FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNICEN

Álgebra Lineal

Espacios vectoriales

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, dados dos vectores $v = (v_1, v_2), u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real, entonces podemos definir dos operaciones:

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, dados dos vectores $v = (v_1, v_2)\,, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real, entonces podemos definir dos operaciones:

- ⋆ Suma de vectores:

$$v + u = (v_1, v_2) + (u_1, u_2)$$

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, dados dos vectores $v = (v_1, v_2)\,, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real, entonces podemos definir dos operaciones:

- ⋆ Suma de vectores:

$$v + u = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, dados dos vectores $v = (v_1, v_2)\,, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real, entonces podemos definir dos operaciones:

- ⋆ Suma de vectores:

$$v + u = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

- ⋆ Producto de un vector por un escalar:

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, dados dos vectores $v = (v_1, v_2)$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real, entonces podemos definir dos operaciones:

- ⋆ Suma de vectores:

$$v + u = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

- ⋆ Producto de un vector por un escalar:

$$\lambda v = \lambda (v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, dados dos vectores $v = (v_1, v_2)\,, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real, entonces podemos definir dos operaciones:

- ⋆ Suma de vectores:

$$v + u = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \;= (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

- ⋆ Producto de un vector por un escalar:

$$\lambda v = \lambda\,(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Es decir, podemos dotar al conjunto de todos los vectores $\mathbb{R}^2$ de dos operaciones

$$\langle \mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \cdot_{\mathbb{R}} \rangle$$

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, dados dos vectores $v = (v_1, v_2)\,, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real, entonces podemos definir dos operaciones:

- ⋆ Suma de vectores:

$$v + u = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \ = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

- ⋆ Producto de un vector por un escalar:

$$\lambda v = \lambda\,(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Es decir, podemos dotar al conjunto de todos los vectores $\mathbb{R}^2$ de dos operaciones

$$\langle \mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \cdot_{\mathbb{R}} \rangle$$

Nota El producto por un escalar se indexa con el cuerpo de donde salen los escalares.

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

S2 Conmutativa: $u + v = v + u$

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

S2 Conmutativa: $u + v = v + u$

S3 Neutro: Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + \vec{0} = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

S2 Conmutativa: $u + v = v + u$

S3 Neutro: Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + \vec{0} = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

S4 Inverso aditivo: Para cada $v \in \mathbb{R}^2$ existe $-v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v + (-v) = \vec{0}$$

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

S2 Conmutativa: $u + v = v + u$

S3 Neutro: Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + \vec{0} = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

S4 Inverso aditivo: Para cada $v \in \mathbb{R}^2$ existe $-v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v + (-v) = \vec{0}$$

Para un vector $v \in \mathbb{R}^2$ y escalares $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

P1 Asociativa: $(\lambda\beta) \cdot v = \lambda \cdot (\beta \cdot v)$.

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

S2 Conmutativa: $u + v = v + u$

S3 Neutro: Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + \vec{0} = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

S4 Inverso aditivo: Para cada $v \in \mathbb{R}^2$ existe $-v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v + (-v) = \vec{0}$$

Para un vector $v \in \mathbb{R}^2$ y escalares $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

P1 Asociativa: $(\lambda\beta) \cdot v = \lambda \cdot (\beta \cdot v)$.

P2 Neutro: Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \cdot v = v$

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

S2 Conmutativa: $u + v = v + u$

S3 Neutro: Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + \vec{0} = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

S4 Inverso aditivo: Para cada $v \in \mathbb{R}^2$ existe $-v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v + (-v) = \vec{0}$$

Para un vector $v \in \mathbb{R}^2$ y escalares $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

P1 Asociativa: $(\lambda\beta) \cdot v = \lambda \cdot (\beta \cdot v)$.

P2 Neutro: Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \cdot v = v$

P3 Distributiva para la suma de escalares: $(\lambda + \beta) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\beta \cdot v)$.

Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, la operación **suma de vectores** satisface las siguientes propiedades:

S1 Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$

S2 Conmutativa: $u + v = v + u$

S3 Neutro: Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + \vec{0} = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

S4 Inverso aditivo: Para cada $v \in \mathbb{R}^2$ existe $-v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v + (-v) = \vec{0}$$

Para un vector $v \in \mathbb{R}^2$ y escalares $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

P1 Asociativa: $(\lambda\beta) \cdot v = \lambda \cdot (\beta \cdot v)$.

P2 Neutro: Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \cdot v = v$

P3 Distributiva para la suma de escalares: $(\lambda + \beta) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\beta \cdot v)$.

P4 Distributiva para la suma de vectores: $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una estructura

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ *es una estructura*

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ *es una estructura*

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

S_2 *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ *es una estructura*

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

S_2 *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

S_3 *Neutro:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una estructura

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

S_2 *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

S_3 *Neutro:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

S_4 *Inverso aditivo:* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una estructura

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

- S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- S_2 *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- S_3 *Neutro:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.
- S_4 *Inverso aditivo:* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
- P_1 *Identidad:* $1 * \vec{v} = \vec{v}$.

Espacios Vectoriales

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una estructura

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

- S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- S_2 *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- S_3 *Neutro:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.
- S_4 *Inverso aditivo:* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
- P_1 *Identidad:* $1 * \vec{v} = \vec{v}$.
- P_2 *Asociativo:* $(\lambda * \beta)\, \vec{v} = \lambda * (\beta * \vec{v})$.

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ *es una estructura*

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

- S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- S_2 *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- S_3 *Neutro:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.
- S_4 *Inverso aditivo:* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
- P_1 *Identidad:* $1 * \vec{v} = \vec{v}$.
- P_2 *Asociativo:* $(\lambda * \beta)\,\vec{v} = \lambda * (\beta * \vec{v})$.
- P_3 *Distributivo para suma de vectores:* $\lambda * (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

Espacios Vectoriales

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ *es una estructura*

$$\langle \mathbb{V}, +, * \rangle$$

Donde se verifican las siguientes propiedades:

S_1 *Asociativa:* $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

S_2 *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

S_3 *Neutro:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

S_4 *Inverso aditivo:* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

P_1 *Identidad:* $1 * \vec{v} = \vec{v}$.

P_2 *Asociativo:* $(\lambda * \beta)\,\vec{v} = \lambda * (\beta * \vec{v})$.

P_3 *Distributivo para suma de vectores:* $\lambda * (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

P_4 *Distributivo para la suma de escalares:* $(\lambda + \beta) * \vec{v} = \lambda * \vec{v} + \beta * \vec{v}$.

En síntesis, en espacio vectorial podemos tomar todas las posibles combinaciones lineales de sus vectores y estás pertenecen al espacio vectorial.

Ejemplo 1

$\star$ Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{V} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{veces}}$$

En síntesis, en espacio vectorial podemos tomar todas las posibles combinaciones lineales de sus vectores y estás pertenecen al espacio vectorial.

Ejemplo 1

⋆ Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{V} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{veces}} \quad \mathbb{R}^n\colon \begin{cases} (x_1, .., x_n) + (y_1, .., y_n) = (x_1 + y_1, .., x_n + y_n) \\ \lambda * (x_1, .., x_n) = (\lambda x_1, .., \lambda x_n) \end{cases}$$

Ejemplo 2 El espacio $P[X]$ de polinomios de grado $\leq n \cup \{0\}$.

Es el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ (incluyendo el polinomio nulo) con coeficientes reales:

Ejemplo 2 El espacio $P[X]$ de polinomios de grado $\leq n \cup \{0\}$.

Es el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ (incluyendo el polinomio nulo) con coeficientes reales:

1. Los vectores son $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$

Ejemplo 2 El espacio $P[X]$ de polinomios de grado $\leq n \cup \{0\}$.

Es el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ (incluyendo el polinomio nulo) con coeficientes reales:

1. Los vectores son $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
2. Los escalares son los números reales.

Ejemplo 2 El espacio $P[X]$ de polinomios de grado $\leq n \cup \{0\}$.

Es el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ (incluyendo el polinomio nulo) con coeficientes reales:

1 Los vectores son $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$

2 Los escalares son los números reales.

3 La suma de vectores $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ y $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$ se define como

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\, x^i$$

Ejemplo 2 El espacio $P[X]$ de polinomios de grado $\leq n \cup \{0\}$.

Es el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ (incluyendo el polinomio nulo) con coeficientes reales:

1 Los vectores son $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$

2 Los escalares son los números reales.

3 La suma de vectores $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ y $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$ se define como

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\, x^i$$

4 El producto de un vector y un escalar se define como

$$\lambda * P(X) = \lambda * \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda * a_i)\, x^i$$

Comentarios sobre la definición

Vectores	Escalares
⋆ Solo está definida la suma. ⋆ Son válidas todas las propiedades de la suma	⋆ Está definida la suma de escalares. ⋆ Está definido el producto de escalares. ⋆ Son válidas todas las reglas algebraicas.

Comentarios sobre la definición

Vectores	Escalares
⋆ Solo está definida la suma. ⋆ Son válidas todas las propiedades de la suma	⋆ Está definida la suma de escalares. ⋆ Está definido el producto de escalares. ⋆ Son válidas todas las reglas algebraicas.

- ▷ A los elementos $\mathbb{K}$ se los llama escalares.
- ▷ A los elementos $\mathbb{V}$ se los llama vectores.
- ▷ En el curso, en general $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- ▷ La definición de espacio vectorial generaliza muchas estructuras, no solo $\mathbb{R}^n$
- ▷ En general, se suele hacer abuso de notación, indicando de manera indistinta la suma de vectores y la suma de escalares.

Dependencia Lineal

Definición

Sea $\{v_1, .., v_n\}$ *un conjunto de vectores de un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*.*
Diremos que son L.D si existen escalares $\alpha_1, .., \alpha_n$ *no todos nulos tales que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

Dependencia Lineal

Definición

Sea $\{v_1, .., v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Diremos que son L.D si existen escalares $\alpha_1, .., \alpha_n$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

Ejemplo 1 El conjunto de vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ es L.D. ¿Por qué?

Dependencia Lineal

Definición

Sea $\{v_1, .., v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Diremos que son L.D si existen escalares $\alpha_1, .., \alpha_n$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

Ejemplo 1 El conjunto de vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ es L.D. ¿Por qué?

Ejemplo 2 El conjunto de vectores $\{(1,2,1),(1,0,-1),(1,4,3)\}$ es L.D, ya que

$$-2(1,2,1)+1(1,0,-1)+1(1,4,3)=(0,0,0)$$

Ejemplo 2 El conjunto de vectores $\{(1,2,1),(1,0,-1),(1,4,3)\}$ es L.D, ya que

$$-2(1,2,1)+1(1,0,-1)+1(1,4,3)=(0,0,0)$$

En otras palabras, estamos diciendo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene solución diferente a la trivial, una solución posible es $S=(-2,1,1)$

Definición

$$v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$$

si v es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Conjunto de generadores

Se dice que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ generan a $\mathbb{V}$, si cada vector en $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$

Dependencia Lineal

Definición

Dado un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$, *son equivalentes:*

1. $\{v_1, ., v_n\}$ *es un conjunto de vectores L.D*
2. *Existe un vector* v_j *tal que* $v_j \in \langle\{v_i : i \in \{1, .., n\} \setminus \{j\}\}\rangle$. *Es decir,* v_j *es CL de* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_n\}$.

Dependencia Lineal

Definición

Dado un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$, son equivalentes:

1. $\{v_1, ., v_n\}$ *es un conjunto de vectores L.D*
2. *Existe un vector v_j tal que $v_j \in \langle\{v_i : i \in \{1, .., n\} \setminus \{j\}\}\rangle$. Es decir, v_j es CL de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_n\}$.*

Ejemplo Consideremos el conjunto de vectores

$$\{(1, 0, 1), (2, 0, 2)\}$$

Es L.D ya que

$$2(1, 0, 1) + (-1)(2, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

Es decir,

$$S = \langle(1, 0, 1), (2, 0, 2)\rangle = \langle(1, 0, 1)\rangle$$

Es la recta cuyo vector director es $(1, 0, 1)$.

Dependencia Lineal

Definición

Dado un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$, son equivalentes:

1. $\{v_1, ., v_n\}$ *es un conjunto de vectores L.D*
2. *Existe un vector v_j tal que $v_j \in \langle \{v_i : i \in \{1, .., n\} \setminus \{j\}\} \rangle$. Es decir, v_j es CL de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_n\}$.*

Ejemplo Consideremos el conjunto de vectores

$$\{(1, 0, 1), (2, 0, 2)\}$$

Es L.D ya que

$$2(1, 0, 1) + (-1)(2, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

Es decir,

$$S = \langle (1, 0, 1), (2, 0, 2) \rangle = \langle (1, 0, 1) \rangle$$

Es la recta cuyo vector director es $(1, 0, 1)$.

¿Como saber si un conjunto dado es L.D?

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.D

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(2,1,0)\}$$

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.D

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(2,1,0)\}$$

Por definición, debemos estudiar si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ tales que

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,0,1)+\alpha_3(2,1,0)=(0,0,0)$$

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.D

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(2,1,0)\}$$

Por definición, debemos estudiar si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ tales que

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,0,1)+\alpha_3(2,1,0)=(0,0,0)$$

En otras palabras, debemos estudiar si el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene una solución NO trivial, es decir, distinta de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$.

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.D

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(2,1,0)\}$$

Por definición, debemos estudiar si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ tales que

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,0,1)+\alpha_3(2,1,0)=(0,0,0)$$

En otras palabras, debemos estudiar si el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene una solución NO trivial, es decir, distinta de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$.
Si resolvemos el sistema utilizando Gauss, vemos que

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.D

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(2,1,0)\}$$

Por definición, debemos estudiar si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ tales que

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(2,1,0) = (0,0,0)$$

En otras palabras, debemos estudiar si el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene una solución NO trivial, es decir, distinta de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$. Si resolvemos el sistema utilizando Gauss, vemos que

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.D

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(2,1,0)\}$$

Por definición, debemos estudiar si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ tales que

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(2,1,0) = (0,0,0)$$

En otras palabras, debemos estudiar si el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene una solución NO trivial, es decir, distinta de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$. Si resolvemos el sistema utilizando Gauss, vemos que

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Como $\mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg(A|b)} < 3$ entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones, es decir, los vectores son L.D.

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.D

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(2,1,0)\}$$

Por definición, debemos estudiar si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ tales que

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(2,1,0) = (0,0,0)$$

En otras palabras, debemos estudiar si el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene una solución NO trivial, es decir, distinta de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$. Si resolvemos el sistema utilizando Gauss, vemos que

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}|\mathrm{b}) < 3$ entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones, es decir, los vectores son L.D.

Nota Los pivotes me indican los vectores que NO son L.D.

Independencia Lineal

En resumen, un conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_n\}$ se dirá L.D si existen $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} \wedge \alpha_i \neq 0$ por lo menos para algunos i's.

Independencia Lineal

En resumen, un conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_n\}$ se dirá L.D si existen $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} \wedge \alpha_i \neq 0$ por lo menos para algunos i's.

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$ es L.I si no es un conjunto de vectores L.D. Es decir, si para todos los escalares $\alpha_1, .., \alpha_n$, se tiene que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Independencia Lineal

En resumen, un conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_n\}$ se dirá L.D si existen $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} \wedge \alpha_i \neq 0$ por lo menos para algunos i's.

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$ es L.I si no es un conjunto de vectores L.D. Es decir, si para todos los escalares $\alpha_1, .., \alpha_n$, se tiene que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Independencia Lineal

En resumen, un conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_n\}$ se dirá L.D si existen $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} \wedge \alpha_i \neq 0$ por lo menos para algunos i's.

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$ es L.I si no es un conjunto de vectores L.D. Es decir, si para todos los escalares $\alpha_1, .., \alpha_n$, se tiene que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Teorema

Dado un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$, son equivalentes:

1. *$\{v_1, .., v_n\}$ es un conjunto de vectores L.I*
2. *Para todo vector v_j, se cumple que $v_j \notin \langle \{v_i : i \in \{1, .., n\} \setminus \{j\}\} \rangle$.*

Independencia Lineal

¿Cómo saber si un conjunto de vectores es L.I?

Independencia Lineal

¿Cómo saber si un conjunto de vectores es L.I?

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.I.

$$\{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$$

Independencia Lineal

¿Cómo saber si un conjunto de vectores es L.I?

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.I.

$$\{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$$

Utilizando la definición, debemos ver que vale la implicación:

$$\text{Si } \alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

entonces $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$

Independencia Lineal

¿Cómo saber si un conjunto de vectores es L.I?

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.I.

$$\{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$$

Utilizando la definición, debemos ver que vale la implicación:

$$\text{Si } \alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

entonces $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$
Suponemos verdadero el antecedente, es decir, suponemos que

$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$

Independencia Lineal

¿Cómo saber si un conjunto de vectores es L.I?

Ejemplo Determinar si el siguiente conjunto de vectores es L.I.

$$\{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$$

Utilizando la definición, debemos ver que vale la implicación:

$$\text{Si } \alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

entonces $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$
Suponemos verdadero el antecedente, es decir, suponemos que

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Debemos probar que $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, es decir, debemos ver que el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

tiene una única solución.

Si estudiamos el rango de la matriz ampliada vemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Si estudiamos el rango de la matriz ampliada vemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Si estudiamos el rango de la matriz ampliada vemos que

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Si estudiamos el rango de la matriz ampliada vemos que

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

De donde vemos fácilmente que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Si estudiamos el rango de la matriz ampliada vemos que

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

De donde vemos fácilmente que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Por lo tanto, los vectores serán L.I.

Si estudiamos el rango de la matriz ampliada vemos que

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

De donde vemos fácilmente que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Por lo tanto, los vectores serán L.I.

Independencia lineal y determinante

Recordemos que para una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son equivalentes:

(1) $\det(A) \neq 0$.

(2) El sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene una única solución $x = \vec{0}$.

Independencia lineal y determinante

Recordemos que para una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son equivalentes:

(1) $\det(A) \neq 0$.

(2) El sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene una única solución $x = \vec{0}$.

¿De qué nos sirve tener esto presente?

Independencia lineal y determinante

Recordemos que para una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son equivalentes:

(1) $\det(A) \neq 0$.

(2) El sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene una única solución $x = \vec{0}$.

¿De qué nos sirve tener esto presente?

Teniendo esto en cuenta, podemos utilizar (cuando la matriz es cuadrada) la herramienta del determinante para analizar la independencia lineal.

Independencia lineal y determinante

Recordemos que para una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son equivalentes:

(1) $\det(A) \neq 0$.

(2) El sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene una única solución $x = \vec{0}$.

¿De qué nos sirve tener esto presente?

Teniendo esto en cuenta, podemos utilizar (cuando la matriz es cuadrada) la herramienta del determinante para analizar la independencia lineal.

Ejemplo 1 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, -1)\}$ son L.I.

Independencia lineal y determinante

Recordemos que para una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son equivalentes:

(1) $\det(A) \neq 0$.

(2) El sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene una única solución $x = \vec{0}$.

¿De qué nos sirve tener esto presente?

Teniendo esto en cuenta, podemos utilizar (cuando la matriz es cuadrada) la herramienta del determinante para analizar la independencia lineal.

Ejemplo 1 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(0,1,1),(-1,1,-1)\}$ son L.I.

Es decir, debemos ver si es verdadera la implicación

$$\text{Si } \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(-1,1,-1) = (0,0,0)$$

entonces $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

Independencia lineal y determinante

Recordemos que para una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son equivalentes:

(1) $\det(A) \neq 0$.

(2) El sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene una única solución $x = \vec{0}$.

¿De qué nos sirve tener esto presente?

Teniendo esto en cuenta, podemos utilizar (cuando la matriz es cuadrada) la herramienta del determinante para analizar la independencia lineal.

Ejemplo 1 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(0,1,1),(-1,1,-1)\}$ son L.I.

Es decir, debemos ver si es verdadera la implicación

$$\text{Si } \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(-1,1,-1) = (0,0,0)$$

entonces $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

En otras palabras el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene única solución, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

Si calculamos el determinante vemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Si calculamos el determinante vemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por lo tanto, el sistema tiene una única solución, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$, es decir, los vectores serán L.I.

Ejemplo 2 Determinar si los vectores $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ son L.I o L.D.

Ejemplo 2 Determinar si los vectores $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ son L.I o L.D.
Si planteamos el sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debemos estudiar si tiene única solución o si tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 2 Determinar si los vectores $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ son L.I o L.D.
Si planteamos el sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Debemos estudiar si tiene única solución o si tiene infinitas soluciones. Si calculamos el determinante de la matriz del sistema, vemos que

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 0$$

Ejemplo 2 Determinar si los vectores $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ son L.I o L.D.
Si planteamos el sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Debemos estudiar si tiene única solución o si tiene infinitas soluciones. Si calculamos el determinante de la matriz del sistema, vemos que

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 0 \Rightarrow \text{ infinitas soluciones}$$

Ejemplo 2 Determinar si los vectores $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ son L.I o L.D.
Si planteamos el sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Debemos estudiar si tiene única solución o si tiene infinitas soluciones. Si calculamos el determinante de la matriz del sistema, vemos que

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 0 \Rightarrow \text{ infinitas soluciones}$$

Por lo tanto, habrá alguna solución diferente de la trivial, es decir, serán L.D.

Ejemplo 3 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$ es L.I.

Ejemplo 3 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$ es L.I.
Supongamos que

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(0,1,1)=(0,0,0)$$

Ejemplo 3 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$ es L.I. Supongamos que

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(0,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$ es L.I.
Supongamos que

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(0,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema homogéneo asociado vemos que $\alpha_1=\alpha_2=0$, es decir, son L.I.

Ejemplo 3 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$ es L.I.
Supongamos que

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(0,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema homogéneo asociado vemos que $\alpha_1=\alpha_2=0$, es decir, son L.I.

Nota No se puede analizar utilizando la herramienta del determinante, ya que la matriz no es cuadrada.

¿Cómo descartar los vectores L.D de un conjunto? Consideremos el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}$. Estudiamos si son L.I o L.D.

¿Cómo descartar los vectores L.D de un conjunto? Consideremos el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}$. Estudiamos si son L.I o L.D.
Supongamos que

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,-1)+\alpha_3(2,1,0)=(0,0,0)$$

¿Cómo descartar los vectores L.D de un conjunto? Consideremos el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}$. Estudiamos si son L.I o L.D.

Supongamos que

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,-1)+\alpha_3(2,1,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

¿Cómo descartar los vectores L.D de un conjunto? Consideremos el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}$. Estudiamos si son L.I o L.D.
Supongamos que

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,-1)+\alpha_3(2,1,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo vemos que

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & f_3 \to f_3 - f_1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -2 & -2 & 0 & f_3 \to f_3 + 2f_2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

¿Cómo descartar los vectores L.D de un conjunto? Consideremos el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}$. Estudiamos si son L.I o L.D.
Supongamos que

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,-1)+\alpha_3(2,1,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos el sistema homogéneo vemos que

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & f_3 \to f_3 - f_1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -2 & -2 & 0 & f_3 \to f_3 + 2f_2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Ya que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$ los vectores son L.D.

Pero además, notemos que la matriz que obtuvimos es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 1 & 2 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & \color{blue}{0} \end{pmatrix}$$

Pero además, notemos que la matriz que obtuvimos es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 1 & 2 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & \color{blue}{0} \end{pmatrix}$$

Los pivotes que no se anulan, corresponden a los vectores L.I, es decir, las dos primeras columnas de la matriz original, son los vectores L.I. En efecto

$$\{(1,0,1),(1,1,-1)\} \text{ Son L.I}$$

Mientras que la columna cuyo pivote resulta nulo, corresponde al vector L.D, en efecto

$$(2,1,0) = (1,0,1) + (1,1,-1)$$

Conjunto de Generadores y Base

Sea V un espacio vectorial,

$$\mathbb{V} = \langle v_1, .., v_k \rangle$$

$\{v_1, .., v_k\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$. Entonces hay dos opciones:

(1) $\{v_1, .., v_k\}$ son L.D. Entonces hay vectores que sobran para generar todo el espacio.

(2) $\{v_1, .., v_k\}$ son L.I. Entonces, cada vector es necesario para generar todo el espacio.

$$\{v_1, .., v_k\} \text{ es una base para } \mathbb{V}$$

Conjunto de Generadores y Base

Sea V un espacio vectorial,

$$\mathbb{V} = \langle v_1, .., v_k \rangle$$

$\{v_1, .., v_k\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$. Entonces hay dos opciones:

(1) $\{v_1, .., v_k\}$ son L.D. Entonces hay vectores que sobran para generar todo el espacio.

(2) $\{v_1, .., v_k\}$ son L.I. Entonces, cada vector es necesario para generar todo el espacio.

$$\{v_1, .., v_k\} \text{ es una base para } \mathbb{V}$$

Definición Un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$ es una base para el espacio vectorial $\mathbb{V}$ si:

1 $\mathbb{V} = \langle \{v_1, .., v_n\} \rangle$.

2 $\{v_1, .., v_n\}$ es L.I

Conjunto de Generadores, Base y Dimensión

Observaciones importantes:

$\star$ Toda base es un conjunto de generadores del espacio $\mathbb{V}$.

$\star$ No todo conjunto de generadores es una base para $\mathbb{V}$.

$\star$ La base no es única, pero tienen la misma cantidad de vectores.

$\star$ El cardinal de la base se llama **dimensión**. Es decir, la dimensión de un espacio depende de la cantidad de vectores que hay en la base del mismo.

Generadores de $\mathbb{V}$

El procedimiento para establecer si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generan el espacio vectorial $\mathbb{V}$ es como sigue.

- Paso 1. Seleccione un vector arbitrario v en $\mathbb{V}$.
- Paso 2. Determine si v es una combinación lineal de los vectores dados. Si lo es, los vectores dados generan a $\mathbb{V}$; si no, los vectores dados no generan a $\mathbb{V}$.

Extensión de una base de un subespacio a una base para todo el espacio

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ con $k < n$ vectores LI.

Es posible extender este conjunto a una BASE para todo el espacio V?

Es decir, buscamos los vectores $\{v_{k+1}, .., v_n\}$ tales que

$$\mathcal{B} = \{v_1, .., v_k, v_{k+1}, .., v_n\} \text{ sea base para } \mathbb{V}$$

Extensión de una base de un subespacio a una base para todo el espacio

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ con $k < n$ vectores LI.

Es posible extender este conjunto a una BASE para todo el espacio V?

Es decir, buscamos los vectores $\{v_{k+1}, .., v_n\}$ tales que

$$\mathcal{B} = \{v_1, .., v_k, v_{k+1}, .., v_n\} \text{ sea base para } \mathbb{V}$$

Ejemplo Consideremos el vector $v = (1, 2, -1)$ generador de una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $P = (0, 0, 0)$

Ahora, buscamos hallar dos vectores v_1, v_2 tales que

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), v_1, v_2\}$$

sea base para $\mathbb{R}^3$, es decir, sean L.I.

Ahora, buscamos hallar dos vectores v_1, v_2 tales que

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), v_1, v_2\}$$

sea base para $\mathbb{R}^3$, es decir, sean L.I.

Paso 1: Comenzamos proponiendo un vector v_1 que sea L.I con respecto a $(1, 2, -1)$. Podemos tomar el vector $v_1 = (1, 0, 0)$ y obtenemos

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), v_3\}$$

Ahora, buscamos hallar dos vectores v_1, v_2 tales que

$$\mathcal{B} = \{(1,2,-1), v_1, v_2\}$$

sea base para $\mathbb{R}^3$, es decir, sean L.I.

Paso 1: Comenzamos proponiendo un vector v_1 que sea L.I con respecto a $(1,2,-1)$. Podemos tomar el vector $v_1 = (1,0,0)$ y obtenemos

$$\mathcal{B} = \{(1,2,-1), (1,0,0), v_3\}$$

Paso 2: Debemos buscar un vector $v_3 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\{(1,2,-1), (1,0,0), (x,y,z)\} \text{ sean L.I}$$

Ahora, buscamos hallar dos vectores v_1, v_2 tales que

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), v_1, v_2\}$$

sea base para $\mathbb{R}^3$, es decir, sean L.I.

Paso 1: Comenzamos proponiendo un vector v_1 que sea L.I con respecto a $(1, 2, -1)$. Podemos tomar el vector $v_1 = (1, 0, 0)$ y obtenemos

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), v_3\}$$

Paso 2: Debemos buscar un vector $v_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (x, y, z)\} \text{ sean L.I}$$

Es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Debe tener $\mathrm{rg}(A) = 3$

Si escalonamos la matriz, vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & z+x \\ 0 & 0 & 2z+y \end{pmatrix}$$

Si escalonamos la matriz, vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & z + x \\ 0 & 0 & 2z + y \end{pmatrix}$$

Dicha matriz tendrá $\mathrm{rg}(A) = 3$ si y solo si $2z + y \neq 0$.

Si escalonamos la matriz, vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & z+x \\ 0 & 0 & 2z+y \end{pmatrix}$$

Dicha matriz tendrá $\mathrm{rg}(A) = 3$ si y solo si $2z + y \neq 0$.

Por lo tanto, cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $2z + y \neq 0$ nos sirve.

Si escalonamos la matriz, vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & z+x \\ 0 & 0 & 2z+y \end{pmatrix}$$

Dicha matriz tendrá $\mathrm{rg}(A) = 3$ si y solo si $2z + y \neq 0$.

Por lo tanto, cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $2z + y \neq 0$ nos sirve.

Podemos usar el vector $v_3 = (1, 1, 1)$, luego

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$$

Es una base de $\mathbb{R}^3$