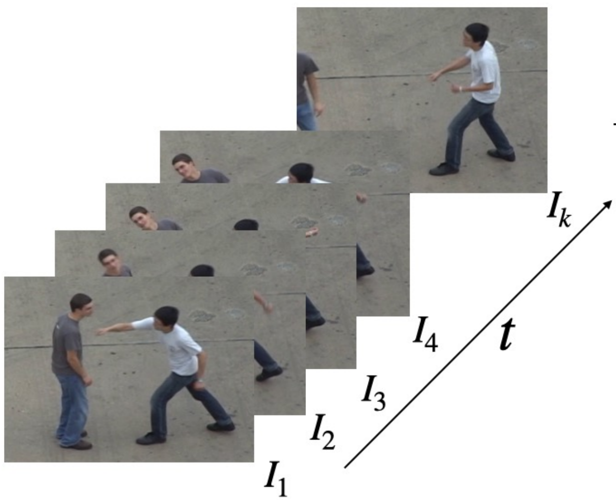
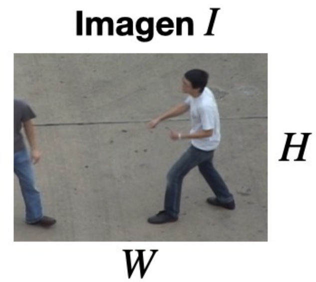
# 1. SPD geometry

## 1-1 Covariance matrix

# Covariance matrix




$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} & F_2^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ & & F_M^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_1^{(2)} & F_2^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ & & F_M^{(2)} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} F_1^{(N)} & F_2^{(N)} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ & & F_M^{(N)} \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} = \left(F_1^{(1)}, \ldots, F_M^{(1)}\right)^T \quad F^{(2)} = \left(F_1^{(2)}, \ldots, F_M^{(2)}\right)^T \quad F^{(N)} = \left(F_1^{(N)}, \ldots, F_M^{(N)}\right)^T$$

Covarianza entre las características $i, j$ de la imagen $I$ será:

$$C_{i,j}(I) = \frac{1}{M-1} \sum_{\ell=1}^{M} \left(F_\ell^{(i)} - m_i\right) \left(F_\ell^{(j)} - m_j\right)$$

Y la **matriz de covarianza** que describe la imagen $I$ se define como:

$$C_I = [C_{ij}]_{i=1,j=1}^{N,N}$$

# Covariance matrix

$A$ matriz de covarianza $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ **es semidefinida positiva** $(\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{S}_{+}^{n})$

### Matriz Simétrica

Matriz cuadrada $A$ de dimensión $n$ es **simétrica** si $A = A^T$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1,2,\ldots,n$.

### Matriz semidefinida positiva

Una matriz cuadrada $A$ de dimensión $n$ es **semidefinida positiva** si

•Para todo $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo se tiene que $v^T A v \geq 0$.

# Diagonalización y Propiedades

$\boldsymbol{A}$ es **Matriz diagonalizable** $\Leftrightarrow$ Se puede descomponer

$$\boldsymbol{A = Z\,D\,Z^{-1}}$$

donde $\boldsymbol{D = diag(\lambda_i)}$ es una matriz diagonal con los **autovalores de** $\boldsymbol{A}$, y las **columnas de** $\boldsymbol{Z}$ son los respectivos **autovectores**.

$$A \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \boldsymbol{A = \mathbf{Z\,D\,Z^T}}$$

$$\boldsymbol{A \in S^n_+ \rightarrow \forall\ autovalor\ \lambda_i, \lambda_i \geq 0}$$

$$\boldsymbol{A \in S^n_{++} \rightarrow \forall\ autovalor\ \lambda_i, \lambda_i > 0}$$

**?**

$$S^n_+ \xrightarrow{\textbf{Regularización}} S^n_{++}$$

# Regularización

*Si* $v, \lambda$ *son el autovector y el autovalor respectivamente de una matriz* $A$ *entonces* $v, \lambda + \alpha$ *son el autovector y el autovalor de la matriz* $A + diag(\alpha)$

*Demostración.* Se tiene por hipótesis que $Av = \lambda v$, entonces

$$\begin{aligned}(A + diag(\alpha))v &= (A + \alpha I)v \\ &= Av + \alpha v \\ &= \lambda v + \alpha v \\ &= (\lambda + \alpha)v,\end{aligned}$$

**Basta con sumar una matriz diagonal**

Recomendación: $\alpha \approx 1 \times 10^{-9}$

[Sección 5.2 TesisJO]

## Investigar sobre:

**Shrinkage regularization.**

**Algunas refs:**

https://scikit-learn.org/stable/modules/covariance.html - shrunk-covariance

Libraría PyRiemann

Pag. 14 CovsCVML

**Y que es $S_{++}^{n}$?**

[Sección 2 TesisJO]

# Preliminares Geom. Riemanniana

**Espacio topológico:**

Es una pareja $(X, \mathrm{T})$, conjunto $X$ y una colección de subconjuntos de $X$

- $\emptyset \in \mathrm{T}$, $X \subset \mathrm{T}$.
- Intersección de numero finito de conjuntos en $T$ está en $T$.
- Unión arbitraria de conjuntos en $T$ está en $T$.

**Ejs:**
- Todo espacio métrico. (Euclideano con dist. Ind. Norma)
- Topología discreta.
- Espacio matrices cuadradas es topologia? Cual distancia?

Para que sirve la topología? ir

For $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a straightforward and commonly used distance between $A$ and $B$ is the Euclidean distance, which is also called the Frobenius distance, defined by

$$d_E(A, B) = ||A - B||_F. \tag{2.1}$$

Here $||\ ||_F$ denotes the Frobenius norm, which is defined by

$$||A||_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n. \tag{2.2}$$

The Frobenius norm is associated with the Frobenius inner product

$$\langle A, B\rangle_F = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, B = (b_{ij})_{i,j=1}^n. \tag{2.3}$$

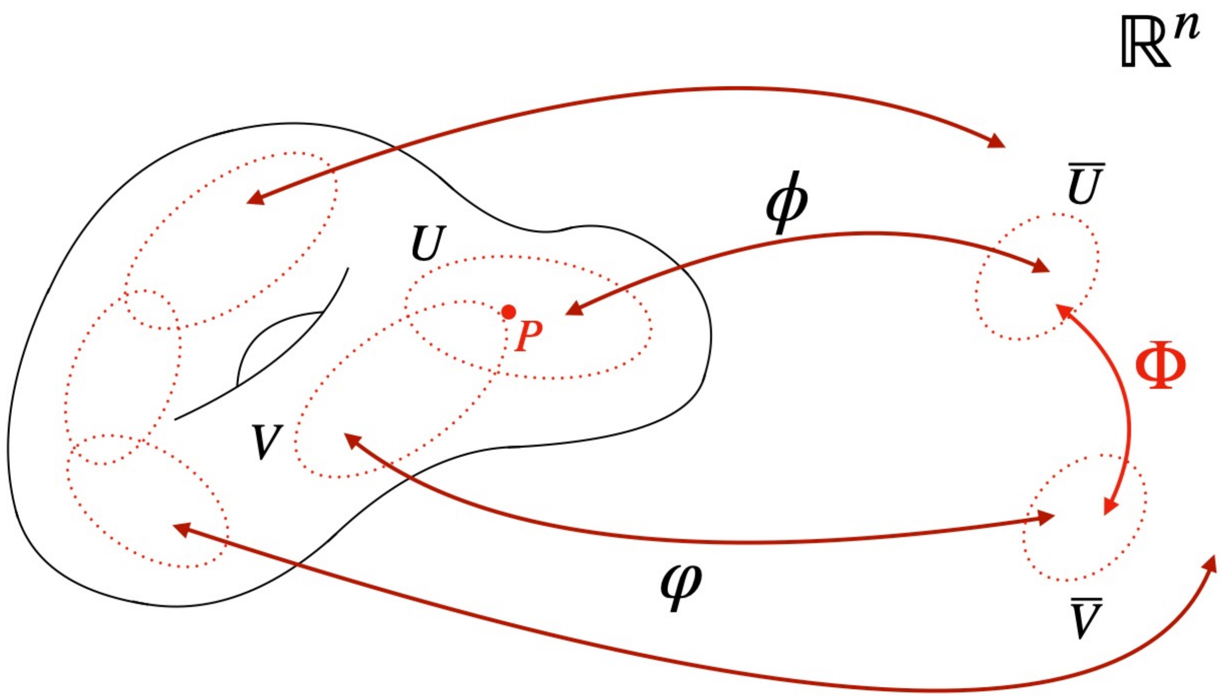
# Preliminares Geom. Riemanniana

**Espacio localmente euclidiano de dimensión n**

Espacio Topológico $\mathscr{M}$ tal que para cada $p \in \mathscr{M}$ existe un abierto $U \subseteq \mathscr{M}$ con $p \in U$ y un homeomorfismo $\phi : U \subseteq \mathscr{M} \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

**Variedad topológica de dimensión $n$**

Es un espacio topológico que es localmente euclidiano de dimensión n, Hausdorff y 2-numerable.



# Preliminares Geom. Riemanniana

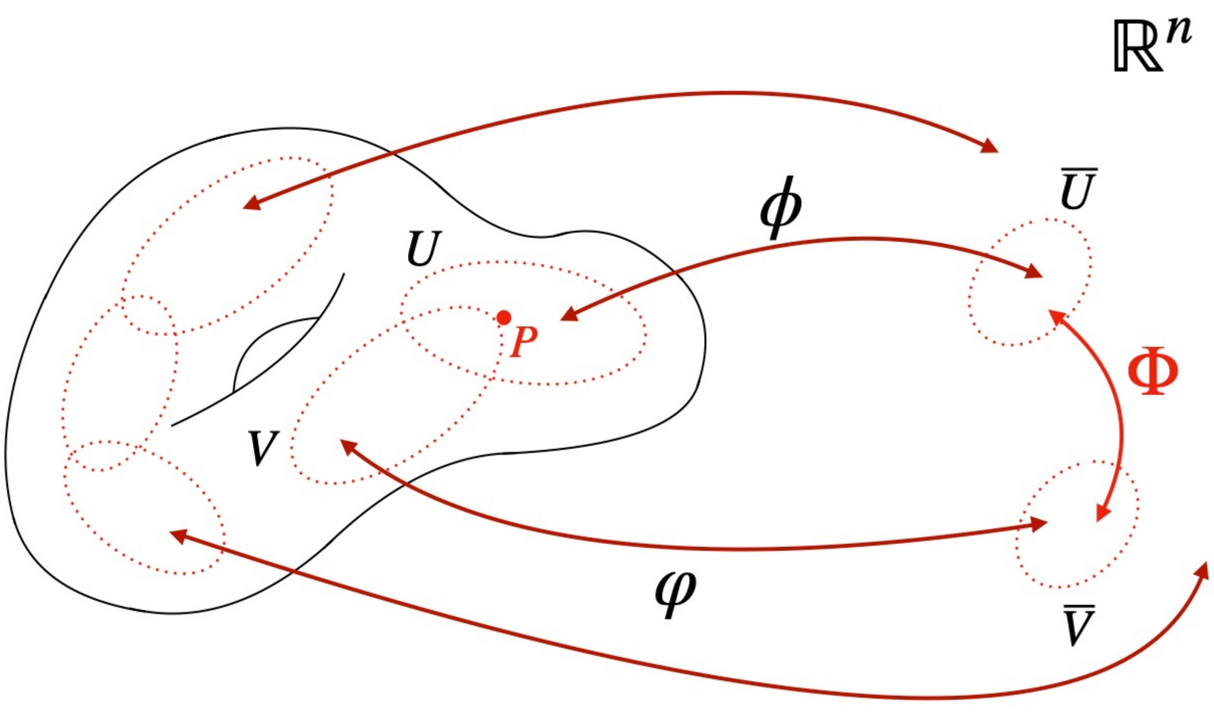
### Carta

Dado un espacio topológico $\mathscr{M}$, una carta es una pareja $(U, \phi)$ donde $U$ es un abierto y $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

### Función de transición

Es la composición $\Phi := \phi \circ \varphi^{-1}$ donde $(U, \phi)$ y $(V, \varphi)$ son cartas con $U \cap V \neq \varnothing$.

Dos cartas **son diferencialmente compatibles** si $\Phi$ es un difeomorfismo.

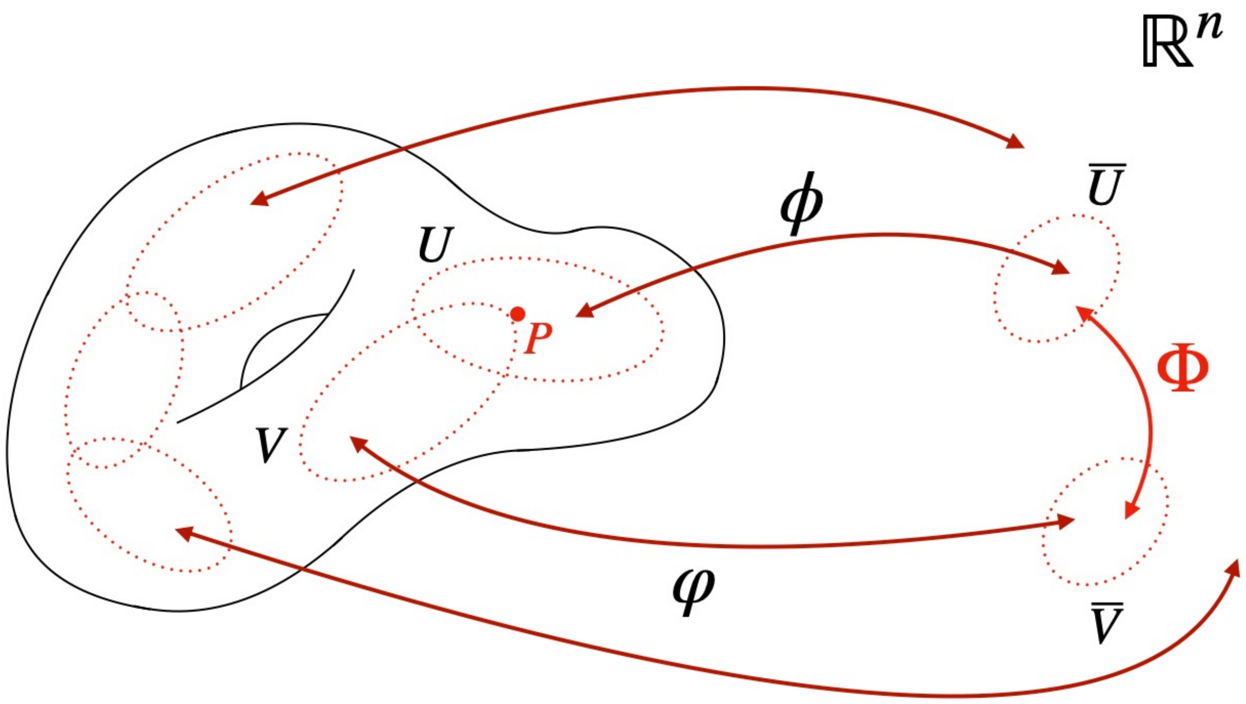


# Preliminares Geom. Riemanniana

**Atas**

Es la colección de cartas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tales que $\mathscr{M} = \cup_{i \in I} U_i$.

Es un **atlas diferenciable** si sus funciones de transición son diferencialmente compatibles.



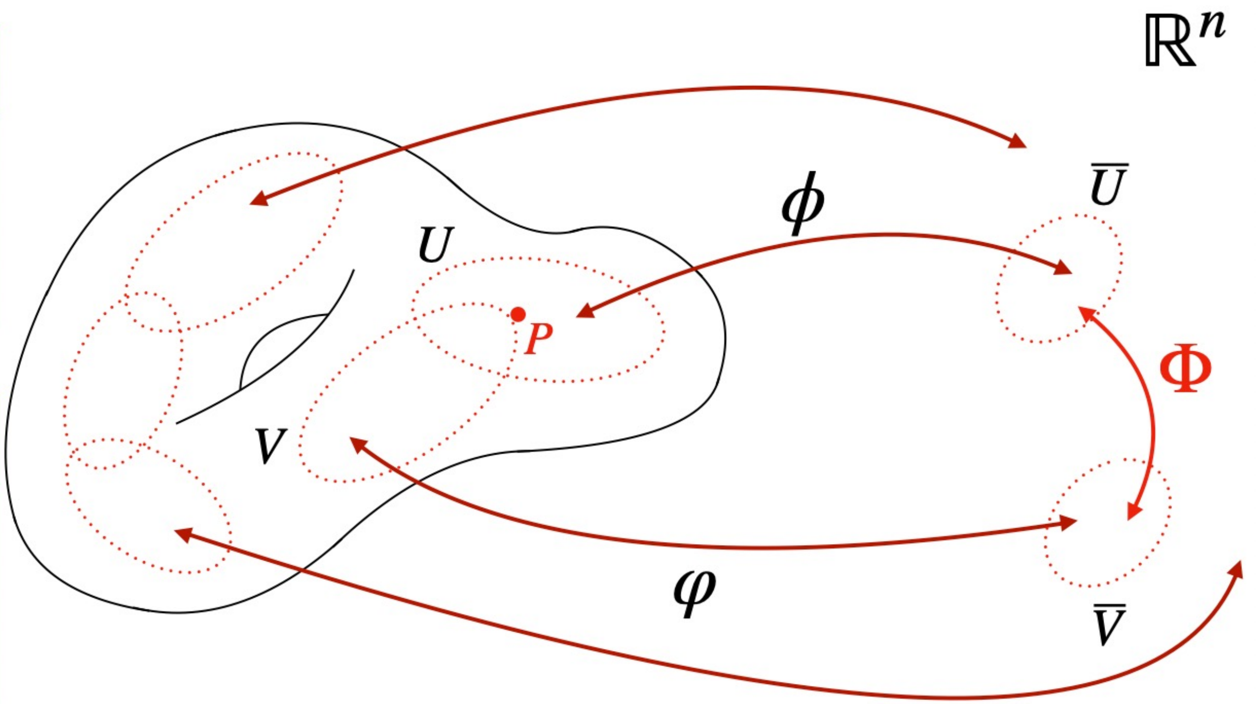
# Preliminares Geom. Riemanniana

**Estructura diferenciable**

Dada una variedad topológica de dimensión $n$ una estructura diferenciable es un atlas diferenciable maximal.

**Variedad diferenciable**

Es la pareja $(\mathscr{M}, A)$ donde $\mathscr{M}$ es una variedad topológica de dimensión $n$ y $A$ es una estructura diferenciable de $\mathscr{M}$.



# Preliminares Geom. Riemanniana

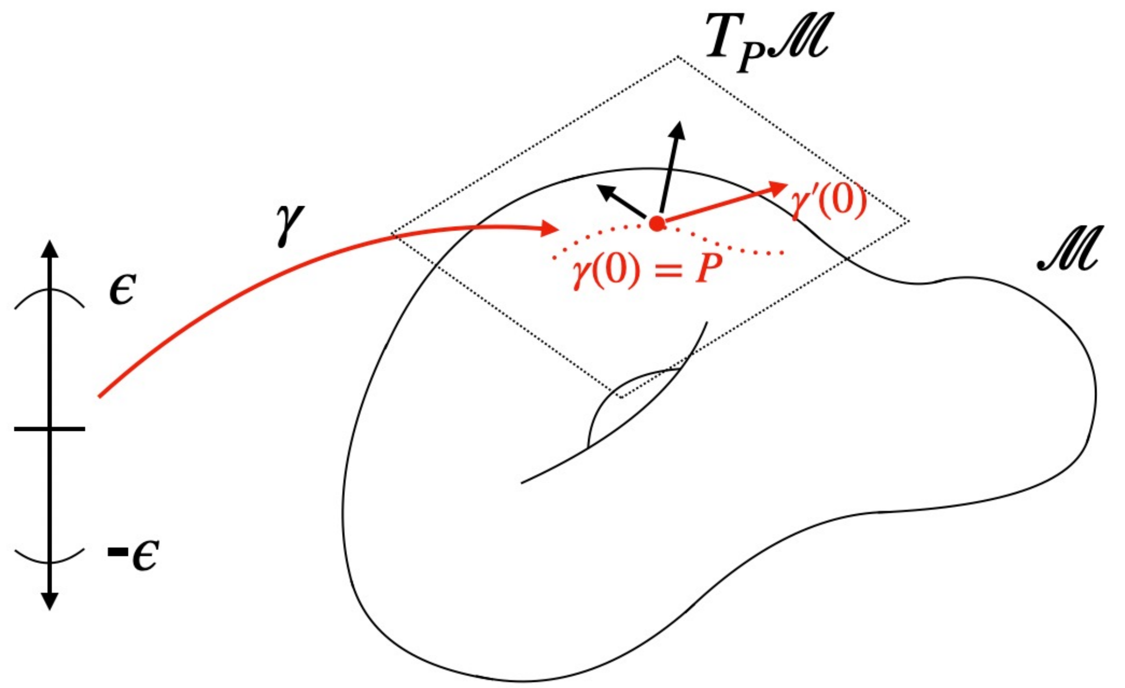
**Vector tangente**

Una **curva diferenciable** es una función $\gamma : (\epsilon, -\epsilon) \to \mathscr{M}$.

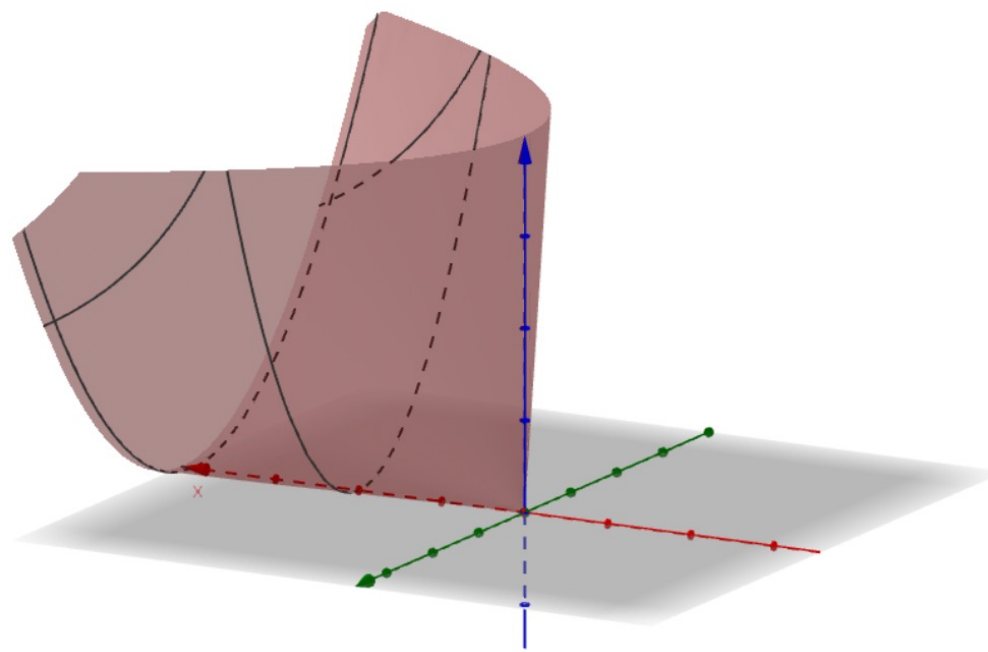
Un vector tangente es el vector $\gamma'(0)$ tal que $\gamma(0) = P$.

**Plano tangente en $P$**

Conjunto de los vectores tangentes en $P$.



# Variedad de las matrices SPD



**Teorema**

- $S^n_{++}$ es una variedad diferenciable.
- $T_P S^n_{++} = S^n$
- $S^n_{++}$ es un cono convexo.

# Variedad de Riemann

### Métrica Riemanniana

Una **métrica Riemanniana** es una familia de productos internos $\{\langle\ ,\ \rangle_P\}_{P \in S^n_{++}}$ sobre los respectivos planos tangentes $T_P S^n_{++}$ .

### Distancia Riemanniana

Una **distancia Riemanniana** entre dos puntos $A, B \in \mathscr{M}$ inducida por una métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle_P$ se define como

$$d_r(A, B) = \inf \left\{ L(\gamma) \,|\, \gamma : [a, b] \to \mathscr{M},\ \gamma(a) = A, \gamma(b) = B \right\},$$

donde $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b ||\dot{\gamma}_V(t)||_{\gamma_V(t)} dt.$

### Variedad de Riemann

Una **variedad de Riemann** es una variedad diferenciable equipada de una métrica Riemanniana.

### Teorema

Con esta distancia se tiene que $\left(\mathscr{M}, d_r\right)$ es un espacio métrico.

# Geodésica

**Geodésica**

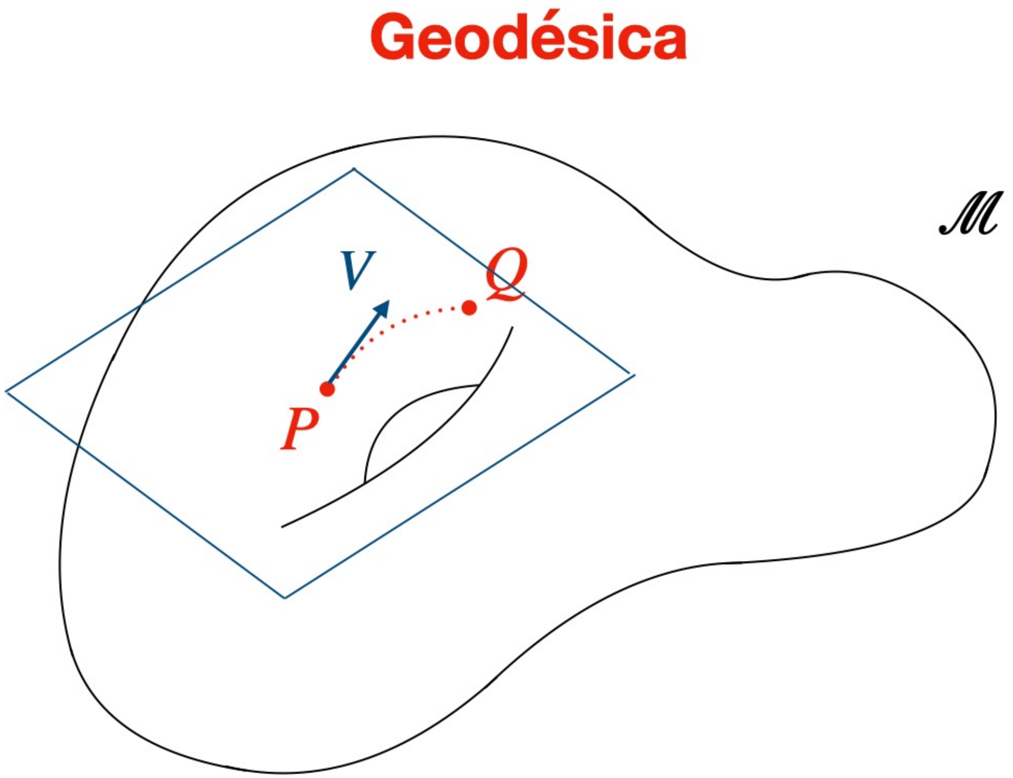
Curva mas corta entre dos puntos, cumple que

$$\frac{d}{dt}||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} = 0.$$

**Geodésica en dirección de un vector**

Dado $V \in T_P\mathscr{M}$, existe una **única geodésica** $\gamma_V(t)$ en dirección de $V$. Sea

$$V_P = \left\{V \in T_P\mathscr{M} : \gamma_V \text{ bien definida } [0,1]\right\}$$



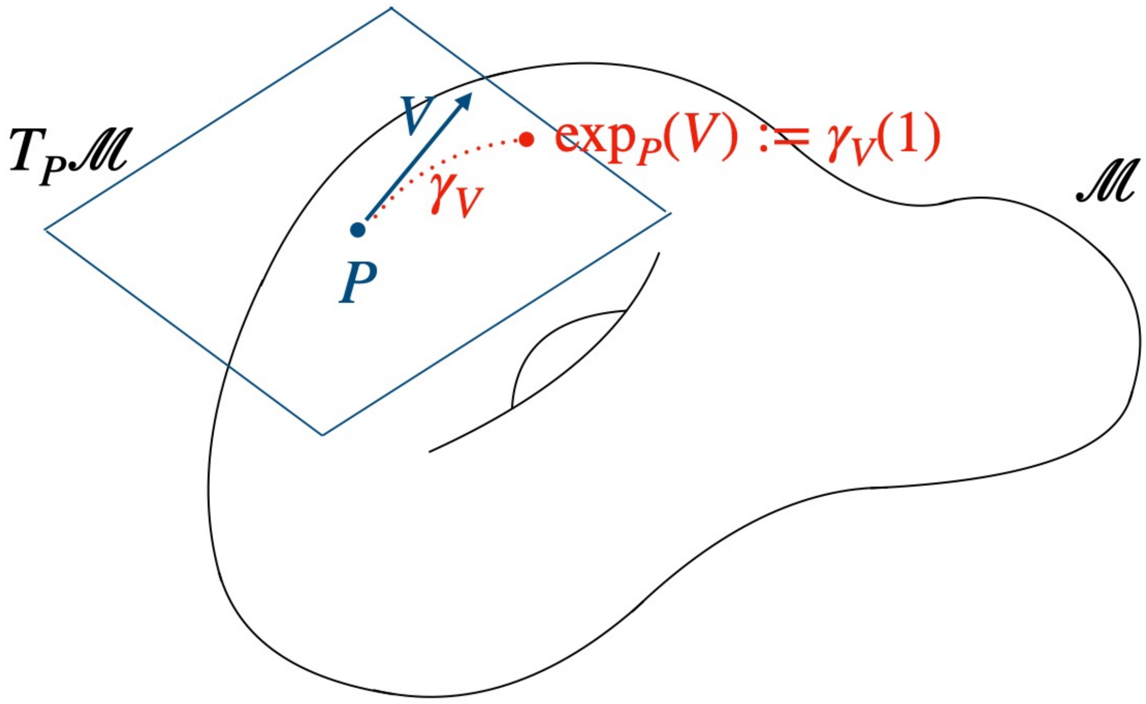
# Función exponencial

## Función exponencial

Dado $V \in T_P\mathscr{M}$, se define la exponencial $\exp_P : V_P \to \mathscr{M}$ como $\exp_P(V) = \gamma_V(1)$, donde

## Variedad geodésicamente completa

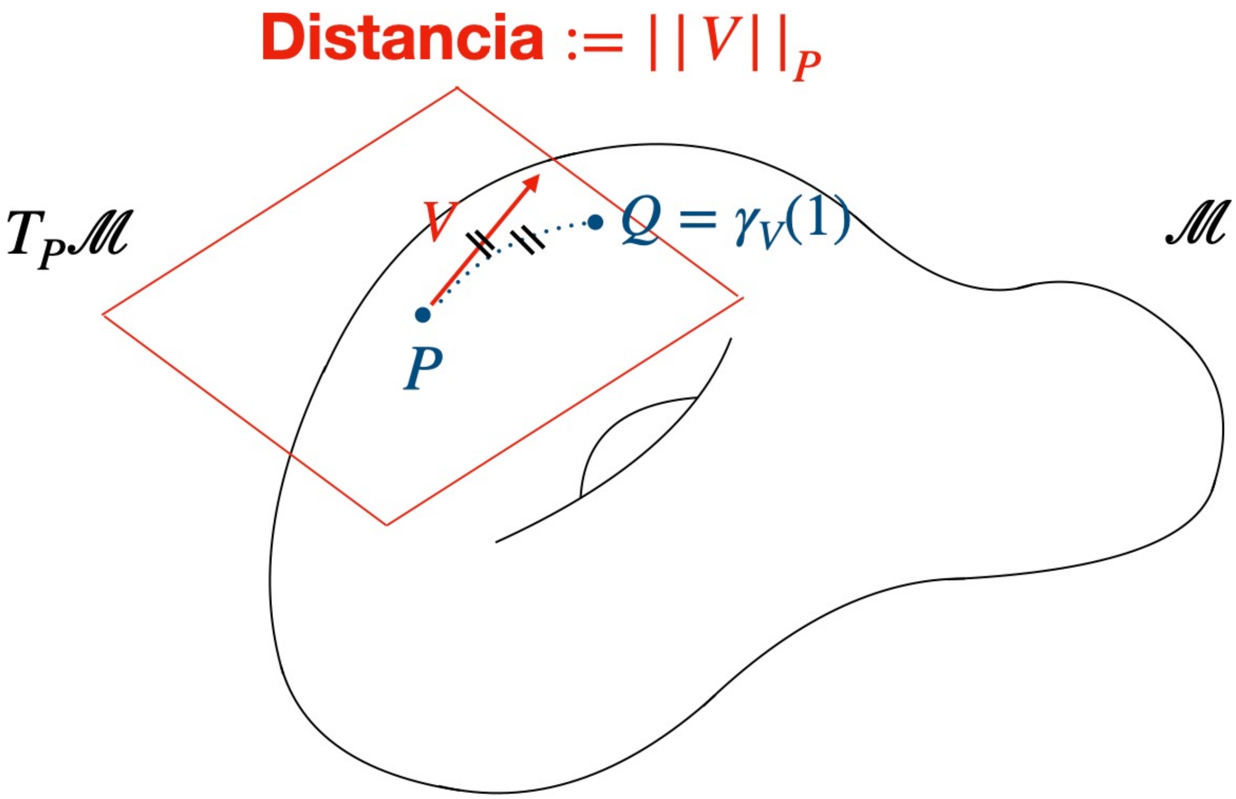
- $\exp_P$ está bien definida en $T_P\mathscr{M}$
- Las geodésicas se extienden infinitamente y su longitud coincide con $d_r$.



# Definiciones preliminares.

**Distancia de una geodésica**

$$L(\gamma_V) = \int_0^1 ||\dot{\gamma}_V(t)||_{\gamma_V(t)} dt$$
$$= ||V||_P$$



## Teorema (Hopf-Rinow)

$(\mathscr{M}, d_r)$ es un espacio métrico. $\equiv$ Todo cerrado y acotado de $\mathscr{M}$ es compacto. $\equiv$ $\mathscr{M}$ es geodésicamente completo.

**Observación:** En toda variedad que cumpla lo anterior, todo par de puntos se puede unir por una geodésica de longitud $||V||_P$

## Simplemente conexo

Si el conjunto es conexo por caminos y todo lazo es reducible a un punto.

## Teorema (Cartan-Hadamard)

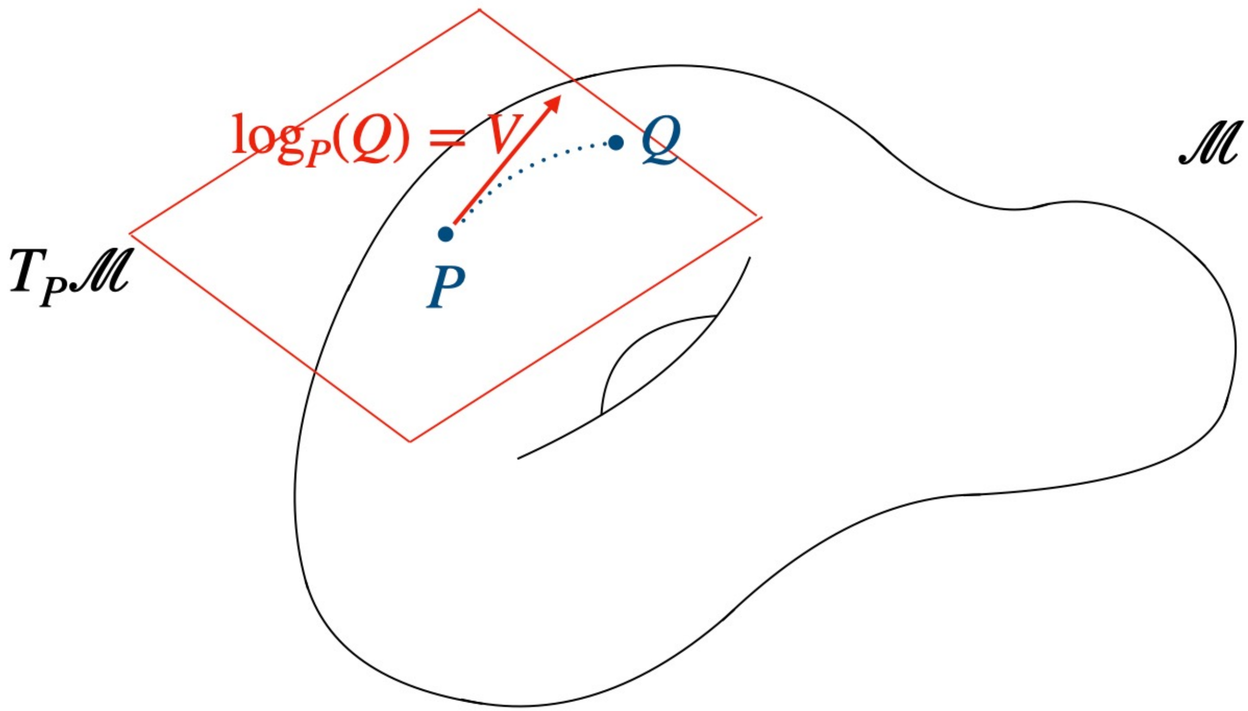
Sea $\mathscr{M}$ geodésicamente completa con curvatura seccional **no-positiva.** Si $\mathscr{M}$ es simplemente conexa, $exp_P$ es un difeomorfismo global.

**Consecuencia:** Para toda variedad que cumpla lo anterior, cualesquiera $P, Q \in \mathscr{M}$ se pueden unir por una **única** geodésica.

## Función logaritmo

El difeomorfismo global permite definir esta función como la inversa de la función exponencial.

$$\log_P(Q) := (\exp_P(V))^{-1} = V$$



# Geometría de las matrices SPD.

## Métrica Riemanniana afín-invariante

La **métrica Riemanniana afín-invariante** sobre $T_P S^n_{++}$ se define como

$$\langle A, B\rangle_P = \langle P^{-\frac{1}{2}} A P^{-\frac{1}{2}}, P^{-\frac{1}{2}} B P^{-\frac{1}{2}}\rangle_F$$

De forma que para $A \in S^n_{++}$

$$||A||_P = ||P^{-\frac{1}{2}} A P^{-\frac{1}{2}}||_F$$

## Teorema

$S^n_{++}$ es:

- Una variedad de Riemann.
- Una variedad de Cartan-Hadamard.

**Consecuencia:** Todo par $P, Q \in \mathscr{M}$ se puede unir por una **única** geodésica de longitud $||V||_P = ||\log_P(Q)||_P$.