1.3. Nivel Avanzado

Esta prueba es la ronda Final de OMAPA 2012, Nivel 3, Grados 10 y 11.

Tiempo mínimo: 2 horas y 30 minutos.
Tiempo máximo: 4 horas.
Procedimientos: Cada problema debe estar resuelto por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución deben estar bien explicados. Se le brindarán unas hojas grapadas, en la *parte de enfrente* de cada hoja debe estar la solución de los problemas, la *parte posterior* no se leerá pero las operaciones y cálculos deben hacerlos allí.
Puntaje: Cada problema vale 50 puntos, son 5, para un total de 250 puntos.

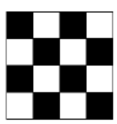
Problema 1

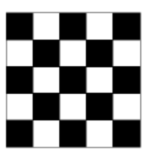
Se tiene una lista de números que cumple con las condiciones siguientes:

- El primer número de la lista es un número natural de una cifra.
- Cada número de la lista (a partir del segundo) se obtiene sumando 9 al número anterior.
- El número 2 012 figura en la lista.

Determinar cuál es el primer número de la lista.

Problema 2


Tablero 4 × 4


Tablero 5 × 5

La Hormiguita Viajera camina sobre varios tableros cuadriculados en blanco y negro, moviéndose horizontalmente o verticalmente, pero sin pasar dos o más veces por la misma casilla.

a) Si el tablero es de 4×4, ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

b) Si el tablero es de 5×5, ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

c) Si el tablero es de $n \times n$ (donde n es cualquier número natural), ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

Problema 3

Se inscribe un triángulo ABC (recto en B) en una semicircunferencia de diámetro AC = 10. Calcular la distancia del vértice B al lado AC, si la mediana correspondiente al lado AC es media geométrica de los otros dos lados. (Recuerda que si $\frac{m}{n} = \frac{n}{q}$, n es media geométrica de m y q)

Problema 4

Hallar el número de cuatro cifras diferentes de la forma $\overline{abcd}$, sabiendo que es divisible por 3 y que $\overline{ab} - \overline{cd} = 11$.
($\overline{abcd}$ es un número de 4 dígitos, con los 4 dígitos diferentes; $\overline{ab}$ es un número de 2 dígitos con los 2 dígitos diferentes, lo mismo que $\overline{cd}$)

Problema 5

En un triángulo equilátero ABC se elige un punto cualquiera Q sobre BC. Se traza la circunferencia circunscripta al triángulo y se prolonga AQ hasta cortar en P a la circunferencia.

Demostrar que $\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}$