FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS UNICEN

Álgebra Lineal

Núcleo e Imagen

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal,
$B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \cdots, w_m\}$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Tomemos un vector $v \in \mathbb{R}^n$. Como B_1 es base de $\mathbb{R}^n$ entonces existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \Rightarrow \quad [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[T(v)]_{B_2} &= [\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n)]_{B_2} \\
&= \alpha_1 [T(v_1)]_{B_2} + \alpha_2 [T(v_2)]_{B_2} + \cdots + \alpha_n [T(v_n)]_{B_2} \\
&= \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ [T(v_1)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\
&= [T]_{B_1 B_2} \cdot [v]_{B_1}
\end{aligned}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Definición

Dada la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y las bases* B_1 *(dominio) y* B_2 *(codominio), la matriz:*

$$\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ [T(v_1)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = [T]_{B_1 B_2}$$

Es la matriz de transformación de la base B_1 *a* B_2*.*

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Observación: La matriz $[T]_{B_1 B_2}$ trabaja con coordenadas y devuelve coordenadas.

$$[T]_{B_1 B_2} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_2}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Ejemplo: Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T(x, y) = (x + 2y, x - y, -x + 3y)$$

Y sean $B_1\{(1,2),(2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Determinar $[T]_{B_1 B_2}$.

$$[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} \\ | & | \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$T(1,2) = (5,-1,5) = \left(-\frac{1}{2}\right)(1,1,0) + \left(\frac{11}{2}\right)(1,0,1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0,1,1) \Rightarrow [T(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T(2,1) = (4,1,1) = (2)(1,1,0) + (2)(1,0,1) + ((-1))(0,1,1) \Rightarrow [T(2,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Así la matriz pedida es:

$$[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{11}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $w = (10, 11)$ calcular $[T(w)]_{B_2}$.

Lo haremos usando la matriz $[T]_{B_1 B_2}$.
Recordemos que $[T(w)]_{B_2} = [T]_{B_1 B_2} \cdot [w]_{B_1}$

Así, como ya calculamos $[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{11}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ nos falta saber $[w]_{B_1}$.

$$(10, 11) = 4(1, 2) + 3(2, 1) \Rightarrow [w]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Luego,

$$\begin{aligned} [T(w)]_{B_2} &= [T]_{B_1B_2}\cdot[w]_{B_1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{11}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observación:

$$[T]_{B_1B_2} = I_{CB_2}\cdot[T]_C\cdot I_{B_1C}$$

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "{[T]_{B_1B_2}}"] \arrow[d, "I_{B_1C}"'] & B_2 \\ C \arrow[r, "{[T]_C}"'] & C \arrow[u, "I_{CB_2}"'] \end{tikzcd}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Para hallar la matriz $[T]_{B_1B_2}$ recordemos que dicha matriz tiene en sus columnas las coordenadas en B_2 de los transformados de los vectores de la base B_1. Es decir, tiene a los transformados de la base B_1 escritos como C.L de los vectores de la base B_2.
Consideremos ahora que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donde $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$.
Entonces para armar la primer columna de $[T]_{B_1B_2}$ tendremos que resolver el sistema:
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \cdots + \alpha_m u_m = T(v_1)$

Esto matricialmente seria: $\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_m & T(v_1) \\ | & | & & | & | \end{array}\right)$

Si repetimos esto para armar la segunda columna de $[T]_{B_1B_2}$ nos quedaría un nuevo sistema, que solo modifica la parte ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_m & T(v_2) \\ | & | & & | & | \end{array}\right)$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Si escribimos a todos los transformados de la base B_1 como C.L de los vectores de la base B_2 podríamos resolver un único sistema, incluyendo en la parte ampliada todos los transformados. Surge así el siguiente algoritmo.

Método o algoritmo para encontrar $[T]_{B_1 B_2}$

Sea $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Sea $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$. Construimos el siguiente sistema cuyas columnas son los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_m$ y los transformados $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$:

$$\left(u_1 u_2 \ldots u_m \;\middle|\; T(v_1) T(v_2) \ldots T(v_n) \right)$$

Realizando operaciones elementales (Gauss-Jordan), llegamos al sistema

$$\left(I_m \;\middle|\; \underbrace{[T(v_1)]_{B_2} [T(v_2)]_{B_2} \ldots [T(v_n)]_{B_2}}_{[T]_{B_1 B_2}} \right)$$

Ejemplo Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x-y+2z, 3y-z)$$

y consideremos la base $B = \{(1,1,0),(1,-1,1),(2,1,0)\}$.

(a) Hallar las matrices $[T]_{BC}$, $[T]_B$ y $[T]_{CB}$.

(b) Determinar $T(1,2,-1)$ en forma directa y utilizando la matriz $[T]_{BC}$.

Inciso a Primero busquemos $[T]_{BC}$, donde $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Como

$$T(1,1,0) = (2,0,3) \qquad T(1,-1,1) = (1,4,-4) \qquad T(2,1,0) = (3,1,3)$$

entonces

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad [T]_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Tenemos $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z, 3y - z)$$

y consideremos la base $B = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (2, 1, 0)\}$. Ahora busquemos $[T]_B$. Entonces

$$T(1, 1, 0) = (2, 0, 3) \qquad T(1, -1, 1) = (1, 4, -4) \qquad T(2, 1, 0) = (3, 1, 3)$$

y

$$\left.\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{rrr} 7 & -5 & 8 \\ 3 & -4 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 3 & -4 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Tenemos $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x-y+2z, 3y-z)$$

y consideremos la base $B = \{(1,1,0),(1,-1,1),(2,1,0)\}$. Por último, busquemos $[T]_{CB}$. Entonces

$$T(1,0,0) = (1,1,0) \qquad T(0,1,0) = (1,-1,3) \qquad T(0,0,1) = (1,2,-1)$$

y

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{array} \Rightarrow [T]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una transformación en diferentes bases

Utilizando la matriz

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $[T(1,2,-1)]_C = [T]_{BC}[(1,2,-1)]_B$. Busquemos el vector de coordenadas $[(1,2,-1)]_B$.

$$(1,2,-1) = 0(1,1,0) + (-1)(1,-1,1) + (1)(2,1,0) \quad \Rightarrow \quad [(1,2,-1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$[T(1,2,-1)]_C = [T]_{BC}[(1,2,-1)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T(1,2,-1)]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Como en la base canónica C el vector de coordenadas es igual el vector, entonces $T(1,2,-1) = (2,-3,7)$.

Núcleo de una transformación lineal

Definición

El núcleo (o Kernel) de una transformación lineal

$$T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

Es el subconjunto del espacio $\mathbb{V}$ *definido como*

$$Nu(T) = \{v \in \mathbb{V} \colon T(v) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$$

Recordemos que para todo vector $v \in \mathbb{V}$ se tiene que

$$T(v) = [T]_C \cdot v$$

Para la matriz en base canónica $[T]_C$. Por lo tanto

$$v \in Nu(T) \Leftrightarrow T(v) = 0 \Leftrightarrow [T]_C v = 0 \Leftrightarrow v \in N([T]_C)$$

Nota: El núcleo de una transformación lineal es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ y nos permite clasificar a las transformaciones lineales inyectivas. Es decir, $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$

Núcleo de una Transformación Lineal

Lema

Sea $T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *T es inyectiva*
2. *$Nu(T) = \{0\}$.*

Ejemplo Determinar si la transformación lineal

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2x - y + z}{3}, \frac{-x + 2y + z}{3}, \frac{x + y + 2z}{3} \right)$$

T es la proyección sobre el plano

$$S: \; -x - y + z = 0$$

Buscamos entonces el núcleo de dicha transformación como

$$Nu(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \; T(x, y, z) = 0\}$$

Núcleo de una Transformación Lineal

Es decir

$$\left(\frac{2x-y+z}{3}, \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right) = (0,0,0)$$

De donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{2x-y+z}{3} = 0 \\ \frac{-x+2y+z}{3} = 0 \\ \frac{x+y+2z}{3} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ -x+2y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

Si resolvemos dicho sistema vemos que

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Es decir, hay infinitas soluciones

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$$

Núcleo de una Transformación Lineal

De donde vemos que

$$(x, y, z) \in Nu(T) \Leftrightarrow (x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$$

Notemos que

$$Nu(T) = S^{\perp}$$

La transformación no es inyectiva

Imagen de una transformación lineal

Definición

Sea $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, la imagen de dicha transformación el conjunto

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{W} \colon \exists v \in \mathbb{V} \colon T(v) = w\} \subseteq \mathbb{W}$$

Nota Notemos que $Im(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{W}$. Además la transformación será sobreyectiva si y solo si

$$Im(T) = \mathbb{W}$$

Supongamos que $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in Im(T) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (x,y,z)\colon\ T(x,y,z) = (a,b,c) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists (x,y,z)\colon [T]_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x,y,z\colon\ T(e_1)x + T(e_2)y + T(e_3)z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad (a,b,c) \in Co\left([T]_C\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo Determinar si la transformación dada es sobreyectiva

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, x + 2y + z)$$

Notemos que $(a, b, c) \in Im(T)$ si y solo si existe un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (a, b, c)$$

De donde obtenemos que

$$(x + y, y + z, x + 2y + z) = (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema vemos que

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 & c \end{array} \sim \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c - a - b \end{array}$$

De donde vemos que dicho sistema tiene solución si y solo si

$$-a - b + c = 0$$

Por lo tanto, obtenemos la ecuación implícita que describe a la imagen. Por lo cual, podemos decir

$$Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon\ -a - b + c = 0\}$$

Es un plano.
La transformación no es sobreyectiva

Transformación lineal y Matriz Estándar

- Trans. Lineal

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

- Núcleo

$$\{v \in \mathbb{R}^n \colon\ T(v) = 0\}$$

- Imagen

$$\{T(v) \colon\ v \in \mathbb{R}^n\}$$

- Matriz Estándar

$$[T]_C \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

- Espacio Nulo

$$\{v \in \mathbb{R}^n \colon [T]_C \cdot v = 0\}$$

- Espacio columna

$$Co\left([T]_C\right)$$

Transformación Lineal y Matriz Estándar

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow n = \dim\left(\mathrm{N(A)}\right) + \dim\left(\mathrm{Fi(A)}\right) \Rightarrow n = \dim\left(\mathrm{N(A)}\right) + \dim\left(\mathrm{Co(A)}\right)$$

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal:

$$[T]_C \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow Nu(T) = Nu\left([T]_C\right) \quad \text{y} \quad Im(T) = Co\left([T]_C\right)$$

Teorema

Teorema de la dimensión
Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces

$$\dim\left(\mathbb{R}^n\right) = \dim\left(Nu(T)\right) + \dim\left(Im(T)\right)$$