

Informe Milestone 4:

1. Descripción general:

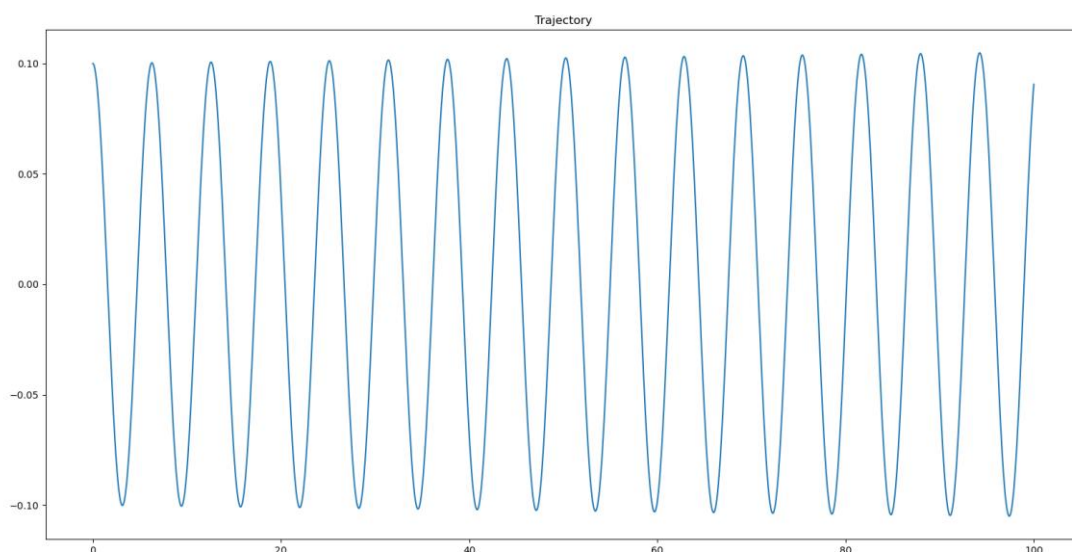
El hito 4 se centra en el estudio de la estabilidad de las soluciones obtenidas mediante métodos numéricos. Para ello, hace uso de las regiones de estabilidad absoluta de cada uno de los métodos vistos en clase. Estas regiones del plano complejo son aquellas en las que el radio módulo del radio espectral de la matriz A (matriz que establece relación entre derivadas y variables en sistemas lineales) es menor que la unidad. Cuando esto se cumple, al ser las soluciones de las ecuaciones diferenciales del tipo de r elevado a un valor que crece con el tiempo (el tiempo mismo o el punto de integración en el que nos encontremos), la solución quedará acotada. En caso contrario, la solución no estará acotada. Esto permite predecir cuando un esquema numérico presentará una solución estable y cuando no. Lo más importante de esta discusión es que el esquema numérico debe reproducir y adaptarse al comportamiento real del sistema. Para esta relación se utilizan los polinomios característicos de cada esquema numérico, que relacionan la variable r con una variable ω que, a su vez, será igual a los autovalores de la matriz A multiplicados por el paso de tiempo. Para el sistema real, se conoce que su solución estará acotada si sus autovalores tienen parte real menor o igual que 0. Por lo tanto, mediante las relaciones entre los autovalores de la matriz A , que pueden obtenerse fácilmente para el oscilador armónico y el paso de tiempo, podrá observarse la relación entre la solución del esquema numérico y el comportamiento real.

2. Problema del oscilador armónico

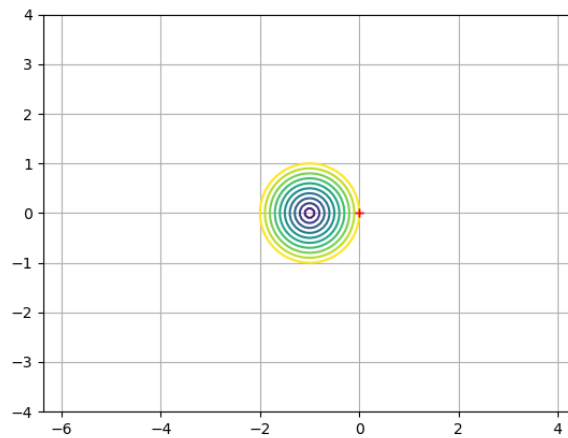
El oscilador armónico es un sistema lineal sencillo en el que la matriz A es fácil de obtener, igual que sus autovalores. Estos autovalores son $+i$ y $-i$. Se sabe que el sistema real tiene solución acotada cuando no está forzado (existe solución analítica que así lo demuestra), por lo que el análisis que se realiza a continuación tiene como objetivo conseguir soluciones estables. En las siguientes secciones se muestran los resultados obtenidos para los distintos métodos. Para una primera iteración se ha escogido un paso de tiempo de $dt=0.001$.

3. Euler

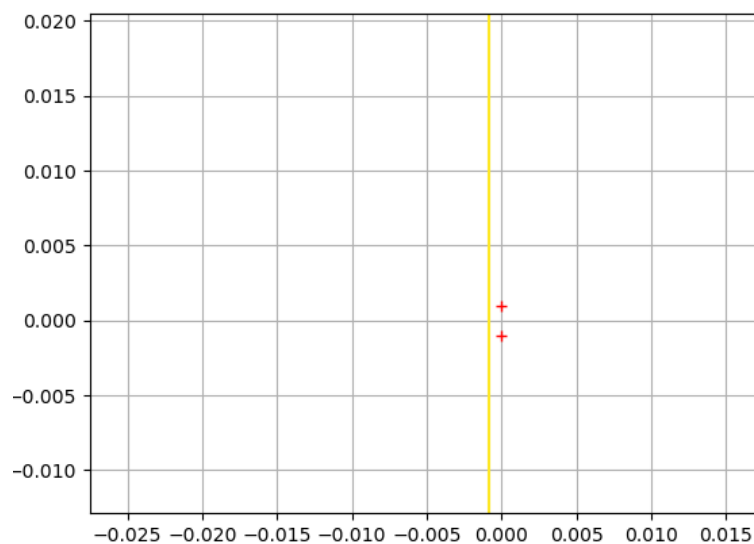
La solución obtenida numéricamente es la siguiente (mostrando x en función del tiempo):



Lo que parece un comportamiento estable, incluso analizado para escalas pequeñas. A continuación se muestra la posición de los dos valores de omega (para los dos autovalores de A) respecto a la región de estabilidad absoluta del sistema.



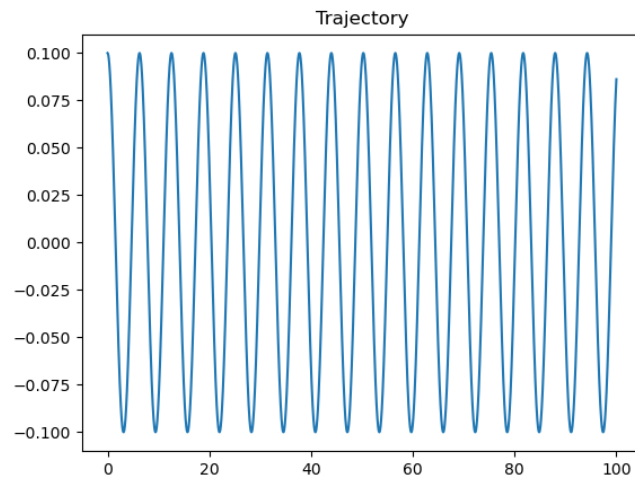
A simple vista podría parecer que los omegas están dentro de la región de estabilidad, aunque:



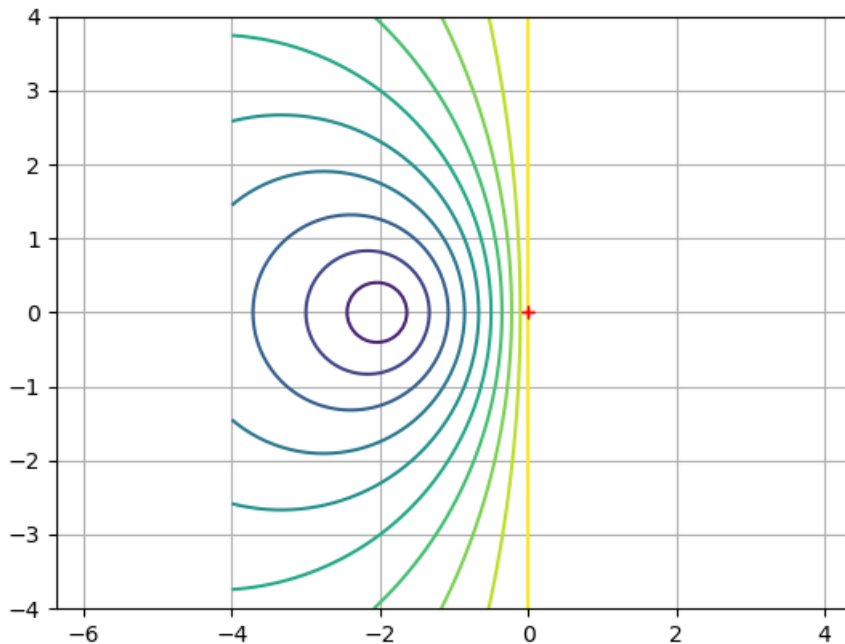
Análisis más detallados muestran que no lo están, lo que hará que la solución numérica obtenida no sea estable. La región de estabilidad absoluta del método de Euler es una circunferencia centrada en el punto $(-1,0)$ y de radio unidad, por lo que al estar los omegas sobre el eje imaginario sin posibilidad de llegar al origen (equivaldría a Δt nulo), esto podía saberse de antemano. Por lo tanto, el esquema Euler no debería ser utilizado para este problema.

4. Crank Nicolson

La solución obtenida es:



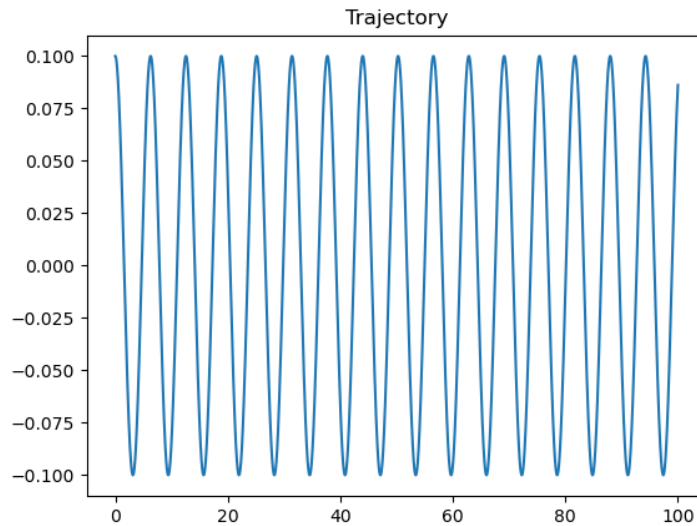
La solución también parece estable. Estudiando la región de estabilidad:



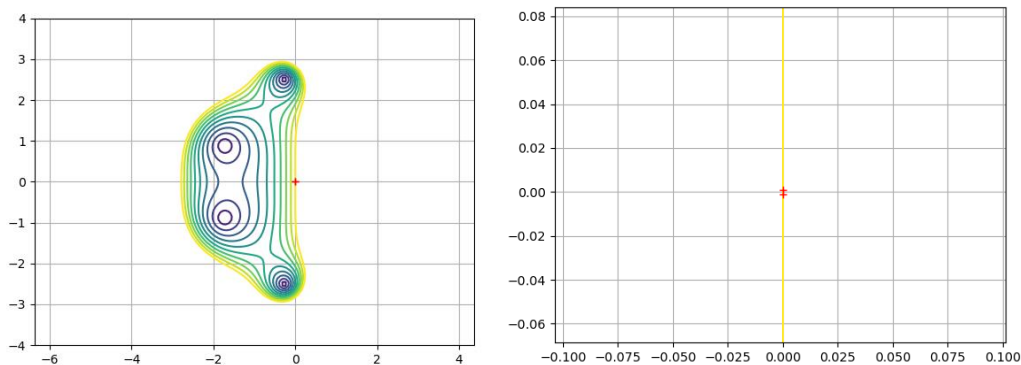
Se observa que la región de estabilidad es el semiplano real negativo, lo que coincide con el criterio de estabilidad para los sistemas reales. Por lo tanto, se ve que el esquema Crank Nicolson siempre reproduce de manera correcta el comportamiento del sistema. En este caso, al estar los autovalores sobre el eje imaginario, las soluciones obtenidas serán órbitas, de las cuales el sistema (y también la solución numérica) podrían verse obligados a salir al introducir perturbaciones.

5. Runge-Kutta de Orden 4

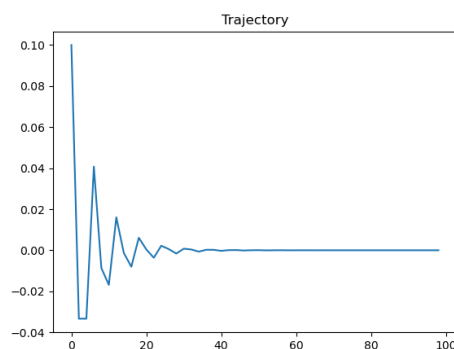
La solución obtenida es:



Que de nuevo parece estable. La siguiente imagen muestra la región de estabilidad y los omegas del problema:

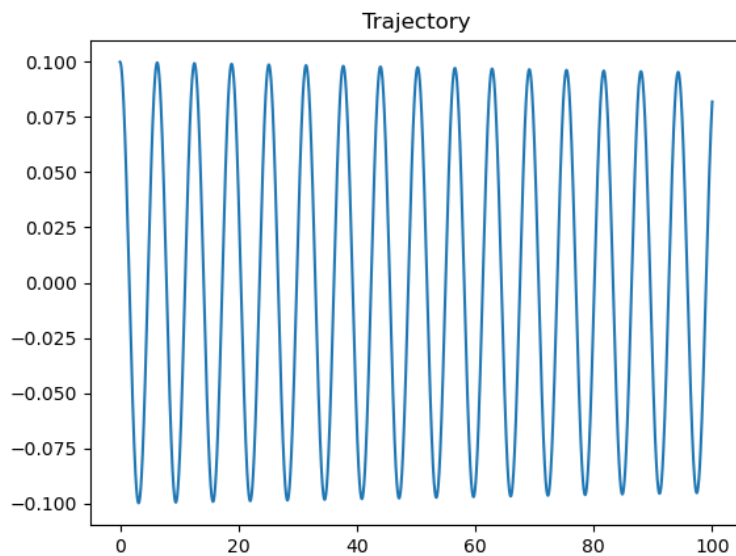


Se observa que los valores de omega se encuentran justo sobre la frontera de la región de estabilidad absoluta del Runge Kutta. Este esquema muestra una región de estabilidad peculiar, con dos lóbulos en su parte superior que penetran parcialmente en el semiplano real positivo. En este caso, a pesar de que el actual paso de tiempo garantizaría estabilidad al encontrarse sobre la frontera, podría modificarse el valor del paso de tiempo para conseguir que los valores de omega estuvieran situados dentro totalmente de la región de estabilidad absoluta, lo que garantizaría completamente la estabilidad de la solución numérica, a priori. Sin embargo, estos valores deberían ser próximos a dos, lo que supone un paso de tiempo excesivamente grande y que no permitiría obtener soluciones próximas a la real, como se ve en la figura:

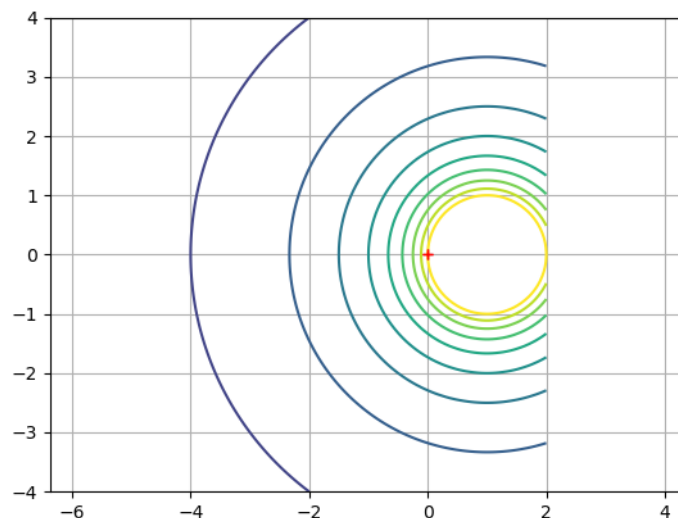


6. Euler Inverso

La solución obtenida es la siguiente:



Estudiando la región de estabilidad absoluta:



Se observa que dicha región, para el Euler Inverso, contiene todo el plano complejo salvo la esfera de radio unidad centrada en el punto $(1,0)$. Al estar los omegas de este problema situados sobre el eje imaginario, que está en su totalidad dentro de la región de estabilidad absoluta, la solución numérica será estable, al igual que el sistema real.

7. Conclusiones

Gracias a este hito resulta mucho más sencilla la comprensión de las regiones de estabilidad absoluta y la relación entre la estabilidad de las soluciones numéricas y el paso de tiempo utilizado para las mismas. Asimismo, se pone de manifiesto la importancia de poner en contexto los resultados de los esquemas numéricos. Estos, como se ha explicado antes, deben reproducir de manera fehaciente el comportamiento del sistema real.

Mediante este hito se puede actuar sobre la resolución numérica de un sistema sencilla para que esta se asemeje al comportamiento real.