FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS
UNICEN

Álgebra Lineal

Rectas y planos. Rango

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, podemos estirarlo o contraerlo con el producto por un escalar.

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, podemos estirarlo o contraerlo con el producto por un escalar.

Ejemplo Consideremos el vector $\vec{v} = (1, 1)$ entonces el conjunto de los puntos

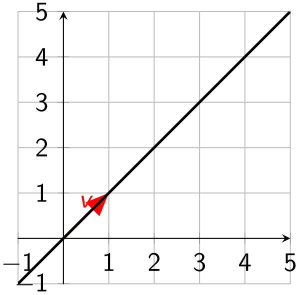
$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \lambda(1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, podemos estirarlo o contraerlo con el producto por un escalar.

Ejemplo Consideremos el vector $\vec{v} = (1, 1)$ entonces el conjunto de los puntos

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \lambda(1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \text{ Es una recta}$$



Rectas en $\mathbb{R}^2$

Notemos que la recta fue generada a partir de múltiplos (por diferentes escalares) de $\vec{v} = (1, 1)$ por lo tanto:

(1) El vector $\vec{v} = (1, 1)$ le da la dirección a la recta.

(2) El vector $\vec{v} = (1, 1)$ se llama vector director (o vector generador) de la recta.

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Notemos que la recta fue generada a partir de múltiplos (por diferentes escalares) de $\vec{v} = (1,1)$ por lo tanto:

(1) El vector $\vec{v} = (1,1)$ le da la dirección a la recta.

(2) El vector $\vec{v} = (1,1)$ se llama vector director (o vector generador) de la recta.

Pregunta ¿Qué pasaría si consideramos el conjunto de puntos

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) = \lambda(1,1) + (2,3)\}?$$

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Notemos que la recta fue generada a partir de múltiplos (por diferentes escalares) de $\vec{v} = (1, 1)$ por lo tanto:

(1) El vector $\vec{v} = (1, 1)$ le da la dirección a la recta.

(2) El vector $\vec{v} = (1, 1)$ se llama vector director (o vector generador) de la recta.

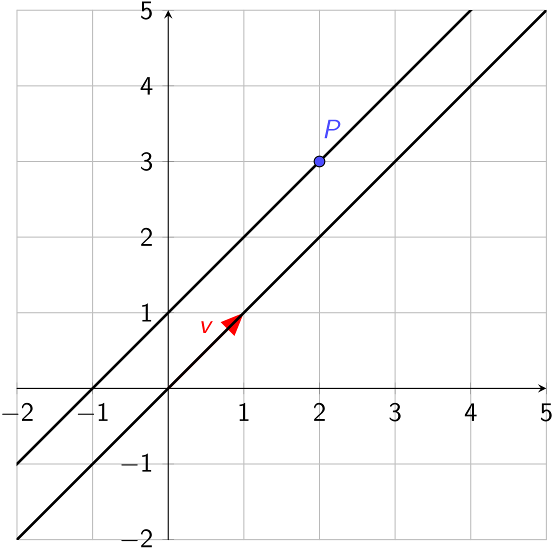
Pregunta ¿Qué pasaría si consideramos el conjunto de puntos

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \lambda(1, 1) + (2, 3)\}?$$

Gráficamente, el punto $P = (2, 3)$ desplaza a la recta generada por $\vec{v} = (1, 1)$ de manera tal que L cumple:

(1) Tiene la misma dirección (es decir, el desplazamiento no cambia la dirección)

(2) Pasa por el punto P.



5
4
3
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
4
5
P
v

Ecuación Vectorial de la recta en $\mathbb{R}^2$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto, entonces

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \lambda \vec{v} + P\}$$

Es la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\vec{v}$.

Ecuación Vectorial de la recta en $\mathbb{R}^2$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto, entonces

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \lambda \vec{v} + P\}$$

Es la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\vec{v}$. La ecuación

$$(x, y) = \lambda \underbrace{\vec{v}}_{\text{vector director}} + \underbrace{P}_{\text{punto por donde pasa}}$$

Es la ecuación vectorial de la recta L.

Ecuación Vectorial de la recta en $\mathbb{R}^2$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto, entonces

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \lambda \vec{v} + P\}$$

Es la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\vec{v}$. La ecuación

$$(x, y) = \lambda \underbrace{\vec{v}}_{\text{vector director}} + \underbrace{P}_{\text{punto por donde pasa}}$$

Es la ecuación vectorial de la recta L.

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial de la recta L que cumple las siguiente condiciones

(1) L es paralela a la recta $r : (x, y) = \lambda(2, 1) + (3, 5)$

(2) L pasa por el punto $P = (-1, 3)$.

Ecuación Vectorial de la recta en $\mathbb{R}^2$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto, entonces

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \lambda \vec{v} + P\}$$

Es la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\vec{v}$. La ecuación

$$(x, y) = \lambda \underbrace{\vec{v}}_{\text{vector director}} + \underbrace{P}_{\text{punto por donde pasa}}$$

Es la ecuación vectorial de la recta L.

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial de la recta L que cumple las siguiente condiciones

(1) L es paralela a la recta $r : (x, y) = \lambda(2, 1) + (3, 5)$

(2) L pasa por el punto $P = (-1, 3)$.

Notemos que L será paralela a la recta r si y sólo si tienen la misma dirección, por lo tanto

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \ \text{ Ec. de la recta L}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Notemos que el punto $Q = (1, 4) \in L$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 4) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Notemos que el punto $Q = (1, 4) \in L$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 4) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ 4 = \lambda + 3 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Notemos que el punto $Q = (1, 4) \in L$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 4) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ 4 = \lambda + 3 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Notemos que para $\lambda = 1$ ambas ecuaciones se satisfacen, por lo tanto, $Q \in L$.

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Notemos que el punto $Q = (1, 4) \in L$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 4) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ 4 = \lambda + 3 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Notemos que para $\lambda = 1$ ambas ecuaciones se satisfacen, por lo tanto, $Q \in L$.

¿El punto $Z = (1, -1) \in L$?.

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Notemos que el punto $Q = (1, 4) \in L$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 4) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ 4 = \lambda + 3 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Notemos que para $\lambda = 1$ ambas ecuaciones se satisfacen, por lo tanto, $Q \in L$.

¿El punto $Z = (1, -1) \in L$?. Debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, -1) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Notemos que el punto $Q = (1, 4) \in L$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 4) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ 4 = \lambda + 3 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Notemos que para $\lambda = 1$ ambas ecuaciones se satisfacen, por lo tanto, $Q \in L$.

¿El punto $Z = (1, -1) \in L$?. Debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, -1) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ -1 = \lambda + 3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Consideremos la recta que hemos construido

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 3)$$

¿Podemos determinar si el punto $Q = (1, 4) \in L$?.

Notemos que el punto $Q = (1, 4) \in L$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 4) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ 4 = \lambda + 3 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Notemos que para $\lambda = 1$ ambas ecuaciones se satisfacen, por lo tanto, $Q \in L$.

¿El punto $Z = (1, -1) \in L$?. Debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, -1) = \lambda(2, 1) + (-1, 3) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda - 1 \\ -1 = \lambda + 3 \end{cases}$$

Para la primera ecuación $\lambda = 1$ es solución, pero no es solución de la segunda ecuación, por lo tanto $Z \notin L$.

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

De manera general para el vector $\vec{v} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y el punto $P = (a, b)$ sabemos que

$$\underbrace{(x, y) = \lambda\,(x_0, y_0) + (a, b)}_{\text{Ec. vectorial}}$$

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

De manera general para el vector $\vec{v} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y el punto $P = (a, b)$ sabemos que

$$\underbrace{(x, y) = \lambda\,(x_0, y_0) + (a, b)}_{\text{Ec. vectorial}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = \lambda x_0 + a \\ y = \lambda y_0 + b \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

De manera general para el vector $\vec{v} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y el punto $P = (a, b)$ sabemos que

$$\underbrace{(x, y) = \lambda\,(x_0, y_0) + (a, b)}_{\text{Ec. vectorial}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = \lambda x_0 + a \\ y = \lambda y_0 + b \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Ejemplo Determinar las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que une los puntos $P = (1, -2)$ y $Q = (2, 3)$.

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

De manera general para el vector $\vec{v} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y el punto $P = (a, b)$ sabemos que

$$\underbrace{(x, y) = \lambda\,(x_0, y_0) + (a, b)}_{\text{Ec. vectorial}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = \lambda x_0 + a \\ y = \lambda y_0 + b \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Ejemplo Determinar las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que une los puntos $P = (1, -2)$ y $Q = (2, 3)$.

Buscaremos primero la ecuación vectorial. Para esto, necesitamos

(1) El vector director

(2) Un punto por donde pasa la recta.

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

$\triangleright$ Vector director: Sabemos que debe pasar por $P = (1, -2)$ y $Q = (2, 3)$, por lo tanto tomamos

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 3) - (1, -2) = (1, 5)$$

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

$\triangleright$ Vector director: Sabemos que debe pasar por $P = (1, -2)$ y $Q = (2, 3)$, por lo tanto tomamos

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 3) - (1, -2) = (1, 5)$$

$\triangleright$ Punto por donde pasa: Teniendo en cuenta que $\vec{v} = (1, 5)$ es el vector

posición equivalente al que une los puntos P y Q debemos hacer pasar la recta por cualquiera de los puntos, es decir

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

$\triangleright$ Vector director: Sabemos que debe pasar por $P = (1, -2)$ y $Q = (2, 3)$, por lo tanto tomamos

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 3) - (1, -2) = (1, 5)$$

$\triangleright$ Punto por donde pasa: Teniendo en cuenta que $\vec{v} = (1, 5)$ es el vector

posición equivalente al que une los puntos P y Q debemos hacer pasar la recta por cualquiera de los puntos, es decir

$$(x, y) = \lambda(1, 5) + P \quad \text{y} \quad (x, y) = \lambda(1, 5) + Q$$

serán dos ecuaciones para la misma recta.

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

▷ Vector director: Sabemos que debe pasar por $P = (1, -2)$ y $Q = (2, 3)$, por lo tanto tomamos

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 3) - (1, -2) = (1, 5)$$

▷ Punto por donde pasa: Teniendo en cuenta que $\vec{v} = (1, 5)$ es el vector

posición equivalente al que une los puntos P y Q debemos hacer pasar la recta por cualquiera de los puntos, es decir

$$(x, y) = \lambda(1, 5) + P \quad \text{y} \quad (x, y) = \lambda(1, 5) + Q$$

serán dos ecuaciones para la misma recta. Tomamos

$$(x, y) = \lambda(1, 5) + \underbrace{(1, -2)}_{P}$$

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$

$\triangleright$ Vector director: Sabemos que debe pasar por $P = (1, -2)$ y $Q = (2, 3)$, por lo tanto tomamos

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 3) - (1, -2) = (1, 5)$$

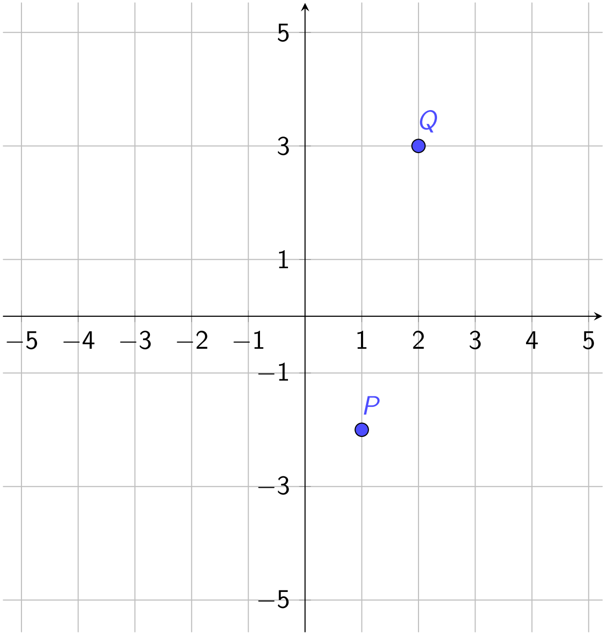
$\triangleright$ Punto por donde pasa: Teniendo en cuenta que $\vec{v} = (1, 5)$ es el vector

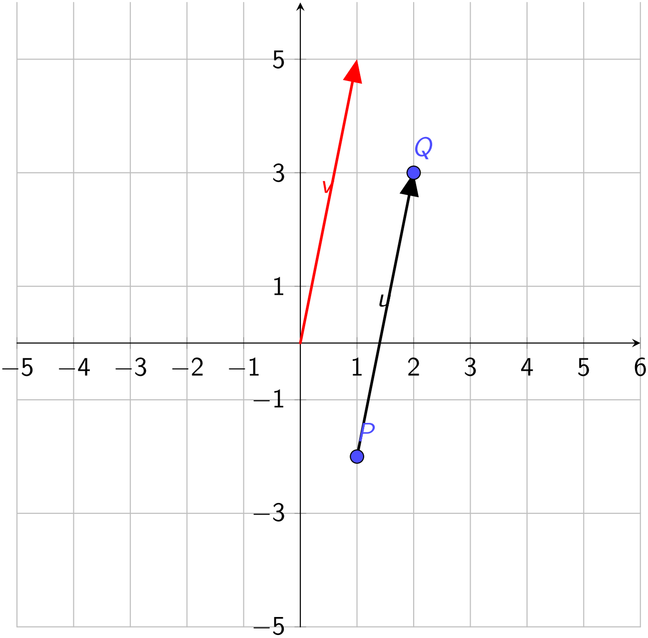
posición equivalente al que une los puntos P y Q debemos hacer pasar la recta por cualquiera de los puntos, es decir

$$(x, y) = \lambda(1, 5) + P \quad \text{y} \quad (x, y) = \lambda(1, 5) + Q$$

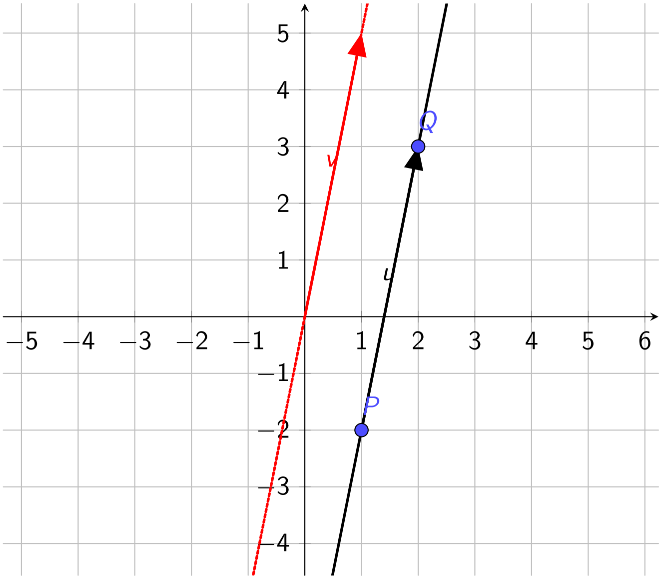
serán dos ecuaciones para la misma recta. Tomamos

$$(x, y) = \lambda(1, 5) + \underbrace{(1, -2)}_{P} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 5\lambda - 2 \end{cases}$$


Q
P
5
3
1
−1
−3
−5
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5



5
3
1
−1
−3
−5
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
v
u
Q
P



Q
P
v
u
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6

Rectas en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ las rectas se construyen de la misma manera.

Rectas en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ las rectas se construyen de la misma manera.

Dado un vector director $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y un punto $P = (a, b, c)$, la recta que pasa por el punto P y tiene dirección $\vec{v}$ es el conjunto de puntos

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda\,(x_0, y_0, z_0) + (a, b, c), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Rectas en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ las rectas se construyen de la misma manera.

Dado un vector director $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y un punto $P = (a, b, c)$, la recta que pasa por el punto P y tiene dirección $\vec{v}$ es el conjunto de puntos

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda\,(x_0, y_0, z_0) + (a, b, c), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Tiene como ecuación vectorial

$$(x, y, z) = \lambda\,(x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)$$

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por

$P = (2, -1, 1)$ y tiene la dirección de $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Rectas en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ las rectas se construyen de la misma manera.

Dado un vector director $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y un punto $P = (a, b, c)$, la recta que pasa por el punto P y tiene dirección $\vec{v}$ es el conjunto de puntos

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda\,(x_0, y_0, z_0) + (a, b, c), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Tiene como ecuación vectorial

$$(x, y, z) = \lambda\,(x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)$$

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por

$P = (2, -1, 1)$ y tiene la dirección de $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

La recta tendrá como ecuación vectorial

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + (2, -1, 1)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial y paramétrica de la recta paralela a la recta

$$R\colon (x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 1, 1)$$

que además pasa por $Q = (2, 3, 1)$.

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial y paramétrica de la recta paralela a la recta

$$R\colon (x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 1, 1)$$

que además pasa por $Q = (2, 3, 1)$.

Sabemos que debe ser paralela a la recta dada, por lo tanto, deben tener la misma dirección, es decir:
$\star$ $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es el vector director.
$\star$ Debe pasar por $Q = (2, 3, 1)$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial y paramétrica de la recta paralela a la recta

$$R\colon (x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 1, 1)$$

que además pasa por $Q = (2, 3, 1)$.

Sabemos que debe ser paralela a la recta dada, por lo tanto, deben tener la misma dirección, es decir:
⋆ $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es el vector director.
⋆ Debe pasar por $Q = (2, 3, 1)$

$$\underbrace{(x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 3, 1)}_{\text{Ec. vectorial}}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial y paramétrica de la recta paralela a la recta

$$R\colon (x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 1, 1)$$

que además pasa por $Q = (2, 3, 1)$.

Sabemos que debe ser paralela a la recta dada, por lo tanto, deben tener la misma dirección, es decir:
$\star$ $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es el vector director.
$\star$ Debe pasar por $Q = (2, 3, 1)$

$$\underbrace{(x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 3, 1)}_{\text{Ec. vectorial}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 3 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Determinar la ecuación vectorial y paramétrica de la recta paralela a la recta

$$R\colon (x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 1, 1)$$

que además pasa por $Q = (2, 3, 1)$.

Sabemos que debe ser paralela a la recta dada, por lo tanto, deben tener la misma dirección, es decir:
$\star$ $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es el vector director.
$\star$ Debe pasar por $Q = (2, 3, 1)$

$$\underbrace{(x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + (2, 3, 1)}_{\text{Ec. vectorial}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 3 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}}_{\text{Ecs. paramétricas}}$$

¿El punto $(1, 1, 0) \in L$? ¿Por qué?

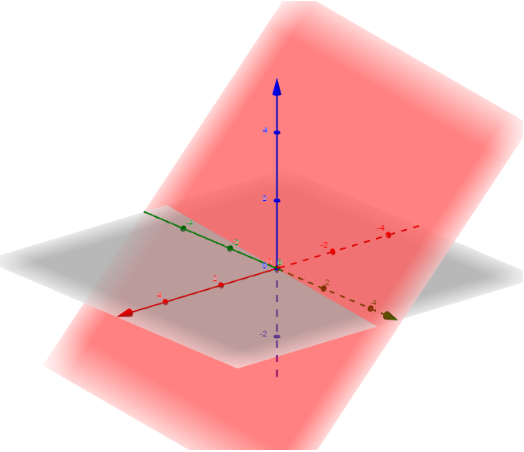
Planos

Planos

Geometricamente un plano en $\mathbb{R}^3$ es:

Planos

Geometricamente un plano en $\mathbb{R}^3$ es:



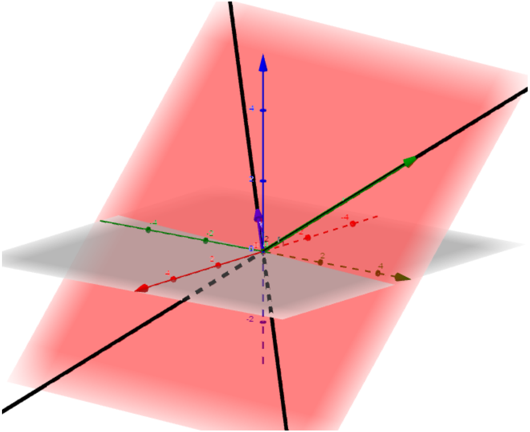
Planos

Planos

¿Cómo podemos generar un plano?

Planos

¿Cómo podemos generar un plano?



Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director.

Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director. Por lo tanto, para el plano necesitaremos

Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director. Por lo tanto, para el plano necesitaremos dos vectores directores.

Entonces... ¿Cómo rellenamos o vamos pintando el plano para terminar de generarlo?

Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director. Por lo tanto, para el plano necesitaremos dos vectores directores.

Entonces... ¿Cómo rellenamos o vamos pintando el plano para terminar de generarlo?

Algo que nos puede servir para responder esta pregunta es pensar cuál es el efecto geométrico de la combinación lineal de dos vectores:

https://www.geogebra.org/m/kmh2zx4j

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v \qquad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v \qquad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Llamaremos plano generado por u y v al subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v\}$$

Notación: $(x, y, z) = \underbrace{\lambda u + \beta v}_{\text{comb. lineal}}$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por estos dos vectores será:

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\}$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

$$2\,(-2, 4, 3) + (-1)\,(-1, -1, 1)$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

$$2\,(-2, 4, 3) + (-1)\,(-1, -1, 1) = (-3, 9, 5)$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

$$2\,(-2, 4, 3) + (-1)\,(-1, -1, 1) = (-3, 9, 5)$$

Si $\lambda = 0$ y $\beta = 5$, entonces

$$0\,(-2, 4, 3) + 5\,(-1, -1, 1) = (-5, -5, 5)$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v + P\}$$

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v + P\}$$

Observación: Notar que es simplemente desplazar el plano

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v$$

hacia el punto P.

Ecuación Vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$. El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v + P\}$$

Observación: Notar que es simplemente desplazar el plano

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v$$

hacia el punto P.

Ejemplo Si $P = (5, 6, 0)$ es un punto de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$(x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1) + (5, 6, 0)$$

Ecuaciones paramétricas del plano en $\mathbb{R}^3$

Supongamos que tenemos la ecuaciónn vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{u} + \beta \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{v} + \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{P}$$

Ecuaciones paramétricas del plano en $\mathbb{R}^3$

Supongamos que tenemos la ecuaciónn vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{u} + \beta \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{v} + \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{P}$$

Entonces

$$(x, y, z) = (\lambda u_1 + \beta v_1 + x_0, \lambda u_2 + \beta v_2 + y_0, \lambda u_3 + \beta v_3 + z_0)$$

Ecuaciones paramétricas del plano en $\mathbb{R}^3$

Supongamos que tenemos la ecuaciónn vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{u} + \beta \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{v} + \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{P}$$

Entonces

$$(x, y, z) = (\lambda u_1 + \beta v_1 + x_0, \lambda u_2 + \beta v_2 + y_0, \lambda u_3 + \beta v_3 + z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda u_1 + \beta v_1 + x_0 \\ y = \lambda u_2 + \beta v_2 + y_0 \\ z = \lambda u_3 + \beta v_3 + z_0 \end{cases}$$

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

La ecuación de un plano en el espacio se puede deducir especificando un punto del plano y un vector ortogonal a él. Este vector recibe el nombre de vector normal y se denota generalmente con $\vec{n} = (a, b, c)$.

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

La ecuación de un plano en el espacio se puede deducir especificando un punto del plano y un vector ortogonal a él. Este vector recibe el nombre de vector normal y se denota generalmente con $\vec{n} = (a, b, c)$.
Tomando un punto cualquiera del plano $X = (x, y, z)$ y otro punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que pertenece al plano, podemos generar un vector $\vec{PX}$ que sera ortogonal a $\vec{n}$ (por ser $\vec{n}$ ortogonal a cualquier vector del plano).

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

La ecuación de un plano en el espacio se puede deducir especificando un punto del plano y un vector ortogonal a él. Este vector recibe el nombre de vector normal y se denota generalmente con $\vec{n} = (a, b, c)$.
Tomando un punto cualquiera del plano $X = (x, y, z)$ y otro punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que pertenece al plano, podemos generar un vector $\vec{PX}$ que sera ortogonal a $\vec{n}$ (por ser $\vec{n}$ ortogonal a cualquier vector del plano).
Luego, matemáticamente

$$\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

La ecuación de un plano en el espacio se puede deducir especificando un punto del plano y un vector ortogonal a él. Este vector recibe el nombre de vector normal y se denota generalmente con $\vec{n} = (a, b, c)$.
Tomando un punto cualquiera del plano $X = (x, y, z)$ y otro punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que pertenece al plano, podemos generar un vector $\vec{PX}$ que sera ortogonal a $\vec{n}$ (por ser $\vec{n}$ ortogonal a cualquier vector del plano).
Luego, matemáticamente

$$\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (X - P) = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

La ecuación de un plano en el espacio se puede deducir especificando un punto del plano y un vector ortogonal a él. Este vector recibe el nombre de vector normal y se denota generalmente con $\vec{n} = (a, b, c)$.
Tomando un punto cualquiera del plano $X = (x, y, z)$ y otro punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que pertenece al plano, podemos generar un vector $\vec{PX}$ que sera ortogonal a $\vec{n}$ (por ser $\vec{n}$ ortogonal a cualquier vector del plano).
Luego, matemáticamente

$$\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (X - P) = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

La ecuación de un plano en el espacio se puede deducir especificando un punto del plano y un vector ortogonal a él. Este vector recibe el nombre de vector normal y se denota generalmente con $\vec{n} = (a, b, c)$.
Tomando un punto cualquiera del plano $X = (x, y, z)$ y otro punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que pertenece al plano, podemos generar un vector $\vec{PX}$ que sera ortogonal a $\vec{n}$ (por ser $\vec{n}$ ortogonal a cualquier vector del plano).
Luego, matemáticamente

$$\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (X - P) = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

Luego la ecuación implícita es $ax + by + cz + d = 0$

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo

Construir la ecuación implícita de un plano que es ortogonal al vector $\vec{n} = (-1, 0, 3)$ y pasa por el punto $P = (2, 1, 4)$.

De la ecuación anterior sabemos que $\vec{n} \cdot (X - P) = 0$ entonces:

$$(-1, 0, 3) \cdot (x - 2, y - 1, z - 4) = 0$$

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo

Construir la ecuación implícita de un plano que es ortogonal al vector $\vec{n} = (-1, 0, 3)$ y pasa por el punto $P = (2, 1, 4)$.

De la ecuación anterior sabemos que $\vec{n} \cdot (X - P) = 0$ entonces:

$$(-1, 0, 3) \cdot (x - 2, y - 1, z - 4) = 0$$

$$(-1)(x - 2) + 0(y - 1) + 3(z - 4) = 0$$

Ecuación implícita o general del plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo

Construir la ecuación implícita de un plano que es ortogonal al vector $\vec{n} = (-1, 0, 3)$ *y pasa por el punto* $P = (2, 1, 4)$.

De la ecuación anterior sabemos que $\vec{n} \cdot (X - P) = 0$ entonces:

$$(-1, 0, 3) \cdot (x - 2, y - 1, z - 4) = 0$$

$$(-1)(x - 2) + 0(y - 1) + 3(z - 4) = 0$$

$$-x + 3z - 10 = 0$$

Plano que pasa por tres puntos

Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ tres puntos del espacio, podemos obtener un plano π que contenga a esos tres puntos de la siguiente manera:

Plano que pasa por tres puntos

Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ tres puntos del espacio, podemos obtener un plano π que contenga a esos tres puntos de la siguiente manera:

1. Primero buscamos dos vectores que generen dicho plano. Estos se forman empleando un mismo punto base. Por ejemplo: $\overrightarrow{AC} = (C - A)$ y $\overrightarrow{AB} = (B - A)$

Plano que pasa por tres puntos

Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ tres puntos del espacio, podemos obtener un plano π que contenga a esos tres puntos de la siguiente manera:

1. Primero buscamos dos vectores que generen dicho plano. Estos se forman empleando un mismo punto base. Por ejemplo:$\overrightarrow{AC} = (C - A)$ y $\overrightarrow{AB} = (B - A)$
2. Luego restará desplazarlo, sumando el punto base (punto que usamos para construir los vectores directores). En nuestra explicación sería el punto A.

Luego, **la ecuación vectorial** resulta:

Plano que pasa por tres puntos

Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ tres puntos del espacio, podemos obtener un plano π que contenga a esos tres puntos de la siguiente manera:

1. Primero buscamos dos vectores que generen dicho plano. Estos se forman empleando un mismo punto base. Por ejemplo:$\overrightarrow{AC} = (C - A)$ y $\overrightarrow{AB} = (B - A)$
2. Luego restará desplazarlo, sumando el punto base (punto que usamos para construir los vectores directores). En nuestra explicación sería el punto A.

Luego, **la ecuación vectorial** resulta:

$$\pi : (x, y, z) = \lambda\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AB} + A \qquad \text{con } \lambda; \beta \in \mathbb{R}$$

Plano que pasa por tres puntos

- En caso de buscar las **ecuaciones paramétricas** se deducen de la ecuación vectorial anterior despejando cada una de las variables x; y; z.

Plano que pasa por tres puntos

- En caso de buscar las **ecuaciones paramétricas** se deducen de la ecuación vectorial anterior despejando cada una de las variables x; y; z.

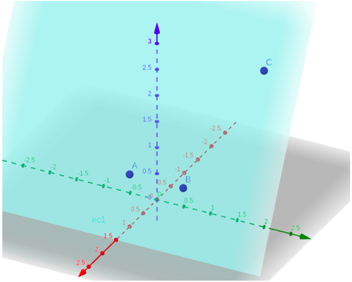
- En caso de querer encontrar la **ecuación implícita** del plano, podríamos calcular el vector normal $\vec{n}$ como el producto vectorial entre los vectores generados ($\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB}$) y empleamos ese normal y el punto A.

Ejemplo

Para los puntos $A = (1, 0, 1)$ $B = (1, 1, 1)$ y $C = (0, 2, 3)$, encontrar la ecuacion vectorial e implícita del plano que los contenga.
Siguiendo el procedimiento anterior, hacemos $\vec{AC} = (-1, 2, 2)$ y $\vec{AB} = (0, 1, 0)$. Luego, la ecuación vectorial del plano que buscamos es

$$(x, y, z) = \lambda(-1, 2, 2) + \beta(0, 1, 0) + (1, 0, 1)$$

Gráficamente:



Calculemos ahora la ecuación implícita o general del plano anterior.

Calculemos ahora la ecuación implícita o general del plano anterior.
Para eso necesitamos un punto por el que pase $(A = (1, 0, 1))$ y el vector ortogonal que lo conseguiremos haciendo $\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB}$.

Calculemos ahora la ecuación implícita o general del plano anterior.
Para eso necesitamos un punto por el que pase $(A = (1,0,1))$ y el vector ortogonal que lo conseguiremos haciendo $\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculemos ahora la ecuación implícita o general del plano anterior.
Para eso necesitamos un punto por el que pase ($A = (1, 0, 1)$) y el vector ortogonal que lo conseguiremos haciendo $\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, -1)$$

Calculemos ahora la ecuación implícita o general del plano anterior.
Para eso necesitamos un punto por el que pase ($A = (1,0,1)$) y el vector ortogonal que lo conseguiremos haciendo $\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, -1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AX} = 0$$

Calculemos ahora la ecuación implícita o general del plano anterior.
Para eso necesitamos un punto por el que pase ($A = (1, 0, 1)$) y el vector ortogonal que lo conseguiremos haciendo $\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, -1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AX} = 0$$

$$(-2, 0, -1) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0$$

Calculemos ahora la ecuación implícita o general del plano anterior.
Para eso necesitamos un punto por el que pase $(A = (1,0,1))$ y el vector ortogonal que lo conseguiremos haciendo $\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, -1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AX} = 0$$

$$(-2, 0, -1) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0$$

Luego la ecuación implícita del plano es:

$$-2x - 1z + 3 = 0$$

Planos equivalentes

En el ejemplo anterior, las ecuaciones $(x, y, z) = \lambda(-1, 2, 2) + \beta(0, 1, 0) + (1, 0, 1)$ y $-2x - 1z + 3 = 0$ definen al mismo plano.

Planos equivalentes

En el ejemplo anterior, las ecuaciones $(x, y, z) = \lambda(-1, 2, 2) + \beta(0, 1, 0) + (1, 0, 1)$ y $-2x - 1z + 3 = 0$ definen al mismo plano.

Ahora, ¿cómo podremos saber dadas dos ecuaciones que se trata del mismo plano?

Planos equivalentes

En el ejemplo anterior, las ecuaciones $(x, y, z) = \lambda(-1, 2, 2) + \beta(0, 1, 0) + (1, 0, 1)$ y $-2x - 1z + 3 = 0$ definen al mismo plano.
Ahora, ¿cómo podremos saber dadas dos ecuaciones que se trata del mismo plano?
La estrategia depende de la forma en que estén dadas las ecuaciones:

- Si ambas están dadas en ecuación implícita deben ser ecuaciones iguales una múltiplo de la otra.

Planos equivalentes

En el ejemplo anterior, las ecuaciones
$(x, y, z) = \lambda(-1, 2, 2) + \beta(0, 1, 0) + (1, 0, 1)$ y $-2x - 1z + 3 = 0$ definen al mismo plano.
Ahora, ¿cómo podremos saber dadas dos ecuaciones que se trata del mismo plano?
La estrategia depende de la forma en que estén dadas las ecuaciones:

- Si ambas están dadas en ecuación implícita deben ser ecuaciones iguales una múltiplo de la otra.
- Si ambas están en ecuación vectorial, se pueden igualar las ecuaciones paramétricas de cada una de ellas y deben ser igual para cualquier par de valores de los parámetros reales.

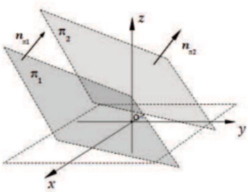
Planos equivalentes

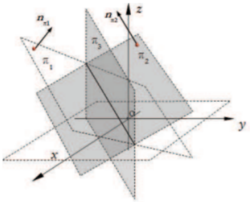
En el ejemplo anterior, las ecuaciones
$(x, y, z) = \lambda(-1, 2, 2) + \beta(0, 1, 0) + (1, 0, 1)$ y $-2x - 1z + 3 = 0$ definen al mismo plano.
Ahora, ¿cómo podremos saber dadas dos ecuaciones que se trata del mismo plano?
La estrategia depende de la forma en que estén dadas las ecuaciones:

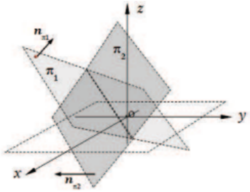
- Si ambas están dadas en ecuación implícita deben ser ecuaciones iguales una múltiplo de la otra.
- Si ambas están en ecuación vectorial, se pueden igualar las ecuaciones paramétricas de cada una de ellas y deben ser igual para cualquier par de valores de los parámetros reales.
- Si una esta en ecuación paramétrica y otra en ecuación general se puede hacer la conversión de una ecuación y estudiarlo en alguno de los items anteriores.

Posición relativa entre planos en $\mathbb{R}^3$

- Planos paralelos (coincidentes o no): si sus vectores normales son paralelos.
- Planos secantes: si no son paralelos, se intersecan formando una recta.
- Planos perpendiculares: son un caso particular de planos secantes, sucede cuando sus vectores normales son ortogonales.







Rango de una matriz

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, las filas pueden considerarse como vectores de $\mathbb{R}^n$ y las columnas como vectores de $\mathbb{R}^m$.

Definición

$Rg_f(A) =$ número de filas no nulas en una forma escalonada de A.
Del mismo modo,

$\mathrm{Rg}_c(A) =$ *número de columnas no nulas en una forma escalonada de A.*

Rango de una matriz

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, las filas pueden considerarse como vectores de $\mathbb{R}^n$ y las columnas como vectores de $\mathbb{R}^m$.

Definición

$Rg_f(A) =$ número de filas no nulas en una forma escalonada de A.
Del mismo modo,

$\mathrm{Rg}_c(A) =$ número de columnas no nulas en una forma escalonada de A.

Nota: $Rg(A) = Rg_f(A) = Rg_c(A)$

Ejemplo A$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Rango de una matriz

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, las filas pueden considerarse como vectores de $\mathbb{R}^n$ y las columnas como vectores de $\mathbb{R}^m$.

Definición

$Rg_f(A) =$ número de filas no nulas en una forma escalonada de A.
Del mismo modo,

$\mathrm{Rg}_c(A) =$ *número de columnas no nulas en una forma escalonada de A.*

Nota: $Rg(A) = Rg_f(A) = Rg_c(A)$

Ejemplo A$=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-1/2f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}(A) = 3.$$

Rango de una matriz

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, las filas pueden considerarse como vectores de $\mathbb{R}^n$ y las columnas como vectores de $\mathbb{R}^m$.

Definición

$Rg_f(A) =$ número de filas no nulas en una forma escalonada de A.
Del mismo modo,

$$\mathrm{Rg}_c(A) = \text{ número de columnas no nulas en una forma escalonada de } A.$$

Nota: $Rg(A) = Rg_f(A) = Rg_c(A)$

Ejemplo A$=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-1/2f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}(A) = 3.$$

Menores

Definición

Si a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *se suprimen* $m-h$ *filas y* $n-h$ *columnas para algún natural* h *se obtiene una matriz de orden* h*(quedan* h *filas y* h *columnas), llamada submatriz de* A *cuyo determinante se dirá un* **menor de orden** h *de* A*.*

Menores

Definición

Si a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se suprimen $m-h$ filas y $n-h$ columnas para algún natural h se obtiene una matriz de orden h(quedan h filas y h columnas), llamada submatriz de A cuyo determinante se dirá un **menor de orden** *h de A.*

Ejemplo

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Menores

Definición

Si a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se suprimen $m-h$ filas y $n-h$ columnas para algún natural h se obtiene una matriz de orden h(quedan h filas y h columnas), llamada submatriz de A cuyo determinante se dirá un **menor de orden** *h de A.*

Ejemplo

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *se pueden calcular menores de orden 1, 2 y 3.*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ es de orden } 3 \times 4$$

- Menores de orden 1: $(h = 1)$ suprimo $3 - 1 = 2$ filas y $4 - 1 = 3$ columnas.

A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 3×4

- Menores de orden 1: $(h = 1)$ suprimo $3 - 1 = 2$ filas y $4 - 1 = 3$ columnas.
  Ejemplo $M_{11} = 2$ se obtiene de suprimir las filas 2 y 3 y las columnas 2, 3 y 4.

A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 3×4

- Menores de orden 1: $(h = 1)$ suprimo $3 - 1 = 2$ filas y $4 - 1 = 3$ columnas.
  Ejemplo $M_{11} = 2$ se obtiene de suprimir las filas 2 y 3 y las columnas 2, 3 y 4.
- Menores de orden 2: $(h = 2)$ suprimo $3 - 2 = 1$ filas y $4 - 2 = 2$ columnas.

A$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 3×4

- Menores de orden 1: $(h = 1)$ suprimo $3 - 1 = 2$ filas y $4 - 1 = 3$ columnas.
  Ejemplo $M_{11} = 2$ se obtiene de suprimir las filas 2 y 3 y las columnas 2, 3 y 4.
- Menores de orden 2: $(h = 2)$ suprimo $3 - 2 = 1$ filas y $4 - 2 = 2$ columnas.
  Ejemplo $M = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ se obtiene de suprimir la fila 1 y las columnas 1 y 2.

A$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 3×4

- Menores de orden 1: $(h = 1)$ suprimo $3 - 1 = 2$ filas y $4 - 1 = 3$ columnas.
  Ejemplo $M_{11} = 2$ se obtiene de suprimir las filas 2 y 3 y las columnas 2, 3 y 4.
- Menores de orden 2: $(h = 2)$ suprimo $3 - 2 = 1$ filas y $4 - 2 = 2$ columnas.
  Ejemplo $M = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ se obtiene de suprimir la fila 1 y las columnas 1 y 2.
- Menores de orden 3: $(h = 3)$ suprimo $3 - 3 = 0$ filas y $4 - 3 = 1$ columna.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 3×4

- Menores de orden 1: $(h = 1)$ suprimo $3 - 1 = 2$ filas y $4 - 1 = 3$ columnas.
  Ejemplo $M_{11} = 2$ se obtiene de suprimir las filas 2 y 3 y las columnas 2, 3 y 4.
- Menores de orden 2: $(h = 2)$ suprimo $3 - 2 = 1$ filas y $4 - 2 = 2$ columnas.
  Ejemplo $M = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ se obtiene de suprimir la fila 1 y las columnas 1 y 2.
- Menores de orden 3: $(h = 3)$ suprimo $3 - 3 = 0$ filas y $4 - 3 = 1$ columna.
  Ejemplo $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ se obtiene de suprimir la columna 1.

A$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 3×4

- Menores de orden 1: $(h = 1)$ suprimo $3 - 1 = 2$ filas y $4 - 1 = 3$ columnas.
  Ejemplo $M_{11} = 2$ se obtiene de suprimir las filas 2 y 3 y las columnas 2, 3 y 4.
- Menores de orden 2: $(h = 2)$ suprimo $3 - 2 = 1$ filas y $4 - 2 = 2$ columnas.
  Ejemplo $M = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ se obtiene de suprimir la fila 1 y las columnas 1 y 2.
- Menores de orden 3: $(h = 3)$ suprimo $3 - 3 = 0$ filas y $4 - 3 = 1$ columna.
  Ejemplo $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ se obtiene de suprimir la columna 1.

Rango por menores

En ocasiones, es más fácil calcular el rango de una matriz en función de sus menores.

Definición

Se define el rango en términos de sus menores estableciendo que $\mathrm{Rg}(A) = k$ *si* A *posee un menor de orden* k *no nulo y todos los menores de orden* h *son nulos si* $h > k$*.*

Ejemplo: A$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Rango por menores

En ocasiones, es más fácil calcular el rango de una matriz en función de sus menores.

Definición

Se define el rango en términos de sus menores estableciendo que $\mathrm{Rg}(A) = k$ *si* A *posee un menor de orden* k *no nulo y todos los menores de orden* h *son nulos si* $h > k$*.*

Ejemplo: A$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Menor de orden 3 (suprimiendo la columna 4): $M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Rango por menores

En ocasiones, es más fácil calcular el rango de una matriz en función de sus menores.

Definición

Se define el rango en términos de sus menores estableciendo que $\mathrm{Rg}(A) = k$ si A posee un menor de orden k no nulo y todos los menores de orden h son nulos si $h > k$.

Ejemplo: A$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Menor de orden 3 (suprimiendo la columna 4): $M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Luego, $Rg(A) = 3$

Rango

Lema

Si A es de orden n son equivalentes

1. $det(A) \neq 0$
2. $\mathrm{Rg}(A) = n$