Álgebra Lineal

Suma directa. Subespacios fundamentales

Suma directa

Definición

Diremos que la suma de los subespacios S_1 *y* S_2 *de* $\mathbb{V}$ *es* **directa** *si la intersección de los subespacios es el vector nulo. Es decir,*

$$S_1 + S_2 \text{ es directa si } S_1 \cap S_2 = \left\{ \vec{0} \right\} \text{ y } \mathbb{V} = S_1 + S_2$$

Para indicar que la suma de los subespacios S_1 *y* S_2 *es directa escribimos*

$$S_1 \oplus S_2$$

Suma directa

Definición

Diremos que la suma de los subespacios S_1 y S_2 de $\mathbb{V}$ es **directa** *si la intersección de los subespacios es el vector nulo. Es decir,*

$$S_1 + S_2 \text{ es directa si } S_1 \cap S_2 = \left\{\vec{0}\right\} \text{ y } \mathbb{V} = S_1 + S_2$$

Para indicar que la suma de los subespacios S_1 y S_2 es directa escribimos

$$S_1 \oplus S_2$$

Cuando la suma de dos subespacios S_1 y S_2 es directa, cualquier vector $v \in S_1 \oplus S_2$ se expresa en forma *única* como la suma de un vector de S_1 más un vector de S_2.

Teorema de la Dimensión

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V. Entonces

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Teorema de la Dimensión

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V. Entonces

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Si $S_1 \cap S_2 = \left\{\vec{0}\right\}$, entonces

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2.$$

Ejemplo Hallar la intersección y la suma de los subespacios dados. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} \text{ y } S_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$$

Ejemplo Hallar la intersección y la suma de los subespacios dados. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} \text{ y } S_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$$

Para hallar $S_1 \cap S_2$, debemos buscar las ecuaciones implícitas de S_2:

$$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R} \colon (x, y, z) = \alpha(1, 1, 1)$$

Ejemplo Hallar la intersección y la suma de los subespacios dados. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} \text{ y } S_2 = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Para hallar $S_1 \cap S_2$, debemos buscar las ecuaciones implícitas de S_2:

$$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \colon (x, y, z) = \alpha(1, 1, 1)$$

De donde obtenemos sus paramétricas

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Ejemplo Hallar la intersección y la suma de los subespacios dados. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} \text{ y } S_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$$

Para hallar $S_1 \cap S_2$, debemos buscar las ecuaciones implícitas de S_2:

$$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R} \colon (x, y, z) = \alpha(1, 1, 1)$$

De donde obtenemos sus paramétricas

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo Hallar la intersección y la suma de los subespacios dados. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} \text{ y } S_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$$

Para hallar $S_1 \cap S_2$, debemos buscar las ecuaciones implícitas de S_2:

$$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}\colon (x, y, z) = \alpha(1, 1, 1)$$

De donde obtenemos sus paramétricas

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si escalonamos para buscar las implícitas, vemos que

$$\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{array} \sim \begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y - x \\ 0 & z - x \end{array}$$

Ejemplo Hallar la intersección y la suma de los subespacios dados. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} \text{ y } S_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$$

Para hallar $S_1 \cap S_2$, debemos buscar las ecuaciones implícitas de S_2:

$$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R}\colon (x, y, z) = \alpha(1, 1, 1)$$

De donde obtenemos sus paramétricas

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si escalonamos para buscar las implícitas, vemos que

$$\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{array} \sim \begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y - x \\ 0 & z - x \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \qquad \textbf{Ecs. Implicitas}$$

Luego

$$(x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Luego

$$(x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right.$$

Luego

$$(x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

Luego

$$(x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \Rightarrow (x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

Es decir, ambos espacios están en suma directa, en símbolos

$$S_1 \oplus S_2$$

Luego

$$(x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

Es decir, ambos espacios están en suma directa, en símbolos

$$S_1 \oplus S_2$$

Y además

$$\dim(S_1+S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) = 2+1 = 3$$

Luego

$$(x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

Es decir, ambos espacios están en suma directa, en símbolos

$$S_1 \oplus S_2$$

Y además

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) = 2 + 1 = 3$$

Por lo tanto,

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$x = -y - z$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \Rightarrow$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle \Rightarrow S_1 + S_2 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\rangle$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle \Rightarrow S_1 + S_2 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\rangle$$

veamos si son LI o LD.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) \neq 0$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle \Rightarrow S_1 + S_2 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\rangle$$

veamos si son LI o LD.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) \neq 0 \text{ por lo tanto son LI}$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \Rightarrow S_1 + S_2 = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$$

veamos si son LI o LD.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) \neq 0 \text{ por lo tanto son LI}$$

Una base para $S_1 + S_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \Rightarrow S_1 + S_2 = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$$

veamos si son LI o LD.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) \neq 0 \text{ por lo tanto son LI}$$

Una base para $S_1 + S_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

$$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$$

En efecto, comprobaremos que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

Para hallar $S_1 + S_2$, hallamos los generadores de S_1 para luego unir las bases de S_1 y S_2:

$$x = -y - z \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z$$

Entonces

$$S_1 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle \Rightarrow S_1 + S_2 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\rangle$$

veamos si son LI o LD.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) \neq 0 \text{ por lo tanto son LI}$$

Una base para $S_1 + S_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

$$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$$

$Dim(S_1 + S_2) = 3$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

Ejemplo Hallar el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z & = 0 \\ 2x + y + 3z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

Ejemplo Hallar el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

Ejemplo Hallar el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

Ejemplo Hallar el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x+2y+4z &= 0 \\ 2x+y+3z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

Ejemplo Hallar el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z & = 0 \\ 2x + y + 3z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases}$$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

Ejemplo Hallar el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z & = 0 \\ 2x + y + 3z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + 2z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = -2z \\ y & = z \end{cases}$$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

Ejemplo Hallar el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= -2z \\ y &= z \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (-2z, z, z) = z\,(-2, 1, 1)\,.$$

Entonces el conjunto solución de soluciones del sistema es la recta

$$\mathrm{N}(A) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda\,(-2, 1, 1)\right\} = \langle(-2, 1, 1)\rangle,$$

Notemos que $\mathrm{N}(A)$ es efectivamente un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Entonces el conjunto solución de soluciones del sistema es la recta

$$\mathrm{N}(A) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda\,(-2, 1, 1)\right\} = \langle(-2, 1, 1)\rangle,$$

Notemos que $\mathrm{N}(A)$ es efectivamente un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

¿El conjunto solución de un sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es un subespacio?

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\mathrm{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A.\vec{x} = \vec{0} \right\},$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, llamado **espacio nulo** de la matriz A.

Subespacio Nulo de una Matriz: N(A)

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\mathrm{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A.\vec{x} = \vec{0} \right\},$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, llamado **espacio nulo** de la matriz A.
Nota: Cuando consideremos los vectores del espacio nulo $\mathrm{N}(A)$ los escribiremos como vectores filas, aunque en la ecuación $A\vec{x} = \vec{0}$ corresponda a vectores columna.

Espacios nulos en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = 0 \end{cases}$$

Espacios nulos en $\mathbb{R}^3$

$$N(A)$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = 0 \end{cases}$$

Espacios nulos en $\mathbb{R}^3$

$$N(A) \quad = \{(0,0,0)\} \circ$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = 0 \end{cases}$$

Espacios nulos en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} N(A) &= \{(0,0,0)\} \text{ o} \\ \\ N(A) &= \langle (x_1, y_1, z_1) \rangle \quad \textit{recta}, \text{ o} \end{aligned}$$

Espacios nulos en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N(A) &= \{(0,0,0)\} \text{ o} \\ N(A) &= \langle (x_1, y_1, z_1) \rangle \quad \textit{recta}, \text{ o} \\ N(A) &= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \quad \textit{plano} \end{aligned}$$

Espacio Fila y Espacio Columna de una Matriz

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \dots & \vec{c}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)
\end{array}
$$

Espacio Fila y Espacio Columna de una Matriz

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \dots & \vec{c}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{array} & \begin{array}{c} \to \\ \to \\ \\ \to \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \end{array}$$

Definición

- *El* **espacio columna** *de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columnas de A:*

$$\mathrm{Co}(A) = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n \rangle .$$

Espacio Fila y Espacio Columna de una Matriz

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \dots & \vec{c}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{cc} \vec{f}_1 & \rightarrow \\ \vec{f}_2 & \rightarrow \\ \vdots & \\ \vec{f}_m & \rightarrow \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \end{array}$$

Definición

- *El* **espacio columna** *de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columnas de A:*

$$\mathrm{Co}(A) = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n \rangle .$$

- *El* **espacio fila** *es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A:*

$$\mathrm{Fi}(A) = \mathrm{R}(A) = \left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m \right\rangle .$$

Ejemplo Determinar $\mathrm{Co}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{N}(A)$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Ejemplo Determinar $\mathrm{Co}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{N}(A)$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Describimos utilizando los generadores

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1), (1,2,-1,3), (1,5,-2,8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ejemplo Determinar $\mathrm{Co}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{N}(A)$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Describimos utilizando los generadores

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1), (1,2,-1,3), (1,5,-2,8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ejemplo Determinar $\mathrm{Co}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{N}(A)$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Describimos utilizando los generadores

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1), (1,2,-1,3), (1,5,-2,8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ahora queremos hallar una base para cada espacio. Es decir, queremos determinar un conjunto de generadores cuyos vectores sean linealmente independiente.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \text{cantidad de filas no nulas después de un escalonamiento} \\ &= \end{aligned}$$

Ejemplo Determinar $\mathrm{Co}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{N}(A)$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Describimos utilizando los generadores

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1), (1,2,-1,3), (1,5,-2,8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ahora queremos hallar una base para cada espacio. Es decir, queremos determinar un conjunto de generadores cuyos vectores sean linealmente independiente.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \text{cantidad de filas no nulas después de un escalonamiento} \\ &= \text{cantidad de vectores filas linealmente independientes} \\ &= \end{aligned}$$

Ejemplo Determinar $\mathrm{Co}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{N}(A)$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Describimos utilizando los generadores

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1), (1,2,-1,3), (1,5,-2,8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ahora queremos hallar una base para cada espacio. Es decir, queremos determinar un conjunto de generadores cuyos vectores sean linealmente independiente.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \text{cantidad de filas no nulas después de un escalonamiento} \\ &= \text{cantidad de vectores filas linealmente independientes} \\ &= \text{cantidad de vectores columnas linealmente independientes} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \color{blue}{1} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \color{blue}{3} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2 \text{ dos vectores LI}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{rg}(A) = 2 \text{ dos vectores LI}$$

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1)\,,(1,2,-1,3)\rangle = \left\langle \left(1,0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right),(0,3,-1,5)\right\rangle.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{rg}(A) = 2 \text{ dos vectores LI}$$

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1), (1,2,-1,3) \rangle = \left\langle \left(1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), (0,3,-1,5) \right\rangle.$$

Para el subespacio $\mathrm{Co}(A)$ debemos elegir los vectores columna de A que correspondan a la misma ubicación que los pivotes en una forma escalonada de A, ¿por qué?

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{rg}(A) = 2 \text{ dos vectores LI}$$

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2, -1, 1, -1), (1, 2, -1, 3) \rangle = \left\langle \left(1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), (0, 3, -1, 5) \right\rangle .$$

Para el subespacio $\mathrm{Co}(A)$ debemos elegir los vectores columna de A que correspondan a la misma ubicación que los pivotes en una forma escalonada de A, ¿por qué?

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{rg}(A) = 2 \text{ dos vectores LI}$$

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (-2,-1,1,-1), (1,2,-1,3) \rangle = \left\langle \left(1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), (0,3,-1,5) \right\rangle.$$

Para el subespacio $\mathrm{Co}(A)$ debemos elegir los vectores columna de A que correspondan a la misma ubicación que los pivotes en una forma escalonada de A, ¿por qué?

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \color{blue}{1} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \color{blue}{3} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}w & = 0 \\ 3y - z + 5w & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w \\ y & = \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \end{cases}$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}w & = 0 \\ 3y - z + 5w & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w \\ y & = \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \end{cases}$$

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w, \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w, z, w \right) =$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}w & = 0 \\ 3y - z + 5w & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w \\ y & = \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \end{cases}$$

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w, \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w, z, w\right) = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}w & = 0 \\ 3y - z + 5w & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w \\ y & = \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \end{cases}$$

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w, \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w, z, w\right) = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A) &= \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, w) = \alpha\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + \beta\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)\right\} \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right) \right\rangle \end{aligned}$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}w & = 0 \\ 3y - z + 5w & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w \\ y & = \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \end{cases}$$

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w, \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w, z, w\right) = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A) &= \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, w) = \alpha\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + \beta\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)\right\} \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right) \right\rangle \end{aligned}$$

Observación:

$$\mathrm{rg}(A) = \dim[\mathrm{Fi}(A)] = \dim[\mathrm{Co}(A)]$$

$$\dim[\mathrm{N}(A)] + \dim[\mathrm{Co}(A)] = 4 = \dim(R^4)$$

Ejemplo Determinemos $\mathrm{N}(A)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}w & = 0 \\ 3y - z + 5w & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w \\ y & = \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \end{cases}$$

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}w, \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w, z, w\right) = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A) &= \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, w) = \alpha\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + \beta\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)\right\} \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right) \right\rangle \end{aligned}$$

Observación:

$$\mathrm{rg}(A) = \dim[\mathrm{Fi}(A)] = \dim[\mathrm{Co}(A)]$$

$$\dim[\mathrm{N}(A)] + \dim[\mathrm{Co}(A)] = 4 = \dim(R^4)$$

Notemos que

$$\mathrm{Fi}(A) = \mathrm{Co}(A^t) \text{ y } \mathrm{Fi}(A^t) = \mathrm{Co}(A).$$

Consideremos la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y sean $\vec{c}_1,\vec{c}_2,\ldots,\vec{c}_n$ sus vectores columnas es decir

$$A = (\vec{c}_1\ \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n)$$

Observemos

$$\vec{b} \in \mathrm{Co}(A) \quad \text{sii} \quad \begin{array}{l}\text{existen } x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} \text{ tales que} \\ \vec{b} = x_1\vec{c}_1 + \cdots + x_n\vec{c}_n\end{array}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Co}(A) = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m : A\,\vec{x} = \vec{b} \text{ es compatible } \right\}.$$

Los espacios fila y columna son subespacios por la propia definición de subespacios generados.

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n)$$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \dots, C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Podemos definir 4 subespacios a la matriz A:

1. $\mathrm{N}(A) = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{0}\}$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Podemos definir 4 subespacios a la matriz A:

1. $\mathrm{N}(A) = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{0}\}$
2. $\mathrm{Fi}(A) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Podemos definir 4 subespacios a la matriz A:

1. $\mathrm{N}(A) = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{0}\}$
2. $\mathrm{Fi}(A) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Podemos definir 4 subespacios a la matriz A:

1. $\mathrm{N}(A) = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{0}\}$
2. $\mathrm{Fi}(A) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
3. $\mathrm{Co}(A) = \langle C_1, .., C_n \rangle$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Podemos definir 4 subespacios a la matriz A:

1. $\mathrm{N}(A) = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{0}\}$
2. $\mathrm{Fi}(A) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
3. $\mathrm{Co}(A) = \langle C_1, .., C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz de $m \times n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Podemos definir 4 subespacios a la matriz A:

1. $\mathrm{N}(A) = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{0}\}$
2. $\mathrm{Fi}(A) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
3. $\mathrm{Co}(A) = \langle C_1, .., C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$
4. $\mathrm{N}(A^t) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon A^t\vec{x} = \vec{0}\}$

Subespacios Fundamentales

Ejemplo Determinar cada subespacio fundamental de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Determinar cada subespacio fundamental de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinamos primero $\mathrm{N(A)}$:

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N}(A) \text{ si y solo si } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Determinar cada subespacio fundamental de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinamos primero $\mathrm{N(A)}$:

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N}(A) \text{ si y solo si } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, debemos resolver el sistema homogéneo.

Subespacios Fundamentales

Si planteamos la matriz ampliada y la escalonamos, obtememos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si planteamos la matriz ampliada y la escalonamos, obtememos

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$$

Subespacios Fundamentales

Si planteamos la matriz ampliada y la escalonamos, obtememos

$$\left.\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N}(\mathrm{A}) \text{ si y solo si } (x, y, z, t) = (-z, -z + t, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1)$$

Subespacios Fundamentales

Si planteamos la matriz ampliada y la escalonamos, obtememos

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N(A)} \text{ si y solo si } (x, y, z, t) = (-z, -z + t, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1)$$

Es decir,

$$\mathrm{N(A)} = \langle(-1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\rangle$$

Subespacios Fundamentales

Si planteamos la matriz ampliada y la escalonamos, obtememos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N}(\mathrm{A}) \text{ si y solo si } (x, y, z, t) = (-z, -z + t, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1)$$

Es decir,

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \langle (-1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

Para determinar el subespacio fila, notemos que del mismo escalonamiento

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} {\color{red}1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Subespacios Fundamentales

Si planteamos la matriz ampliada y la escalonamos, obtememos

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+z-t=0 \end{cases}$$

De donde obtenemos

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{N(A)} \text{ si y solo si } (x,y,z,t) = (-z,-z+t,z,t) = z(-1,-1,1,0) + t(0,1,0,1)$$

Es decir,

$$\mathrm{N(A)} = \langle (-1,-1,1,0),(0,1,0,1) \rangle$$

Para determinar el subespacio fila, notemos que del mismo escalonamiento

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|c} \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Fi(A)} = \langle (1,0,1,0),(0,1,1,-1) \rangle$$

Subespacios Fundamentales

Para determinar el subespacio columna de A, utilizamos el mismo escalonamiento ya que

$$\left.\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccr|c} \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Subespacios Fundamentales

Para determinar el subespacio columna de A, utilizamos el mismo escalonamiento ya que

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Co(A)} = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$$

Subespacios Fundamentales

Para determinar el subespacio columna de A, utilizamos el mismo escalonamiento ya que

$$\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccr|c} \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \mathrm{Co(A)} = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$$

Por último, tenemos

$$\mathrm{N(A^t)} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Subespacios Fundamentales

Para determinar el subespacio columna de A, utilizamos el mismo escalonamiento ya que

$$\left.\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccr|c} \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{Co(A)} = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$$

Por último, tenemos

$$\mathrm{N(A^t)} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo, vemos que

$$\left.\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Subespacios Fundamentales

Para determinar el subespacio columna de A, utilizamos el mismo escalonamiento ya que

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \mathrm{Co(A)} = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$$

Por último, tenemos

$$\mathrm{N(A^t)} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo, vemos que

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Subespacios Fundamentales

Para determinar el subespacio columna de A, utilizamos el mismo escalonamiento ya que

$$\left.\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{Co(A)} = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$$

Por último, tenemos

$$\mathrm{N(A^t)} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo, vemos que

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

De donde vemos que

$$\mathrm{N(A^t)} = \langle (-1,-1,1) \rangle$$

Subespacios Fundamentales

Observación Notemos que para cada matriz A podemos asociarle 4 subespacios

$$A \longrightarrow \mathrm{N(A), Fi(A), Co(A), N(A^t)}$$

Subespacios Fundamentales

Observación Notemos que para cada matriz A podemos asociarle 4 subespacios

$$A \longrightarrow \mathrm{N(A)}, \mathrm{Fi(A)}, \mathrm{Co(A)}, \mathrm{N(A^t)}$$

Además para un subespacio S vemos que

$$S = \langle (1,0,-1),(0,1,1) \rangle$$

Subespacios Fundamentales

Observación Notemos que para cada matriz A podemos asociarle 4 subespacios

$$A \longrightarrow \mathrm{N(A), Fi(A), Co(A), N(A^t)}$$

Además para un subespacio S vemos que

$$S = \langle (1,0,-1),(0,1,1) \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2 \\ z = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \qquad \textbf{Ecs. Paramétricas}$$

Subespacios Fundamentales

Observación Notemos que para cada matriz A podemos asociarle 4 subespacios

$$A \longrightarrow \mathrm{N(A)}, \mathrm{Fi(A)}, \mathrm{Co(A)}, \mathrm{N(A^t)}$$

Además para un subespacio S vemos que

$$S = \langle (1,0,-1), (0,1,1) \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2 \\ z = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \quad \textbf{Ecs. Paramétricas}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Subespacios Fundamentales

Observación Notemos que para cada matriz A podemos asociarle 4 subespacios

$$A \longrightarrow \mathrm{N(A), Fi(A), Co(A), N(A^t)}$$

Además para un subespacio S vemos que

$$S = \langle (1,0,-1),(0,1,1) \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2 \\ z = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \qquad \textbf{Ecs. Paramétricas}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dicho sistema tiene solución si y solo si

$$\textbf{Ecs. implícitas } x - y + z = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1,-1,1)}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Subespacios Fundamentales

Observación Notemos que para cada matriz A podemos asociarle 4 subespacios

$$A \longrightarrow \mathrm{N(A)}, \mathrm{Fi(A)}, \mathrm{Co(A)}, \mathrm{N(A^t)}$$

Además para un subespacio S vemos que

$$S = \langle (1,0,-1),(0,1,1) \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2 \\ z = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \qquad \textbf{Ecs. Paramétricas}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dicho sistema tiene solución si y solo si

$$\textbf{Ecs. implícitas } x - y + z = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1,-1,1)}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Notemos que

$$S = \mathrm{Co(B)} = \mathrm{N(A)}$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Fi}(A) &= \langle F_1, .., F_m \rangle \\ \mathrm{N}(A) &= \{\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{0}\} \\ \mathrm{Co(A)} &= \langle C_1, .., C_n \rangle \\ \mathrm{N}(A^t) &= \{\vec{x} = (x_1, .., x_m) \in \mathbb{R}^m \colon A^t\vec{x} = \vec{0}\} \end{aligned}$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{N(A)}^{\perp} = \mathrm{Fi(A)}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{N(A)}^{\perp} = \mathrm{Fi(A)}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$(x_1, .., x_n) \in \mathrm{N(A)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{N(A)}^{\perp} = \mathrm{Fi(A)}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$(x_1, .., x_n) \in \mathrm{N(A)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$F_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad F_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad \cdots \quad , F_m \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{N}(\mathrm{A})^{\perp} = \mathrm{Fi}(\mathrm{A})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$(x_1, .., x_n) \in \mathrm{N}(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$F_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad F_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad \cdots \quad , F_m \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

De donde obtenemos que

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \mathrm{Fi}(\mathrm{A})^{\perp} \quad \text{y} \quad \mathrm{N}(\mathrm{A})^{\perp} = \mathrm{Fi}(\mathrm{A})$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{Co}(\mathrm{A})^{\perp} = \mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}})$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$

Usando, la identidad anterior, y teniendo en cuenta que $\mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A)$ entonces

$$\mathrm{Co(A)}^{\perp}$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$

Usando, la identidad anterior, y teniendo en cuenta que $\mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A)$ entonces

$$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \left(\mathrm{Fi}(A^t)\right)^{\perp}$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$

Usando, la identidad anterior, y teniendo en cuenta que $\mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A)$ entonces

$$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \left(\mathrm{Fi}(A^t)\right)^{\perp} = \mathrm{N}(A^t)$$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$

Usando, la identidad anterior, y teniendo en cuenta que $\mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A)$ entonces

$$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \left(\mathrm{Fi}(A^t)\right)^{\perp} = \mathrm{N}(A^t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$	Subespacios de $\mathbb{R}^m$
$\mathrm{Fi(A)}$	$\mathrm{Co(A)}$
$\mathrm{N(A)}$	$\mathrm{N(A^t)}$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$

Usando, la identidad anterior, y teniendo en cuenta que $\mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A)$ entonces

$$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \left(\mathrm{Fi}(A^t)\right)^{\perp} = \mathrm{N}(A^t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$	Subespacios de $\mathbb{R}^m$
$\mathrm{Fi(A)}$	$\mathrm{Co(A)}$
$\mathrm{N(A)}$	$\mathrm{N(A^t)}$

1. $\mathrm{Fi(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A)}$ y $\mathrm{N(A)}^{\perp} = \mathrm{Fi(A)}$
2. $\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$ y $\mathrm{N(A^t)}^{\perp} = \mathrm{Co(A)}$

Relación de ortogonalidad de los subespacios fundamentales de una matriz

$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$

Usando, la identidad anterior, y teniendo en cuenta que $\mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A)$ entonces

$$\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \left(\mathrm{Fi}(A^t)\right)^{\perp} = \mathrm{N}(A^t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$	Subespacios de $\mathbb{R}^m$
$\mathrm{Fi(A)}$	$\mathrm{Co(A)}$
$\mathrm{N(A)}$	$\mathrm{N(A^t)}$

1 $\mathrm{Fi(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A)}$ y $\mathrm{N(A)}^{\perp} = \mathrm{Fi(A)}$
2 $\mathrm{Co(A)}^{\perp} = \mathrm{N(A^t)}$ y $\mathrm{N(A^t)}^{\perp} = \mathrm{Co(A)}$

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \quad \mathbb{R}^m = \mathrm{N(A^t)} \oplus \mathrm{Co(A)}$$

Subespacios fundamentales para calcular complemento ortogonal

Sea $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$ un subespacio del espacio vectorial, sabemos que

$$S = \mathrm{Fi(A)} \text{ para la matriz } A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_k- \end{pmatrix}$$

Subespacios Fundamentales

Subespacios fundamentales para calcular complemento ortogonal

Sea $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$ un subespacio del espacio vectorial, sabemos que

$$S = \mathrm{Fi(A)} \text{ para la matriz } A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_k- \end{pmatrix}$$

Si queremos calcular $S^\perp$

$$S^\perp = \mathrm{Fi(A)}^\perp = \mathrm{N(A)}$$

Subespacios fundamentales para calcular complemento ortogonal

Sea $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$ un subespacio del espacio vectorial, sabemos que

$$S = \mathrm{Fi(A)} \text{ para la matriz } A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_k- \end{pmatrix}$$

Si queremos calcular $S^\perp$

$$S^\perp = \mathrm{Fi(A)}^\perp = \mathrm{N(A)}$$

Ejemplo Calcular el complemento ortogonal de
$S = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0) \rangle$.
Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Subespacios fundamentales para calcular complemento ortogonal

Sea $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$ un subespacio del espacio vectorial, sabemos que

$$S = \mathrm{Fi(A)} \text{ para la matriz } A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_k- \end{pmatrix}$$

Si queremos calcular $S^\perp$

$$S^\perp = \mathrm{Fi(A)}^\perp = \mathrm{N(A)}$$

Ejemplo Calcular el complemento ortogonal de
$S = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \rangle$.
Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \mathrm{Fi(A)}$$

Subespacios fundamentales para calcular complemento ortogonal

Sea $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$ un subespacio del espacio vectorial, sabemos que

$$S = \mathrm{Fi(A)} \text{ para la matriz } A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_k- \end{pmatrix}$$

Si queremos calcular $S^\perp$

$$S^\perp = \mathrm{Fi(A)}^\perp = \mathrm{N(A)}$$

Ejemplo Calcular el complemento ortogonal de $S = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0) \rangle$.
Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow S^\perp = \mathrm{Fi(A)}^\perp = \mathrm{N(A)}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si resolvemos el sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N(A)} \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (0, -t, 0, t) = t\,(0, -1, 0, 1)$$

Es decir

$$S^{\perp} = \langle (0, -1, 0, 1) \rangle$$

Si resolvemos el sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{N(A)} \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (0,-t,0,t) = t\,(0,-1,0,1)$$

Es decir

$$S^{\perp} = \langle (0,-1,0,1) \rangle$$

Observación

$$\mathbb{R}^4 = S \oplus S^{\perp}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N(A)} \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (0, -t, 0, t) = t\,(0, -1, 0, 1)$$

Es decir

$$S^{\perp} = \langle (0, -1, 0, 1) \rangle$$

Observación

$$\mathbb{R}^4 = S \oplus S^{\perp} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(S) + \dim(S^{\perp})$$

Si resolvemos el sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$(x, y, z, t) \in \mathrm{N(A)} \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (0, -t, 0, t) = t\,(0, -1, 0, 1)$$

Es decir

$$S^{\perp} = \langle (0, -1, 0, 1) \rangle$$

Observación

$$\mathbb{R}^4 = S \oplus S^{\perp} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(S) + \dim(S^{\perp}) \Rightarrow 4 = 3 + 1$$

Subespacios Fundamentales

¿Qué pasa si S está expresado implícitamente?

Si S es un subespacio definido implícitamente, entonces existe una matriz A tal que

$$S = \mathrm{N(A)}$$

Subespacios Fundamentales

¿Qué pasa si S está expresado implícitamente?

Si S es un subespacio definido implícitamente, entonces existe una matriz A tal que

$$S = \mathrm{N(A)}$$

Por lo tanto,

$$S^{\perp} = (\mathrm{N(A)})^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)$$

¿Qué pasa si S está expresado implícitamente?

Si S es un subespacio definido implícitamente, entonces existe una matriz A tal que

$$S = \mathrm{N(A)}$$

Por lo tanto,

$$S^{\perp} = (\mathrm{N(A)})^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)$$

Ejemplo Determinar el complemento ortogonal de la recta en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

¿Qué pasa si S está expresado implícitamente?

Si S es un subespacio definido implícitamente, entonces existe una matriz A tal que

$$S = \mathrm{N}(\mathrm{A})$$

Por lo tanto,

$$S^{\perp} = (\mathrm{N}(\mathrm{A}))^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)$$

Ejemplo Determinar el complemento ortogonal de la recta en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $r = \mathrm{N}(\mathrm{A})$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué pasa si S está expresado implícitamente?

Si S es un subespacio definido implícitamente, entonces existe una matriz A tal que

$$S = \mathrm{N(A)}$$

Por lo tanto,

$$S^{\perp} = (\mathrm{N(A)})^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)$$

Ejemplo Determinar el complemento ortogonal de la recta en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $r = \mathrm{N(A)}$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r^{\perp} = \mathrm{Fi(A)} = \langle (1,-1,1),(0,1,1) \rangle$$

Luego, $r^\perp$ es el plano generado por las filas de dicha matriz, es decir

$$r^\perp = \langle (1, -1, 1), (0, 1, 1) \rangle$$

Luego, $r^{\perp}$ es el plano generado por las filas de dicha matriz, es decir

$$r^{\perp} = \langle (1, -1, 1), (0, 1, 1) \rangle$$

Por lo tanto

$$(x, y, z) \in r^{\perp} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \colon (x, y, z) = \alpha_1(1, -1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1)$$

Luego, $r^{\perp}$ es el plano generado por las filas de dicha matriz, es decir

$$r^{\perp} = \langle (1,-1,1),(0,1,1) \rangle$$

Por lo tanto

$$(x,y,z) \in r^{\perp} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \colon (x,y,z) = \alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,1,1)$$

Es decir,

$$(x,y,z) \in r^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ z = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \quad \textbf{Ecs. Paramétricas}$$

Luego, $r^{\perp}$ es el plano generado por las filas de dicha matriz, es decir

$$r^{\perp} = \langle (1, -1, 1), (0, 1, 1) \rangle$$

Por lo tanto

$$(x, y, z) \in r^{\perp} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \colon (x, y, z) = \alpha_1(1, -1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1)$$

Es decir,

$$(x, y, z) \in r^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ z = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \quad \textbf{Ecs. Paramétricas}$$

Si estudiamos las condiciones necesarias y suficientes para que existan dichos escalares, entonces

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}$$

Luego, $r^\perp$ es el plano generado por las filas de dicha matriz, es decir

$$r^\perp = \langle (1,-1,1), (0,1,1) \rangle$$

Por lo tanto

$$(x,y,z) \in r^\perp \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \colon (x,y,z) = \alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,1,1)$$

Es decir,

$$(x,y,z) \in r^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ z = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \quad \textbf{Ecs. Paramétricas}$$

Si estudiamos las condiciones necesarias y suficientes para que existan dichos escalares, entonces

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array} \sim \begin{array}{rr|l} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & z-x-y-x \end{array}$$

Luego,

$$(x,y,z) \in r^\perp \Leftrightarrow -2x - y + z = 0 \text{ plano ortogonal a la recta } r$$

Aplicación a sistemas de ecuaciones homogéneos

Consideremos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

Aplicación a sistemas de ecuaciones homogéneos

Consideremos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación a sistemas de ecuaciones homogéneos

Consideremos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la solución es el subespacio nulo, es decir $S = \mathrm{N}(\mathrm{A})$ y además:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\mathrm{A}) & \Rightarrow \text{cant. de filas no nulas al escalonar} \\ & \Rightarrow \text{cant. de filas L.I} \\ & \Rightarrow \text{dimensión del espacio fila} \end{aligned}$$

Subespacios Fundamentales

Aplicación a sistemas de ecuaciones homogéneos

Consideremos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la solución es el subespacio nulo, es decir $S = \mathrm{N(A)}$ y además:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg(A)} &\Rightarrow \text{cant. de filas no nulas al escalonar} \\ &\Rightarrow \text{cant. de filas L.I} \\ &\Rightarrow \text{dimensión del espacio fila} \end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)}$$

Subespacios Fundamentales

Aplicación a sistemas de ecuaciones homogéneos

Consideremos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la solución es el subespacio nulo, es decir $S = \mathrm{N}(\mathrm{A})$ y además:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\mathrm{A}) \quad & \Rightarrow \quad \text{cant. de filas no nulas al escalonar} \\ & \Rightarrow \quad \text{cant. de filas L.I} \\ & \Rightarrow \quad \text{dimensión del espacio fila} \end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{N}(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{Fi}(\mathrm{A})$$

Es decir

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{N}(\mathrm{A})) + \dim\left(\mathrm{Fi}(\mathrm{A})\right)$$

Aplicación a sistemas de ecuaciones homogéneos

Consideremos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la solución es el subespacio nulo, es decir $S = \mathrm{N(A)}$ y además:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg(A)} &\Rightarrow \text{cant. de filas no nulas al escalonar} \\ &\Rightarrow \text{cant. de filas L.I} \\ &\Rightarrow \text{dimensión del espacio fila} \end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)}$$

Es decir

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{N(A)}) + \dim(\mathrm{Fi(A)}) \Rightarrow \dim(S) = \dim(\mathrm{N(A)}) = 3 - \underbrace{\dim(\mathrm{Fi(A)})}_{\mathrm{rg(A)}}$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\}$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Sabemos que

$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)}$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Sabemos que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{N(A)}) + \dim(\mathrm{Fi(A)})$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Sabemos que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{N(A)}) + \dim(\mathrm{Fi(A)}) \Rightarrow n = \dim(S) + \mathrm{rg(A)}$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Sabemos que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{N(A)}) + \dim(\mathrm{Fi(A)}) \Rightarrow n = \dim(S) + \mathrm{rg(A)}$$

Ejemplo ¿Qué dimensión tendrá la solución de la ecuación?

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Sabemos que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{N(A)}) + \dim(\mathrm{Fi(A)}) \Rightarrow n = \dim(S) + \mathrm{rg(A)}$$

Ejemplo ¿Qué dimensión tendrá la solución de la ecuación?

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{\text{n veces}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Sabemos que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{N(A)}) + \dim(\mathrm{Fi(A)}) \Rightarrow n = \dim(S) + \mathrm{rg(A)}$$

Ejemplo ¿Qué dimensión tendrá la solución de la ecuación?

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{\text{n veces}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Sabemos que $\mathrm{rg(A)} = 1$, por lo tanto,

$$n = \dim(\mathrm{N(A)}) + \mathrm{rg(A)}$$

Subespacios Fundamentales

En general

Sea $A\vec{x} = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, sabemos que el conjunto solución

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = 0\} = \mathrm{N(A)}$$

Sabemos que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{N(A)} \oplus \mathrm{Fi(A)} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{N(A)}) + \dim(\mathrm{Fi(A)}) \Rightarrow n = \dim(S) + \mathrm{rg(A)}$$

Ejemplo ¿Qué dimensión tendrá la solución de la ecuación?

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{\text{n veces}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Sabemos que $\mathrm{rg(A)} = 1$, por lo tanto,

$$n = \dim(\mathrm{N(A)}) + \mathrm{rg(A)} \Rightarrow \dim(\mathrm{N(A)}) = \mathrm{n} - 1$$

La solución de dicho sistema tendrá dimensión $n - 1$.

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Descomponer a $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$ y expresar a $v = (1, 0, -1)$ como suma de un vector $v_1 \in S_1$ y de otro vector $v_2 \in S_2$.

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Descomponer a $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$ y expresar a $v = (1, 0, -1)$ como suma de un vector $v_1 \in S_1$ y de otro vector $v_2 \in S_2$.
Notemos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ por lo tanto

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Co(A)} \oplus \mathrm{N(A^t)}$$

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Descomponer a $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$ y expresar a $v = (1, 0, -1)$ como suma de un vector $v_1 \in S_1$ y de otro vector $v_2 \in S_2$.
Notemos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ por lo tanto

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Co(A)} \oplus \mathrm{N(A^t)}$$

Buscamos $\mathrm{Co(A)}$. Sabemos que $(x, y, z) \in \mathrm{Co(A)}$ si y solo si existen $\alpha_1, .., \alpha_4$ tal que

$$(x, y, z) = \alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(2, 3, 0) + \alpha_4(0, 1, -2)$$

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Descomponer a $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$ y expresar a $v = (1, 0, -1)$ como suma de un vector $v_1 \in S_1$ y de otro vector $v_2 \in S_2$.
Notemos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ por lo tanto

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Co(A)} \oplus \mathrm{N(A^t)}$$

Buscamos $\mathrm{Co(A)}$. Sabemos que $(x, y, z) \in \mathrm{Co(A)}$ si y solo si existen $\alpha_1, .., \alpha_4$ tal que

$$(x, y, z) = \alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(2, 3, 0) + \alpha_4(0, 1, -2)$$

Es decir, si existe solución al sistema cuya matriz ampliada es

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & 1 & y \\ -1 & 1 & 0 & -2 & z \end{array}$$

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Descomponer a $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$ y expresar a $v = (1, 0, -1)$ como suma de un vector $v_1 \in S_1$ y de otro vector $v_2 \in S_2$.
Notemos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ por lo tanto

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Co(A)} \oplus \mathrm{N(A^t)}$$

Buscamos $\mathrm{Co(A)}$. Sabemos que $(x, y, z) \in \mathrm{Co(A)}$ si y solo si existen $\alpha_1, .., \alpha_4$ tal que

$$(x, y, z) = \alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(2, 3, 0) + \alpha_4(0, 1, -2)$$

Es decir, si existe solución al sistema cuya matriz ampliada es

$$\left.\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & 1 & y \\ -1 & 1 & 0 & -2 & z \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2x - y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z - 3x + 2y \end{array}\right.$$

De donde vemos que $\mathrm{Co}(\mathrm{A}) = \langle (1,2,-1),(1,1,1) \rangle$ y tiene ecuación cartesiana

$$-3x + 2y + z = 0$$

De donde vemos que $\mathrm{Co}(\mathrm{A}) = \langle (1, 2, -1), (1, 1, 1) \rangle$ y tiene ecuación cartesiana

$$-3x + 2y + z = 0 \Rightarrow \text{ Plano con vector normal } N = (-3, 2, 1)$$

De donde vemos que $\mathrm{Co}(\mathrm{A}) = \langle (1,2,-1),(1,1,1) \rangle$ y tiene ecuación cartesiana

$$-3x + 2y + z = 0 \Rightarrow \text{ Plano con vector normal } N = (-3,2,1)$$

Por lo tanto, $\mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) = \langle (-3,2,1) \rangle$, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\langle (1,2,-1),(1,1,1) \rangle}_{\mathrm{Co}(\mathrm{A})} \cup \underbrace{\langle (-3,2,1) \rangle}_{\mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}})}$$

De donde vemos que $\mathrm{Co(A)} = \langle (1,2,-1),(1,1,1) \rangle$ y tiene ecuación cartesiana

$$-3x + 2y + z = 0 \Rightarrow \text{ Plano con vector normal } N = (-3,2,1)$$

Por lo tanto, $\mathrm{N(A^t)} = \langle (-3,2,1) \rangle$, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\langle (1,2,-1),(1,1,1) \rangle}_{\mathrm{Co(A)}} \cup \underbrace{\langle (-3,2,1) \rangle}_{\mathrm{N(A^t)}}$$

Pero además, sabemos que $B = \{(1,2,-1),(1,1,1),(-3,2,1)\}$ es base para $\mathbb{R}^3$, por lo tanto podemos buscar

$$\begin{aligned} [(1,0,-1)]_B =& [\alpha_1(1,2,-1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(-3,2,1)]_B \\ =& (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t \end{aligned}$$

De donde vemos que $\mathrm{Co}(\mathrm{A}) = \langle (1,2,-1),(1,1,1)\rangle$ y tiene ecuación cartesiana

$$-3x + 2y + z = 0 \Rightarrow \text{ Plano con vector normal } N = (-3,2,1)$$

Por lo tanto, $\mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) = \langle(-3,2,1)\rangle$, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\langle (1,2,-1),(1,1,1)\rangle}_{\mathrm{Co}(\mathrm{A})} \cup \underbrace{\langle(-3,2,1)\rangle}_{\mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}})}$$

Pero además, sabemos que $B = \{(1,2,-1),(1,1,1),(-3,2,1)\}$ es base para $\mathbb{R}^3$, por lo tanto podemos buscar

$$\begin{aligned} [(1,0,-1)]_B =& [\alpha_1(1,2,-1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(-3,2,1)]_B \\ =& (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^t \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

De donde vemos que $\mathrm{Co}(\mathrm{A}) = \langle (1,2,-1),(1,1,1)\rangle$ y tiene ecuación cartesiana

$$-3x + 2y + z = 0 \Rightarrow \text{ Plano con vector normal } N = (-3,2,1)$$

Por lo tanto, $\mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) = \langle(-3,2,1)\rangle$, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\langle (1,2,-1),(1,1,1)\rangle}_{\mathrm{Co}(\mathrm{A})} \cup \underbrace{\langle(-3,2,1)\rangle}_{\mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}})}$$

Pero además, sabemos que $B = \{(1,2,-1),(1,1,1),(-3,2,1)\}$ es base para $\mathbb{R}^3$, por lo tanto podemos buscar

$$\begin{aligned}[(1,0,-1)]_B =& [\alpha_1(1,2,-1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(-3,2,1)]_B \\ =& (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^t\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{7} \\ \alpha_2 = -\frac{2}{7} \\ \alpha_3 = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Es decir

$$(1,0,-1) = \underbrace{\frac{3}{7}(1,2,-1) - \frac{2}{7}(1,1,1)}_{\in \mathrm{Co(A)}} - \underbrace{\frac{2}{7}(-3,2,1)}_{\mathrm{N(A^t)}}$$