UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Teoría de Homotopía

Juan Antonio Macías García

7 Julio 2014

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

CW-complejos, suspensión de un espacio y espacio de lazos

Fibraciones y cofibraciones

Grupos de Homotopía

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

CW-complejos, suspensión de un espacio y espacio de lazos

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

CW-Complejos

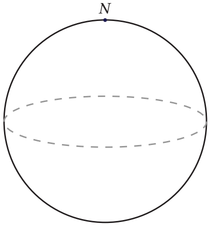
Un CW-complejo es un tipo particular de espacio topológico muy útil en la teoría de homotopía. Construimos los espacios llamados n-esqueletos:

$$X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots$$

Definimos entonces el CW-complejo como $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$.

CW-Complejos

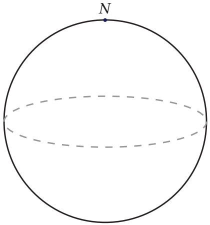
Un ejemplo de CW-complejo es la esfera S^n. Tenemos dos construcciones posibles:



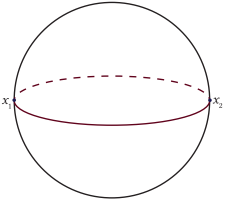
En esta descomposición, tomamos una 0-celda y una n-celda.

CW-Complejos

Un ejemplo de CW-complejo es la esfera S^n. Tenemos dos construcciones posibles:



En esta descomposición, tomamos una 0-celda y una n-celda.

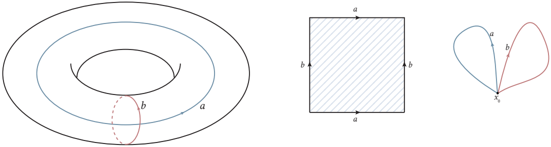


Descomponemos la esfera en dos 0-celdas, dos 1-celdas, dos 2-celdas...

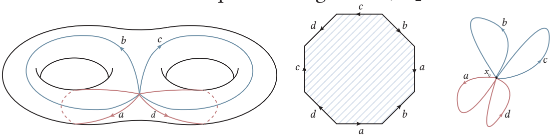
CW-Complejos

Una superficie orientable compacta M_g de género g está compuesta por una 0-celda, $2g$ 1-celdas y una 2-celda.

Superficie de género 1, M_1



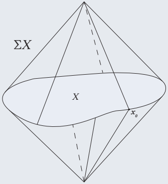
Superficie de género 2, M_2



Definición

Dado un espacio topológico X, se define la suspensión de X como

$$\Sigma X = {X \times I} \Big/ {\substack{(x,1) \sim (x',1) \\ (x,0) \sim (x',0)}}$$

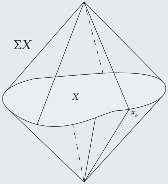


Suspensión y espacio de lazos

Definición

Dado un espacio topológico X, se define la suspensión de X como

$$\Sigma X = X \times I \Big/ \begin{array}{l}(x,1)\sim(x',1)\\(x,0)\sim(x',0)\end{array}$$



Definición

Se define el espacio de lazos de X como

$$\Omega X = (X,x_0)^{(S^1,\,p_0)} = \{f : I \longrightarrow X \mid f(0) = f(1) = x_0\}$$

Suspensión y espacio de lazos

Teorema

Sean X e Y dos espacios punteados cualesquiera. Entonces $[X, \Omega Y]$ y $[\Sigma X, Y]$ son grupos. Además,

$$[X, \Omega Y] \cong [\Sigma X, Y]$$

Fibraciones y cofibraciones

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Fibraciones y Cofibraciones

En distintos contextos matemáticos encontramos dos problemas básicos, común a todos ellos: el problema de la extensión y el problema del levantamiento.

Para estudiar estos problemas, vamos a ver dos conceptos: las fibraciones y las cofibraciones.

El problema de la extensión

Dado un diagrama de aplicaciones continuas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es una inclusión en un contexto dado, ¿cuándo existe $\widetilde{f}$ extensión de f?

Definición (Propiedad de extensión homotópica)

Sea $A \subset X$ un subespacio. Decimos que $i : A \hookrightarrow X$ o el par (X, A) tiene la propiedad de extensión homotópica (HEP) con respecto al espacio Y si dada una homotopía

$$G : A \times I \longrightarrow Y$$

existe $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(a) = G(a, 0)\ \forall\ a \in A$, entonces existe $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = F(x, 0)$ y $F(a, t) = G(a, t)\ \forall\ t \in I,\ a \in A$.

Cofibraciones

Definición (Propiedad de extensión homotópica)

Sea $A \subset X$ un subespacio. Decimos que $i : A \hookrightarrow X$ o el par (X, A) tiene la propiedad de extensión homotópica (HEP) con respecto al espacio Y si dada una homotopía

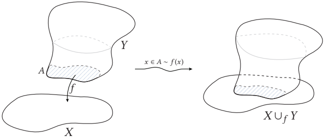
$$G : A \times I \longrightarrow Y$$

existe $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(a) = G(a, 0)\ \forall\ a \in A$, entonces existe $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = F(x, 0)$ y $F(a, t) = G(a, t)\ \forall\ t \in I,\ a \in A$.

Definición

Decimos que un par (X, A) (o la inclusión $i : A \hookrightarrow X$) es una cofibración si posee la HEP con respecto a todo espacio Y.

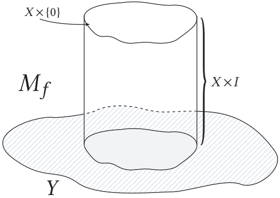
Adjunción de espacios



Consideramos dos espacios topológicos X e Y, un subespacio $A \subset Y$ y una aplicación $f : A \longrightarrow X$.
Definimos entonces la adjunción de los dos espacios como

$$X \cup_f Y := {}^{X \dot{\cup} Y}\!/\!_{\sim}\,, \qquad \text{donde } x \in A \sim f(x).$$

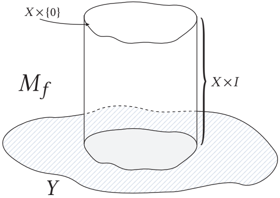
Cilindro y cono de una aplicación



El cilindro de una aplicación f se define como:

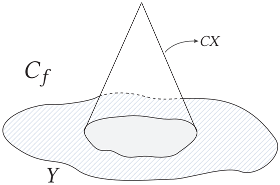
$$M_f = Y \cup_{\tilde{f}} (X \times I),$$

Cilindro y cono de una aplicación



El cilindro de una aplicación f se define como:

$$M_f = Y \cup_{\tilde{f}} (X \times I),$$



El cono de f se define como:

$$C_f = {Y \dot{\cup} CX}\big/_{(x,1)\sim f(x)}\,.$$

Cofibraciones

Podemos factorizar la función $f : X \longrightarrow Y$ como la composición $f = p \circ i$, donde i es la inclusión y p es la aplicación de retracción del cilindro al espacio Y.

Cofibraciones

Podemos factorizar la función $f : X \longrightarrow Y$ como la composición $f = p \circ i$, donde i es la inclusión y p es la aplicación de retracción del cilindro al espacio Y.

Teorema

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y consideremos la factorización, $f = p \circ i$. Entonces i es una cofibración y p una equivalencia de homotopía. En particular, toda aplicación f puede verse como una cofibración.

El problema del levantamiento

El otro problema con el que nos encontramos es el problema del levantamiento de aplicaciones continuas. Dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

donde p es sobreyectiva, ¿cuándo existe $\widetilde{f}$ levantamiento de f?

Fibraciones

Definición (Propiedad de levantamiento homotópico)

Una aplicación $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad de levantamiento homotópico (HLP) con respecto a un espacio X si dada una homotopía

$$G : X \times I \longrightarrow B$$

existe $g : X \longrightarrow E$ tal que $G(x,0) = pg(x)$, existe entonces $\widetilde{G} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $\widetilde{G}(x,0) = g(x)$ y $G = p \circ \widetilde{G}$.

Fibraciones

Definición (Propiedad de levantamiento homotópico)

Una aplicación $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad de levantamiento homotópico (HLP) con respecto a un espacio X si dada una homotopía

$$G : X \times I \longrightarrow B$$

existe $g : X \longrightarrow E$ tal que $G(x, 0) = pg(x)$, existe entonces $\widetilde{G} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $\widetilde{G}(x, 0) = g(x)$ y $G = p \circ \widetilde{G}$.

Definición

Decimos que la aplicación $p : E \longrightarrow B$ es una fibración si posee la HLP con respecto a cualquier espacio.

Pullback

Definición

Sean $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones con un codominio común. El pullback de las aplicaciones f y g se define:

$$P = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

Fibraciones

Dada $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación cualquiera, podemos descomponerla de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \\
& E_f = \{(x,\omega) \in X \times Y^I \mid f(x) = \omega(0)\} \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

donde E_f es el pullback de p_1 y f.

Fibraciones

Dada $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación cualquiera, podemos descomponerla de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \\
& E_f = \{(x,\omega) \in X \times Y^I \mid f(x) = \omega(0)\} \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

donde E_f es el pullback de p_1 y f.

Teorema

Toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es, salvo homotopía, una fibración.

Grupos de Homotopía

Grupos de Homotopía

Definición

Dado (X, x_0) un espacio topológico punteado. Definimos el grupo de homotopía n-ésimo como:

$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)], \text{ donde } I^n = [0,1]^n.$$

Grupos de Homotopía

Definición

Dado (X, x_0) un espacio topológico punteado. Definimos el grupo de homotopía n-ésimo como:

$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)], \text{ donde } I^n = [0,1]^n.$$

$$(f+g)(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{si } s_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \text{si } s_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Grupos de Homotopía

Definición

Dado (X, x_0) un espacio topológico punteado. Definimos el grupo de homotopía n-ésimo como:

$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)], \text{ donde } I^n = [0,1]^n.$$

$$(f +_i g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(s_1, \dots, 2s_i, \dots, s_n) & \text{si } s_i \leq \frac{1}{2}, \\ g(s_1, \dots, 2s_i - 1, \dots, s_n) & \text{si } s_i \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Proposición (Argumento de Eckmann-Hilton)

Sea X un conjunto dotado de dos operaciones $\bullet$, $\circ$, y supongamos que

1. $\bullet$ y $\circ$ poseen la misma unidad.
2. $\forall a, b, c, d \in X$ se verifica que

$$(a \bullet b) \circ (c \bullet d) = (a \circ c) \bullet (b \circ d).$$

Entonces $\bullet$ y $\circ$ coinciden, y son asociativas y conmutativas.

Proposición (Argumento de Eckmann-Hilton)

Sea X un conjunto dotado de dos operaciones $\bullet$, $\circ$, y supongamos que

1. $\bullet$ y $\circ$ poseen la misma unidad.
2. $\forall a, b, c, d \in X$ se verifica que

$$(a \bullet b) \circ (c \bullet d) = (a \circ c) \bullet (b \circ d).$$

Entonces $\bullet$ y $\circ$ coinciden, y son asociativas y conmutativas.

Teorema

Si $n \geq 2$, entonces $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano.

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Grupos de Homotopía Relativa

Definición

Consideramos (X, x_0) espacio topológico punteado y A tal que $x_0 \in A \subset X$. Denominamos $J^{n-1} = \partial I^n - I^{n-1}$.
Definimos entonces el grupo de homotopía relativa n-ésimo como

$$\pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$$

Con la anterior operación definida, $\pi_n(X, A, x_0)$ es un grupo si $n \geq 2$ y es abeliano si $n \geq 3$.

Sucesión exacta larga en homotopía

Teorema

La sucesión

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A,x_0) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow \pi_1(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_0(A,x_0) \longrightarrow \pi_0(X,x_0)$$

es exacta.

Aplicaciones de la sucesión exacta larga

Teorema

Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración. Tomamos $b_0 \in B$ y un elemento x_0 de la fibra de b_0, $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Entonces

$$\pi_n(p) : \pi_n(E, F, x_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$$

es isomorfismo si $n \geq 1$.

Aplicaciones de la sucesión exacta larga

Teorema

Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración. Tomamos $b_0 \in B$ y un elemento x_0 de la fibra de b_0, $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Entonces

$$\pi_n(p) : \pi_n(E, F, x_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$$

es isomorfismo si $n \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \pi_n(E, x_0) \arrow[r, "\pi_n(i)"] \arrow[dr, "\pi_n(p)"'] & \pi_n(E, F, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n(p)", "\cong"'] & \pi_{n-1}(F, x_0) \arrow[r] & \dots \\
& & \pi_n(B, b_0) & &
\end{tikzcd}$$

Aplicaciones de la sucesión exacta larga

Un espacio recubridor es una fibración con fibra discreta, por lo tanto $\pi_i(F, x_0) = 0\ \forall i \geq 1$ y $\pi_0(F, x_0)$ es el conjunto de componentes arcoconexas que contienen a x_0.

$$0 \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \geq 2,$$

$$\pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \quad \text{es inyectiva.}$$

Aplicaciones de la sucesión exacta larga

Un espacio recubridor es una fibración con fibra discreta, por lo tanto $\pi_i(F, x_0) = 0 \; \forall i \geq 1$ y $\pi_0(F, x_0)$ es el conjunto de componentes arcoconexas que contienen a x_0.

$$0 \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \geq 2,$$

$$\pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \quad \text{es inyectiva.}$$

Si tomamos $exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ espacio recubridor, tenemos que

$$\pi_i(S^1) = 0, \; i \geq 2; \qquad \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

Aplicaciones de la sucesión exacta larga

Considerando el espacio proyectivo complejo definido como
$\mathbb{C}P^n = {}^{S^{2n+1}}\!/\!\sim$.
De esta forma, obtenemos un fibrado

$$S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n.$$

Si $n = 1$,

$$S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$$

Aplicaciones de la sucesión exacta larga

$$\underbrace{\pi_n(S^1)}_{=0} \longrightarrow \pi_n(S^3) \xrightarrow{\cong} \pi_n(S^2) \longrightarrow \underbrace{\pi_{n-1}(S^1)}_{=0} \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\pi_2(S^1)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longrightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\cong} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{=\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^2)}_{=0}$$

Por tanto, obtenemos que

$$\begin{cases} \pi_n(S^3) = \pi_n(S^2) & \text{si } n \geq 3 \\ \pi_2(S^2) = \mathbb{Z} \end{cases}$$