Simulación computacional

PhD Jorge Rudas

INFOTEP
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

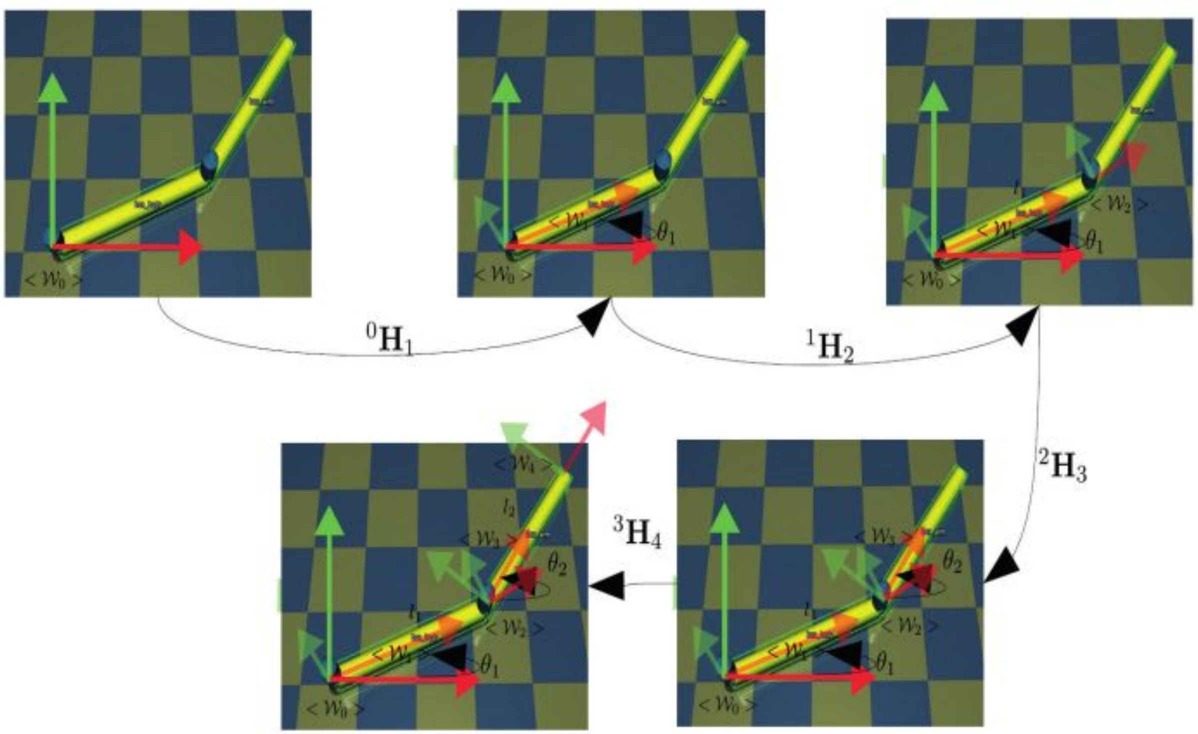
Cinemática directa de robots

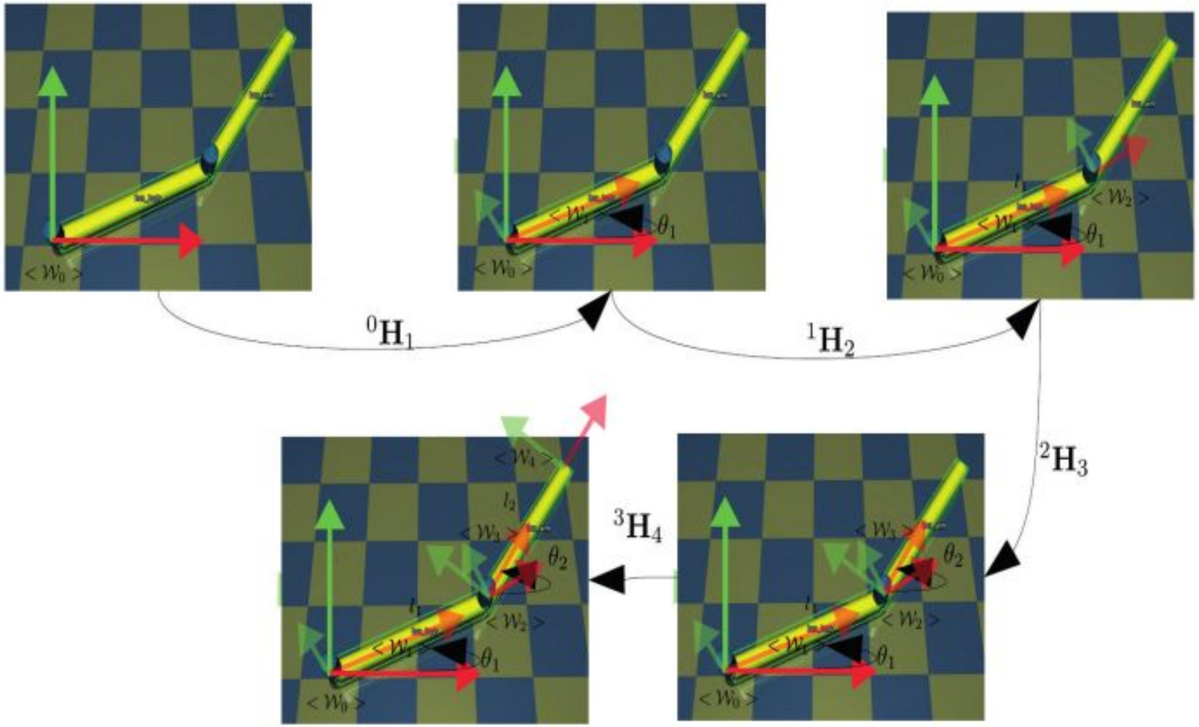
- La cinemática de un robot permite estudiar el movimiento de un punto o sistema de interés respecto a un sistema de referencia

- Debido a que un robot puede considerarse como una cadena cinemática formada por eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, es posible situar un sistema de referencia en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones respecto a la base. Por lo tanto, el problema de la cinemática directa se reduce a encontrar las matrices de transformación homogéneas en función de las articulaciones que relacionan la posición del extremo operativo respecto a un sistema fijo.

Manipulador robótico planar

- Robot con 2 grados de libertad que se mueve solo en el plano *x - y*



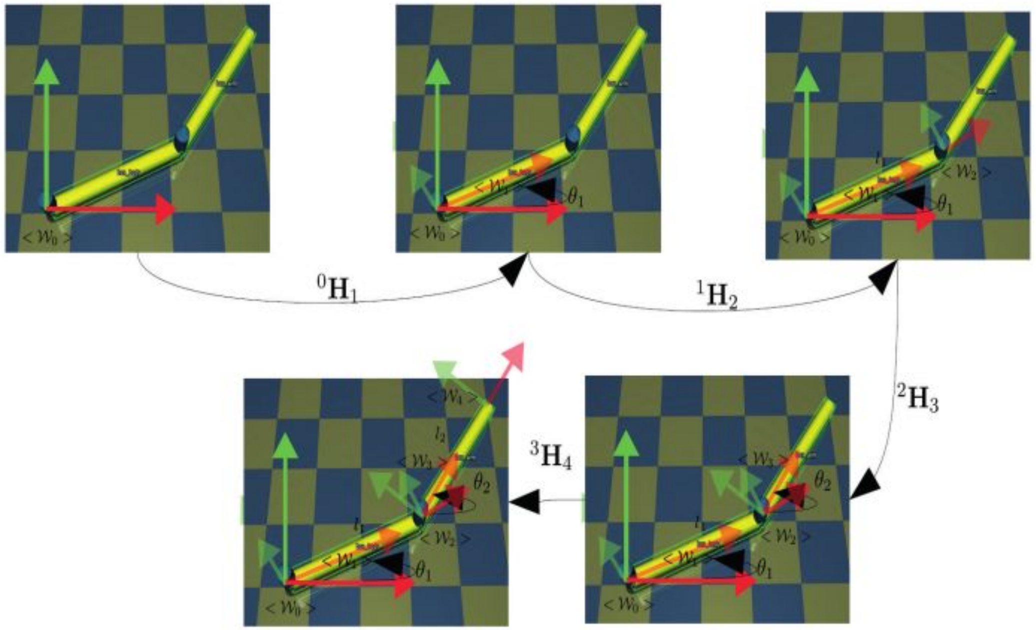


$$
{}^{0}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

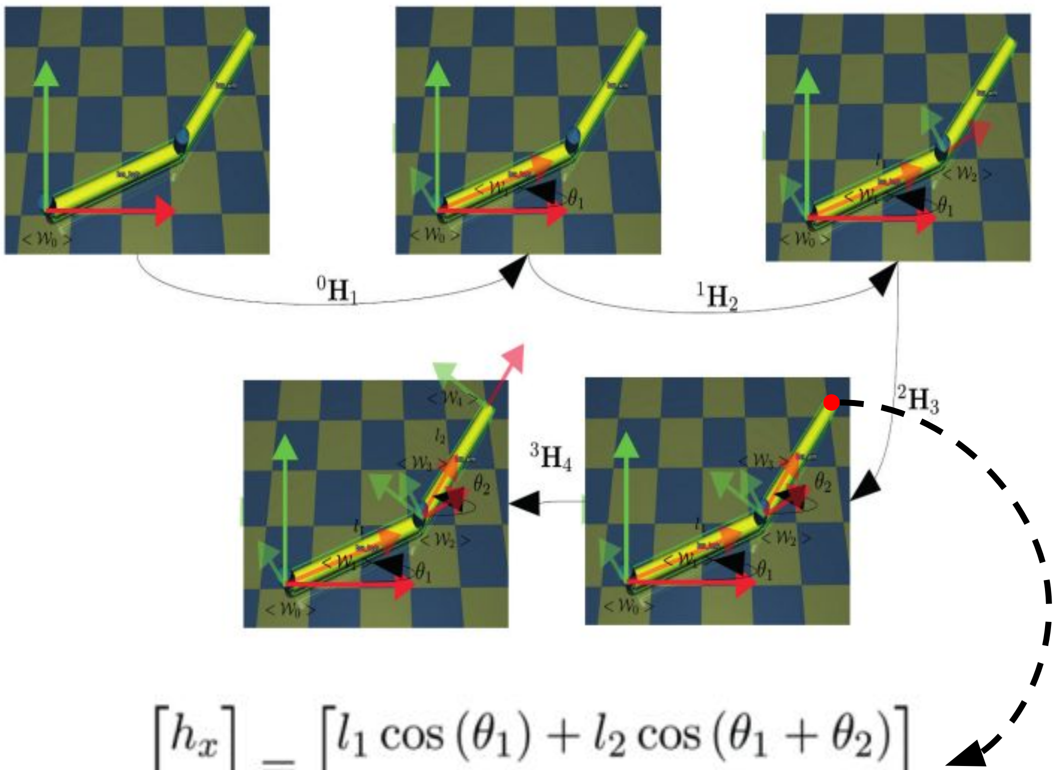
$$
{}^{1}\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

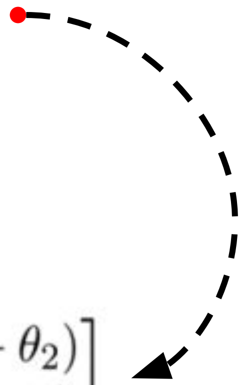
$$
{}^{3}\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



$$\mathbf{H}_4 = {}^0\mathbf{H}_1\,{}^1\mathbf{H}_2\,{}^2\mathbf{H}_3\,{}^3\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1\sin(\theta_1) + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

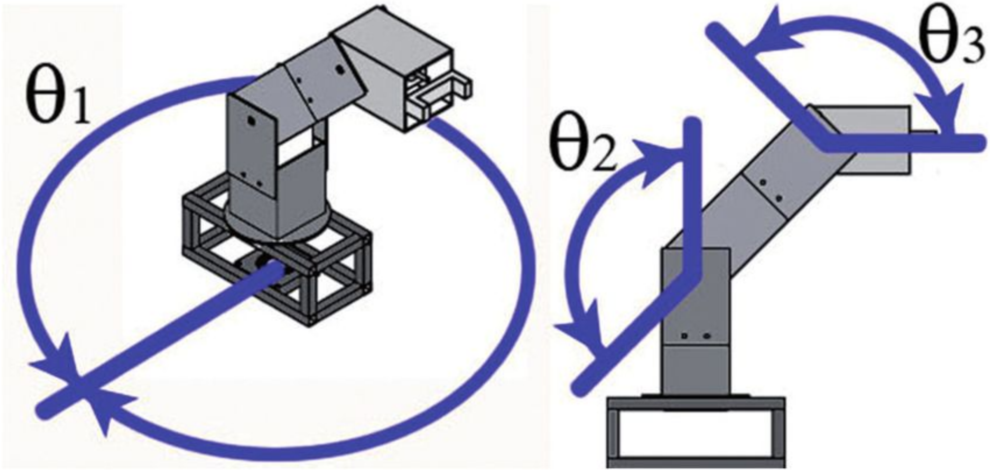


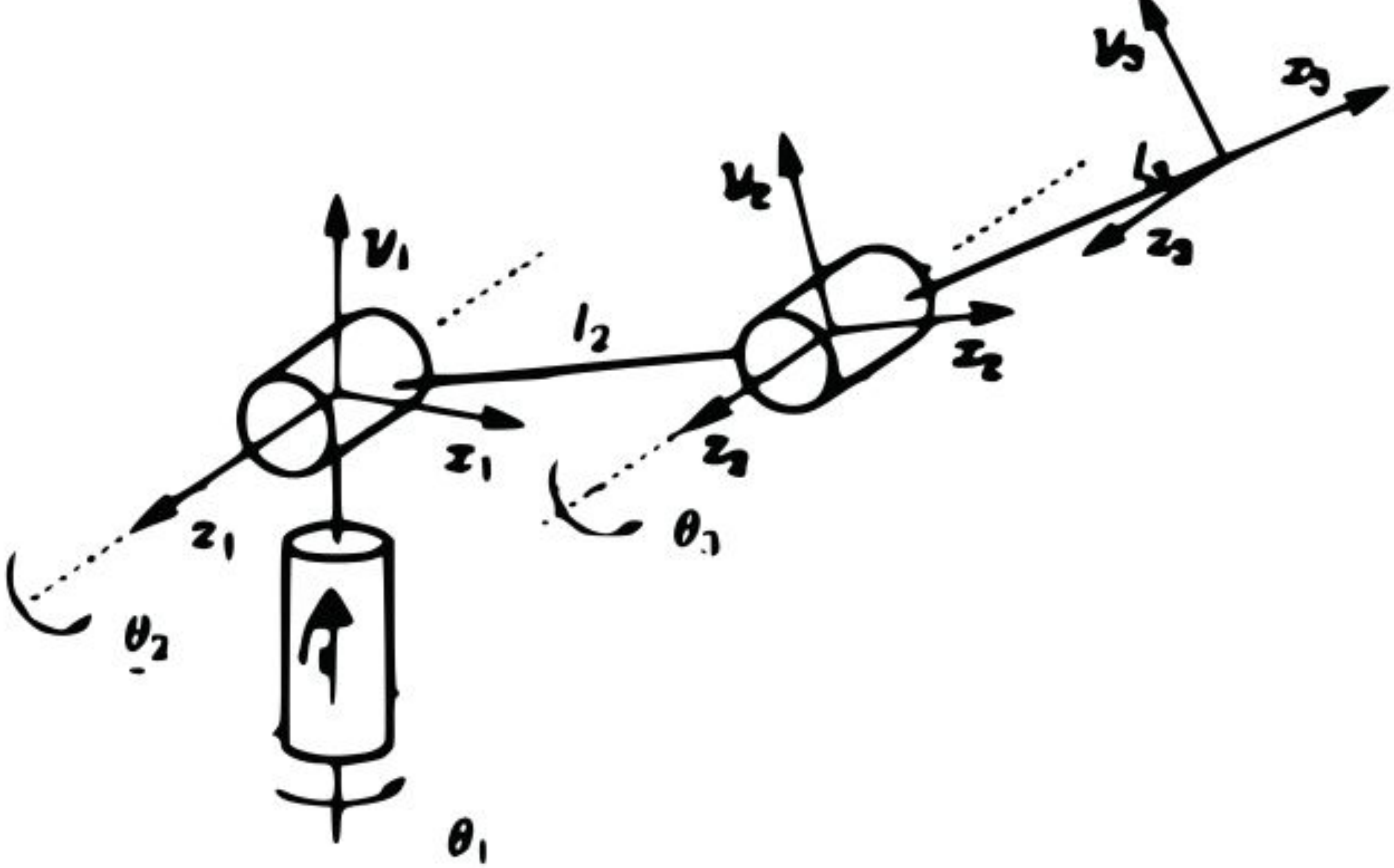
$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$



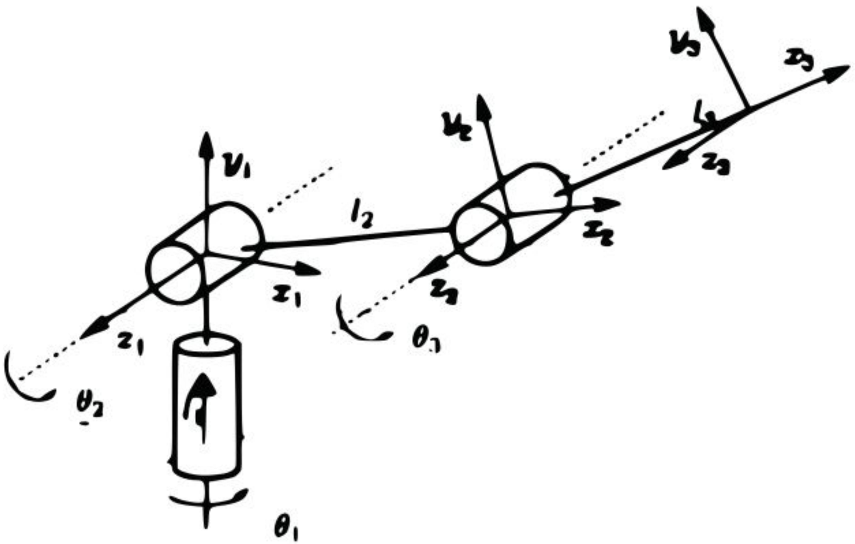
$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Manipulador Robótico





y_1
x_1
z_1
l_2
y_2
x_2
z_2
y_3
x_3
z_3
θ_1
θ_2
θ_3



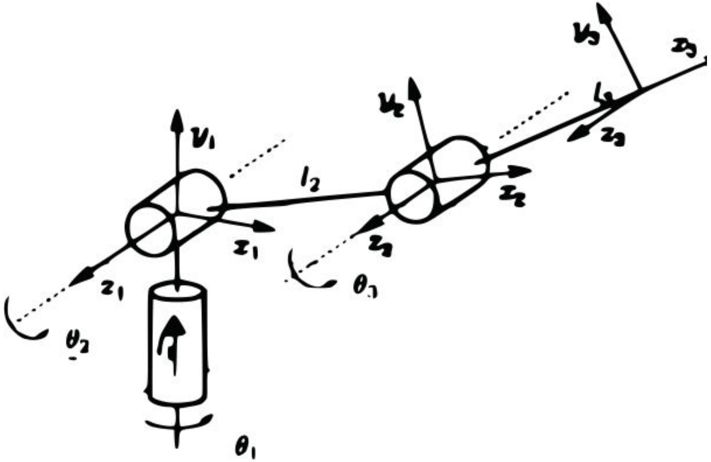
$$
{}^{0}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{4}\mathbf{H}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{5}\mathbf{H}_6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{6}\mathbf{H}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\mathbf{H}_4 = {}^{0}\mathbf{H}_1 \; {}^{1}\mathbf{H}_2 \; {}^{2}\mathbf{H}_3 \; {}^{3}\mathbf{H}_4 \; {}^{4}\mathbf{H}_5 \; {}^{5}\mathbf{H}_6 \; {}^{6}\mathbf{H}_7
$$



$$
{}^{0}\mathbf{H}_7 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & (l_2\cos(\theta_2)+l_3\cos(\theta_2+\theta_3))\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos(\theta_1) & (l_2\cos(\theta_2)+l_3\cos(\theta_2+\theta_3))\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1+l_2\sin(\theta_2)+l_3\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_2\cos(\theta_2)+l_3\cos(\theta_2+\theta_3))\cos(\theta_1) \\ (l_2\cos(\theta_2)+l_3\cos(\theta_2+\theta_3))\sin(\theta_1) \\ l_1+l_2\sin(\theta_2)+l_3\sin(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & 0 \end{bmatrix}
$$

Cinemática diferencial

- La ubicación del efector final (muñeca), además de poseer posición y orientación, dispone de velocidades de traslación y rotación que le permiten realizar movimientos en el espacio cartesiano.
- Las velocidades del efector final son resultados de las velocidades de cada uno de los estados internos del robot.
- Para representar la velocidad del extremo operativo, se utiliza una herramienta matemática conocida como matriz Jacobiana
- Esta matriz se define como la derivada del vector respecto a otro vector arbitrario.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m \times n}$$

[Relación entre las velocidades de las articulaciones y las del efector final del robot manipulador]

Posición final del efector $\rightarrow$ $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3,$

Vector de articulaciones $\rightarrow$ $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3$

Cómo varía la posición del efector en función de las variaciones del vector de articulaciones $\rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})}$

Cómo varía la posición del efector en función del tiempo. Por tanto, en función de las variaciones de vector de articulaciones con el tiempo $\rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial \mathbf{h}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{dt}}$