FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS UNICEN

Álgebra Lineal

Cambio de Base

Bases

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$ *es una base para el espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *si:*

1. $\mathbb{V} = \langle\{v_1, .., v_n\}\rangle$.
2. $\{v_1, .., v_n\}$ *es L.I*

Teorema

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *es una base para un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*, entonces cada vector en* $\mathbb{V}$ *se puede escribir de* **una y sólo una** *forma como combinación lineal de los vectores de* B*.*

Coordenadas

Definición

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *una base de un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*. Los únicos escalares* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *que permiten expresar a un vector* $v \in \mathbb{V}$ *como combinación lineal (ordenada) de los elementos de la base* B

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

se denominan las coordenadas del vector v *en la base* B*.*

Denotamos las coordenadas de un vector v en una base B como un vector columna:

$$[v]_B = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^t$$

Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición

La dimensión de un espacio vectorial no nulo $\mathbb{V}$ *es el número de vectores en una base para* $\mathbb{V}$. *Con frecuencia escribimos* $\dim(\mathbb{V})$ *para la dimensión de* $\mathbb{V}$.

Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición

La dimensión de un espacio vectorial no nulo $\mathbb{V}$ *es el número de vectores en una base para* $\mathbb{V}$*. Con frecuencia escribimos* $\dim(\mathbb{V})$ *para la dimensión de* $\mathbb{V}$*.*

Observación:

- Dos bases de un mismo espacio vectorial tendrán igual cantidad de vectores.

Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición

La dimensión de un espacio vectorial no nulo $\mathbb{V}$ es el número de vectores en una base para $\mathbb{V}$. Con frecuencia escribimos $\dim(\mathbb{V})$ para la dimensión de $\mathbb{V}$.

Observación:

- Dos bases de un mismo espacio vectorial tendrán igual cantidad de vectores.
- Como el conjunto $\{0\}$ es linealmente dependiente, es natural decir que el espacio vectorial $\{0\}$ tiene dimensión cero.

Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición

La dimensión de un espacio vectorial no nulo $\mathbb{V}$ es el número de vectores en una base para $\mathbb{V}$. Con frecuencia escribimos $\dim(\mathbb{V})$ *para la dimensión de $\mathbb{V}$.*

Observación:

- Dos bases de un mismo espacio vectorial tendrán igual cantidad de vectores.
- Como el conjunto $\{0\}$ es linealmente dependiente, es natural decir que el espacio vectorial $\{0\}$ tiene dimensión cero.
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, una de sus posibles bases es la canónica.

Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición

La dimensión de un espacio vectorial no nulo $\mathbb{V}$ es el número de vectores en una base para $\mathbb{V}$. Con frecuencia escribimos $\dim(\mathbb{V})$ *para la dimensión de $\mathbb{V}$.*

Observación:

- Dos bases de un mismo espacio vectorial tendrán igual cantidad de vectores.
- Como el conjunto $\{0\}$ es linealmente dependiente, es natural decir que el espacio vectorial $\{0\}$ tiene dimensión cero.
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, una de sus posibles bases es la canónica.
- $\dim(P_n) = n + 1$, la base estándar es $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $v = (-10,-13,4) \in \mathbb{R}^3$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1, 0, -1), (3, 2, 1), (0, -1, 2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $v = (-10, -13, 4) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[v]_B$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1, 0, -1), (3, 2, 1), (0, -1, 2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $v = (-10, -13, 4) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[v]_B$.

$$(-10, -13, 4) = \lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(3, 2, 1) + \lambda_3(0, -1, 2)$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $v = (-10,-13,4) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[v]_B$.

$$(-10,-13,4) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

o lo que esquivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcc} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & -10 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -13 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $v = (-10,-13,4) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[v]_B$.

$$(-10,-13,4) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

o lo que esquivalente

$$\left\{\begin{array}{rcc} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & -10 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -13 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 4 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $v = (-10,-13,4) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[v]_B$.

$$(-10,-13,4) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

o lo que es equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & -10 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -13 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 4 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(-10,-13,4) = 2(1,0,-1) + (-4)(3,2,1) + 5(0,-1,2)$$

Por lo tanto,

$$[v]_B = [(-10,-13,4)]_B = (2,-4,5)^t$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

$$v = (3,2)$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

$$v = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

  $$v = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$$

  Entonces el vector de coordenadas de v en la base C es $[v]_C = (3,2)^t$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

$$v = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$$

  Entonces el vector de coordenadas de v en la base C es $[v]_C = (3,2)^t$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base B, es decir, $[v]_B$:

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

$$v = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$$

  Entonces el vector de coordenadas de v en la base C es $[v]_C = (3,2)^t$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base B, es decir, $[v]_B$:

$$v = (3,2) =$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

$$v = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$$

  Entonces el vector de coordenadas de v en la base C es $[v]_C = (3,2)^t$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base B, es decir, $[v]_B$:

$$v = (3,2) = (-2)(1,-1) + 5(1,0)$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Tomemos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tomemos el vector $v = (3,2)$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base C, es decir, $[v]_C$:

  $$v = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$$

  Entonces el vector de coordenadas de v en la base C es $[v]_C = (3,2)^t$.

- Calculemos las coordenadas de v en la base B, es decir, $[v]_B$:

  $$v = (3,2) = (-2)(1,-1) + 5(1,0)$$

  Entonces el vector de coordenadas de v en la base B es $[v]_B = (-2,5)^t$.

Coordenadas de un vector

Vimos que $[v]_B = (-2, 5)^t$ donde $B = \{(1, -1), (1, 0)\}$.

Coordenadas de un vector

Vimos que $[v]_B = (-2, 5)^t$ donde $B = \{(1, -1), (1, 0)\}$. Y si tomamos la base $D = \{(1, 0), (1, -1)\}$, ¿quién sería el vector de coordenadas $[v]_D$?.

Coordenadas de un vector

Vimos que $[v]_B = (-2, 5)^t$ donde $B = \{(1, -1), (1, 0)\}$. Y si tomamos la base $D = \{(1, 0), (1, -1)\}$, ¿quién sería el vector de coordenadas $[v]_D$?.
Como

$$v = (3, 2) = (-2)(1, -1) + 5(1, 0)$$

Coordenadas de un vector

Vimos que $[v]_B = (-2,5)^t$ donde $B = \{(1,-1),(1,0)\}$. Y si tomamos la base $D = \{(1,0),(1,-1)\}$, ¿quién sería el vector de coordenadas $[v]_D$?.
Como

$$v = (3,2) = (-2)(1,-1) + 5(1,0)$$

entonces

$$v = (3,2) = 5(1,0) + (-2)(1,-1)$$

Coordenadas de un vector

Vimos que $[v]_B = (-2, 5)^t$ donde $B = \{(1, -1), (1, 0)\}$. Y si tomamos la base $D = \{(1, 0), (1, -1)\}$, ¿quién sería el vector de coordenadas $[v]_D$?.
Como

$$v = (3, 2) = (-2)(1, -1) + 5(1, 0)$$

entonces

$$v = (3, 2) = 5(1, 0) + (-2)(1, -1)$$

y por lo tanto

$$[v]_D = (5, -2)^t$$

lo cual es diferente a $[v]_B = (-2, 5)^t$.

Coordenadas de un vector

Vimos que $[v]_B = (-2, 5)^t$ donde $B = \{(1, -1), (1, 0)\}$. Y si tomamos la base $D = \{(1, 0), (1, -1)\}$, ¿quién sería el vector de coordenadas $[v]_D$?.
Como

$$v = (3, 2) = (-2)(1, -1) + 5(1, 0)$$

entonces

$$v = (3, 2) = 5(1, 0) + (-2)(1, -1)$$

y por lo tanto

$$[v]_D = (5, -2)^t$$

lo cual es diferente a $[v]_B = (-2, 5)^t$.
Observación: Si cambio el orden de los vectores de la base, entonces cambio el vector de coordenadas.

Algunas consideraciones

- El vector de coordenadas en una base depende del orden de los vectores en dicha base.

Algunas consideraciones

- El vector de coordenadas en una base depende del orden de los vectores en dicha base. La base $\{(1,0),(1,-1)\}$ es distinta a la base $\{(1,-1),(1,0)\}$.

Algunas consideraciones

- El vector de coordenadas en una base depende del orden de los vectores en dicha base. La base $\{(1,0),(1,-1)\}$ es distinta a la base $\{(1,-1),(1,0)\}$.
- Considerando la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $[v]_C = v^t$
- Si v, w son vectores de $\mathbb{V}$ y k un escalar, entonces

$$[v+w]_B = [v]_B + [w]_B$$

$$[kv]_B = k[v]_B$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1, 0, 0, \cdots, 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, 0, \cdots, 0)}_{e_2}, \underbrace{(0, 0, 1, \cdots, 0)}_{e_3}, \cdots, \underbrace{(0, 0, 0, \cdots, 1)}_{e_n}\}$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,\cdots,0)}_{e_3}, \cdots, \underbrace{(0,0,0,\cdots,1)}_{e_n}\}$$

Entonces para todo

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,\cdots,0)}_{e_3}, \cdots, \underbrace{(0,0,0,\cdots,1)}_{e_n}\}$$

Entonces para todo

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,\cdots,0)}_{e_3}, \cdots, \underbrace{(0,0,0,\cdots,1)}_{e_n}\}$$

Entonces para todo

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) = \color{red}{v_1} e_1$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,\cdots,0)}_{e_3}, \cdots, \underbrace{(0,0,0,\cdots,1)}_{e_n}\}$$

Entonces para todo

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) = {\color{red}v_1} e_1 + {\color{red}v_2} e_2$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{e_1},\underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{e_2},\underbrace{(0,0,1,\cdots,0)}_{e_3},\cdots,\underbrace{(0,0,0,\cdots,1)}_{e_n}\}$$

Entonces para todo

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) = {\color{red}v_1} e_1 + {\color{red}v_2} e_2 + {\color{red}v_3} e_3$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,\cdots,0)}_{e_3}, \cdots, \underbrace{(0,0,0,\cdots,1)}_{e_n}\}$$

Entonces para todo

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + \cdots + v_n e_n$$

Coordenadas de un vector en la base canónica

Cuando trabajamos con la base canónica C en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \{\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,\cdots,0)}_{e_3}, \cdots, \underbrace{(0,0,0,\cdots,1)}_{e_n}\}$$

Entonces para todo

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + \cdots + v_n e_n$$

Luego en la base canónica tenemos que

$$[v]_C = v^t$$

Vector de Coordenadas

Ejemplo Sea $B = \{(1,-1),(-1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y sea $[w]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para algún $w \in \mathbb{R}^2$. Podemos entonces conocer w.

Vector de Coordenadas

Ejemplo Sea $B = \{(1, -1), (-1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y sea $[w]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para algún $w \in \mathbb{R}^2$. Podemos entonces conocer w.

$$w = -1(1, -1) + 2(-1, 0) = (-3, 1)$$

Vector de Coordenadas

Ejemplo Sea $B = \{(1,-1),(-1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y sea $[w]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para algún $w \in \mathbb{R}^2$. Podemos entonces conocer w.

$$w = -1(1,-1) + 2(-1,0) = (-3,1)$$

Existen otras bases para $\mathbb{R}^2$.

Vector de Coordenadas

Ejemplo Sea $B = \{(1,-1),(-1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y sea $[w]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para algún $w \in \mathbb{R}^2$. Podemos entonces conocer w.

$$w = -1(1,-1) + 2(-1,0) = (-3,1)$$

Existen otras bases para $\mathbb{R}^2$.

¿Podemos encontrar el vector de coordenadas de w en otra base B_1, es decir $[w]_{B1}$?

Vector de Coordenadas

Ejemplo Sea $B = \{(1,-1),(-1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y sea $[w]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para algún $w \in \mathbb{R}^2$. Podemos entonces conocer w.

$$w = -1(1,-1) + 2(-1,0) = (-3,1)$$

Existen otras bases para $\mathbb{R}^2$.

¿Podemos encontrar el vector de coordenadas de w en otra base B_1, es decir $[w]_{B1}$?

¿Existe algún método que nos permita conocer $[w]_{B1}$ conociendo las coordenadas de w en la base B sin necesidad de calcular el vector w?

Matriz Cambio de Base

Dada dos bases

$$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ y } B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

de un espacio vectorial V de dimensión finita n.

Matriz Cambio de Base

Dada dos bases

$$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ y } B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

de un espacio vectorial V de dimensión finita n. Queremos **determinar** un procedimiento que nos permita conocer las coordenadas del vector w en la base B_2 conociendo las coordenadas de dicho vector en la base B_1

$$\text{conocemos } [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ y queremos hallar } [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Matriz cambio de base

Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dos bases de V.

Matriz cambio de base

Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dos bases de V.

Definición

La matriz

$$I_{B_1 B_2} = \left([v_1]_{B_2} \ldots [v_n]_{B_2} \right)$$

cuyas columnas son las vectores coordenadas $[v_1]_{B_2}, \ldots, [v_n]_{B_2}$ *se llama* **matriz cambio de base de la base** B_1 *a la base* B_2.

Matriz cambio de base

Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dos bases de V.

Definición

La matriz

$$I_{B_1B_2} = \left([v_1]_{B_2} \ldots [v_n]_{B_2}\right)$$

cuyas columnas son las vectores coordenadas $[v_1]_{B_2}, \ldots, [v_n]_{B_2}$ *se llama* **matriz cambio de base de la base** B_1 *a la base* B_2.

Definición

Para cada vector $v \in V$

$$[v]_{B_2} = I_{B_1B_2}.[v]_{B_1}.$$

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$.

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2), (0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1), (2,3)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

1. Debemos hallar las coordenadas de los vectores de la base B_1 en la base B_2. Supongamos que

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \text{ y } [(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2), (0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1), (2,3)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

1. Debemos hallar las coordenadas de los vectores de la base B_1 en la base B_2. Supongamos que

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \text{ y } [(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

$$(1,2) = c_{11}(1,1) + c_{21}(2,3)$$

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2), (0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1), (2,3)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

1. Debemos hallar las coordenadas de los vectores de la base B_1 en la base B_2. Supongamos que

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \text{ y } [(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

$$(1,2) \quad = c_{11}(1,1) + c_{21}(2,3) \quad \Rightarrow \begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases}$$

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2), (0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1), (2,3)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

1. Debemos hallar las coordenadas de los vectores de la base B_1 en la base B_2. Supongamos que

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \text{ y } [(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

$$(1,2) \quad = c_{11}(1,1) + c_{21}(2,3) \quad \Rightarrow \begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases}$$

$$(0,1) \quad = c_{21}(1,1) + c_{22}(2,3)$$

Matriz Cambio de Base

Ejemplo Dadas las bases $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

1. Debemos hallar las coordenadas de los vectores de la base B_1 en la base B_2. Supongamos que

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \text{ y } [(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

$$(1,2) = c_{11}(1,1) + c_{21}(2,3) \quad \Rightarrow \begin{cases} c_{11} + 2c_{21} &= 1 \\ c_{11} + 3c_{21} &= 2 \end{cases}$$

$$(0,1) = c_{21}(1,1) + c_{22}(2,3) \quad \Rightarrow \begin{cases} c_{12} + 2c_{22} &= 0 \\ c_{12} + 3c_{22} &= 1 \end{cases}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{12} + 2c_{22} & = 0 \\ c_{12} + 3c_{22} & = 1 \end{cases}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{12} + 2c_{22} & = 0 \\ c_{12} + 3c_{22} & = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{12} + 2c_{22} & = 0 \\ c_{12} + 3c_{22} & = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos resumir en un mismo sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{12} + 2c_{22} & = 0 \\ c_{12} + 3c_{22} & = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos resumir en un mismo sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{12} + 2c_{22} & = 0 \\ c_{12} + 3c_{22} & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos resumir en un mismo sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{12} + 2c_{22} & = 0 \\ c_{12} + 3c_{22} & = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos resumir en un mismo sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{21} & = 1 \\ c_{11} + 3c_{21} & = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{12} + 2c_{22} & = 0 \\ c_{12} + 3c_{22} & = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos resumir en un mismo sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$[(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (1,2) = (-1)\,(1,1) + 1\;(2,3) = (1,2)$$

$$[(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (1,2) = (-1)\,(1,1) + 1\ (2,3) = (1,2)$$

$$[(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (0,1) = (-2)\,(1,1) + 1\ (2,3) = (0,1)$$

Podemos verificar

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (1,2) = (-1)\,(1,1) + 1\ (2,3) = (1,2)$$

$$[(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (0,1) = (-2)\,(1,1) + 1\ (2,3) = (0,1)$$

Por lo tanto la matriz $I_{B_1 B_2}$ es

$$I_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (1,2) = (-1)\,(1,1) + 1\ (2,3) = (1,2)$$

$$[(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (0,1) = (-2)\,(1,1) + 1\ (2,3) = (0,1)$$

Por lo tanto la matriz $I_{B_1 B_2}$ es

$$I_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, hallar $[v]_{B_2}$

Podemos verificar

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (1,2) = (-1)\,(1,1) + 1\;(2,3) = (1,2)$$

$$[(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (0,1) = (-2)\,(1,1) + 1\;(2,3) = (0,1)$$

Por lo tanto la matriz $I_{B_1B_2}$ es

$$I_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, hallar $[v]_{B_2}$

$$[v]_{B_2} = I_{B_1B_2}.\,[v]_{B_1}$$

Podemos verificar

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (1,2) = (-1)\,(1,1) + 1\;(2,3) = (1,2)$$

$$[(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (0,1) = (-2)\,(1,1) + 1\;(2,3) = (0,1)$$

Por lo tanto la matriz $I_{B_1 B_2}$ es

$$I_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, hallar $[v]_{B_2}$

$$[v]_{B_2} = I_{B_1 B_2}.\,[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Matriz Cambio de Base

Hallemos el vector v. Como conocemos sus coordenadas en las dos bases podemos calcularlo utilizando cualquiera de las bases

Matriz Cambio de Base

Hallemos el vector v. Como conocemos sus coordenadas en las dos bases podemos calcularlo utilizando cualquiera de las bases

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

Hallemos el vector v. Como conocemos sus coordenadas en las dos bases podemos calcularlo utilizando cualquiera de las bases

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = (1)\,(1,2) + 3\;(0,1) = (1,5)$$

Matriz Cambio de Base

Hallemos el vector v. Como conocemos sus coordenadas en las dos bases podemos calcularlo utilizando cualquiera de las bases

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = (1)\,(1,2) + 3\ (0,1) = (1,5)$$

$$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matriz Cambio de Base

Hallemos el vector v. Como conocemos sus coordenadas en las dos bases podemos calcularlo utilizando cualquiera de las bases

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = (1)\,(1,2) + 3\;(0,1) = (1,5)$$

$$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = (-7)\,(1,1) + 4\;(2,3) = (1,5)$$

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, dadas las bases
$B_1 = \{(6,3,3)\,,(4,-1,3)\,,(5,5,2)\}$ y $B_2 = \{(2,0,1)\,,(1,2,0)\,(1,1,1)\}\,.$

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, dadas las bases
$B_1 = \{(6, 3, 3), (4, -1, 3), (5, 5, 2)\}$ y $B_2 = \{(2, 0, 1), (1, 2, 0)(1, 1, 1)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, dadas las bases
$B_1 = \{(6,3,3),(4,-1,3),(5,5,2)\}$ y $B_2 = \{(2,0,1),(1,2,0)(1,1,1)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3{,}0)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, dadas las bases
$B_1 = \{(6,3,3), (4,-1,3), (5,5,2)\}$ y $B_2 = \{(2,0,1), (1,2,0) (1,1,1)\}$.

1. Determinar la matriz cambio de base $I_{B_1 B_2}$.
2. Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3,0)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

$$(6,3,3) = \alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(1,2,0) + \alpha_3(1,1,1)$$

El sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ejemplo Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, dadas las bases
$B_1 = \{(6,3,3)\,,(4,-1,3)\,,(5,5,2)\}$ y $B_2 = \{(2,0,1)\,,(1,2,0)\,(1,1,1)\}$

$$(4,-1,3) = \beta_1(2,0,1) + \beta_2(1,2,0) + \beta_3(1,1,1)$$

El sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ejemplo Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, dadas las bases
$B_1 = \{(6,3,3),(4,-1,3),(5,5,2)\}$ y $B_2 = \{(2,0,1),(1,2,0)(1,1,1)\}$

$$(4,-1,3) = \beta_1(2,0,1) + \beta_2(1,2,0) + \beta_3(1,1,1)$$

El sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(5,5,2) = \gamma_1(2,0,1) + \gamma_2(1,2,0) + \gamma_3(1,1,1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Podemos resumirlo en el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Escribimos la matriz ampliada y resolvemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Llevar a forma escalón reducida (en este caso la identidad por?)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow I_{B1B2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que $[v]_{B_1} = (1,3,0)^t$, hallar $[v]_{B_2}$.

$$\begin{aligned} [v]_{B_2} &= I_{B_1B_2}.[v]_{B_1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Son COORDENADAS, ¿Podemos verificar que el vector es $v = (18, 0, 12)$?

Matriz Cambio de Base

Observación:

Si $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$

son bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces se puede probar que los conjuntos de vectores coordenadas

$$\left\{[v_1]_{B_2}, \dots, [v_n]_{B_2}\right\} \text{ y } \left\{[u_1]_{B_1}, \dots, [u_n]_{B_1}\right\}$$

son bases de $\mathbb{R}^n$.

Matriz Cambio de Base

Observación:

Si $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$
son bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces se puede probar que los conjuntos de vectores coordenadas

$$\left\{[v_1]_{B_2}, \ldots, [v_n]_{B_2}\right\} \text{ y } \left\{[u_1]_{B_1}, \ldots, [u_n]_{B_1}\right\}$$

son bases de $\mathbb{R}^n$.
Por lo tanto las matrices

$$I_{B_1 B_2} \text{ y } I_{B_2 B_1}$$

tienen inversa y además

$$I_{B_1 B_2} = \left(I_{B_2 B_1}\right)^{-1} \text{ y } I_{B_2 B_1} = \left(I_{B_1 B_2}\right)^{-1}.$$

Matriz Cambio de Base

Observación:

Si $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$
son bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces se puede probar que los conjuntos de vectores coordenadas

$$\left\{[v_1]_{B_2}, \ldots, [v_n]_{B_2}\right\} \text{ y } \left\{[u_1]_{B_1}, \ldots, [u_n]_{B_1}\right\}$$

son bases de $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto las matrices

$$I_{B_1 B_2} \text{ y } I_{B_2 B_1}$$

tienen inversa y además

$$I_{B_1 B_2} = \left(I_{B_2 B_1}\right)^{-1} \text{ y } I_{B_2 B_1} = \left(I_{B_1 B_2}\right)^{-1}.$$

Luego podemos probar que

$$[v]_{B_2} = I_{B_1 B_2} [v]_{B_1} \text{ y } [v]_{B_1} = \left(I_{B_1 B_2}\right)^{-1} [v]_{B_2}.$$

Adicional ejemplo

Para ver ustedes! Encontrar las coordenadas(o vector coordenadas) para un vector genérico en una base, como ya explicamos en la clase anterior

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B=\{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

o lo que es equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & x \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & y \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & z \end{array} \right.$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

o lo que es equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & x \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & y \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & z \end{array} \right. \qquad \to \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

o lo que es equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & x \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & y \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & z \end{array} \right. \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x-3z-6y}{8} \\ \frac{x+z+2y}{8} \\ \frac{x+z-2y}{4} \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(3,2,1) + \lambda_3(0,-1,2)$$

o lo que es equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & x \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & y \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & z \end{array}\right. \qquad \to \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x-3z-6y}{8} \\ \frac{x+z+2y}{8} \\ \frac{x+z-2y}{4} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$[(x,y,z)]_B = \left(\frac{5x-3z-6y}{8}, \frac{x+z+2y}{8}, \frac{x+z-2y}{4}\right)^t$$

Coordenadas de un vector

Es decir,

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

$$(1,0,0) = \left(\frac{5}{8}\right)(1,0,-1) + \left(\frac{1}{8}\right)(3,2,1) + \left(\frac{1}{4}\right)(0,-1,2)$$

o lo que es equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 1 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector

Es decir,

Ejemplo Sea $B = \{(1,0,-1),(3,2,1),(0,-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Busquemos $[(x,y,z)]_B$.

$$(1,0,0) = \left(\frac{5}{8}\right)(1,0,-1) + \left(\frac{1}{8}\right)(3,2,1) + \left(\frac{1}{4}\right)(0,-1,2)$$

o lo que es equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 1 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$[(1,0,0)]_B = \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)^t$$