Reto actividad 2

$$p'(t) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t)\, d(t)$$
$$d'(t) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t) d(t)$$

Al ser los puntos de equilibrio las soluciones constantes, sus derivadas tienen que ser 0. Por lo que el sistema se ve de la siguiente manera

$$p'(t) = p(\alpha_1 - \alpha_2 d) = 0$$
$$d'(t) = d(-\beta_1 + \beta_2 p) = 0$$

el cual tiene soluciones

$$(p(t), d(t)) = (0,0) \quad y \quad \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$$

Para encontrar el Jacobiano se definen las funciones:

$$f(x,y) = \alpha_1 x - \alpha_2 xy$$
$$g(x,y) = -\beta_1 x + \beta_2 xy$$

Calculando sus derivadas parciales...

$$\frac{df}{dx} = \alpha_1 - \alpha_2 y \qquad \frac{df}{dy} = -\alpha_2 x$$

$$\frac{dg}{dx} = \beta_2 y \qquad \frac{dg}{dx} = -\beta_1 + \beta_2 x$$

Sustituimos el primero de los puntos

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix}$$

Calculamos los vectores y valores propios y tenemos...

$$\lambda = \alpha_1, -\beta_1 \quad y \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

esto nos dice que el punto $P(0,0)$ es un punto de tipo silla, las soluciones del sistema son:

$$C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\alpha_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\beta_1 t}$$

Para el punto $P\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$, la matriz Jacobiana es:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_2 \beta_1}{\beta_2} \\ \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando vectores y valores propios tenemos.-

$$\left(\sqrt{\alpha_1 \beta_1} + i, \sqrt{\alpha_1 \beta_1} - i \right)$$

al ser $\alpha_1 \beta_1 > 0$, podemos decir que este punto es un centro con soluciones

$$C_1 e^{\sqrt{\alpha_1 \beta_1}} \cos(x) + C_2 e^{\sqrt{\alpha_1 \beta_1}} \operatorname{sen}(x)$$