

6.2. Nivel Avanzado

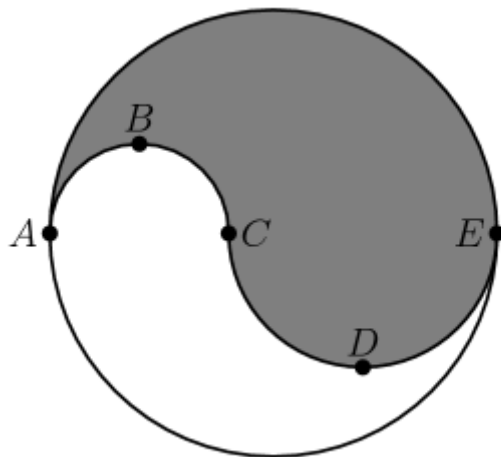
Tiempo mínimo: 2 horas y 30 minutos.

Tiempo máximo: 4 horas.

Procedimientos: Cada problema debe estar resuelto por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución deben estar bien explicados. Se le brindarán unas hojas grapadas, en la *parte de enfrente* de cada hoja debe estar la solución de los problemas, la *parte posterior* no se leerá pero las operaciones y cálculos deben hacerlos allí.

Puntaje: Cada problema vale 50 puntos, son 5, para un total de 250 puntos.

1. (50 puntos). Cuántos números entre -1000 y 1000 dejan residuo 5 al dividirlos por 9? (Recuerde que residuo es el resto que queda al hacer una división, por ejemplo -7 deja residuo 3 al ser dividido por 5, porque $-7 = 5 \times (-2) + 3$.)
2. (50 puntos). En la figura 2 los vértices A, C y E están sobre el diámetro del círculo y el vértice C divide al segmento AE a razón de $2 : 3$. Los dos semicírculos, ABC y CDE , dividen al círculo en una región superior (sombreada) y una región inferior. Cuál es la razón entre el área de la región superior y la de la región inferior.



3. (50 puntos). Sea $k = 2008^2 + 2^{2008}$. ¿Cuál es el dígito de las unidades de $k^2 + 2^k$?
4. Sea $f(x)$ la función $f(x) = 3x + 10$.
 - a) (5 puntos). Calcular $f(2)$.
 - b) (10 puntos). Calcular $f(f(3))$.
 - c) (35 puntos). Para que valores de x se cumple que $f(f(x)) = x$?
5. (50 puntos). En total, en el club matemático de bachillerato hay 7 mujeres y 5 hombres. Necesito elegir un equipo con 5 personas para que participe de una prueba por equipos. De cuántas maneras diferentes puedo seleccionar el equipo
 - a) (10 puntos). si no hay ninguna restricción para elegir los participantes del equipo?

- b) (15 puntos). si tienen que haber 2 mujeres y 3 hombres en el equipo?
- c) (25 puntos). si tienen que haber mas mujeres que hombres en el equipo?
6. **PLUS (50 puntos)**. En la figura 6.1, $\overline{BC} \parallel \overline{UR}$, $\overline{PS} \parallel \overline{BA}$ y $\overline{TQ} \parallel \overline{AC}$. Probar que

$$\frac{PQ}{BC} + \frac{RS}{CA} + \frac{TU}{AB} = 1$$

