Seccion 3.3.5

Estudainte: Juan Manuel Murillo
Materia: **Métodos matemáticos para Físicos 1**

Ejercicio 7. Momento de inercia continuo

En este ejercicio se generaliza la definición del momento de inercia para cuerpos continuos:

$$I^i{}_j \;=\; \int_V d\nu\, \rho(\vec{r})\left(\delta^i{}_j (x^k x_k) - x^i x_j\right), \qquad x^i = \{x, y, z\}, \quad d\nu = dx\, dy\, dz.$$

(a) Mostrar que $I^i{}_j$ es un tensor

Por definicion, un objeto se llama tensor si transforma covariantemente bajo un cambio de coordenadas. El integrando

$$\delta^i{}_j (x^k x_k) - x^i x_j$$

está construido a partir de tensores básicos ($\delta^i{}_j$, el producto escalar $x^k x_k$, y el producto $x^i x_j$). Bajo una transformación lineal $x'^i = \Lambda^i{}_m x^m$, se verifica

$$I'^i{}_j = \Lambda^i{}_m\, I^m{}_n\, (\Lambda^{-1})^n{}_j,$$

lo cual prueba que $I^i{}_j$ efectivamente es un tensor de rango $(1, 1)$. *(Observación: la demostracion formal requiere escribir el jacobiano en el cambio de volúmen).*

(b) Momento de inercia de un cubo

Sea un cubo de lado l, masa total M y densidad uniforme

$$\rho = \frac{M}{l^3}.$$

Tomamos los ejes cartesianos coincidiendo con las aristas del cubo. Los momentos principales se obtienen de

$$I_{xx} = \int_V \rho\,(y^2 + z^2)\, d\nu, \quad I_{yy} = \int_V \rho\,(x^2 + z^2)\, d\nu, \quad I_{zz} = \int_V \rho\,(x^2 + y^2)\, d\nu.$$

Como el cubo es simétrico, resulta

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}.$$

En detalle:

$$I_{xx} = \rho \int_{-l/2}^{l/2}\int_{-l/2}^{l/2}\int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

El integral en x aporta un factor l:

$$I_{xx} = \rho l \left[\int_{-l/2}^{l/2} y^2 \, dy \int_{-l/2}^{l/2} dz + \int_{-l/2}^{l/2} z^2 \, dz \int_{-l/2}^{l/2} dy \right].$$

Cada integral cuadrática es

$$\int_{-l/2}^{l/2} y^2 \, dy = \frac{l^3}{12}.$$

Entonces

$$I_{xx} = \rho l \left(\frac{l^3}{12} \cdot l + \frac{l^3}{12} \cdot l \right) = \rho l \cdot \frac{l^4}{6} = \frac{M}{l^3} \cdot \frac{l^5}{6} = \frac{Ml^2}{6}.$$

Por simetría:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{Ml^2}{6}.$$

Los productos de inercia I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} se anulan porque las integrales de monomios impares son cero.

Resultado:

$$I^i{}_j = \frac{Ml^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8

Se considera el sistema de coordenadas ortogonales $O \cong (x, y, z)$ y otro $O' \cong (x', y', z')$ obtenido rotando O por $\pi/6$ alrededor del eje z y luego por $\pi/2$ alrededor del eje x' (el eje x después de la primera rotación). Los ejes y' y z coinciden según el enunciado visual.

Dado:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}},$$

se pide expresarlos en el sistema O'. Además, se da el tensor de esfuerzos en O:

$$P^i{}_j = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

y se pide su expresión en O'.

Convención y matriz de rotación

Tomamos la convención pasiva habitual: si la matriz R tiene como columnas las coordenadas (en la base original) de los ejes del sistema O', entonces las coordenadas de un vector en O' se obtienen por

$$\mathbf{v}' = R^T \mathbf{v}.$$

Construimos R como la composición de dos rotaciones:

- rotación alrededor de z por $\theta = \pi/6$:

$$R_z(\tfrac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- rotación de $\pi/2$ alrededor del eje x'. Si expresamos esa rotación en la base original, por la convención elegida la matriz resultante total (aplicada a vectores columna en la base original) puede tomarse como

$$R = R_x\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\ R_z\big(\tfrac{\pi}{6}\big),$$

donde

$$R_x\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando:

$$\boxed{R = R_x\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\, R_z\big(\tfrac{\pi}{6}\big) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

(Verificación directa mediante multiplicación de matrices.)

(a) Coordenadas de a y b en O'

Usando la convención $\mathbf{v}' = R^T\mathbf{v}$ calculamos:

$$\mathbf{a} = (1,2,3)^T, \qquad \mathbf{a}' = R^T\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga,

$$\mathbf{b} = (2,1,3)^T, \qquad \mathbf{b}' = R^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ -1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Transformación del tensor de esfuerzos

Para el tensor de componentes mixtas ${P^i}_j$ la ley de transformación por cambio de base dado por R es (en notación matricial)

$$\mathbf{P}' = R\,\mathbf{P}\,R^{-1},$$

pues en índices $P'^i{}_j = R^i{}_p \, P^p{}_q \, (R^{-1})^q{}_j$.

Con

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

y usando la matriz R dada, se obtiene (tras calcular la multiplicación)

$$\boxed{\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}P_4 & \frac{\sqrt{3}}{4}(P_1 - P_2) \\ 0 & P_3 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(P_1 - P_2) & -\frac{1}{2}P_4 & \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_2 \end{pmatrix}.}$$

Observaciones

- La componente central P'_{22} coincide con P_3 por la forma de R (el eje medio queda alineado con el eje original asociado a P_3).
- Si $P_4 = 0$ (ausencia de esfuerzo tangencial entre ejes 1 y 3 en el sistema original) el término mixto $(1,2)$ en la nueva base también se anula, pero aparecen términos en $(1,3)$ y $(3,1)$ si $P_1 \neq P_2$.