Álgebra Lineal

Complemento ortogonal.Intersección y suma

Recuperamos un concepto importante para lo que sigue...

Producto escalar

Dados $u = (u_1, .., u_n)$ y $v = (v_1, .., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Recuperamos un concepto importante para lo que sigue...

Producto escalar

Dados $u = (u_1, .., u_n)$ y $v = (v_1, .., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Propiedades

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, recordemos que

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot u = ||u||^2$
3. $u \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 u \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n u \cdot v_n$
4. $u \cdot v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre u y v
5. $u \perp v$ si y solo si $u \cdot v = 0$

Recuperamos un concepto importante para lo que sigue...

Producto escalar

Dados $u = (u_1, .., u_n)$ y $v = (v_1, .., v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Propiedades

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, recordemos que

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot u = ||u||^2$
3. $u \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 u \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n u \cdot v_n$
4. $u \cdot v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre u y v
5. $u \perp v$ si y solo si $u \cdot v = 0$

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$, definimos el complemento ortogonal

$$S^\perp = \{w \in \mathbb{V} \colon w \cdot v = 0 \text{ para todo } v \in S\}$$

Complemento Ortogonal

Ejemplo Consideremos la recta

$$r = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Complemento Ortogonal

Ejemplo Consideremos la recta

$$r = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Sabemos que un vector $(a, b, c) \in r$ si y solo si

$$(a, b, c) = \lambda(1, 1, 1)$$

Complemento Ortogonal

Ejemplo Consideremos la recta

$$r = \langle (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que un vector $(a,b,c) \in r$ si y solo si

$$(a,b,c) = \lambda(1,1,1)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in r^{\perp}$ si y solo si

$$(x,y,z) \cdot \underbrace{\lambda(1,1,1)}_{(a,b,c)} = 0$$

Complemento Ortogonal

Ejemplo Consideremos la recta

$$r = \langle (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que un vector $(a,b,c) \in r$ si y solo si

$$(a,b,c) = \lambda(1,1,1)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in r^{\perp}$ si y solo si

$$(x,y,z) \cdot \underbrace{\lambda(1,1,1)}_{(a,b,c)} = 0$$

Utilizando las propiedades del producto escalar, se tiene que

$$(x,y,z) \cdot \lambda(1,1,1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\left((x,y,z) \cdot (1,1,1)\right) = 0$$

Complemento Ortogonal

Ejemplo Consideremos la recta

$$r = \langle (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que un vector $(a,b,c) \in r$ si y solo si

$$(a,b,c) = \lambda(1,1,1)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in r^{\perp}$ si y solo si

$$(x,y,z) \cdot \underbrace{\lambda(1,1,1)}_{(a,b,c)} = 0$$

Utilizando las propiedades del producto escalar, se tiene que

$$\begin{aligned} (x,y,z) \cdot \lambda(1,1,1) = 0 &\Leftrightarrow \lambda\left((x,y,z) \cdot (1,1,1)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) \cdot (1,1,1) = 0 \end{aligned}$$

Complemento Ortogonal

Ejemplo Consideremos la recta

$$r = \langle (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que un vector $(a,b,c) \in r$ si y solo si

$$(a,b,c) = \lambda(1,1,1)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in r^{\perp}$ si y solo si

$$(x,y,z) \cdot \underbrace{\lambda(1,1,1)}_{(a,b,c)} = 0$$

Utilizando las propiedades del producto escalar, se tiene que

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \cdot \lambda(1,1,1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda\left((x,y,z) \cdot (1,1,1)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y,z) \cdot (1,1,1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + y + z = 0
\end{aligned}$$

Complemento Ortogonal

Ejemplo Consideremos la recta

$$r = \langle (1,1,1) \rangle$$

Sabemos que un vector $(a,b,c) \in r$ si y solo si

$$(a,b,c) = \lambda(1,1,1)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in r^{\perp}$ si y solo si

$$(x,y,z) \cdot \underbrace{\lambda(1,1,1)}_{(a,b,c)} = 0$$

Utilizando las propiedades del producto escalar, se tiene que

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \cdot \lambda(1,1,1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda\left((x,y,z) \cdot (1,1,1)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y,z) \cdot (1,1,1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + y + z = 0
\end{aligned}$$

Es decir,

$$r^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}$$

Complemento Ortogonal

Propiedades del complemento ortogonal

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión $\dim(\mathbb{V}) = n$ y $S \subseteq \mathbb{V}$, entonces

1. $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = S$
2. $\mathbb{V} = S \oplus S^{\perp}$
3. $S \cap S^{\perp} = \{0\}$
4. Si $B = \{v_1, .., v_k\}$ es base para S y $B' = \{v_{k+1}, .., v_n\}$ es base para $S^{\perp}$

$$B = \{v_1, .., v_k\} \cup \{v_{k+1}, .., v_n\}$$

   Es base para $\mathbb{V}$.

Complemento Ortogonal

Propiedades del complemento ortogonal

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión $\dim(\mathbb{V}) = n$ y $S \subseteq \mathbb{V}$, entonces

1. $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = S$
2. $\mathbb{V} = S \oplus S^{\perp}$
3. $S \cap S^{\perp} = \{0\}$
4. Si $B = \{v_1, .., v_k\}$ es base para S y $B' = \{v_{k+1}, .., v_n\}$ es base para $S^{\perp}$

$$B = \{v_1, .., v_k\} \cup \{v_{k+1}, .., v_n\}$$

   Es base para $\mathbb{V}$.

Ejemplo Tomando el ejemplo anterior, vemos que

$$S = \langle (1, 1, 1) \rangle \text{ y } S^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}$$

Geométricamente, lo vemos en el siguiente link

Complemento Ortogonal del Subespacio Generado

Consideremos $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$.

Complemento Ortogonal del Subespacio Generado

Consideremos $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$.

Es decir,

$$v \in S \Leftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Complemento Ortogonal del Subespacio Generado

Consideremos $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$.

Es decir,

$$v \in S \Leftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Notemos que

$$w \in S^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad w \cdot v = 0$$

Complemento Ortogonal del Subespacio Generado

Consideremos $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$.

Es decir,

$$v \in S \Leftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Notemos que

$$\begin{aligned} w \in S^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad w \cdot v = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad w \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k) = 0 \end{aligned}$$

Complemento Ortogonal del Subespacio Generado

Consideremos $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$.

Es decir,

$$v \in S \Leftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Notemos que

$$\begin{aligned} w \in S^{\perp} \quad & \Leftrightarrow \quad w \cdot v = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad w \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha_1 (w \cdot v_1) + \cdots + \alpha_k (w \cdot v_k) = 0 \end{aligned}$$

Complemento Ortogonal del Subespacio Generado

Consideremos $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$.

Es decir,

$$v \in S \Leftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Notemos que

$$\begin{aligned} w \in S^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad w \cdot v = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad w \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_1 (w \cdot v_1) + \cdots + \alpha_k (w \cdot v_k) = 0 \end{aligned}$$

Teorema

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \langle v_1, .., v_k \rangle$, son equivalentes:

1. $w \in S^{\perp}$
2. $w \cdot v_i = 0$ *para* $1 \leq i \leq k$

Complemento Ortogonal

¿Cómo calcular el complemento ortogonal?

Sea S el subespacio

$$S = \langle (1, 0, -1), (1, 1, 0) \rangle$$

Complemento Ortogonal

¿Cómo calcular el complemento ortogonal?

Sea S el subespacio

$$S = \langle (1, 0, -1), (1, 1, 0) \rangle$$

Sabemos que todo vector $v \in S$ es de la forma

$$v = \alpha(1, 0, -1) + \beta(1, 1, 0)$$

Complemento Ortogonal

¿Cómo calcular el complemento ortogonal?

Sea S el subespacio

$$S = \langle (1, 0, -1), (1, 1, 0) \rangle$$

Sabemos que todo vector $v \in S$ es de la forma

$$v = \alpha(1, 0, -1) + \beta(1, 1, 0)$$

Por lo tanto, un vector $(x, y, z) \in S^{\perp}$ si y solo si $(x, y, z) \cdot v = 0$

Complemento Ortogonal

¿Cómo calcular el complemento ortogonal?

Sea S el subespacio

$$S = \langle (1, 0, -1), (1, 1, 0) \rangle$$

Sabemos que todo vector $v \in S$ es de la forma

$$v = \alpha(1, 0, -1) + \beta(1, 1, 0)$$

Por lo tanto, un vector $(x, y, z) \in S^{\perp}$ si y solo si $(x, y, z) \cdot v = 0$ Es decir

$$(x, y, z) \cdot (\alpha(1, 0, -1) + \beta(1, 1, 0)) = 0$$

Complemento Ortogonal

¿Cómo calcular el complemento ortogonal?

Sea S el subespacio

$$S = \langle (1,0,-1),(1,1,0) \rangle$$

Sabemos que todo vector $v \in S$ es de la forma

$$v = \alpha(1,0,-1) + \beta(1,1,0)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in S^{\perp}$ si y solo si $(x,y,z) \cdot v = 0$ Es decir

$$(x,y,z) \cdot (\alpha(1,0,-1) + \beta(1,1,0)) = 0$$

Utilizando las propiedades del producto escalar, bastará con pedir que

$$\begin{cases} (1,0,-1) \cdot (x,y,z) = 0 \\ (1,1,0) \cdot (x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Complemento Ortogonal

¿Cómo calcular el complemento ortogonal?

Sea S el subespacio

$$S = \langle (1,0,-1),(1,1,0) \rangle$$

Sabemos que todo vector $v \in S$ es de la forma

$$v = \alpha(1,0,-1) + \beta(1,1,0)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in S^{\perp}$ si y solo si $(x,y,z) \cdot v = 0$ Es decir

$$(x,y,z) \cdot (\alpha(1,0,-1) + \beta(1,1,0)) = 0$$

Utilizando las propiedades del producto escalar, bastará con pedir que

$$\begin{cases} (1,0,-1) \cdot (x,y,z) = 0 \\ (1,1,0) \cdot (x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Complemento Ortogonal

¿Cómo calcular el complemento ortogonal?

Sea S el subespacio

$$S = \langle (1,0,-1),(1,1,0) \rangle$$

Sabemos que todo vector $v \in S$ es de la forma

$$v = \alpha(1,0,-1) + \beta(1,1,0)$$

Por lo tanto, un vector $(x,y,z) \in S^{\perp}$ si y solo si $(x,y,z)\cdot v = 0$ Es decir

$$(x,y,z)\cdot(\alpha(1,0,-1)+\beta(1,1,0)) = 0$$

Utilizando las propiedades del producto escalar, bastará con pedir que

$$\begin{cases} (1,0,-1)\cdot(x,y,z) = 0 \\ (1,1,0)\cdot(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, bastará con ver que $S^{\perp} = \mathrm{N(A)}$ donde A tiene en sus filas los generadores de S.

Si resolvemos el sistema, vemos que

$$\left.\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Si resolvemos el sistema, vemos que

$$\left.\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

Si resolvemos el sistema, vemos que

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema, vemos que

$$\left.\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que

$$(x, y, z) \in S^{\perp} \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, -z, z)$$

Si resolvemos el sistema, vemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que

$$(x, y, z) \in S^{\perp} \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, -z, z)$$

Es decir,

$$S^{\perp} = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

Suma e Intersección de Subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sean S_1, S_2 dos subespacios:

- Intersección

$$S_1 \cap S_2 = \{v \in \mathbb{V} \colon v \in S_1 \wedge v \in S_2\}$$

Suma e Intersección de Subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sean S_1, S_2 dos subespacios:

- Intersección

$$S_1 \cap S_2 = \{v \in \mathbb{V} \colon v \in S_1 \wedge v \in S_2\}$$

- Suma

$$S_1 + S_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle = \{v_1 + v_2 \colon v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}$$

Suma e Intersección de Subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sean S_1, S_2 dos subespacios:

- Intersección

$$S_1 \cap S_2 = \{v \in \mathbb{V} \colon v \in S_1 \wedge v \in S_2\}$$

- Suma

$$S_1 + S_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle = \{v_1 + v_2 \colon v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}$$

¿Estos conjuntos son subespacios? ¿Por qué?

Suma e Intersección de Subespacios

Las operaciones entre subespacios nos permiten crear nuevos subespacios

- Intersección: Es el mayor subespacio contenido en S_1 y S_2 simultáneamente.

Suma e Intersección de Subespacios

Las operaciones entre subespacios nos permiten crear nuevos subespacios

- ▷ Intersección: Es el mayor subespacio contenido en S_1 y S_2 simultáneamente.
- ▷ Suma: Es el menor subespacio que contiene tanto a S_1 como a S_2.

Suma e Intersección de Subespacios

Las operaciones entre subespacios nos permiten crear nuevos subespacios

- Intersección: Es el mayor subespacio contenido en S_1 y S_2 simultáneamente.
- Suma: Es el menor subespacio que contiene tanto a S_1 como a S_2.
- Si $S_1 = \langle B_1 \rangle$ y $S_2 = \langle B_2 \rangle$ entonces $S_1 + S_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle$

Intersección de subespacios

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V.

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \in S_1 \text{ y } \vec{x} \in S_2\}$$

Intersección de subespacios

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V.

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \in S_1 \text{ y } \vec{x} \in S_2\}$$

1. $S_1 \cap S_2$ es un subespacio.

Intersección de subespacios

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V.

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \in S_1 \text{ y } \vec{x} \in S_2\}$$

1. $S_1 \cap S_2$ es un subespacio.
2. $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ dado que al menos $\vec{0} \in S_1 \cap S_2$.

Intersección de subespacios

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V.

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \in S_1 \text{ y } \vec{x} \in S_2\}$$

1. $S_1 \cap S_2$ es un subespacio.
2. $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ dado que al menos $\vec{0} \in S_1 \cap S_2$.

Si $A\vec{x} = 0$ es un sistema de ecuaciones cartesianas de S_1 y $B\vec{x} = \vec{0}$ sistema de ecuaciones cartesianas de S_2, entonces,

$$x \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A\vec{x} = \vec{0} \\ B\vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Por lo tanto $\begin{cases} A\vec{x} = \vec{0} \\ B\vec{x} = \vec{0} \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones de $S_1 \cap S_2$.

Intersección de subespacios

Ejemplo Consideremos los subespacios vectoriales

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - y + 3z = 0\right\}$$

Determinar $S_1 \cap S_2$.

Intersección de subespacios

Ejemplo Consideremos los subespacios vectoriales

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - y + 3z = 0\right\}$$

Determinar $S_1 \cap S_2$.

$$(x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Intersección de subespacios

Ejemplo Consideremos los subespacios vectoriales

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - y + 3z = 0\right\}$$

Determinar $S_1 \cap S_2$.

$$(x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto nos queda el sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

De donde $x = 5z$, $y = -2z$.

De donde $x = 5z$,$y = -2z$.Los elementos de la intersección son de la forma

$$(x, y, z) = (5z, -2z, z) = z\,(5, -2, 1).$$

De donde $x = 5z$,$y = -2z$.Los elementos de la intersección son de la forma

$$(x, y, z) = (5z, -2z, z) = z\,(5, -2, 1).$$

Es decir la intersección es la recta

$$S_1 \cap S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t\,(5, -2, 1)\right\}.$$

Intersección de Subespacios

De donde $x = 5z$,$y = -2z$.Los elementos de la intersección son de la forma

$$(x, y, z) = (5z, -2z, z) = z\,(5, -2, 1).$$

Es decir la intersección es la recta

$$S_1 \cap S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t\,(5, -2, 1)\right\}.$$

Una base del subespacio $S_1 \cap S_2$ es $\{(5, -2, 1)\}$.

Suma de Subespacios

Consideremos S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V.

$$S_1 + S_2 = \{u \in V : u = v + w, \text{ para algún } v \in S_1 \text{ y } w \in S_2\}.$$

Suma de Subespacios

Consideremos S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V.

$$S_1 + S_2 = \{u \in V : u = v + w, \text{ para algún } v \in S_1 \text{ y } w \in S_2\}.$$

Si $S_1 = \langle v_1, ., v_n \rangle$ y $S_2 = \langle w_1, .., w_k \rangle$ entonces

$$\begin{aligned} u \in S_1 + S_2 & \Leftrightarrow & u = v + w \text{ donde } v \in S_1 \text{ y } w \in S_2 \\ & \Leftrightarrow & u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j \\ & \Leftrightarrow & u \in \langle \{v_1, .., v_n\} \cup \{w_1, .., w_k\} \rangle \end{aligned}$$

Es decir

$$S_1 + S_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle .$$

Donde B_1 y B_2 son bases de S_1 y S_2 respectivamente. Lo que obtenemos uniendo las bases es un conjunto de generadores, luego habrá que estudiar si es o no base de $S_1 + S_2$.

Suma de Subespacios

Ejemplo Determinar la suma de los subespacios siguientes y una base de la suma.

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Suma de Subespacios

Ejemplo Determinar la suma de los subespacios siguientes y una base de la suma.

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Sabemos que

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Suma de Subespacios

Ejemplo Determinar la suma de los subespacios siguientes y una base de la suma.

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Sabemos que

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Nota El conjunto de vectores $(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2)$ genera al subespacio suma, pero puede no ser una base de $S_1 + S_2$.

Suma de Subespacios

Ejemplo Determinar la suma de los subespacios siguientes y una base de la suma.

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Sabemos que

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Nota El conjunto de vectores $(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2)$ genera al subespacio suma, pero puede no ser una base de $S_1 + S_2$.
Supongamos que

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2,1,2) + \lambda_3(1,-1,0) + \lambda_4(1,3,2) = (0,0,0)$$

Ejemplo Determinar la suma de los subespacios siguientes y una base de la suma.

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Sabemos que

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Nota El conjunto de vectores $(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2)$ genera al subespacio suma, pero puede no ser una base de $S_1 + S_2$.
Supongamos que

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2,1,2) + \lambda_3(1,-1,0) + \lambda_4(1,3,2) = (0,0,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Op.Elem} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Suma de Subespacios

Ejemplo Determinar la suma de los subespacios siguientes y una base de la suma.

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Sabemos que

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Nota El conjunto de vectores $(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2)$ genera al subespacio suma, pero puede no ser una base de $S_1 + S_2$.
Supongamos que

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2,1,2) + \lambda_3(1,-1,0) + \lambda_4(1,3,2) = (0,0,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Op.Elem} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores L.I son $\{(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0)\}$ y por lo tanto

$$S_1 + S_2 = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0)\} .$$

Suma de Subespacios

Ejemplo Determinar la suma de los subespacios siguientes y una base de la suma.

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Sabemos que

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2) \rangle .$$

Nota El conjunto de vectores $(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2)$ genera al subespacio suma, pero puede no ser una base de $S_1 + S_2$.
Supongamos que

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2,1,2) + \lambda_3(1,-1,0) + \lambda_4(1,3,2) = (0,0,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Op.Elem} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores L.I son $\{(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0)\}$ y por lo tanto

$$S_1 + S_2 = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0)\} .$$

Además $S_1 + S_2$ forma todo $\mathbb{R}^3$