Seccion 3.14

Estudainte: Juan Manuel Murillo
Materia: **Métodos matemáticos para Físicos 1**

Ejercicio 6. Bases recíprocas y productos (soluciones)

Las explicaciones son brebes y con algunas faltas de ortografía intencionales.

(a) **Fórmula para la base recíproca.**

Si $\{e_i\}_{i=1}^3$ es una base (dextrógira, no necesariamente ortogonal) buscamos $\{e^i\}$ tales que

$$e^i \cdot e_j = \delta^i{}_j.$$

Para índices cíclicos (i, j, k) se propone

$$\boxed{e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}}.$$

Verificación (rápida): usando la identidad del producto mixto

$$(e_j \times e_k) \cdot e_\ell = e_j \cdot (e_k \times e_\ell).$$

Si $\ell = i$ el numerador coincide con el denominador y da 1. Si $\ell \neq i$ el producto mixto con dos vectores repetidos se anula, por tanto $e^i \cdot e_\ell = 0$. Así obtenemos $e^i \cdot e_j = \delta^i{}_j$. $\square$

(b) **Relación entre los volúmenes V y $\widetilde{V}$.**

Definimos

$$V := e_1 \cdot (e_2 \times e_3), \qquad \widetilde{V} := e^1 \cdot (e^2 \times e^3).$$

Si A es la matriz cuyas columnas son e_1, e_2, e_3, entonces $V = \det A$. Las columnas de la matriz inversa transpuesta $(A^{-1})^T$ son precisamente e^1, e^2, e^3, de modo que

$$\widetilde{V} = \det\left((A^{-1})^T\right) = \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{V}.$$

Por tanto

$$\boxed{V\,\widetilde{V} = 1\,.} \qquad \blacksquare$$

(c) **¿Qué vector satisface $a \cdot e^i = 1$ para $i = 1, 2, 3$? Unicidad.**

Escribimos $a = \alpha^j e_j$ (coeficientes contravariantes respecto de la base $\{e_j\}$). Entonces

$$a \cdot e^i = \alpha^j (e_j \cdot e^i) = \alpha^j \delta_j{}^i = \alpha^i.$$

Exigiendo $a \cdot e^i = 1$ para cada i se tiene $\alpha^i = 1$ para $i = 1, 2, 3$. Por tanto

$$\boxed{a = e_1 + e_2 + e_3\,.}$$

La unicidad viene de que las ecuaciones lineales $\alpha^i = 1$ determinan de forma única los coeficientes α^i en la base $\{e_j\}$. $\square$

(d) **Base oblicua y componentes – cálculo explicito.**

Se da la base (en coordenadas cartesianas estándar $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$)

$$w_1 = 4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \qquad w_2 = 3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 0\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad w_3 = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}.$$

(i) Bases recíprocas $\{w^i\}$.

Formamos la matriz cuyas columnas son w_1, w_2, w_3:

$$W = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones $w^i \cdot w_j = \delta^i{}_j$ implican que la matriz cuyas columnas son w^i es $(W^{-1})^T$. Calculando la inversa obtenemos (componentes exactas):

$$\boxed{w^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(es decir $w^1 = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}$, etc). Comprobación directa: $w^i \cdot w_j = \delta^i{}_j$.

(ii) Componentes contravariantes y covariantes del vector

$$a = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}.$$

Contravariantes a^i (coeficientes en la expansión $a = a^i w_i$) se obtienen resolviendo

$$W \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La solución exacta es

$$\boxed{(a^1, a^2, a^3) = \Big(-\tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{7}{4} \Big).}$$

Covariantes a_i (componentes de la 1-forma asociada, o simplemente $a \cdot w_i$) se calculan como productos escalares con cada base w_i:

$$a_i = a \cdot w_i.$$

Calculando:

$$\boxed{(a_1, a_2, a_3) = (11,\ 9,\ 6).}$$

Ejercicio 7. Espacio de matrices hermíticas y base dual

Enunciado resumido: Considere otra vez el espacio vectorial de matrices hermíticas 2×2 con el producto interno

$$\langle A|B\rangle \;=\; \mathrm{Tr}(A^\dagger B).$$

Se sabe que las matrices de Pauli junto con la identidad

$$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \qquad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

forman una base de dicho espacio.

(a) Ortonormalidad relativa. Calculamos

$$\langle \sigma_\mu|\sigma_\nu\rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_\mu^\dagger \sigma_\nu) = \mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu).$$

Se conoce la identidad

$$\mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\,\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Por lo tanto la base no está ortonormalizada, sino ortogonal con norma $\sqrt{2}$.

(b) Base dual. La base dual $\{\sigma^\mu\}$ se define por

$$\langle \sigma^\mu|\sigma_\nu\rangle = \delta^\mu{}_\nu.$$

Para lograrlo basta dividir cada matriz de Pauli por 2:

$$\boxed{\sigma^\mu = \tfrac{1}{2}\,\sigma_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.}$$

En efecto,

$$\langle \tfrac{1}{2}\sigma_\mu|\sigma_\nu\rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

(c) 1-forma asociada a un vector genérico. Sea un elemento arbitrario del espacio

$$A = a^\mu \sigma_\mu, \qquad a^\mu \in \mathbb{R}.$$

La 1-forma asociada (es decir, su forma covariante) es

$$\tilde{A} = a_\mu\, \sigma^\mu,$$

con componentes

$$a_\mu = \langle A|\sigma_\mu\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger \sigma_\mu) = \mathrm{Tr}(A\sigma_\mu).$$

Usando la identidad de traza anterior:

$$a_\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A\sigma_\mu).$$

Resultado final:

$$\boxed{\sigma^\mu = \tfrac{1}{2}\sigma_\mu, \qquad a_\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A\sigma_\mu).}$$