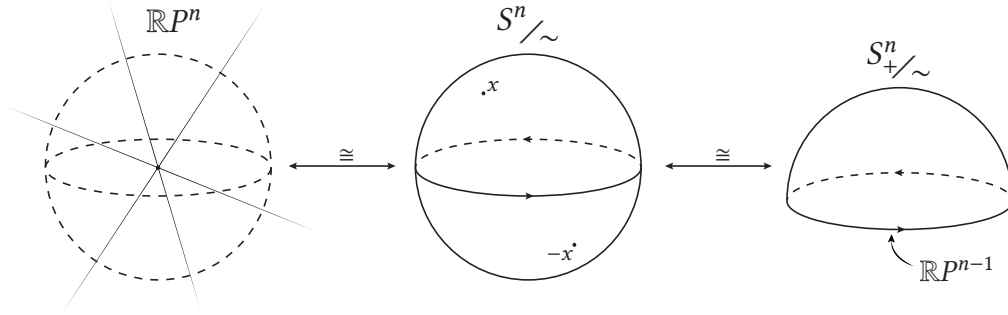
$$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

induce un homeomorfismo

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim \xrightarrow{\cong} S^n / x \sim -x$$

Por otra parte, la inclusión de un hemisferio  $S_+^n \hookrightarrow S^n$  también induce de forma obvia un homeomorfismo  $S_+^n / \sim \xrightarrow{\cong} S^n / \sim$  donde  $x \in S^{n-1} \sim -x$



Así vemos que  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n-1} \cup_p e^n$ , con  $p : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  la proyección. De esta forma  $\mathbb{R}P^n$  admite una estructura con una  $i$ -celda,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

De igual forma  $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}P^n$  es un CW-complejo con una celda de cada dimensión.  $\mathbb{R}P^\infty$  puede entenderse como las líneas en  $\mathbb{R}^n$  que pasan por el origen.

**Nota:** Si  $\varphi : E^n \hookrightarrow X \cup e^n \longrightarrow X \cup_f e^n$  es la aplicación característica de la adjunción de una celda, llamaremos a  $\varphi(E^n)$  “celda” y a su interior “celda abierta”. Nótese no obstante que en un CW-complejo una “ $n$ -celda abierta” sólo es abierta en el  $n$ -esqueleto, pero en general no lo es en el complejo.

### 1.4.1. Construcciones básicas con CW-complejos

**Subcomplejos:** Dado un CW-complejo  $X$ , un subcomplejo  $A$  de  $X$  es un subespacio de  $X$  obtenido adjuntando celdas de la CW-estructura y de forma que  $A$  sea también CW-complejo. El  $n$ -esqueleto de un complejo es un subcomplejo; la semiesfera  $S_+^n$  es un subcomplejo de  $S^n$ ...

**Productos:** Si  $X$  e  $Y$  son CW-complejos (localmente finitos), entonces  $X \times Y$  hereda una estructura de CW-complejo donde:

$$(X \times Y)^n = \bigcup_{i+j=n} X^i \times Y^j$$

Si  $e_i$  (resp.  $e_j$ ) es una  $i$ -celda de  $X$  (resp.  $j$ -celda de  $Y$ ) con  $i+j = n$ , con aplicación de adjunción  $\varphi_i : S^{i-1} \rightarrow X^{i-1}$  (resp.  $\varphi_j : S^{j-1} \rightarrow X^{j-1}$ ), consideramos:

$$\begin{aligned} e^{i+j} &= e^i \times e^j \text{ donde} \\ S^{n-1} &= S^{i+j-1} = \partial e^{i+j} = \partial e^i \times e^j \cup e^i \times \partial e^j \\ &= S^{i-1} \times e^j \cup e^i \times S^{j-1} \end{aligned}$$

$\varphi_i$  y  $\varphi_j$  definen  $\psi : S^{n-1} \rightarrow (X \times Y)^{n-1}$  dada por

$$\psi = \begin{cases} \varphi_i \times \phi_j & \text{en } S^{i-1} \times e^j \\ \phi_i \times \varphi_j & \text{en } e^i \times S^{j-1} \end{cases}$$

donde  $\phi_i$  y  $\phi_j$  son las aplicaciones características.

**Cocientes:** Si  $(X, A)$  es un CW-par ( $A$  es un subcomplejo de  $X$ ) el cociente  $X/A$  hereda de forma natural una estructura de CW-complejo. Las celdas de  $X/A$  son las de  $X - A$  más una 0-celda nueva, la imagen de  $A$  en  $X/A$ . Para cada  $n$ -celda  $e^n$  en  $X - A$  con adjunción  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  la correspondiente adjunción en  $X/A$  es  $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$ .

Por ejemplo, si en  $S^{n-1}$  tomamos cualquier CW-estructura y construimos  $D^n$  adjuntando una  $n$ -celda a  $S^{n-1}$ .  $D^n/S^{n-1} = S^n$  con la estructura usual. Otro ejemplo, si en la superficie de género  $g$ ,  $M_g$  “colapsamos” el 1-esqueleto  $M_g/M_g^1 = S^2$ .

Nótese también que  $X^n/X^{n-1} = \bigvee_{\alpha} S^n_{\alpha}$  con  $\alpha$  variando en el número de  $n$ -celdas.

**Wedge y Smash:** Si  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  son CW-complejos y  $x_0^{\alpha} \in X_{\alpha}$  son 0-celdas, el wedge  $\bigvee_{\alpha \in I} X_{\alpha}$  obtenido al identificar puntos  $\{x_0^{\alpha}\}$  no es más que el cociente  $\bigcup X_{\alpha} / \{x_0^{\alpha}\}$  y tiene por lo anterior estructura de CW-complejo.

Por otra parte, el smash de 2 espacios  $X$  e  $Y$  se define como  $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$  entendiendo  $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ . Si  $x_0$  e  $y_0$  son 0-celdas de  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces  $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$  es un subcomplejo de  $X \times Y$  y podemos tomar el cociente considerando la estructura cociente  $X \wedge Y$ .

Por ejemplo,  $S^m \wedge S^n = S^m \times S^n / S^m \vee S^n$  tiene pues una 0-celda y una  $(n+m)$ -celda, por lo cual  $S^m \wedge S^n = S^{m+n}$ . En particular,  $S^1 \wedge S^1 = T^2 / S^1 \vee S^1 = S^2$  **Insertar imagen p 33**

**Espacios de aplicaciones:** Si  $X$  es un CW-complejo con finitas celdas e  $Y$  tiene un número numerable de ellas, entonces los espacios  $map(X, Y)$ ,  $map_x(X, Y)$ ,  $Y^X$  ó  $(Y, y_0)^{(X, x_0)}$  tienen el tipo de homotopía de CW-complejos. En los espacios

de aplicaciones tomamos siempre la topología compacto abierta, es decir, la que tiene por subbase a los conjuntos

$$\langle K, \theta \rangle = \{f : X \longrightarrow Y : f(K) \subset \theta\}$$

**Añadir nota de p33, demost por Milnor**

## Capítulo 2

# Fibraciones y Cofibraciones

En esta parte introduciremos los conceptos de fibraciones y cofibraciones, relacionándolas con lo anteriormente visto.

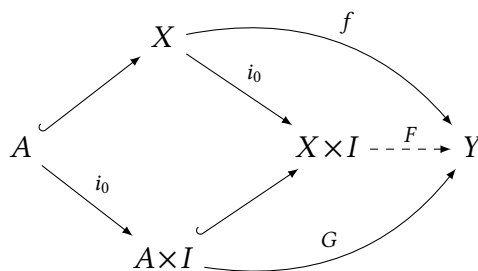
## 2.1. Cofibraciones

**Definición:** Sea  $A \subset X$  un subespacio. Decimos que  $i : A \hookrightarrow X$  o el par  $(X, A)$  tiene la propiedad de extensión homotópica (HEP) con respecto al espacio  $Y$  si dada una homotopía

$$G : A \times I \longrightarrow Y$$

que tiene una extensión a  $X$  en su inicio, esto es, si existe  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(a) = G(a, 0) \forall a \in A$ , entonces tienen una extensión a toda ella a  $X \times I$ , es decir, existe  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $f(x) = F(x, 0)$  y  $F(a, t) = G(a, t) \forall t \in I, a \in A$

De forma equivalente,  $(X, A)$  tiene la HEP si el siguiente diagrama puede completarse con el morfismo punteado:



**Definición:** Decimos que un par  $(X, A)$  (o la inclusión  $i : A \hookrightarrow X$ ) es una cofibración si posee la HEP con respecto a todo espacio  $Y$ .

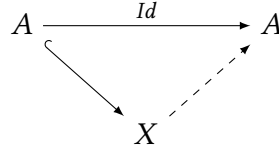
Es decir,  $A \subset X$  es cofibración si toda aplicación

$$f : X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow Y$$

se extiende a  $X \times I$ . O de forma gráfica, **Insertar imagen p 35**

**Observaciones:**

1. No todas las inclusiones  $A \subset X$  son cofibraciones. Un contraejemplo de esto es el espacio formado por los segmentos de  $(0,0)$  en  $(1, \frac{1}{n})$ . Esto es,  $A = \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(t, \frac{t}{n}) : t \in [0, 1]\}$  **Insertar imagen p35**  
 $A$  no es un retracto de  $I^2$ , luego no se tiene la extensión para la identidad



Se tiene un caso análogo para el espacio peine anteriormente visto.

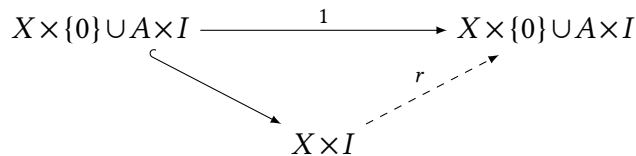
2. Podríamos haber definido la cofibración sustituyendo la inclusión por una aplicación  $f : A \longrightarrow X$  cualquiera. Podemos demostrar entonces que  $f$  es inyectiva y pero no es necesariamente un homeomorfismo sobre su imagen. Si suponemos que el par  $(X, A)$  es una cofibración y que  $X$  es Hausdorff, entonces se puede probar que  $A$  es cerrado, teniendo así el homeomorfismo sobre su imagen. Desde este momento, se supondrá siempre esto, ya que el caso más general rara vez es necesario.

**Teorema:** El par  $(X, A)$  es una cofibración si y sólo si  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es un retracto de  $X \times I$ .

*Demostración:* Para la implicación directa, como  $(X, A)$  es una cofibración, tomando entonces la identidad

$$X \times \{0\} \cup A \times I \xrightarrow{Id} X \times \{0\} \cup A \times I$$

se extiende como el siguiente diagrama



Por tanto,  $X \times I \xrightarrow{r} X \times \{0\} \cup A \times I$  es una retracción.

Recíprocamente, al suponer que  $A$  es cerrado, dadas dos aplicaciones cualesquiera

$$\begin{cases} X \times \{0\} \longrightarrow Y \\ A \times I \longrightarrow Y \end{cases}$$

que coinciden en  $A \times \{0\}$ , obtenemos una aplicación  $X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow Y$  que es continua al serlo en los cerrados. Componiendo esta aplicación con una retracción obtenemos la extensión que queríamos.  $\square$

También hay resultados que relacionan cofibraciones con CW-complejos.

**Teorema:** Si  $(X, A)$  es un par de CW-complejos, entonces  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es un retracto de deformación de  $X \times I$ .

*Demostración:* Existe una retracción  $r : D^n \times I \longrightarrow D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$ .

Tomando la homotopía

$$\begin{aligned} H : (D^n \times I) \times I &\longrightarrow D^n \times I \\ H(p, s) &= sr(p) + (1-s)p \end{aligned}$$

induce una homotopía entre  $Id_{D^n \times I}$  e  $ir$ . Por tanto,  $r$  es un retracto de deformación de  $D^n \times I$ .

Podemos ampliar este retracto de deformación a uno de  $X^n \times I$  en  $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ .

Como  $X^n$  se obtiene adjuntando  $n$ -celdas a  $X^{n-1} \cup A^n$ ,  $X^n \times I$  se obtiene de  $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$  adjuntando copias de  $D^n \times I$  a lo largo de  $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$ .

Si aplicamos el retracto de deformación de  $X^n \times I$  en  $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$  en los intervalos  $[1/2^{n+1}, 1/2^n]$  y las concatenamos, esto es un retracto de deformación de  $X \times I$  en  $X \times \{0\} \cup A \times I$ .  $\square$

**Teorema:** Si el par  $(X, A)$  es una cofibración y  $A$  es contráctil, entonces  $q : X \longrightarrow X/A$  es una equivalenci de homotopía.

*Demostración:* Sea  $H : X \times I \longrightarrow X$  una homotopía que extiende a la contracción  $F : A \times I \longrightarrow A$  y que tiene como inicio a la identidad,  $H(x, 0) = x$  y verifica que  $H(A, t) = F(A, t) \subset A \forall t$ . La composición  $q \circ H_t : X \longrightarrow X/A$  envía  $A$  a un punto.



Por tanto, factoriza como el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_t} & X \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\bar{H}_t} & X/A \end{array}$$

Tomando  $t = 1$ , entonces  $H(A, 1) = F(A, 1) = *$  es el punto donde  $A$  se contrae, luego existe una aplicación  $g$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_1} & X \\ \downarrow q & \nearrow g & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\bar{H}_1} & X/A \end{array}$$

En principio tenemos que conmuta el triángulo superior  $gq = H_1$ . Para el triángulo inferior, tenemos que  $qg(\bar{x}) = qgq(x) = qH_1(x) = \bar{H}_1q(x) = \bar{H}_1(\bar{x})$  teniendo en cuenta que el primer diagrama conmuta para todo  $t$ . Por tanto, tenemos que  $q$  y  $g$  son inversos homotópicos

$$\begin{aligned} gq &= H_1 \simeq H_0 = Id_X \\ qg &= \bar{H}_1 \simeq \bar{H}_0 = Id_{X/A} \end{aligned}$$

□

Veamos ahora algunos ejemplos:

### Ejemplos:

- (1) **Grafos:** Los grafos que vemos a la izquierda son todos homotópicamente equivalentes. Se pueden ver que son retracts de  $D^2 - \{x_0, x_1\}$ , pero también podemos usar el teorema anterior. Tomando en los grafos (A) y (C) los segmentos rectos y haciendo cociente con respecto a ellos, obtenemos el grafo (B). Así, por el teorema anterior, tenemos que son homotópicamente equivalentes.

De forma más general, si  $G$  es un grafo finito, toda arista con distintos finales se puede contraer a un punto. En este caso, toda componente de  $G$  es homótopa o bien a un punto o a una suma puntual de  $S^1$ .

- (2) Consideremos  $X$  el espacio formado por la unión de una  $S^2$  y una 1-celda por los polos. Por el teorema anterior, si identificamos los polos al mismo

punto sobre la esfera o contraemos la 1-celda a un punto, obtenemos dos espacios homotópicamente equivalentes. Así, tenemos que

$$S^2 \cup e^1 = S^1 \vee S^2 = S^2 / S^0$$

### (3) Ejemplo unión de esferas

#### 2.1.1. Cómo pegar espacios en general

Antes vimos el concepto de unir  $n$ -celdas a un espacio  $X$ . Ahora vamos a generalizar este concepto para cualesquiera espacios  $X$  e  $Y$ .

Para ello, consideramos un subespacio  $A \subset Y$  y una aplicación  $f : A \rightarrow X$ . El subespacio  $A$  será el “sitio por donde vamos a pegar” los espacios, mientras que la aplicación es la forma de pegarlos. Una vez dados estos dos elementos, definimos:

$$X \cup_f Y := X \dot{\cup} Y /_{x \in A \sim f(x)}$$

#### Insertar imagen p43

Como hemos observado, pegar una celda es un caso particular, donde el subespacio que escogemos es la frontera de la celda.

Otro caso interesante es el llamado cilindro de una aplicación. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Definimos el cilindro de  $f$ ,

$$M_f = Y \cup_{\tilde{f}} (X \times I)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X \times I &\rightarrow Y \\ \tilde{f}(x, 1) &= f(x) \end{aligned}$$

$$\text{esto es, } M_f = Y \dot{\cup} (X \times I) /_{(x, 1) \sim f(x)}$$

Si además colapsamos  $X \times \{0\}$  a un punto, obtenemos el “cono de  $f$ ”, que también lo podemos definir como

$$C_f = Y \dot{\cup} CX /_{(x, 1) \sim f(x)}$$

Visto esto, podemos factorizar la función  $f$  como la siguiente composición:  $f = p \circ i$ , donde  $i$  es la inclusión y  $p$  es la aplicación que “aplata” el cilindro al espacio  $Y$ , esto es  $i(x) = (x, 0)$  y  $p : M_f \rightarrow Y$  tal que  $p|_Y = Id_Y$ ,  $p(x, t) = f(x)$ .

Visto esto último, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema:** Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una aplicación y consideremos la factorización de  $f$  dada por el cilindro de  $f$ ,  $f = p \circ i$ . Entonces  $i$  es una cofibración y  $p$  una equivalencia de homotopía. En particular, toda aplicación  $f$  es, salvo homotopía, una cofibración.<sup>1</sup>

*Demostración:* En efecto,  $X \hookrightarrow M_f$  es una cofibración, pues la retracción  $I \times I \xrightarrow{r} I \times \{0\} \cup \partial I \times I$  induce una retracción de  $M_f \times I$  en  $M_f \times \{0\} \cup X \times I$ .

Por otra parte, la inclusión  $j : Y \longrightarrow M_f$  es una equivalencia de homotopía inversa de  $p$ :  $p \circ j = Id_Y$ ,  $j \circ p \simeq Id_{M_f}$ .  $\square$

En general, si  $A \hookrightarrow X$  es una cofibración, llamamos cofibra de  $A$  a  $X/A$ , de forma que una cofibración es análogo a una sucesión exata corta

$$A \hookrightarrow X \longrightarrow X/A$$

Si  $f : X \longrightarrow Y$  es una aplicación cualquiera, la cofibra de  $f$  es la cofibra de la cofibración asociada

$$X \longrightarrow M_f \longrightarrow M_f/X = C_f$$

que escribimos como:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f$$

donde  $q = q' \circ j$ ,  $q' : M_f \longrightarrow C_f$ .

**Insertar imagen p46** que es una cofibración de cofibra  $\Sigma X$ .

Tenemos entonces una sucesión

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f \xrightarrow{\delta} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma C_f \longrightarrow \dots$$

que es la sucesión de “Barratt-Puppe” que da lugar a una sucesión exacta larga de grupos:

$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{q^*} [C_f, Z] \xleftarrow{\delta^*} [\Sigma X, Z] \xleftarrow{\Sigma f^*} [\Sigma Y, Z] \xleftarrow{\Sigma q^*} \dots$$

la cual se deduce del siguiente resultado:

**Teorema:** Para todo espacio  $Z$ , la sucesión

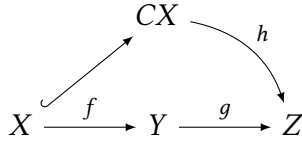
$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{q^*} [C_f, Z]$$

---

<sup>1</sup>Mirar esta última parte

inducida por  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f$  es exacta.

*Demostración:*<sup>2</sup> Tenemos que  $q^* \circ f^* = (q \circ f)^* = (c_{x_0})^* = c$ . Supongamos que  $f^*(g) \simeq c$  con  $g : Y \rightarrow Z$ , esto es  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  pero sabemos que toda aplicación homótopa a la constante se extiende al cono de  $X$ .



Definimos entonces  $k : C_f \rightarrow Z$  tal que  $k|_Y = g, k|_{CX} = h$   
Obviamente  $q^*(k) = h \circ q = k \circ q' \circ j = g$

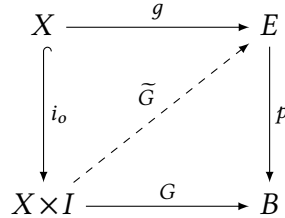
Añadir imagen p 47

□

## 2.2. Fibraciones

**Definición:** Una aplicación  $p : E \rightarrow B$  tiene la propiedad de levantamiento homotópico (HLP) con respecto a un espacio  $X$  si dada una homotopía  $G : X \times I \rightarrow B$  que tiene levantamiento en su inicio, entonces se levanta toda ella, esto es, si existe  $g : X \rightarrow E$  tal que  $G(x, 0) = pg(x)$ , existe entonces  $\tilde{G} : X \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{G}(x, 0) = g(x)$  y  $G = p \circ \tilde{G}$ .

Dicho de otra forma, el diagrama conmutativo siguiente puede completarse con la aplicación punteada  $\tilde{G}$ :



**Definición:** Decimos que la aplicación  $p : E \rightarrow B$  es una fibración (de Hurewicz)<sup>3</sup> si posee la HLP con respecto a cualquier espacio.

<sup>2</sup>Volver a mirar demostración

<sup>3</sup>Una fibración de Serre es aquella, más débil, que tiene la HLP para los discos  $D^n$ . Se puede probar que estas también tienen la HLP para los CW-complejos

A continuación veremos un resultado que nos dice que toda fibración es sobreyectiva, pero existen ejemplos de aplicaciones sobreyectivas que no son fibraciones.

**Ejemplo:** Sea  $X$  el llamado “seno del topólogo”, es decir, la adherencia del grafo de la función  $\sin \frac{1}{x}$  con  $x \in (0, 1]$ . Esto es:

$$X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$$

**Añadir imagen p49** y tomamos  $B = [0, 1]$  junto con la aplicación  $p : X \rightarrow B$  la proyección sobre la primera componente.

Es claro que la aplicación  $p$  es sobreyectiva y la identidad  $B \rightarrow B$  no puede levantarse a  $x$  ya que no existe una extensión continua de  $\sin \frac{1}{x}$  a 0. No obstante,  $Id_B \simeq *$  y la constante puede levantarse.

**Proposición:** Toda fibración con base arcoconexa es sobreyectiva.

*Demostración:* Sea  $b \in B$  y  $b_0 \in B$  en la imagen de  $p$ ,  $p(e_0) = b_0$ . Sea también  $\alpha : I \rightarrow B$  curva con  $\alpha(0) = b_0$ ,  $\alpha(1) = b$ . Entonces, por ser  $p$  fibración, por la HLP existe  $\tilde{\alpha}$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} \{z\} & \xrightarrow{z \mapsto e_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\ \{z\} \times I & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

y obviamente  $p\tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = b$ . □

Esta misma demostración nos dice que todas las curvas se levantan.

**Teorema:** Todas las fibras tienen el mismo tipo de homotopía.

*Demostración:* Denotemos por  $F_b = p^{-1}(b)$  la fibra en  $b$ . Así, para cada  $b_0, b_1 \in B$  y cada curva  $\omega : I \rightarrow B$  curva en  $B$  uniendo  $b_0$  con  $b_1$ , definimos una aplicación continua  $h[\omega] : F_{b_0} \rightarrow F_{b_1}$  de la siguiente forma:

Por la HLP, si consideramos

$$\begin{aligned} F_{b_0} \times I &\rightarrow B \\ (e, t) &\mapsto \omega(t) \end{aligned}$$

existe un diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 F_{b_0} & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow i_0 & \nearrow G & \downarrow p \\
 F_{b_0} \times I & \xrightarrow{\quad} & B
 \end{array}$$

tal que  $pG(e, t) = \omega(t)$ . **¿Insertar img p 51?**

Obviamente, para cada  $e \in F_{b_0}$ ,  $G(e, -)$  es una curva en  $E$  de forma que  $G(e, t) \in F_{\omega(t)} \forall t$ . Definimos entonces

$$\begin{aligned}
 h_{[\omega]} : F_{b_0} &\longrightarrow F_{[b_1]} \\
 e &\longmapsto G(e, 1)
 \end{aligned}$$

Es más, si  $\omega \simeq_{\{0,1\}} \omega'$  entonces  $h_{[\omega]} \simeq h_{[\omega']}$ .

Tomemos ahora  $\omega$  y  $\tau$  curvas en  $B$  que unen a  $b_0$  con  $b_1$  y  $b_1$  con  $b_2$  respectivamente. Sean  $F : F_{b_0} \times I \longrightarrow E$ ,  $G : F_{b_1} \times I \longrightarrow E$  tales que  $pF(e, t) = \omega(t)$  y  $pG(e, t) = \tau(t)$ . Definimos

$$\begin{aligned}
 H : F_{b_0} \times I &\longrightarrow E \\
 H(e, t) &= \begin{cases} F(e, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ G(h_{[\omega]}(e), 2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se tiene entonces  $pH(e, t) = (\omega \cdot \tau)(t)$ , por lo que  $h_{[\omega \cdot \tau]}(e) = H(e, 1) = G(h_{[\omega]}(e), 1) = h_{[\tau]} \circ h_{[\omega]}(e)$ , esto es:

$$h_{[\omega \cdot \tau]} = h_{[\tau]} \circ h_{[\omega]}$$

Por tanto,  $h_{[\omega]} \circ h_{[\omega^{-1}]} = h_{[\omega^{-1} \cdot \omega]} = h_{[c_b]} = Id_{F_b}$ .

### Ejemplos:

- (1) La proyección  $X \times Y \longrightarrow X$  es una fibración de forma elemental, llamada fibración trivial. Su fibra es  $Y$ .
- (2) Hurewicz probó que si, dada una aplicación continua  $p : E \longrightarrow B$ , existe un recubrimiento  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  de  $B$  tal que  $p|_{p^{-1}(U_i)} : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$  es una fibración para todo  $i$  y  $B$  es paracompacto, entonces  $p$  es una fibración.

Con esto, todo fibrado con base paracompacta es una fibración. Para verlo, basta con aplicar el resultado de Hurewicz a una trivialización del fibrado  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  recubrimiento de  $B$ , donde para cada  $\alpha$  existe  $\varphi_\alpha : U_\alpha \times$

$F \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$  tal que

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F & \xrightarrow{\cong} & p^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p \\ & U_\alpha & \end{array}$$

(3) Todo espacio recubridor es una fibración de fibra discreta.

□

### Fibraciones inducidas o pullbacks

Dada  $p : E \longrightarrow B$  una fibración y  $f : X \longrightarrow B$  una aplicación. Formamos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{p_E} & E \\ \downarrow p_X & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

$f^*(E) = \{(x, e) \in X \times E : f(x) = p(e)\}$ , esto es,  $f^*(E)$  es el verdadero pullback de  $p$  y  $f$ . Pues bien, se tiene entonces:

**Teorema:** La aplicación  $f^*(E) \xrightarrow{p_X} X$  es una fibración.  
 $(x, e) \mapsto x$

*Demostración:* Por ser  $p$  fibración, existe  $\tilde{H}$  como en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{g} & f^*(E) & \xrightarrow{p_E} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow G & \downarrow \tilde{H} & \nearrow p_X & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Definimos entonces  $G(z, t) = (H(z, t), \tilde{H}(z, t))$ . Veamos que se verifica todo:

1.  $G(z, t) \in f^*(E)$  ya que  $f H(z, t) = p \tilde{H}(z, t)$ .
2. Claramente  $p_X G = H$ .
3.  $G \circ i_0 = g$ . Sabemos que  $\tilde{H} i_0 = p_e g$  por lo que la segunda coordenada de  $g$  es la segunda coordenada de  $G \circ i_0$  (que es  $\tilde{H}$ ) y la primera coordenada de  $g$  es  $H(z, 0)$  que es la primera de  $G \circ i_0$ .

□

Si consideramos ahora  $A \subset B$  tenemos el siguiente resultado:

**Corolario:** Si  $p : E \rightarrow B$  es fibración, entonces  $p : p^{-1}(A) \rightarrow A$  también lo es.

**Proposición:** En un pullback las fibras coinciden.

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{Id} & F \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f^*(E) & \longrightarrow & E \\
 \downarrow p_X & & \downarrow p \\
 X & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

*Demostración:* Sea  $b_0$  el punto base de  $B$ .  $F = p^{-1}(b_0)$ . Por otra parte, si  $x_0$  es el punto base de  $X$ ,  $p_X^{-1}(x_0) = \{(x_0, e) : p(e) = f(x_0) = b_0\} \cong F_{b_0}$  □

Vamos ahora a ver un caso particular importante. Primero necesitaremos el siguiente resultado:

**Proposición:** La aplicación  $X^I \xrightarrow{\gamma} X$ ,  $\gamma(\omega) = \omega(1)$  es una fibración.

*Demostración:* Consideramos el siguiente diagrama:

Definimos  $\tilde{H}$  como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{g} & X^I \\
 \downarrow i_0 & \searrow \tilde{H} & \downarrow \gamma \\
 Z \times I & \xrightarrow{H} & X
 \end{array}$$

$$\tilde{H}(z, t) = g(z) \cdot H(z, [0, t])$$

esto es, como la composición de la curva  $g(z)$  con la curva  $H_z$  de 0 a  $t$ . Está bien definido ya que

$$g(z)(1) = \gamma(g(z)) = H(z, 0)$$

$$\tilde{H}(z, 0) = g(z)$$

$$\tilde{H}(z, t)(1) = \gamma \circ \tilde{H}(z, t) = H(z, t)$$



De forma explícita:

$$\tilde{H}(z, t)(s) = \begin{cases} g(z)(s(t+1)) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{t+1} \\ H(z, s(t+1) - 1) & \text{si } \frac{1}{t+1} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

Por el corolario anterior, también lo es por tanto la llamada “Fibración de caminos”

$$\begin{aligned} PX &\longrightarrow X \\ \omega &\longmapsto \omega(1) \end{aligned}$$

Insertar imagen p56

$$PX = \{\omega \in X^I : \omega(0) = x_0\}$$

cuya fibra es  $\Omega X$ .

$$\Omega X \longrightarrow PX \longrightarrow X$$

Por otra parte, dada  $f : X \longrightarrow Y$  una aplicación cualquiera, podemos descomponerla de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & \searrow \varphi & \nearrow p_1 \\ & E_f & \end{array}$$

$$E_f = \{(x, \omega) \in X \times Y^I : f(x) = \omega(0)\}$$

Donde  $E_f$  es el pullback de  $p$  y  $f$  y  $\varphi(x) = (x, C_{f(x)})$  y  $p_1(x, \omega) = \omega(1)$ .

Tenemos que  $p_1$  es la composición de una proyección de un producto (que es fibración) y de evaluar en 1 que acabamos de ver que también lo es. Luego  $p_1$  es una fibración. Por otra parte,  $\varphi$  es también de forma obvia una equivalencia de homotopía. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema:** Toda aplicación es, salvo homotopía, una fibración. <sup>4</sup>

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & \searrow \varphi & \nearrow p_1 \\ & E_f & \end{array}$$

---

<sup>4</sup>Mirar en libro

A la fibra de  $p_1$  se le denomina fibra homotópica de  $f$  y es:

$$F \longrightarrow E_f \xrightarrow{p_1} Y$$

$$F = \{(x, \omega) : \omega(1) = y_0, \omega(0) = f(x)\}$$

Si consideramos la inversa homotópica de  $\varphi$ ,  $E_f \xrightarrow{\phi} X$ ,  $\phi(x, \omega) = x$ , entonces la composición **corregir**

$$F \longrightarrow E_f \xrightarrow{\phi} X$$

$$(x, \omega) \longmapsto x$$

es fibración cuya fibra típica es  $\{(x_0, \omega) : \omega(0) = f(x_0) = y_0, \omega(1) = y_0\} = \Omega Y$ .

Esto da lugar a la sucesión

$$\Omega Y \longrightarrow F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

Si repetimos este proceso una y otra vez, obtenemos:

$$\dots \longrightarrow \Omega^2 Y \longrightarrow \Omega F \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

Que es dual en el sentido de Eckmann-Hilton de la sucesión de Barratt-Puppe. Aplicando  $[Z, -]$ :

$$\dots \longrightarrow [Z, \Omega F] \longrightarrow [Z, \Omega X] \longrightarrow [Z, \Omega Y] \longrightarrow [Z, F] \longrightarrow [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$$

Se puede demostrar que:

**Teorema:** La sucesión

$$\dots \longrightarrow [Z, \Omega F] \longrightarrow [Z, \Omega X] \longrightarrow [Z, \Omega Y] \longrightarrow [Z, F] \longrightarrow [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$$

es una sucesión exacta de grupos (o de acción o conjuntos en los casos pertinentes).

Entonces, tomando en el teorema  $Z = S^0$ , obtenemos la sucesión

$$\dots \longrightarrow [S^0, \Omega^n F] \longrightarrow [S^0, \Omega^n X] \longrightarrow [S^0, \Omega^n Y] \longrightarrow [S^0, \Omega^{n-1} F] \longrightarrow [S^0, \Omega^{n-1} X] \longrightarrow \dots$$

Pero ya vimos que  $[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$ , luego tenemos la sucesión exacta:

$$\dots \longrightarrow [\Sigma^n S^0, F] \longrightarrow [\Sigma^n S^0, X] \longrightarrow [\Sigma^n S^0, Y] \longrightarrow [\Sigma^{n-1} S^0, F] \longrightarrow [\Sigma^{n-1} S^0, X] \longrightarrow \dots$$

Y tenemos que  $\Sigma^n S^0 = S^n$  y  $[S^n, X] = \pi_n(X)$ . Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema:** Se tiene la siguiente sucesión exacta larga en homotopía de una fibración:

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \dots$$

## Capítulo 3

# Grupos de Homotopía

### 3.1. Grupos de homotopía de mayor orden

El grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  ya es conocido. Además, anteriormente ya hemos definido los grupos de homotopía de un espacio:

$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)], \text{ donde } I^n = [0, 1]^n$$

Definimos, dadas  $f, g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ ,

$$(f + g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esta operación induce en las clases de homotopía una operación que es asociativa:

$$(f + g) + h \simeq f + (g + h) \quad (\text{relativa a } \partial I^n)$$

admite elemento neutro:

$$f + c_{x_0} \simeq f \simeq c_{x_0} \quad (\text{relativa a } \partial I^n)$$

y elemento inverso:

$$f^{-1}(s_1, \dots, s_n) = f(1 - s_1, \dots, s_n) \quad (\text{relativa a } \partial I^n)$$

Se podría pensar sobre otras posibles operaciones cambiando la coordenada elegida. Podemos definir las operaciones

$$(f +_i g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(s_1, \dots, 2s_i, \dots, s_n) & \text{si } s_i \leq \frac{1}{2} \\ g(s_1, \dots, 2s_i - 1, \dots, s_n) & \text{si } s_i \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

### 3.1. GRUPOS DE HOMOTOPÍA DE MAYOR ORDEN

Pero resulta que estas operaciones coinciden. Esto puede verse haciendo uso del siguiente resultado:

**Proposición (Argumento de Eckmann-Hilton):** Sea  $X$  un conjunto dotado de dos operaciones  $\bullet$  y  $\circ$  y supongamos que

1.  $\bullet$  y  $\circ$  poseen la misma unidad.
2.  $\forall a, b, c, d$  se verifica que

$$(a \bullet b) \circ (c \bullet d) = (a \circ c) \bullet (b \circ d)$$

Entonces  $\bullet$  y  $\circ$  coinciden y son asociativas y conmutativas.

*Demostración:* Sean  $a, b \in X$  y sea 1 la unidad de ambas operaciones. Entonces

$$\begin{aligned} a \circ b &= (1 \bullet a) \circ (b \bullet 1) = (1 \circ b) \bullet (a \circ 1) = b \bullet a \\ &= (b \circ 1) \bullet (1 \circ a) = (b \bullet 1) \circ (1 \bullet a) = b \circ a \end{aligned}$$

□

Por tanto, como estas operaciones verifican las condiciones de la proposición, obtenemos el siguiente resultado inmediatamente:

**Teorema:** Si  $n \geq 2$ , entonces  $\pi_n(X, x_0)$  es abeliano.

El caso  $n = 1$  no puede contemplarse ya que al trabajar únicamente con una coordenada no disponemos de otra operación distinta con la que aplicar el Argumento de Eckmann-Hilton.

**Observaciones:**

1. En el caso que tengamos  $C$  componente arcoconexa que contiene a  $x_0$ , entonces  $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(C, x_0)$ . Por lo tanto, supondremos  $X$  arcoconexo.
2. Las aplicaciones  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  coinciden con las aplicaciones  $(I^n / \partial I^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ . Pero  $S^n = I^n / \partial I^n$  y con estas identificaciones, la estructura de grupo es la que conocíamos

Insertar imagen p63

$$S^n \rightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X$$

### 3.1. GRUPOS DE HOMOTOPÍA DE MAYOR ORDEN

Veamos ahora que si cambiamos el punto base obtenemos grupos de homotopía isomorfos (al igual que ocurría para  $\pi_1$ ).

Tomamos 2 puntos  $x_0, x_1 \in X$  y un camino  $\gamma : I \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$ . A cada aplicación  $f : (S^n, p_0) \rightarrow (X, x_0)$  le asociamos una aplicación

$$\gamma_f : (S^n, p_0) \rightarrow (X, x_0)$$

definida de la siguiente forma:

Encogemos el dominio de  $f$  a un cubo menor concéntrico en  $I^n$ , e insertamos el camino  $\gamma$  en cada segmento radial entre este cubo y  $\partial I^n$ . **Insertar imagen p64, explicar  $I^n$**

Se tienen entonces las siguientes propiedades:

1.  $\gamma_{(f+g)} \simeq \gamma_f + \gamma_g$
2.  $(\gamma\eta)_f \simeq \gamma_{\eta_f}$
3.  $c_{x_1 f} \simeq f$

Entonces para cada  $\gamma$  definimos

$$\begin{aligned} \beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) &\longrightarrow \pi_n(X, x_0) \\ [f] &\longmapsto [\gamma_f] \end{aligned}$$

que es un morfismo de grupos, cuyo inverso es  $\beta_{\gamma^{-1}}$ . Por tanto:

**Teorema:** Dados  $x_0, x_1 \in X$ , se tiene que  $\pi_n(X, x_1) \cong \pi_n(X, x_0)$  mediante  $\beta_\gamma$ . Es más, si  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma\alpha\gamma^{-1}] \end{aligned}$$

De las propiedades también se obtiene

**Teorema:** La aplicación

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) &\longrightarrow \pi_n(X, x_0) \\ [\gamma], [f] &\longmapsto [\gamma_f] \end{aligned}$$

es una acción.

Cuando  $n = 1$ , la acción es por conjugación. hace al grupo abeliano  $\pi_n(X, x_0)$  un  $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -módulo via

$$\left( \sum_i n_i \gamma_i \right) \alpha = \sum_i n_i \gamma_i \alpha$$

Decimos que el espacio es abeliano si la acción de  $\pi_1(X, x_0)$  en  $\pi_n(X, x_0)$  es trivial. En particular, si  $n = 1$ , esta condición nos dice que  $\pi_1(X, x_0)$  es abeliano.

Si tenemos  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  aplicación continua, podemos definir

$$\begin{aligned} \pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) &\longrightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Con esta definición, tenemos:

**Proposición:**  $\pi_n$  es un funtor en la categoría homotópica con valores en la categoría de los grupos:

1.  $\pi_n(f)(a + b) = \pi_n(f)(a) + \pi_n(f)(b)$
2.  $\pi_n(Id) = Id_{\pi_n(X)}$
3. Si  $f \simeq g$ , entonces  $\pi_n(f) = \pi_n(g)$ .

Por tanto, si  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  es una equivalencia de homotopía, entonces  $\pi_n(f)$  es un isomorfismo. En efecto, existe  $g$  tal que  $f \circ g \simeq Id_{(Y, y_0)}$  y  $g \circ f \simeq Id_{(X, x_0)}$ . Tenemos que  $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)$  ya que:

$$\pi_n(f \circ g)([\alpha]) = [f \circ g \circ \alpha] = \pi_n(f)([g \circ \alpha]) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)([\alpha])$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_n(f \circ g) &= \pi_n(f) \circ \pi_n(g) = Id \\ \pi_n(g \circ f) &= \pi_n(g) \circ \pi_n(f) = Id \end{aligned}$$

Y así,  $\pi_n(f)$  es un isomorfismo.

## 3.2. Grupos de homotopía relativa

Vamos a generalizar los grupos de homotopía. Para ello construiremos los llamados grupos de homotopía relativa. Para ello tomamos  $x_0 \in A \subset X$  y consideramos  $I^{n-1} \subset I^n$  como los puntos con última coordenada 0 **Añadir imagen p68** y tomamos  $J^{n-1} = \partial I^n - I^{n-1}$ .

Se define entonces el grupo de homotopía relativa  $n$ -ésimo como

$$\pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$$

Se verifica que  $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, x_0, x_0)$ .

Con la anterior operación definida,  $\pi_n(X, A, x_0)$  es un grupo si  $n \geq 2$  y es abeliano si  $n \geq 3$ .

En el caso  $n = 1$ , tenemos que  $\partial I = \{0, 1\}$ ,  $I^{n-1} = I^0 = \{0\}$ ,  $J^0 = \{0\}$ . Por tanto

$$\pi_1(X, A, x_0) = \text{clases de homotopía relativa a } x_0 \text{ de caminos que van a } A \text{ en } x_0.$$

que no es un grupo.

También podemos ver  $\pi_n(X, A, x_0)$  como  $[(D^n, S^{n-1}, p_0), (X, A, x_0)]$ , ya que colapsando  $J^{n-1}$  a un punto, transforma  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$  en  $(D^n, S^{n-1}, p_0)$  y le damos la estructura de grupo **Insertar imagen p70**

Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Teorema:** La aplicación  $f : (D^n, S^{n-1}, p_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  representa el elemento neutro de  $\pi_n(X, A, x_0)$  si y sólo si  $f \simeq g$  relativa a  $S^{n-1}$  para algún  $g$  con  $\text{Im } g \subset A$ .

*Demostración:* Supongamos que  $f \simeq g$  relativo a  $S^{n-1}$  e  $\text{Im } g \subset A$ . Entonces existe  $H : (D^n, S^{n-1}, p_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Por tanto,  $[f] = [g]$  en  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Si tomamos  $F : (D^n, p_0) \times I \rightarrow (D^n, p_0)$  un retracts de deformación de  $D^n$  en  $p_0$ , entonces

$$\begin{aligned} g \circ F &: D^n \times I \rightarrow X \\ g \circ F(p, 0) &= g(p) \in A \\ g \circ F(p, 1) &= g(p_0) = x_0 \\ g \circ F(p_0, t) &= x_0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Luego  $g \simeq 0$  y así  $[f] = [g] = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $[f] = 0$ . Entonces existe  $H : (D^n, S^{n-1}, p_0) \times I \rightarrow (X, A, x_0)$ . Si restringimos  $H$  a una familia de discos  $D^n \times I$  empezando por  $D^n \times \{0\}$  y terminando por  $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I$ , tenemos  $F_t : H|_{D^n \times \{t\} \cup S^{n-1} \times [0, t]}$

Todos los  $n$ -discos tienen el mismo borde  $S^{n-1}$ , luego  $F : f \simeq g$  relativo a  $S^{n-1}$  e  $\text{Im } g \subset A$ .

**Mirar de nuevo, buscar en Spanier P372**

□



Al igual que hicimos para los grupos de homotopía, dada una aplicación  $\varphi : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ , esta induce un morfismo entre los grupos de homotopía relativa,  $\pi_n(\varphi) : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ . Por tanto, considerando las inclusiones  $i : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$  y  $j : (X, x_0, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ , éstas determinan morfismos

$$\begin{aligned}\pi_n(i) : \pi_n(A, x_0) &\longrightarrow \pi_n(X, x_0) \\ \pi_n(j) : \pi_n(X, x_0, x_0) &\longrightarrow \pi_n(X, A, x_0)\end{aligned}$$

Por otra parte, dada una aplicación  $f : (D^n, S^{n-1}, p_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ , la restricción  $f|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, p_0) \longrightarrow (A, x_0)$  determina un morfismo  $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$  llamado aplicación borde.

Entonces, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema:** La sucesión

$$\begin{aligned}\dots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) &\xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots \\ &\dots \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0)\end{aligned}$$

es exacta.

*Demostración:* Veamos la exactitud en  $\pi_n(X, x_0)$ . Consideremos la composición  $\pi_n(i) \circ \pi_n(j) = \pi_n(k)$ . Veamos que es 0.  $k = i \circ j : (A, x_0, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ . Consideremos ahora una función  $f : (D^n, S^{n-1}, p_0) \longrightarrow (A, x_0, x_0)$ . Así  $k \circ f : (D^n, S^{n-1}, p_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$  representa al neutro de  $\pi_n(X, A, x_0)$  por el teorema anterior.

Veamos ahora que  $\text{Ker } \pi_n(j) \subset \text{Im } \pi_n(i)$ . Sea  $[f] \in \text{Ker } \pi_n(j)$ . Entonces  $[f]$  representa al neutro en  $\pi_n(X, x_0)$ . Por tanto, existirá  $g$  tal que  $f \simeq g$  relativa a  $S^{n-1}$  con  $\text{Im } g \subset A$ . Así,  $\pi_n(i)[g] = [f] \in \text{Im } \pi_n(i)$ .

¿Completar con el resto de demost de exactitud?

□

### 3.3. $n$ -conexidad de un espacio

**Definición:** Un espacio topológico  $X$  con punto base  $x_0$  se dice  $n$ -conexo si  $\pi_i(X, x_0) = 0$  para todo  $i \leq n$ .

Con esta definición, que un espacio sea 0-conexo quiere decir que es arcoconexo, y que sea 1-conexo significa que el espacio es simplemente conexo.

Como  $n$ -conexidad implica 0-conexidad, la mención del punto base de un espacio  $n$ -conexo no es importante.

Así, las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\pi_n(X, x_0) = 0$  para todo  $i \leq n$  y todo  $x_0 \in A$
2. Cada aplicación  $S^i \rightarrow X$  es homotópicamente trivial para todo  $i \leq n$ .
3. Cada aplicación  $S^i \rightarrow X$  se extiende a  $D^{n+1}$  para todo  $i \leq n$ .

De la misma forma, para un par  $(X, A)$  son equivalentes las siguientes condiciones:

1. Cada aplicación  $(D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$  es homotopa relativa a  $S^{n-1}$  a una aplicación  $D^i \rightarrow A$ .
2. Cada aplicación  $(D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$  es homotopa en  $[(D^i, S^{i-1}), (X, A)]$  a una aplicación  $D^i \rightarrow A$ .
3. Cada aplicación  $(D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$  es homotopa en  $[(D^i, S^{i-1}), (X, A)]$  a una constante  $D^i \rightarrow A$ .
4.  $\pi_n(X, A, x_0) = 0 \forall x_0 \in A$ .

Para el caso  $i = 0$ ,  $\pi_0(X, A, x_0)$  no está definido, por tanto, decimos que el par  $(X, A)$  es  $n$ -conexo si se verifica una de las cuatro condiciones para  $i > 0$  y si se verifica una de las tres primeras cuando  $i = 0$ .

### Aplicaciones de la sucesión exacta de un par $(X, A)$

Veamos ahora varios resultados que hacen uso de esta sucesión exacta.

**Teorema:** Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración. Tomamos  $b_0 \in B$  y un punto  $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$  de la fibra de  $b_0$ . Entonces

$$\pi_n(p) : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$$

es isomorfismo si  $n \geq 1$ .

# Capítulo 4

## Resultados (por añadir)

### 4.1. Dualidad de Eckmann-Hilton

Este principio de dualidad, en su forma más básica, consiste en la idea de, dado un diagrama para una construcción, invertir el sentido de las flechas de dicho diagrama.

Un ejemplo de esto son las fibraciones y cofibraciones. Estas dos construcciones son duales en el sentido de Eckmann-Hilton.

Una fibración  $p : E \longrightarrow B$  verifica que posee la HLP, que se representa por el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow i_o & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Y una cofibración  $i : A \longrightarrow X$  es tal que posee la HEP, que viene dada por el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \nearrow & \downarrow i_o & & \uparrow \\ A & & X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ & \searrow & \uparrow & & \downarrow \\ & & A \times I & \xrightarrow{G} & Y \end{array}$$

Éste último diagrama podemos cambiarlo haciendo uso del *currying*, esto es, considerar aplicaciones  $X \times I \longrightarrow Y$  como aplicaciones  $X \longrightarrow Y^I$ . Así, tendríamos que el diagrama queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xleftarrow{f} & X \\
 \uparrow \pi & \swarrow \tilde{F} & \uparrow i \\
 Y^I & \xleftarrow{G} & A
 \end{array}$$

En el cual se ve que el sentido de las flechas es el contrario que en la fibración.

Además esto también se observa entre las sucesiones exactas dadas por fibraciones y cofibraciones:

Para una cofibración, teníamos la sucesión de Barratt-Puppe:

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow C_f \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y \longrightarrow \Sigma C_f \longrightarrow \Sigma^2 X \longrightarrow \dots$$

Y para las fibraciones teníamos la sucesión dada por la fibra homotópica de una aplicación:

$$\dots \longrightarrow \Omega^2 Y \longrightarrow \Omega F \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

## 4.2. Espacios de Eilenberg-MacLane

Sea  $G$  un grupo y  $n$  un entero positivo. Un grupo topológico conexo  $X$  se dice que es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $K(G, n)$  si su grupo de homotopía  $n$ -ésimo  $\pi_n(X) \cong G$  y  $\pi_k(X) = 0$  si  $k \neq n$ . Si  $n > 1$  entonces  $G$  debe ser abeliano como hemos visto.

### Ejemplos:

(1) Espacios de tipo  $K(G, 1)$ .

La circunferencia unidad  $S^1$  es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $K(\mathbb{Z}, 1)$  y el todo  $T = S^1 \times S^1$  es  $T = K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$ . También se tiene que  $\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$ .

En general, un espacio se dice “asférico” o de tipo  $K(G, 1)$  si su recubridor universal  $\tilde{X}$  es débilmente contráctil, esto es, si  $\pi_n(\tilde{X}) = 0 \forall n$ .

#### 4.2. ESPACIOS DE EILENBERG-MACLANE CAPÍTULO 4. RESULTADOS (POR AÑADIR)

- (2) Espacios de tipo  $K(G, n)$  con  $n \geq 2$ . Como ejemplo de espacio  $K(G, 2)$  tenemos al espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$ .

Un ejemplo más general lo tenemos considerando el producto simétrico infinito  $SP^\infty(X)$ , definido como

$$SP^\infty(X) = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} X^i / \sim$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia que identifica  $(x_1, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_n, e)$  y cualquier punto con puntos con las mismas coordenadas permutadas.

Entonces, el Teorema de Dold-Thom dice que si  $X$  es  $CW$ -complejo, entonces  $\pi_i(SP^\infty(S^n)) \cong \tilde{H}_i(X; \mathbb{Z})$  para  $i \geq 0$ .

Así considerando  $X = S^n$ ,

$$\pi_i(SP^\infty(S^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

luego  $K(\mathbb{Z}, n) = SP^\infty(S^n)$ .

Más generalmente, si consideramos el espacio de Moore  $M(G, n)$ , que no es más que el equivalente homológico al espacio de Eilenberg-MacLane, se tiene que

$$K(G, n) = SP^\infty(M(G, n))$$

Además, se puede demostrar lo siguiente:

**Teorema:** El espacio de Eilenberg-MacLane  $K(G, n)$  es único, salvo homotopía.

**¿Añadir demostración sin demostrar lemas previos?**