FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS UNICEN

Álgebra Lineal

Sistemas de ecuaciones

Ecuaciones lineales

- Ecuación en una variable

$$x + 6 = 9 \Rightarrow x = 9 - 6 = 3.$$

Ecuaciones lineales

- Ecuación en una variable

$$x + 6 = 9 \Rightarrow x = 9 - 6 = 3.$$

- Ecuación en dos variables

$2x + y = 1 \Rightarrow y = -2x + 1$ representa una recta en el plano.

Ecuaciones lineales

- Ecuación en una variable

$$x + 6 = 9 \Rightarrow x = 9 - 6 = 3.$$

- Ecuación en dos variables

$$2x + y = 1 \Rightarrow y = -2x + 1 \text{ representa una recta en el plano.}$$

- Ecuación en tres variables

$$x + 2y - z = 1 \text{ representa un plano en } \mathbb{R}^3.$$

Ecuaciones lineales

- Ecuación en una variable

$$x + 6 = 9 \Rightarrow x = 9 - 6 = 3.$$

- Ecuación en dos variables

$$2x + y = 1 \Rightarrow y = -2x + 1 \text{ representa una recta en el plano.}$$

- Ecuación en tres variables

$$x + 2y - z = 1 \text{ representa un plano en } \mathbb{R}^3.$$

- Ecuación en *n*-variables

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

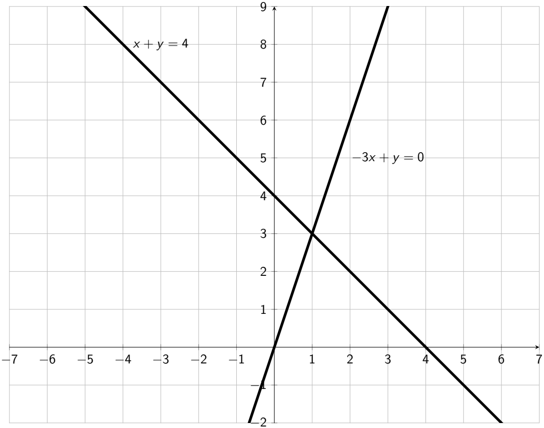
Ejemplo Sistemas de dos ecuaciones con dos variables

$$\begin{cases} x + y &= 4 \\ -3x + y &= 0 \end{cases} \text{ dos rectas en } \mathbb{R}^2$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo Sistemas de dos ecuaciones con dos variables

$$\begin{cases} x + y &= 4 \\ -3x + y &= 0 \end{cases} \quad \text{dos rectas en } \mathbb{R}^2$$



Solución:

$$\begin{cases} x + y & = 4 \rightarrow y = 4 - x \\ -3x + y & = 0 \rightarrow -3x + 4 - x = 0 \rightarrow -4x = -4 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x + y & = 4 \rightarrow y = 4 - x \\ -3x + y & = 0 \rightarrow -3x + 4 - x = 0 \rightarrow -4x = -4 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Luego, $y = 4 - x = 4 - 1 = 3$

Solución:

$$\begin{cases} x + y & = 4 \rightarrow y = 4 - x \\ -3x + y & = 0 \rightarrow -3x + 4 - x = 0 \rightarrow -4x = -4 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Luego, $y = 4 - x = 4 - 1 = 3$

$$P = (1,3) \, \text{solución del sistema} \begin{cases} x + y & = 4 \\ -3x + y & = 0 \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo Sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 2 \\ 3x - y + z &= -1 \end{cases} \quad \text{tres planos}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo Sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} x + y - 2z & = 1 \\ -2x + y + 3z & = 2 \\ 3x - y + z & = -1 \end{cases} \quad \text{tres planos}$$

Otros ejemplos

$$\begin{cases} x + y - 2z & = 1 \\ -4x + y + 3z & = -2 \end{cases} \quad \text{dos planos}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo Sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 2 \\ 3x - y + z &= -1 \end{cases} \quad \text{tres planos}$$

Otros ejemplos

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -4x + y + 3z &= -2 \end{cases} \quad \text{dos planos} \qquad \begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 2 \\ -3x + 5y - z &= -5 \\ 3x - y + z &= -3 \end{cases} \text{4 planos}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo Sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 2 \\ 3x - y + z &= -1 \end{cases} \quad \text{tres planos}$$

Otros ejemplos

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -4x + y + 3z &= -2 \end{cases} \quad \text{dos planos} \qquad \begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 2 \\ -3x + 5y - z &= -5 \\ 3x - y + z &= -3 \end{cases} \text{4 planos}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z + w &= 1 \\ 2x - 2y + 3z - 3w &= 2 \\ -5x + 4y - z + 2w &= -5 \\ 3x - y + z - w &= -3 \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición

Un sistema de n-ecuaciones y m incógnitas es un sistema de la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

Diremos que el sistema es **homogéneo** *cuando* $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

Cantidad de soluciones de un SEL

Consideremos los siguientes tres sistemas

$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ -2x + y & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y & = 2 \\ 3x + 3y & = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y & = 3 \\ x - y & = 1 \end{cases}$$

Cantidad de soluciones de un SEL

Consideremos los siguientes tres sistemas

$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ -2x + y & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y & = 2 \\ 3x + 3y & = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y & = 3 \\ x - y & = 1 \end{cases}$$

- El primer sistema corresponde a dos rectas que se cortan en el punto $P = (1, 2)$. Por lo tanto el sistema tiene una **única solución.**

Cantidad de soluciones de un SEL

Consideremos los siguientes tres sistemas

$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ -2x + y & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y & = 2 \\ 3x + 3y & = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y & = 3 \\ x - y & = 1 \end{cases}$$

- El primer sistema corresponde a dos rectas que se cortan en el punto $P = (1, 2)$. Por lo tanto el sistema tiene una **única solución.**
- El segundo sistema son dos rectas coincidentes. Por lo tanto hay infinitos puntos que satisfacen las dos ecuaciones. Entonces el sistema tiene **infinitas soluciones.**

Cantidad de soluciones de un SEL

Consideremos los siguientes tres sistemas

$$\begin{cases} x + y &= 3 \\ -2x + y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y &= 2 \\ 3x + 3y &= 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

- El primer sistema corresponde a dos rectas que se cortan en el punto $P = (1, 2)$. Por lo tanto el sistema tiene una **única solución.**
- El segundo sistema son dos rectas coincidentes. Por lo tanto hay infinitos puntos que satisfacen las dos ecuaciones. Entonces el sistema tiene **infinitas soluciones.**
- Por último, el tercer sistema representa dos rectas paralelas y por lo tanto no hay puntos en común. Por lo tanto el sistema **no tiene solución.**

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Por el ejemplo anterior tenemos tres posibles casos sobre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales:

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Por el ejemplo anterior tenemos tres posibles casos sobre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales:

1. Sistema con exactamente una solución. Sistema **compatible determinado.**

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Por el ejemplo anterior tenemos tres posibles casos sobre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales:

1. Sistema con exactamente una solución. Sistema **compatible determinado.**
2. Sistema con un número infinito de soluciones. Sistema **compatible indeterminado**.

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Por el ejemplo anterior tenemos tres posibles casos sobre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales:

1. Sistema con exactamente una solución. Sistema **compatible determinado.**
2. Sistema con un número infinito de soluciones. Sistema **compatible indeterminado**.
3. Sistema sin solución. Sistema **incompatible**.

Forma matricial de un sistema

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 4 \\ -x + 5y & = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Forma matricial de un sistema

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 4 \\ -x + 5y & = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Forma matricial de un sistema

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 4 \\ -x + 5y & = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x - y + 2z & = & 1 \\ 2x + 3y + z & = & 4 \\ -x + 4y - z & = & 3 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

Forma matricial de un sistema

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 4 \\ -x + 5y &= -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & 1 \\ 2x + 3y + z & = & 4 \\ -x + 4y - z & = & 3 \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Forma matricial de un sistema

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x-3y &= 4 \\ -x+5y &= -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-y+2z & = & 1 \\ 2x+3y+z & = & 4 \\ -x+4y-z & = & 3 \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{b}} \,.$$

Forma matricial de un sistema

Ejemplo 3

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Forma matricial de un sistema

Ejemplo 3

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases}$$

Matriz ampliada de un sistema

La matriz ampliada o aumentada de un sistema se construye añadiendo a la matriz de los coeficientes una columna con los términos constantes.

Matriz ampliada de un sistema

La matriz ampliada o aumentada de un sistema se construye añadiendo a la matriz de los coeficientes una columna con los términos constantes.

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases}$$

Matriz ampliada de un sistema

La matriz ampliada o aumentada de un sistema se construye añadiendo a la matriz de los coeficientes una columna con los términos constantes.

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada de un sistema

La matriz ampliada o aumentada de un sistema se construye añadiendo a la matriz de los coeficientes una columna con los términos constantes.

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{array} \right)}_{\left(A|\vec{b}\right)}.$$

Matriz ampliada de un sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

Matriz ampliada de un sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Forma vectorial de un sistema

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases}$$

Forma vectorial de un sistema

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Forma vectorial de un sistema

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} \quad =$$

Forma vectorial de un sistema

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Forma vectorial de un sistema

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= x\vec{c_1} + y\vec{c_2} + z\vec{c_3} = \vec{b} \end{aligned}$$

Forma vectorial de un sistema

El vector columna $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores columna $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Forma vectorial de un sistema

El vector columna $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores columna
$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Si miramos a las columnas de A como vectores, entonces

Forma vectorial de un sistema

El vector columna $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores columna $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Si miramos a las columnas de A como vectores, entonces resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es equivalente a preguntarnos si el vector b es combinación lineal de los vectores columna de la matriz A.

Resolución de SEL

¿Cómo podemos resolver analíticamente un sistema de ecuaciones lineales?

¿Cómo podemos resolver analíticamente un sistema de ecuaciones lineales?

- **Regla de Cramer**,

¿Cómo podemos resolver analíticamente un sistema de ecuaciones lineales?

- **Regla de Cramer**, cuando se tiene un sistema de ecuaciones con n ecuaciones y n incógnitas.

¿Cómo podemos resolver analíticamente un sistema de ecuaciones lineales?

- **Regla de Cramer**, cuando se tiene un sistema de ecuaciones con n ecuaciones y n incógnitas. Es decir, la matriz A asociada al sistema es cuadrada.

Resolución de SEL

¿Cómo podemos resolver analíticamente un sistema de ecuaciones lineales?

- **Regla de Cramer**, cuando se tiene un sistema de ecuaciones con n ecuaciones y n incógnitas. Es decir, la matriz A asociada al sistema es cuadrada.

- **Gauss-Jordan**, para cualquier tipo de sistema.

Resolución por Regla de Cramer

Sea

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas y $A = [a_{ij}]$ la matriz de coeficientes, de modo que podemos escribir al sistema dado como $Ax = \vec{b}$, donde

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Resolución por Regla de Cramer

Sea

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas y $A = [a_{ij}]$ la matriz de coeficientes, de modo que podemos escribir al sistema dado como $Ax = \vec{b}$, donde

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si $det(A) \neq 0$, el sistema tiene como única solución

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \ldots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

donde A_i es la matriz que se obtiene a partir de A, reemplazando su i-ésima columna por $\vec{b}$.

Resolución por Regla de Cramer

También la regla de Cramer nos puede decir que el sistema es compatible indeterminado o incompatible.

$det(A) = 0$

1. Sí $det(A_i) = 0 \quad \forall i$; El sistema es compatible indeterminado
2. Sí $det(A_i) \neq 0$ para algún i es incompatible

Resolución por Gauss-Jordan

La idea es tratar de expresar un sistema en otro de forma tal que las soluciones sean las mismas pero que el sistema resultante sea más sencillo de resolver.

Resolución por Gauss-Jordan

La idea es tratar de expresar un sistema en otro de forma tal que las soluciones sean las mismas pero que el sistema resultante sea más sencillo de resolver. Para ello vamos a aplicar operaciones entre las filas de la matriz ampliada asociada al sistema que permitirán simplificar el original

$$Ax = b \longrightarrow Ex = \vec{d}$$

Resolución por Gauss-Jordan

La idea es tratar de expresar un sistema en otro de forma tal que las soluciones sean las mismas pero que el sistema resultante sea más sencillo de resolver. Para ello vamos a aplicar operaciones entre las filas de la matriz ampliada asociada al sistema que permitirán simplificar el original

$$Ax = b \longrightarrow Ex = \vec{d}$$

Cuando trabajamos con sistemas podemos trabajar directamente con las matrices asociadas

$$(A \mid b) \longrightarrow (E \mid d)$$

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array} \right.$$

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \iff (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

1. Intercambiar dos ecuaciones

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

1. Intercambiar dos ecuaciones — Intercambiar dos filas

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \iff (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

1. Intercambiar dos ecuaciones — Intercambiar dos filas
2. Multiplicar una ecuación por $c \neq 0$

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

1. Intercambiar dos ecuaciones — Intercambiar dos filas
2. Multiplicar una ecuación por $c \neq 0$ — Multiplicar una fila por $c \neq 0$

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \iff (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

1. Intercambiar dos ecuaciones — Intercambiar dos filas
2. Multiplicar una ecuación por $c \neq 0$ — Multiplicar una fila por $c \neq 0$
3. Sumar el múltiplo de una ecuación a otra

Resolución por Gauss-Jordan

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \iff (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

1. Intercambiar dos ecuaciones — Intercambiar dos filas
2. Multiplicar una ecuación por $c \neq 0$ — Multiplicar una fila por $c \neq 0$
3. Sumar el múltiplo de una ecuación a otra — Sumar un múltiplo de una fila a otra fila

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} \color{blue}{2} & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \color{blue}{2} & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambio la fila f_1 con la fila f_2

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & 3 \\ x+2y-z & = & 1 \\ -x+3y+2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \color{blue}{2} & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambio la fila f_1 con la fila f_2

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambio la fila f_1 con la fila f_2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \color{blue}{2} & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambio la fila f_1 con la fila f_2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \color{blue}{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\color{blue}{f_2 - 2f_1 \to f_2}$$

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Intercambio la fila f_1 con la fila f_2

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$f_2 - 2f_1 \to f_2$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolución por Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & 3 \\ x+2y-z & = & 1 \\ -x+3y+2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambio la fila f_1 con la fila f_2

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$f_2 - 2f_1 \to f_2$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \color{blue}{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\color{blue}{f_1 + f_3 \to f_3}$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$f_1 + f_3 \to f_3$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ & & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{ccc|c} \color{blue}{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\color{blue}{f_1 + f_3 \to f_3}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ & & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\mathbf{5} & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$f_1 + f_3 \rightarrow f_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ & & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\mathbf{5} & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$f_2 + f_3 \rightarrow f_3$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$f_1 + f_3 \to f_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ & & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\mathbf{5} & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$f_2 + f_3 \to f_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 3z & = & -1 \\ & & & & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1\\ & & -5y & +3 & z & = & 1\\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|r} {\color{blue}1} & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

${\color{blue}f_1 + f_3 \to f_3}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1\\ & & -5y & +3 & z & = & 1\\ & & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1\\ 0 & -\mathbf{5} & 3 & 1\\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

${\color{blue}f_2 + f_3 \to f_3}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1\\ & & 5y & - & 3z & = & -1\\ & & & & 4z & = & 2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1\\ 0 & \mathbf{5} & -3 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 3z & = & -1 \\ & & & & 4z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \text{sustitución hacia atrás}$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 3z & = & -1 \\ & & & & 4z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \text{sustitución hacia atrás}$$

Conjunto solución del sistema

$$S = \left\{ \left(\frac{13}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Resolución por Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 3z & = & -1 \\ & & & & 4z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \text{sustitución hacia atrás}$$

Conjunto solución del sistema

$$S = \left\{\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

La matriz $\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{5} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 \end{array}\right)$ es una **forma escalonada** de la matriz $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$.

Escalonamiento de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Un **pivote** de una fila de A es el elemento **distinto de** 0 que se encuentra más a la izquierda en la fila.

Escalonamiento de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Un **pivote** de una fila de A es el elemento **distinto de** 0 que se encuentra más a la izquierda en la fila.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Escalonamiento de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Un **pivote** de una fila de A es el elemento **distinto de** 0 que se encuentra más a la izquierda en la fila.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Escalonamiento de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Un **pivote** de una fila de A es el elemento **distinto de** 0 que se encuentra más a la izquierda en la fila.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{2} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \color{blue}{-3} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \color{blue}{6} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\mathbf{-3}} & 0 & 0 & 4 & -7 & 1 \\ \color{blue}{\mathbf{8}} & -2 & 6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \color{blue}{\mathbf{3}} & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{blue}{\mathbf{-2}} & 3 \end{pmatrix}$$

Escalonamiento de una matriz

Diremos que una matriz A está **escalonada** si:

Escalonamiento de una matriz

Diremos que una matriz A está **escalonada** si:

- Toda fila de ceros está en la parte inferior.

Escalonamiento de una matriz

Diremos que una matriz A está **escalonada** si:

- Toda fila de ceros está en la parte inferior.
- Cada pivote está a la derecha del pivote de la fila anterior.

Escalonamiento de una matriz

Diremos que una matriz A está **escalonada** si:

- Toda fila de ceros está en la parte inferior.
- Cada pivote está a la derecha del pivote de la fila anterior.
- En una columna, todos los elementos debajo del pivote son 0.

Escalonamiento de una matriz

Diremos que una matriz A está **escalonada** si:

- Toda fila de ceros está en la parte inferior.
- Cada pivote está a la derecha del pivote de la fila anterior.
- En una columna, todos los elementos debajo del pivote son 0.
- A está en la forma **escalonada reducida** si todos los pivotes son 1 y todos los elementos por encima del pivote son 0.

Escalonamiento de una matriz

¿Cuáles de las siguientes matrices está en su forma escalón reducida?

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} \color{red}{2} & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \color{red}{9} & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamiento de una matriz

¿Cuáles de las siguientes matrices está en su forma escalón reducida?

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} {\color{red}2} & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & {\color{red}9} & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} {\color{red}1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & {\color{red}1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamiento de una matriz

¿Cuáles de las siguientes matrices está en su forma escalón reducida?

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} \color{red}{2} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \color{red}{4} & 8 & 7 \\ \color{blue}{6} & 0 & 0 & \color{red}{7} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamiento de una matriz

¿Cuáles de las siguientes matrices está en su forma escalón reducida?

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

El siguiente teorema permite analizar la existencia o no de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de comparando los rangos de las matrices A y $(A|b)$.

Teorema de Rouché-Frobenius

El siguiente teorema permite analizar la existencia o no de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de comparando los rangos de las matrices A y $(A|b)$.

Teorema (Roché-Frobenius)

Consideremos un sistema lineal $Ax = b$ y su matriz ampliada $(A|b)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

Teorema de Rouché-Frobenius

El siguiente teorema permite analizar la existencia o no de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de comparando los rangos de las matrices A y $(A|b)$.

Teorema (Roché-Frobenius)

Consideremos un sistema lineal $Ax = b$ y su matriz ampliada $(A|b)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El sistema $Ax = b$ es compatible*

Teorema de Rouché-Frobenius

El siguiente teorema permite analizar la existencia o no de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de comparando los rangos de las matrices A y $(A|b)$.

Teorema (Roché-Frobenius)

Consideremos un sistema lineal $Ax = b$ y su matriz ampliada $(A|b)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El sistema $Ax = b$ es compatible*
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

Teorema de Rouché-Frobenius

El siguiente teorema permite analizar la existencia o no de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de comparando los rangos de las matrices A y $(A|b)$.

Teorema (Roché-Frobenius)

Consideremos un sistema lineal $Ax = b$ y su matriz ampliada $(A|b)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El sistema $Ax = b$ es compatible*
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.
3. *b es combinación lineal de las columnas de A.*

Teorema de Rouché-Frobenius

Resumimos en el siguiente diagrama la compatibilidad de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ de acuerdo a la comparación entre el rango de la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $(A \mid b)$.

Teorema de Rouché-Frobenius

Resumimos en el siguiente diagrama la compatibilidad de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ de acuerdo a la comparación entre el rango de la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $(A \mid b)$.

$$A\vec{x} = \vec{b} : \begin{cases} \textbf{Compatible } \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) \\ \\ \\ \end{cases}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Resumimos en el siguiente diagrama la compatibilidad de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ de acuerdo a la comparación entre el rango de la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $(A \mid b)$.

$$A\vec{x} = \vec{b} : \begin{cases} \textbf{Compatible } \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) & \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = n \text{ única solución} \\ \\ \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) < n \text{ infinitas soluciones} \end{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Resumimos en el siguiente diagrama la compatibilidad de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ de acuerdo a la comparación entre el rango de la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $(A \mid b)$.

$$
A\vec{x} = \vec{b} : \begin{cases} \textbf{Compatible } \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) & \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = n \text{ única solución} \\ \\ \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) < n \text{ infinitas soluciones} \end{cases} \\ \\ \textbf{Incompatible } \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A \mid b) \end{cases}
$$

Ejemplo 1 Resolver el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 4 \\ x+2z & = & 1 \\ -x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow$$

Ejemplo 1 Resolver el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 4 \\ x+2z & = & 1 \\ -x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1 Resolver el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 4 \\ x+2z & = & 1 \\ -x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+0{,}5F_1\rightarrow F_3]{F_2-0{,}5F_1\rightarrow F_2}$$

Ejemplo 1 Resolver el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 4 \\ x+2z & = & 1 \\ -x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+0{,}5F_1\to F_3]{F_2-0{,}5F_1\to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1 \\ 0 & 7/2 & -5/2 & 2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1 Resolver el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 4\\ x+2z &=& 1\\ -x+3y-2z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+0{,}5F_1\rightarrow F_3]{F_2-0{,}5F_1\rightarrow F_2} \left(\begin{array}{lrr|r} 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1\\ 0 & 7/2 & -5/2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3+7F_2\rightarrow F_3} \left(\begin{array}{lrr|r} 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1\\ 0 & 0 & 15 & -5 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1 Resolver el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 4\\ x+2z &=& 1\\ -x+3y-2z &=& 0\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 3 & -2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[F_3+0{,}5F_1\to F_3]{F_2-0{,}5F_1\to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1\\ 0 & 7/2 & -5/2 & 2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3+7F_2\to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1\\ 0 & 0 & 15 & -5\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1\\ 0 & 0 & 3 & -1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 3,$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 3,$$

Entonces el SEL es **compatible determinado** (tiene una única solución).

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\}.$$

Ejemplo 2 Estudiar las posibles soluciones del siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 2 \\ 6x - 3y + 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

Ejemplo 2 Estudiar las posibles soluciones del siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 2 \\ 6x - 3y + 3z & = & 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2 Estudiar las posibles soluciones del siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 2 \\ 6x - 3y + 3z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 Estudiar las posibles soluciones del siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 2 \\ 6x - 3y + 3z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1\to F_3]{F_1-2F_2\to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 Estudiar las posibles soluciones del siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 2 \\ 6x - 3y + 3z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1\to F_3]{F_1-2F_2\to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rg}(A \mid b)$$

Por lo tanto el sistema es **incompatible**, es decir no tiene solución

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w - x - y + 2z & = & 1 \\ 2w - 2x - y + 3z & = & 3 \\ -w + x - y & = & -3 \end{array}\right.$$

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w - x - y + 2z & = & 1 \\ 2w - 2x - y + 3z & = & 3 \\ -w + x - y & = & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w - x - y + 2z & = & 1 \\ 2w - 2x - y + 3z & = & 3 \\ -w + x - y & = & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w - x - y + 2z & = & 1 \\ 2w - 2x - y + 3z & = & 3 \\ -w + x - y & = & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+f_1\to f_3]{f_2-2f_1\to f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w-x-y+2z & = & 1 \\ 2w-2x-y+3z & = & 3 \\ -w+x-y & = & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+f_1\to f_3]{f_2-2f_1\to f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2+f_3\to f_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} {\color{blue}1} & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & {\color{blue}1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 2 < 4 \Rightarrow$ compatible indeterminado.

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w-x-y+2z & = & 1 \\ 2w-2x-y+3z & = & 3 \\ -w+x-y & = & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+f_1\to f_3]{f_2-2f_1\to f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2+f_3\to f_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 2 < 4 \Rightarrow \text{compatible indeterminado.}$$

$$\begin{cases} w-x-y+2z & = 1 \\ y-z & = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w-x-y+2z & = & 1 \\ 2w-2x-y+3z & = & 3 \\ -w+x-y & = & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+f_1\to f_3]{f_2-2f_1\to f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2+f_3\to f_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 2 < 4 \Rightarrow$ compatible indeterminado.

$$\begin{cases} w-x-y+2z & = 1 \\ y-z & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w & = 1+x+y-2z = 2+x-z \\ y & = z+1 \end{cases}$$

Tomamos como variables pivote a w y y, por lo tanto las variables que serán los parámetros son $x = s$ y $z = t$

Tomamos como variables pivote a w y y, por lo tanto las variables que serán los parámetros son $x = s$ y $z = t$

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos como variables pivote a w y y, por lo tanto las variables que serán los parámetros son $x = s$ y $z = t$

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También podemos escribirlo como vectores fila

$$(w, x, y, z) = (2 + s - t, s, 1 + t, t) = (2, 0, 1, 0) + s\,(1, 1, 0, 0) + t\,(-1, 0, 1, 1)\,.$$

Ejemplo 4 Determinar si el vector $v = (1, -1, 2)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ y $v_3 = (0, 3, -1)$.

Ejemplo 4 Determinar si el vector $v = (1, -1, 2)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ y $v_3 = (0, 3, -1)$.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y & = 1 \\ -x + 3z & = -1 \\ x + y - z & = 2 \end{cases}$$

donde las columnas de A son los vectores v_1, v_2 y v_3.

Entonces

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es combinación lineal de } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid v)$$

Entonces

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es combinación lineal de } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid v)$$

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Entonces

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es combinación lineal de } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid v)$$

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Entonces

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es combinación lineal de } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid v)$$

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Entonces

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es combinación lineal de } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid v)$$

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Luego,

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid v) = 3$$

Luego,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(A \mid v\right) = 3$$

El sistema $A\vec{x} = \vec{v}$ tiene única solución $x = 7, y = -3$ y $z = 2$

Luego,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\,(A \mid v) = 3$$

El sistema $A\vec{x} = \vec{v}$ tiene única solución $x = 7, y = -3$ y $z = 2$
Por lo tanto v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3

$$v = \mathbf{7}\, v_1 + (-\mathbf{3})\, v_2 + \mathbf{2}\, v_3.$$

$$(1, -1, 2) = \mathbf{7}\ (1, -1, 1) + (-\mathbf{3})\,(2, 0, 1) + \mathbf{2}\ (0, 3, -1)\,.$$

Luego,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(A \mid v\right) = 3$$

El sistema $A\vec{x} = \vec{v}$ tiene única solución $x = 7, y = -3$ y $z = 2$
Por lo tanto v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3

$$v = \mathbf{7}\, v_1 + (-\mathbf{3})\, v_2 + \mathbf{2}\, v_3.$$

$$(1,-1,2) = \mathbf{7}\ (1,-1,1) + (-\mathbf{3})\,(2,0,1) + \mathbf{2}\ (0,3,-1)\,.$$

Teorema

Si A es de orden n, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. *A es inversible.*
2. $det(A) \neq 0$.
3. *$Ax = b$ admite solución única cualquiera sea b.*
4. *$Ax = 0$ admite sólo a 0 como solución*
5. $\mathrm{rg}(A) = n$