Álgebra Lineal

Subespacios

Subespacios Vectoriales

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio vectorial si

1. $\vec{0} \in S$.
2. *Si* $u, v \in S$ *entonces* $u + v \in S$.
3. *Si* $u \in S$, *entonces* $\lambda u \in S$.

Subespacios Vectoriales

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio vectorial si

1. $\vec{0} \in S$.
2. *Si* $u, v \in S$ *entonces* $u + v \in S$.
3. *Si* $u \in S$, *entonces* $\lambda u \in S$.

Lema Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S \subseteq \mathbb{V}$ un subconjunto. Son equivalentes:

1. S es un subespacio de $\mathbb{V}$
2. Para cada $u, v \in S$ y α, β escalares $\alpha u + \beta v \in S$.

Subespacios Vectoriales

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio vectorial si

1. $\vec{0} \in S$.
2. *Si* $u, v \in S$ *entonces* $u + v \in S$.
3. *Si* $u \in S$, *entonces* $\lambda u \in S$.

Lema Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S \subseteq \mathbb{V}$ un subconjunto. Son equivalentes:

1. S es un subespacio de $\mathbb{V}$
2. Para cada $u, v \in S$ y α, β escalares $\alpha u + \beta v \in S$.

Es decir, los subespacios son subconjuntos cerrados por combinaciones lineales.

Subespacios Vectoriales

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio vectorial si

1. $\vec{0} \in S$.
2. *Si* $u, v \in S$ *entonces* $u + v \in S$.
3. *Si* $u \in S$, *entonces* $\lambda u \in S$.

Lema Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S \subseteq \mathbb{V}$ un subconjunto. Son equivalentes:

1. S es un subespacio de $\mathbb{V}$
2. Para cada $u, v \in S$ y α, β escalares $\alpha u + \beta v \in S$.

Es decir, los subespacios son subconjuntos cerrados por combinaciones lineales.

Ejemplos Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Los subespacios triviales de un espacio vectorial son:

- ⋆ El menor subespacio $\{0\}$
- ⋆ El mayor subespacio $\mathbb{V}$

Ejemplo Determinar si el subconjunto
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo Determinar si el subconjunto
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \neq 2$$

Subespacios Vectoriales

Ejemplo Determinar si el subconjunto
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \neq 2 \Rightarrow (0, 0, 0) \notin S$$

por lo tanto es claro que S no será subespacio vectorial.

Ejemplo Determinar si el subconjunto
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \neq 2 \Rightarrow (0, 0, 0) \notin S$$

por lo tanto es claro que S no será subespacio vectorial.
Nota Notemos que el subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \colon 3x + 4y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial.

Ejemplo Determinar si el subconjunto
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \neq 2 \Rightarrow (0, 0, 0) \notin S$$

por lo tanto es claro que S no será subespacio vectorial.
Nota Notemos que el subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \colon 3x + 4y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial.
S_1 El vector $(0, 0, 0) \in S$, ya que

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 = 0$$

Ejemplo Determinar si el subconjunto
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \neq 2 \Rightarrow (0, 0, 0) \notin S$$

por lo tanto es claro que S no será subespacio vectorial.
Nota Notemos que el subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \colon 3x + 4y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial.
S_1 El vector $(0, 0, 0) \in S$, ya que

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 = 0$$

S_2 Si $(x_1, y_1, z_1) \in S$ y $(x_2, y_2, z_2) \in S$ veamos que $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$. En efecto

$$3\,(x_1 + x_2) + 4\,(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \quad = \quad \underbrace{3x_1 + 4y_1 + z_1}_{=0} + \underbrace{3x_2 + 4y_2 + z_2}_{=0}$$

Ejemplo Determinar si el subconjunto
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \neq 2 \Rightarrow (0, 0, 0) \notin S$$

por lo tanto es claro que S no será subespacio vectorial.
Nota Notemos que el subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \colon 3x + 4y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial.
S_1 El vector $(0, 0, 0) \in S$, ya que

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 = 0$$

S_2 Si $(x_1, y_1, z_1) \in S$ y $(x_2, y_2, z_2) \in S$ veamos que $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$. En efecto

$$\begin{aligned} 3\,(x_1 + x_2) + 4\,(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) &= \underbrace{3x_1 + 4y_1 + z_1}_{=0} + \underbrace{3x_2 + 4y_2 + z_2}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, S es cerrado para la suma.

Por último, veamos S_3, es decir, si $(x, y, z) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda\,(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

$$3\lambda x + 4\lambda y + \lambda z \quad = \quad \lambda\,(3x + 4y + z)$$

Por último, veamos S_3, es decir, si $(x, y, z) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

$$\begin{aligned} 3\lambda x + 4\lambda y + \lambda z &= \lambda(3x + 4y + z) \\ &= \lambda 0 \end{aligned}$$

Subespacios Vectoriales

Por último, veamos S_3, es decir, si $(x, y, z) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

$$\begin{aligned} 3\lambda x + 4\lambda y + \lambda z &= \lambda (3x + 4y + z) \\ &= \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por último, veamos S_3, es decir, si $(x, y, z) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda\,(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

$$\begin{aligned} 3\lambda x + 4\lambda y + \lambda z &= \lambda\,(3x + 4y + z) \\ &= \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + 4y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo Soluciones de un sistema homogéneo.

Subespacios Vectoriales

Ejemplo Soluciones de un sistema homogéneo.
Sea $A\vec{x} = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo

Ejemplo Soluciones de un sistema homogéneo.
Sea $A\vec{x} = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\}$$

Ejemplo Soluciones de un sistema homogéneo.
Sea $A\vec{x} = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\}$$

Por el Lema, bastará ver que es cerrado por combinaciones lineales. Sean $x_1, x_2 \in N(A)$ y α_1, α_2 escalares, vemos que

$$A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) \quad = \quad A\left(\alpha_1 x_1\right) + A\left(\alpha_2 x_2\right)$$

Ejemplo Soluciones de un sistema homogéneo.
Sea $A\vec{x} = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\}$$

Por el Lema, bastará ver que es cerrado por combinaciones lineales. Sean $x_1, x_2 \in N(A)$ y α_1, α_2 escalares, vemos que

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= A(\alpha_1 x_1) + A(\alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 (A x_1) + \alpha_2 (A x_2) \end{aligned}$$

Ejemplo Soluciones de un sistema homogéneo.
Sea $A\vec{x} = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\}$$

Por el Lema, bastará ver que es cerrado por combinaciones lineales. Sean $x_1, x_2 \in N(A)$ y α_1, α_2 escalares, vemos que

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= A(\alpha_1 x_1) + A(\alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 (A x_1) + \alpha_2 (A x_2) \\ &= \alpha_1 0 + \alpha_2 0 \end{aligned}$$

Ejemplo Soluciones de un sistema homogéneo.
Sea $A\vec{x} = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\}$$

Por el Lema, bastará ver que es cerrado por combinaciones lineales. Sean $x_1, x_2 \in N(A)$ y α_1, α_2 escalares, vemos que

$$\begin{aligned} A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) &= A\left(\alpha_1 x_1\right) + A\left(\alpha_2 x_2\right) \\ &= \alpha_1\left(A x_1\right) + \alpha_2\left(A x_2\right) \\ &= \alpha_1 0 + \alpha_2 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\triangleright$ El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial.

Estructura de un conjunto solución

Definición

En el caso de los sistema no homogéneos $A\vec{x} = b$, el conjunto de soluciones del sistema se puede escribir como

$$S_g = N(A) + S_p$$

Estructura de un conjunto solución

Definición

En el caso de los sistema no homogéneos $A\vec{x} = b$, el conjunto de soluciones del sistema se puede escribir como

$$S_g = N(A) + S_p$$

Notar que la solución general de estos sistemas no es un subespacio, pues se desplaza del origen.

Subespacios Vectoriales

Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

- $\mathbb{R}^2$
- Triviales $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$.

Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

- $\mathbb{R}^2$

- Triviales $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$.
- Rectas que pasan por el origen

Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

▷ $\mathbb{R}^2$	▷ Triviales $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$. ▷ Rectas que pasan por el origen
▷ $\mathbb{R}^3$	▷ Triviales $\{0\}$ y $\mathbb{R}^3$.

Subespacios Vectoriales

Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

▷ $\mathbb{R}^2$	▷ Triviales $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$. ▷ Rectas que pasan por el origen
▷ $\mathbb{R}^3$	▷ Triviales $\{0\}$ y $\mathbb{R}^3$. ▷ Rectas que pasan por el origen. ▷ Planos que pasan por el origen.

Subespacio Generado

Definición

Sea $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial y* $\{v_1, .., v_k\}$ *un conjunto de vectores. Definimos el subespacio generado por* $\{v_1, .., v_k\}$ *como*

$$\langle v_1, .., v_k\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

Subespacio Generado

Definición

Sea $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial y* $\{v_1, .., v_k\}$ *un conjunto de vectores. Definimos el subespacio generado por* $\{v_1, .., v_k\}$ *como*

$$\langle v_1, .., v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

- *El conjunto* $\{v_1, .., v_k\}$ *se dice conjunto de Generadores*

Subespacio Generado

Definición

Sea $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial y* $\{v_1, .., v_k\}$ *un conjunto de vectores. Definimos el subespacio generado por* $\{v_1, .., v_k\}$ *como*

$$\langle v_1, .., v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

- ▷ *El conjunto* $\{v_1, .., v_k\}$ *se dice conjunto de Generadores*
- ▷ *El subespacio* $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ *es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los generadores.*

Subespacio Generado

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\{v_1, .., v_k\}$ un conjunto de vectores. Definimos el subespacio generado por $\{v_1, .., v_k\}$ como

$$\langle v_1, .., v_k\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \colon \lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

- *El conjunto $\{v_1, .., v_k\}$ se dice conjunto de Generadores*
- *El subespacio $\langle v_1, ..., v_k\rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los generadores.*

Ejemplo Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el subespacio $S = \langle(1, 2, 1), (1, -1, 0)\rangle$ es el subespacio

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \alpha_1(1, 2, 1) + \beta(1, -1, 0)\}$$

Subespacio Generado

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\{v_1, .., v_k\}$ un conjunto de vectores. Definimos el subespacio generado por $\{v_1, .., v_k\}$ como

$$\langle v_1, .., v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \colon \lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

- *El conjunto $\{v_1, .., v_k\}$ se dice conjunto de Generadores*
- *El subespacio $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los generadores.*

Ejemplo Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el subespacio $S = \langle (1, 2, 1), (1, -1, 0) \rangle$ es el subespacio

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \alpha_1(1, 2, 1) + \beta(1, -1, 0)\}$$

Es decir, es el plano cuyos vectores generadores son $v_1 = (1, 2, 1)$ y $v_2 = (1, -1, 0)$.

Ecuación implícita, conjunto de generadores y bases

Retomemos el problema: Determinar el subespacio

$$S = \langle (1,1,0),(0,0,1),(1,1,1) \rangle$$

Ecuación implícita, conjunto de generadores y bases

Retomemos el problema: Determinar el subespacio

$$S = \langle (1,1,0), (0,0,1), (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que

$$(x, y, z) \in S \quad \text{si y solo si} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon (x, y, z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(1,1,1)$$

Ecuación implícita, conjunto de generadores y bases

Retomemos el problema: Determinar el subespacio

$$S = \langle (1,1,0), (0,0,1), (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in S \quad & \text{si y solo si} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : (x,y,z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(1,1,1) \\ & \text{si y solo si} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ecuación implícita, conjunto de generadores y bases

Retomemos el problema: Determinar el subespacio

$$S = \langle (1,1,0), (0,0,1), (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in S \quad & \text{si y solo si} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon (x,y,z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(1,1,1) \\ & \text{si y solo si} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, debemos ver si existe o no solución para el sistema, cuya matriz ampliada es

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}$$

Ecuación implícita, conjunto de generadores y bases

Retomemos el problema: Determinar el subespacio

$$S = \langle (1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\rangle$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in S \quad & \text{si y solo si} \quad \exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 : (x,y,z) = \alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(0,0,1)+\alpha_3(1,1,1)\\ & \text{si y solo si} \quad \exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es decir, debemos ver si existe o no solución para el sistema, cuya matriz ampliada es

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x\\ 1 & 0 & 1 & y\\ 0 & 1 & 1 & z\end{array}$$

Luego, debemos estudiar el rango de dicha matriz y su matriz ampliada.

Si escalonamos

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ \hline \end{array} \qquad f_2 \mapsto f_2 - f_1$$

Si escalonamos

$$\begin{array}{ccc|ll}
1 & 0 & 1 & x & \\
1 & 0 & 1 & y & f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
1 & 0 & 1 & x & \\
0 & 0 & 0 & y - x & f_2 \leftrightarrow f_3 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
\end{array}$$

Si escalonamos

$$
\begin{array}{ccc|ll}
1 & 0 & 1 & x & \\
1 & 0 & 1 & y & f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
1 & 0 & 1 & x & \\
0 & 0 & 0 & y - x & f_2 \leftrightarrow f_3 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
\color{red}{1} & 0 & 1 & x & \\
0 & \color{red}{1} & 1 & z & \\
\color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{y - x} &
\end{array}
$$

Si escalonamos

$$
\begin{array}{ccc|ll}
1 & 0 & 1 & x & \\
1 & 0 & 1 & y & f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
1 & 0 & 1 & x & \\
0 & 0 & 0 & y - x & f_2 \leftrightarrow f_3 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
\color{red}{1} & 0 & 1 & x & \\
0 & \color{red}{1} & 1 & z & \\
\color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{y - x} &
\end{array}
$$

Luego, vemos que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}|\mathrm{b})$ si y solo si

$$-x + y = 0$$

Si escalonamos

$$
\begin{array}{ccc|ll}
1 & 0 & 1 & x & \\
1 & 0 & 1 & y & f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
1 & 0 & 1 & x & \\
0 & 0 & 0 & y - x & f_2 \leftrightarrow f_3 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
\color{red}{1} & 0 & 1 & x & \\
0 & \color{red}{1} & 1 & z & \\
\color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{y - x} &
\end{array}
$$

Luego, vemos que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}|\mathrm{b})$ si y solo si

$$-x + y = 0 \Longrightarrow \text{Ecs. implícitas}$$

Si escalonamos

$$
\begin{array}{ccc|ll}
1 & 0 & 1 & x & \\
1 & 0 & 1 & y & f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
1 & 0 & 1 & x & \\
0 & 0 & 0 & y - x & f_2 \leftrightarrow f_3 \\
0 & 1 & 1 & z & \\
\hline
\color{red}{1} & 0 & 1 & x & \\
0 & \color{red}{1} & 1 & z & \\
\color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{y - x} &
\end{array}
$$

Luego, vemos que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}|\mathrm{b})$ si y solo si

$$-x + y = 0 \Longrightarrow \text{Ecs. implícitas}$$

Además, se tiene que

$$S = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Puesto que los **Generadores L.I** son $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Subespacios Vectoriales

Retomamos definición dada para EV.

Subespacios Vectoriales

Retomamos definición dada para EV.
Sea S el subespacio

$$S = \langle v_1, .., v_n \rangle$$

Subespacios Vectoriales

Retomamos definición dada para EV.
Sea S el subespacio

$$S = \langle v_1, .., v_n \rangle$$

Entonces hay dos opciones:

Subespacios Vectoriales

Retomamos definición dada para EV.
Sea S el subespacio

$$S = \langle v_1, .., v_n \rangle$$

Entonces hay dos opciones:

(1) $\{v_1, .., v_n\}$ son L.D. Entonces hay vectores que sobran para generar el subespacio

$$\{v_1, .., v_n\} \text{ es un conjunto de generadores}$$

Subespacios Vectoriales

Retomamos definición dada para EV.
Sea S el subespacio

$$S = \langle v_1, .., v_n \rangle$$

Entonces hay dos opciones:

(1) $\{v_1, .., v_n\}$ son L.D. Entonces hay vectores que sobran para generar el subespacio

$$\{v_1, .., v_n\} \text{ es un conjunto de generadores}$$

(2) $\{v_1, .., v_n\}$ son L.I. Entonces, cada vector es necesario para generar el subespacio.

$$\{v_1, .., v_n\} \text{ es una base para } S$$

Subespacios Vectoriales

Retomamos definición dada para EV.
Sea S el subespacio

$$S = \langle v_1, .., v_n \rangle$$

Entonces hay dos opciones:

(1) $\{v_1, .., v_n\}$ son L.D. Entonces hay vectores que sobran para generar el subespacio

$$\{v_1, .., v_n\} \text{ es un conjunto de generadores}$$

(2) $\{v_1, .., v_n\}$ son L.I. Entonces, cada vector es necesario para generar el subespacio.

$$\{v_1, .., v_n\} \text{ es una base para } S$$

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$ es una base para el subespacio S si:

1 $S = \langle \{v_1, .., v_n\} \rangle$.

2 $\{v_1, .., v_n\}$ *es L.I*

Observación:

- $\star$ Toda base es un conjunto de generadores del subespacio S.
- $\star$ No todo conjunto de generadores es una base para S.

Subespacios Vectoriales

Observación:

$\star$ Toda base es un conjunto de generadores del subespacio S.
$\star$ No todo conjunto de generadores es una base para S.

Ejemplo Hallar un conjunto de ecuaciones para el subespacio S generado por los vectores $\{(1, 0, 2), (0, 1, -1), (2, -1, 5)\}$.

Observación:

$\star$ Toda base es un conjunto de generadores del subespacio S.
$\star$ No todo conjunto de generadores es una base para S.

Ejemplo Hallar un conjunto de ecuaciones para el subespacio S generado por los vectores $\{(1,0,2),(0,1,-1),(2,-1,5)\}$.

$$(x,y,z) \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : (x,y,z) = \alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,-1) + \alpha_3(2,-1,5)$$

Observación:

$\star$ Toda base es un conjunto de generadores del subespacio S.
$\star$ No todo conjunto de generadores es una base para S.

Ejemplo Hallar un conjunto de ecuaciones para el subespacio S generado por los vectores $\{(1,0,2),(0,1,-1),(2,-1,5)\}$.

$$\begin{aligned} (x,y,z)\in S \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 : (x,y,z)=\alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(0,1,-1)+\alpha_3(2,-1,5) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\alpha_1+2\alpha_3 \\ y=\alpha_2-\alpha_3 \\ z=2\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Observación:

⋆ Toda base es un conjunto de generadores del subespacio S.
⋆ No todo conjunto de generadores es una base para S.

Ejemplo Hallar un conjunto de ecuaciones para el subespacio S generado por los vectores $\{(1,0,2),(0,1,-1),(2,-1,5)\}$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in S &\Leftrightarrow \exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 : (x,y,z)=\alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(0,1,-1)+\alpha_3(2,-1,5)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha_1+2\alpha_3\\ y=\alpha_2-\alpha_3\\ z=2\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3\end{cases}\end{aligned}$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para saber si existe solución al sistema

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & -1 & 5 & z \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x+y \end{array}\right.$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para saber si existe solución al sistema

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & -1 & 5 & z \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x+y \end{array}\right.$$

Por Roche-Frobenius , el sistema tiene solución si y solo si $rg(A) = rg(A|b)$ si y solo si

$$-2x + y + z = 0$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para saber si existe solución al sistema

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & -1 & 5 & z \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x+y \end{array}\right.$$

Por Roche-Frobenius , el sistema tiene solución si y solo si $rg(A) = rg(A|b)$ si y solo si

$$-2x + y + z = 0$$

Luego, las ecuaciones implícitas de S serán

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; -2x + y + z = 0\}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para saber si existe solución al sistema

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} x \\ y \\ z-2x+y \end{matrix}$$

Por Roche-Frobenius , el sistema tiene solución si y solo si $rg(A) = rg(A|b)$ si y solo si

$$-2x + y + z = 0$$

Luego, las ecuaciones implícitas de S serán

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon -2x + y + z = 0\}$$

Si queremos encontrar una base para el plano vemos que

$$-2x + y + z = 0$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para saber si existe solución al sistema

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & -1 & 5 & z \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x+y \end{array}\right.$$

Por Roche-Frobenius , el sistema tiene solución si y solo si $rg(A) = rg(A|b)$ si y solo si

$$-2x + y + z = 0$$

Luego, las ecuaciones implícitas de S serán

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; -2x + y + z = 0\}$$

Si queremos encontrar una base para el plano vemos que

$$-2x + y + z = 0 \Rightarrow z = 2x - y$$

Por lo tanto, $(x, y, z) \in S$ si y solo si $(x, y, z) = (x, y, 2x - y)$, de donde vemos que

$$(x, y, 2x - y) = x\,(1, 0, 2) + y\,(0, 1, -1)$$

Es decir $S = \langle (1,0,2),(0,1,-1) \rangle$ y además

$$\left.\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \sim \left.\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \\ y \\ z-2x+y \end{array}$$

Es decir $S = \langle (1,0,2), (0,1,-1) \rangle$ y además

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & -1 & 5 & z \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x+y \end{array}\right.$$

▷ La ecuación cartesiana del subespacio es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \; -2x + y + z = 0\}$$

▷ La ecuación vectorial del subespacio es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) = \lambda(1,0,2) + \beta(0,1,-1)\}$$

Es decir $S = \langle (1,0,2),(0,1,-1)\rangle$ y además

$$\left.\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \sim \left.\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \\ y \\ z-2x+y \end{array}$$

▷ La ecuación cartesiana del subespacio es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ -2x + y + z = 0\}$$

▷ La ecuación vectorial del subespacio es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) = \lambda(1,0,2) + \beta(0,1,-1)\}$$

▷ El conjunto de generadores es $\{(1,0,2),(0,1,-1),(2,-1,5)\}$, mientras que la base de S es $\{(1,0,2),(0,1,-1)\}$. Es decir, nos quedamos con los vectores L.I del conjunto de generadores.

Es decir $S = \langle (1,0,2),(0,1,-1) \rangle$ y además

$$\left.\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \sim \left.\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \\ y \\ z-2x+y \end{array}$$

▷ La ecuación cartesiana del subespacio es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \; -2x + y + z = 0\}$$

▷ La ecuación vectorial del subespacio es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) = \lambda(1,0,2) + \beta(0,1,-1)\}$$

▷ El conjunto de generadores es $\{(1,0,2),(0,1,-1),(2,-1,5)\}$, mientras que la base de S es $\{(1,0,2),(0,1,-1)\}$. Es decir, nos quedamos con los vectores L.I del conjunto de generadores.
▷ Vemos que la base tiene cardinal 2, es decir $\dim(S) = 2$.

¿Por qué descartamos el vector $(2,-1,5)$?

Notemos que el conjunto de vectores es L.D ya que

$$(2,-1,5)=2(1,0,2)-(0,1,-1)\Rightarrow 2(1,0,2)-(0,1,-1)-(2,-1,5)=(0,0,0)$$

¿Por qué descartamos el vector $(2, -1, 5)$?

Notemos que el conjunto de vectores es L.D ya que

$(2, -1, 5) = 2(1, 0, 2) - (0, 1, -1) \Rightarrow 2(1, 0, 2) - (0, 1, -1) - (2, -1, 5) = (0, 0, 0)$

Es decir, existen escalares no nulos $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = -1$ tales que la combinación lineal

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \vec{0}$$

¿Por qué descartamos el vector $(2,-1,5)$?

Notemos que el conjunto de vectores es L.D ya que

$(2,-1,5)=2(1,0,2)-(0,1,-1)\Rightarrow 2(1,0,2)-(0,1,-1)-(2,-1,5)=(0,0,0)$

Es decir, existen escalares no nulos $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-1$ y $\alpha_3=-1$ tales que la combinación lineal

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=\vec{0}$$

Otra forma de chequear esto es usando el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0$$

¿Por qué descartamos el vector $(2, -1, 5)$?

Notemos que el conjunto de vectores es L.D ya que

$$(2, -1, 5) = 2(1, 0, 2) - (0, 1, -1) \Rightarrow 2(1, 0, 2) - (0, 1, -1) - (2, -1, 5) = (0, 0, 0)$$

Es decir, existen escalares no nulos $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = -1$ tales que la combinación lineal

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \vec{0}$$

Otra forma de chequear esto es usando el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Y puesto que el pivote de la última columna se anuló, entonces el vector columna $(2, -1, 5)$ es el que depende linealmente de los otros dos.