FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNICEN

Álgebra Lineal

Vectores

Producto cartesiano de conjuntos

Definición

Dados A y B dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano de los conjuntos como

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}$$

Los elementos del conjunto $A \times B$ son pares ordenados.

Producto cartesiano de conjuntos

Definición

Dados A y B dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano de los conjuntos como

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}$$

Los elementos del conjunto $A \times B$ son pares ordenados.

Recordemos que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

Producto cartesiano de conjuntos

Definición

Dados A y B dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano de los conjuntos como

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}$$

Los elementos del conjunto $A \times B$ son pares ordenados.

Recordemos que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Producto cartesiano de conjuntos

Definición

Dados A y B dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano de los conjuntos como

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}$$

Los elementos del conjunto $A \times B$ son pares ordenados.

Recordemos que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, .., x_n) \colon x_i \in \mathbb{R} \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

Operaciones con puntos de $\mathbb{R}^n$

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla $P = (x_1, .., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Operaciones con puntos de $\mathbb{R}^n$

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla $P = (x_1, .., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

- Suma: Dados $P = (x_1, .., x_n)$ y $Q = (y_1, .., y_n)$ dos puntos, definimos la suma como $P + Q = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$

Operaciones con puntos de $\mathbb{R}^n$

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla $P = (x_1, .., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

- Suma: Dados $P = (x_1, .., x_n)$ y $Q = (y_1, .., y_n)$ dos puntos, definimos la suma como $P + Q = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
- Neutro para la suma: Si tomamos el punto $\vec{0} = (0, .., 0)$ $P + 0 = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = P$

Operaciones con puntos de $\mathbb{R}^n$

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla $P = (x_1, .., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

- Suma: Dados $P = (x_1, .., x_n)$ y $Q = (y_1, .., y_n)$ dos puntos, definimos la suma como $P + Q = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
- Neutro para la suma: Si tomamos el punto $\vec{0} = (0, .., 0)$ $P + 0 = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = P$
- Inverso para la suma: Para el punto $P = (x_1, .., x_n)$ se tiene que $-P = (-x_1, ..., -x_n)$

Operaciones con puntos de $\mathbb{R}^n$

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla $P = (x_1, .., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

- Suma: Dados $P = (x_1, .., x_n)$ y $Q = (y_1, .., y_n)$ dos puntos, definimos la suma como $P + Q = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
- Neutro para la suma: Si tomamos el punto $\vec{0} = (0, .., 0)$ $P + 0 = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = P$
- Inverso para la suma: Para el punto $P = (x_1, .., x_n)$ se tiene que $-P = (-x_1, ..., -x_n)$
- Diferencia: Dados $P = (x_1, .., x_n)$ y $Q = (y_1, .., y_n)$ entonces $P - Q = P + (-Q) = (x_1 - y_1, .., x_n - y_n)$

Operaciones con puntos de $\mathbb{R}^n$

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla $P = (x_1, .., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

- Suma: Dados $P = (x_1, .., x_n)$ y $Q = (y_1, .., y_n)$ dos puntos, definimos la suma como $P + Q = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
- Neutro para la suma: Si tomamos el punto $\vec{0} = (0, .., 0)$ $P + 0 = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = P$
- Inverso para la suma: Para el punto $P = (x_1, .., x_n)$ se tiene que $-P = (-x_1, ..., -x_n)$
- Diferencia: Dados $P = (x_1, .., x_n)$ y $Q = (y_1, .., y_n)$ entonces $P - Q = P + (-Q) = (x_1 - y_1, .., x_n - y_n)$
- Equivalencia de puntos: P y Q se dirán equivalentes sii $x_i = y_i$ para cada $1 \leq i \leq n$

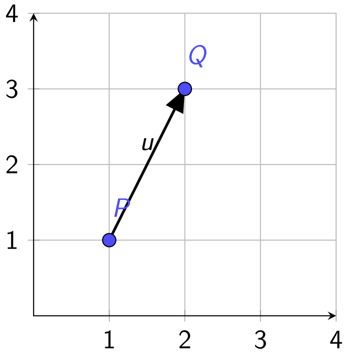
Vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición

Dados dos puntos P y Q de $\mathbb{R}^n$. El vector $\overrightarrow{PQ}$ de $\mathbb{R}^n$ es el segmento de recta dirigido que une dos puntos P y Q, a los cuales llamaremos inicio y fin (cola y cabeza) respectivamente.

Definición

Dados dos puntos P y Q de $\mathbb{R}^n$. El vector $\overrightarrow{PQ}$ de $\mathbb{R}^n$ es el segmento de recta dirigido que une dos puntos P y Q, a los cuales llamaremos inicio y fin (cola y cabeza) respectivamente.



Ejemplo del vector de $\mathbb{R}^2$ que une los puntos $P = (1, 1)$ y $Q = (2, 3)$

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Un vector queda determinado si conocemos

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Un vector queda determinado si conocemos

- Su dirección (la inclinación del vector dada por el ángulo θ que forma el vector con la semirrecta positiva del eje x),

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Un vector queda determinado si conocemos

- Su dirección (la inclinación del vector dada por el ángulo θ que forma el vector con la semirrecta positiva del eje x),
- El sentido (es la orientación),

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Un vector queda determinado si conocemos

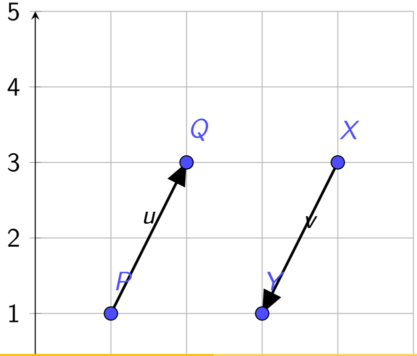
- Su dirección (la inclinación del vector dada por el ángulo θ que forma el vector con la semirrecta positiva del eje x),
- El sentido (es la orientación),
- La norma, módulo o longitud del vector.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

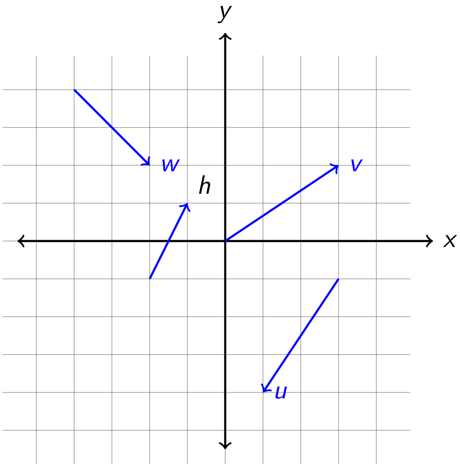
Un vector queda determinado si conocemos

- Su dirección (la inclinación del vector dada por el ángulo θ que forma el vector con la semirrecta positiva del eje x),
- El sentido (es la orientación),
- La norma, módulo o longitud del vector.

Ejemplo 1 Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{XY}$ tienen la misma dirección y longitud, pero diferente sentido.



Ejemplo 2 Los siguientes vectores tienen diferente dirección, sentido y longitud.



Vectores posición

$\overrightarrow{OP} = \vec{P}$: inicio en origen de coordenadas y finaliza en P

Vectores posición

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P} : \text{inicio en origen de coordenadas y finaliza en } P$$

Cada vector posición $\vec{P}$ lo podemos identificar con el punto P y se representa por medio de sus **componentes** a y b:

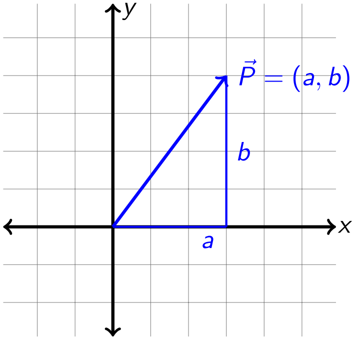
$$\vec{P} = (a, b) \text{ o } \vec{P} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^t$$

Vectores posición

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P} \text{ : inicio en origen de coordenadas y finaliza en } P$$

Cada vector posición $\vec{P}$ lo podemos identificar con el punto P y se representa por medio de sus **componentes** a y b:

$$\vec{P} = (a, b) \text{ o } \vec{P} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^t$$



Vectores equivalentes

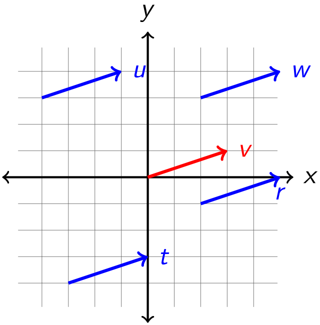
Definición

Dos o más vectores se dirán equivalentes si tienen misma longitud, dirección y sentido.

Vectores equivalentes

Definición

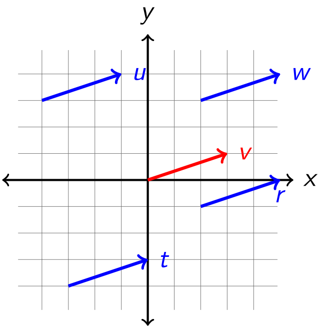
Dos o más vectores se dirán equivalentes si tienen misma longitud, dirección y sentido.



Vectores equivalentes

Definición

Dos o más vectores se dirán equivalentes si tienen misma longitud, dirección y sentido.



De todos los vectores equivalentes, tomamos como representante el vector que sale del origen de coordenadas (representante canónico).

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Dados dos puntos P y Q de $\mathbb{R}^n$. El vector canónico equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ se determina como

$$\overrightarrow{\vec{0}(Q-P)}$$

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Dados dos puntos P y Q de $\mathbb{R}^n$. El vector canónico equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ se determina como

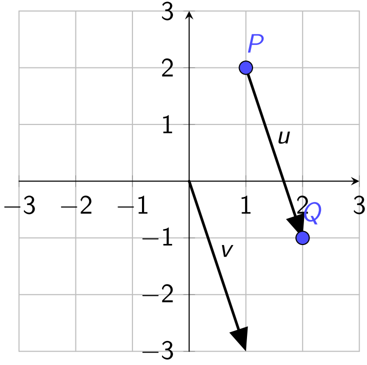
$$\overrightarrow{\vec{0}(Q-P)}$$

Ejemplo Dados $P=(1,2)$ y $Q=(2,-1)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$. El vector $\vec{v}=(1,-3)$ es su vector equivalente canónico.

Dados dos puntos P y Q de $\mathbb{R}^n$. El vector canónico equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ se determina como

$$\overrightarrow{\vec{0}(Q-P)}$$

Ejemplo Dados $P=(1,2)$ y $Q=(2,-1)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$. El vector $\vec{v}=(1,-3)$ es su vector equivalente canónico.



Vectores posición equivalente

Definición

Dos vectores $\vec{u} = (u_1, .., u_n)$ *y* $\vec{v} = (v_1, .., v_n) \in \mathbb{R}^n$ *son equivalentes si para cada* $1 \leq i \leq n$ *se tiene que* $u_i = v_i$.

Vectores posición equivalente

Definición

Dos vectores $\vec{u} = (u_1, .., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, .., v_n) \in \mathbb{R}^n$ son equivalentes si para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $u_i = v_i$.

Ejemplo El vector $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es equivalente al vector que une los puntos $P = (1, 2, 0)$ y $Q = (2, 2, -1)$, puesto que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0(Q - P)} = (1, 0, -1)$$

Comparando las componentes del vector $\vec{v}$ con el vector $\overrightarrow{PQ}$, vemos que son equivalentes.

Vectores posición equivalente

Definición

Dos vectores $\vec{u} = (u_1, .., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, .., v_n) \in \mathbb{R}^n$ son equivalentes si para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $u_i = v_i$.

Ejemplo El vector $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es equivalente al vector que une los puntos $P = (1, 2, 0)$ y $Q = (2, 2, -1)$, puesto que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0(Q - P)} = (1, 0, -1)$$

Comparando las componentes del vector $\vec{v}$ con el vector $\overrightarrow{PQ}$, vemos que son equivalentes.

Nota Todo vector es equivalente a un vector posición. Por lo tanto, siempre vamos a trabajar con vectores posición, es decir, con vectores que salen desde el origen de coordenadas.

Vectores posición equivalente

Definición

Dos vectores $\vec{u} = (u_1, .., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, .., v_n) \in \mathbb{R}^n$ son equivalentes si para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $u_i = v_i$.

Ejemplo El vector $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es equivalente al vector que une los puntos $P = (1, 2, 0)$ y $Q = (2, 2, -1)$, puesto que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0(Q - P)} = (1, 0, -1)$$

Comparando las componentes del vector $\vec{v}$ con el vector $\overrightarrow{PQ}$, vemos que son equivalentes.

Nota Todo vector es equivalente a un vector posición. Por lo tanto, siempre vamos a trabajar con vectores posición, es decir, con vectores que salen desde el origen de coordenadas.

Nota Los vectores posición se identifican con sus puntos finales, por lo tanto, serán equivalentes si y sólo si sus puntos finales son equivalentes.

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, .., u_n + v_n)$$

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, .., u_n + v_n)$$

- Vector Nulo

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, .., u_n + v_n)$$

- Vector Nulo

$$\vec{0} = (0, 0, .., 0)$$

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, .., u_n + v_n)$$

- Vector Nulo

$$\vec{0} = (0, 0, .., 0)$$

- Vector Opuesto. Para $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$,

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, .., u_n + v_n)$$

- Vector Nulo

$$\vec{0} = (0, 0, .., 0)$$

- Vector Opuesto. Para $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, ..., -u_n)$$

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, .., u_n + v_n)$$

- Vector Nulo
$$\vec{0} = (0, 0, .., 0)$$

- Vector Opuesto. Para $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$,
$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, ..., -u_n)$$

- Diferencia
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_n - v_n)$$

Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Suma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, .., u_n + v_n)$$

- Vector Nulo

$$\vec{0} = (0, 0, .., 0)$$

- Vector Opuesto. Para $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, ..., -u_n)$$

- Diferencia

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_n - v_n)$$

- Producto por un escalar. Si $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$k.\vec{u} = (ku_1, ku_2, ..., ku_n)$$

Producto por un escalar

Ejemplo Sea $\vec{v} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$, notemos que

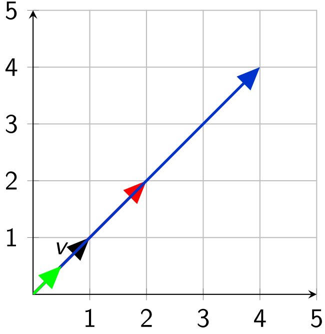
$$2(1,1) = (2,2), \;\; 4(1,1) = (4,4), \;\; \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Producto por un escalar

Ejemplo Sea $\vec{v} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$, notemos que

$$2(1,1) = (2,2), \;\; 4(1,1) = (4,4), \;\; \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Podemos observar que, geométricamente, se estira y contrae el vector $\vec{v} = (1,1)$.

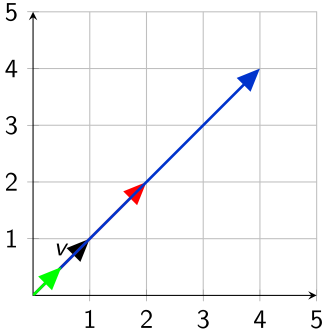


Producto por un escalar

Ejemplo Sea $\vec{v} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$, notemos que

$$2(1,1) = (2,2), \;\; 4(1,1) = (4,4), \;\; \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Podemos observar que, geométricamente, se estira y contrae el vector $\vec{v} = (1,1)$.



¿Qué sucede si $k < 0$?

Ley del paralelogramo

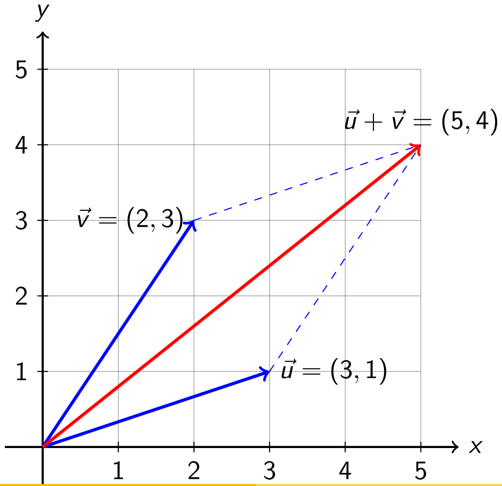
Ejemplo $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 1) + (2, 3) = (5, 4)$$

Ley del paralelogramo

Ejemplo $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 1) + (2, 3) = (5, 4)$$



Desigualdad Triangular

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

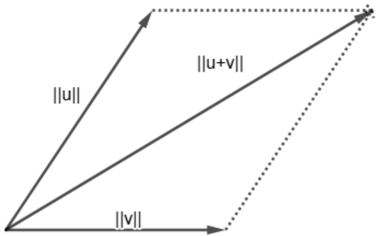
Esto significa que la longitud (o norma) de la suma de dos vectores es siempre menor o igual a la suma de sus longitudes (normas).

Desigualdad Triangular

Sean **u** y **v** dos vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Esto significa que la longitud (o norma) de la suma de dos vectores es siempre menor o igual a la suma de sus longitudes (normas). Gráficamente:

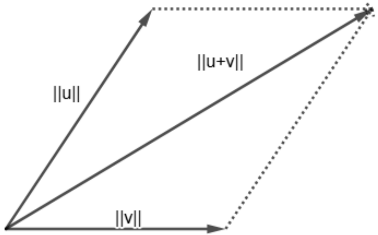


Desigualdad Triangular

Sean **u** y **v** dos vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Esto significa que la longitud (o norma) de la suma de dos vectores es siempre menor o igual a la suma de sus longitudes (normas).
Gráficamente:



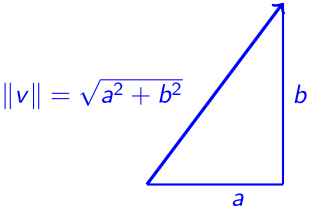
En la expresión anterior $\|v\|$ significa la norma, módulo o longitud del vector **v**. Veamos cómo se calcula dicha longitud.

Norma de un vector

Por medio del teorema de Pitágoras podemos calcular la norma (o el módulo) de $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

Norma de un vector

Por medio del teorema de Pitágoras podemos calcular la norma (o el módulo) de $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

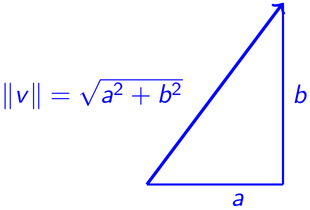


$v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Norma de un vector

Por medio del teorema de Pitágoras podemos calcular la norma (o el módulo) de $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$



$v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

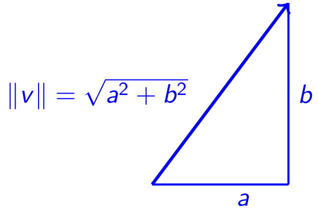
$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Norma de un vector

Por medio del teorema de Pitágoras podemos calcular la norma (o el módulo) de $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$



$v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Los vectores de $\|v\| = 1$ se llaman vectores unitarios. ¿Pueden dar un ejemplo?

Ejemplo 1 Determinar la norma de $v = (-3, 1, 2)$

Ejemplo 1 Determinar la norma de $v = (-3, 1, 2)$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

Ejemplo 1 Determinar la norma de $v = (-3, 1, 2)$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

Ejemplo 2 Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.

Ejemplo 1 Determinar la norma de $v = (-3, 1, 2)$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

Ejemplo 2 Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow$$

Ejemplo 1 Determinar la norma de $v = (-3, 1, 2)$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

Ejemplo 2 Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.

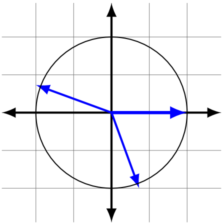
$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{circunferencia de radio 2}$$

Ejemplo 1 Determinar la norma de $v = (-3, 1, 2)$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

Ejemplo 2 Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{circunferencia de radio 2}$$



Combinaciones lineales

Definición

Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores. Entonces cualquier expresión de la forma

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son escalares, se llama combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Combinaciones lineales

Definición

Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores. Entonces cualquier expresión de la forma

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son escalares, se llama combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Ejemplo 1 El vector $(4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(-1, 1)$ y $(0, 2)$ pues

$$(4, -3) = (-\mathbf{4})\ (-1, 1) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ (0, 2)$$

Combinaciones lineales

Definición

Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores. Entonces cualquier expresión de la forma

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son escalares, se llama combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Ejemplo 1 El vector $(4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(-1, 1)$ y $(0, 2)$ pues

$$(4, -3) = (-\mathbf{4})\,(-1, 1) + \mathbf{\frac{1}{2}}\,(0, 2)$$

Ejemplo 2 Cualquier vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ se puede poner en combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pues

$$(x, y) = \boldsymbol{x}\,(1, 0) + \boldsymbol{y}\,(0, 1)$$

Combinaciones lineales

Definición

Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores. Entonces cualquier expresión de la forma

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son escalares, se llama combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Ejemplo 1 El vector $(4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(-1, 1)$ y $(0, 2)$ pues

$$(4, -3) = (-\mathbf{4})\,(-1, 1) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,(0, 2)$$

Ejemplo 2 Cualquier vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ se puede poner en combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pues

$$(x, y) = \boldsymbol{x}\,(1, 0) + \boldsymbol{y}\,(0, 1)\,.$$

Ejemplo 3 De igual forma, un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede poner escribir como la siguiente combinación lineal:

$$(x, y, z) = \boldsymbol{x}\,(1, 0, 0) + \boldsymbol{y}\,(0, 1, 0) + \boldsymbol{z}\,(0, 0, 1)\,.$$

Distancia entre dos puntos

Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$.

Distancia entre dos puntos

Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$.

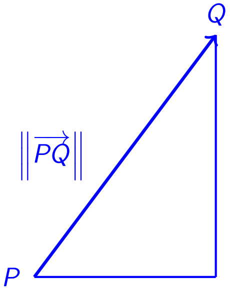
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\,,$$

Distancia entre dos puntos

Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\,,$$

$$d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Distancia entre dos puntos

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$.

Distancia entre dos puntos

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$

Distancia entre dos puntos

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,,$

$$d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Producto escalar

Definición

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ *definimos el producto escalar como:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Más generalmente, dados los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *el producto escalar es:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots u_n v_n$$

Propiedades

El producto escalar (o interno) tiene las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0, \ \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \text{ sii } u = 0$
3. $c \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c \cdot \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

Vectores ortogonales y paralelos

Definición

- *Dos vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *son ortogonales si* $u \cdot \vec{v} = 0$.

Vectores ortogonales y paralelos

Definición

- *Dos vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *son ortogonales si* $u \cdot \vec{v} = 0$.
- *Dos vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *son paralelos si existe un escalar no nulo tal que* $\vec{u} = c\vec{v}$, *para algún* $c \in \mathbb{R}$.

Vectores ortogonales y paralelos

Definición

- *Dos vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *son ortogonales si* $u \cdot \vec{v} = 0$.
- *Dos vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *son paralelos si existe un escalar no nulo tal que* $\vec{u} = c\vec{v}$, *para algún* $c \in \mathbb{R}$.

Definición

Dados $\vec{u}, \vec{v}$ *vectores no nulos en* $\mathbb{R}^n$, *el ángulo* θ, *entre ellos, satisface que* $0 \leq \theta \leq \pi$ *con*

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que, para cualquier par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, se cumple la siguiente relación:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

Producto Vectorial

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

Producto Vectorial

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

- Está definido únicamente en $\mathbb{R}^3$.

Producto Vectorial

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

- Está definido únicamente en $\mathbb{R}^3$.
- Da como resultado un vector que también pertenece a $\mathbb{R}^3$.

Producto Vectorial

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

- Está definido únicamente en $\mathbb{R}^3$.
- Da como resultado un vector que también pertenece a $\mathbb{R}^3$.
- El vector resultante es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Producto Vectorial

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

- Está definido únicamente en $\mathbb{R}^3$.
- Da como resultado un vector que también pertenece a $\mathbb{R}^3$.
- El vector resultante es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Importante

El producto vectorial $\xrightarrow{resulta}$ un vector.

El producto escalar $\xrightarrow{resulta}$ un escalar.

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes propiedades son válidas:

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$.

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$.
3. $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v})$.

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$.
3. $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v})$.
4. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$.

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$.
3. $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v})$.
4. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$.
5. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$.
3. $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v})$.
4. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$.
5. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
6. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y solo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

Propiedades

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3,$$

Propiedades

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3,\ -(u_1 v_3 - v_1 u_3),$$

Propiedades

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, \, -(u_1 v_3 - v_1 u_3), u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

Propiedades

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, \, -(u_1 v_3 - v_1 u_3), u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

- $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

Propiedades

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, \, -(u_1 v_3 - v_1 u_3), u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

- $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad$ y $\quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
- $||u \times v|| = ||u||.||v|| \operatorname{sen} \theta =$ área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Propiedades

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, \, -(u_1 v_3 - v_1 u_3), u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

- $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
- $||u \times v|| = ||u||.||v|| \operatorname{sen} \theta =$ área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- $u \times v = (0, 0, 0)$ si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

Ejemplo

Sean $u = (2, 1, 4)$ y $v = (1, -1, 1)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$:

Ejemplo

Sean $u = (2, 1, 4)$ y $v = (1, -1, 1)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Sean $u = (2, 1, 4)$ y $v = (1, -1, 1)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 4, -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 4), 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)$$

Ejemplo

Sean $u = (2, 1, 4)$ y $v = (1, -1, 1)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 4, -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 4), 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)$$

$$u \times v = (5, 2, -3)$$

Ejemplo

Sean $u = (2,1,4)$ y $v = (1,-1,1)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 4, -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 4), 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)$$

$$u \times v = (5, 2, -3)$$

Observemos que el vector resultante es ortogonal a u y v:

$$(5,2,-3) \cdot (2,1,4) = 0$$

$$(5,2,-3) \cdot (1,-1,1) = 0$$