

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/325300198>

3-DOF manipulator (3RRR) synthesis and simulation – CTC control with Dynamic Simulation

Preprint · May 2018

DOI: 10.13140/RG.2.2.30503.65446

CITATIONS

0

READS

500

1 author:



Juan Pablo Zuluaga

Idiap Research Institute

45 PUBLICATIONS 51 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Machine Learning Techniques for Breast Cancer Detection [View project](#)



Development of PI and P Controllers for Speed and Position of a DC Motor - Implementation in a PIC 16F1939. [View project](#)

Síntesis y Simulación de un Manipulador de 3 Grados de Libertad - 3RRR y Simulación Dinámica con Control CTC

*Zuluaga-Gomez, Juan

*Polytechnic School of Engineering of Gijón

Erasmus Mundus Mechatronics Engineering Master - EU4M

Universidad de Oviedo - Gijón, España

Email: juan.zuluaga@eu4m.eu

Abstract- The mechanisms synthesis problem is an activity that has become outstanding in the recent years, because it allows to obtain more efficient mechanisms alongside restrictions provided by the user, on the other hand it enables to minimize the system final cost and the total energy spent at the time of desired performing movement. Nowadays, synthesis is not usually practice for obtain the mechanisms geometry, except on very specific occasions. In this article we will present a 3RRR-mechanisms synthesis development (3 Degrees of Freedom - 3 rotational points), to obtain the most efficient link size with respect to a defined work area and a maximum allowed torque. Then, the kinematic, dynamics and CTC control (Computed-Torque Control), the methodology simulation used is explained, in order mechanism complies with the required trajectory. The final quality of the synthesis and control can be obtained by weighing the actuators required torque, finally, the error dispose by the simulation. We will fulfill the desired tasks using simulation and synthesis through MATLAB® software and verification in Working Model® software too.

Index Terms—Computed-Torque Control, Robotic Manipulators, 3RRR-mechanism, Link Synthesis, Matlab®

I. INTRODUCCIÓN

LA modelización y síntesis de mecanismos por medio del uso de grupos de elementos (también llamados grupos de Assur) es un abordaje implementado desde hace muchos años [1], que sin embargo no son ampliamente usados en la cinemática computacional [2], [3], por otro lado están los que únicamente se centran en el problema de la posición, dejando la velocidad y aceleración en manos de lo desconocido, de forma paralela suelen estar dirigidos a mecanismos planos [2]. Así, tenemos que en la robótica el uso se ha restringido al análisis directo de desplazamientos [4]–[6]. Los grupos de Assur o grupos de elementos, tiene una gran ventaja en la resolución de problemas de síntesis dimensional, en primer lugar es un método que demanda mucho menos tiempo de ejecución algorítmica -y mas cuando se tienen muchas iteraciones por trayectoria-, en comparación con coordenadas naturales o relativas [2], segundo, se elimina (o minimiza) la posibilidad de colisiones con cuerpos móviles o fijos dentro del espacio de trabajo [7] y por último, permite simular posiciones singulares donde el mecanismo no se puede "unir" [8]. El mecanismo 3RRR que se describe en el presente proyecto tiene como fin sintetizar dimensionalmente y lograr que el robot pueda realizar toda la trayectoria deseada sobre el espacio de trabajo sin encontrarse con una posición singular; incluso estas ubicaciones pueden ser barras de diferentes eslabones, que no estén unidas, pero que la proyección de estas sean paralelas (o incluso que tres barras se proyecten sobre un mismo punto, ya sea fuera o dentro del área de trabajo), lo que ocasiona un problema en la cinemática y dinámica, haciendo que el programa tenga atascos o se creen variables linealmente dependientes. La minimización de estas posiciones o proyecciones son también tan importantes como la cinemática o dinámica misma. Como segundo requisito (luego de la síntesis dimensional), está el modelar la cinemática y dinámica

del manipulador. Inicialmente se tenía claro en desarrollar el procedimiento por cinemática directa, sin embargo se tienen 4 tipos de juegos de coordenadas que se pueden usar, las cuales son:

- Coordenadas Independientes
- Coordenadas Dependientes
 - Coordenadas Relativas
 - Coordenadas de Punto de Referencia
 - Coordenadas Naturales

Estas coordenadas anteriores definiría de forma completa el mecanismo, a pesar de esto, unas son mas complicadas de desarrollar al momento de derivar (problema de velocidad y aceleración), incluso para el Jacobiano, así, se llegó a la determinación de usar coordenadas naturales ya que es un procedimiento muy simple y sistemático para determinar las coordenadas en todos los puntos, por otro lado no son necesarias las variables de tipo angular, pero presenta un inconveniente (solo afecta el tiempo de procesamiento) que es un numero intermedio de coordenadas y ecuaciones. Para realizar este modelado, se deben seguir unas reglas claras:

- 1) Cada sólido rígido debe contener como mínimo, dos puntos básicos. Sino, su rotación queda indefinida.
- 2) En cada par R (revolución) debe situarse un punto básico. Entonces, es posible definir un par R con un punto básico en cada eslabón o que ambos eslabones compartan el mismo punto básico.
- 3) En cada par P (prismático) o RP (prismático con giro) recto deben existir, 3 puntos básicos alineados, dos para definir la guía/ranura y el tercero para definir la deslizadera que se mueve por la guía.
- 4) Se pueden utilizar tantos puntos adicionales como se desee.

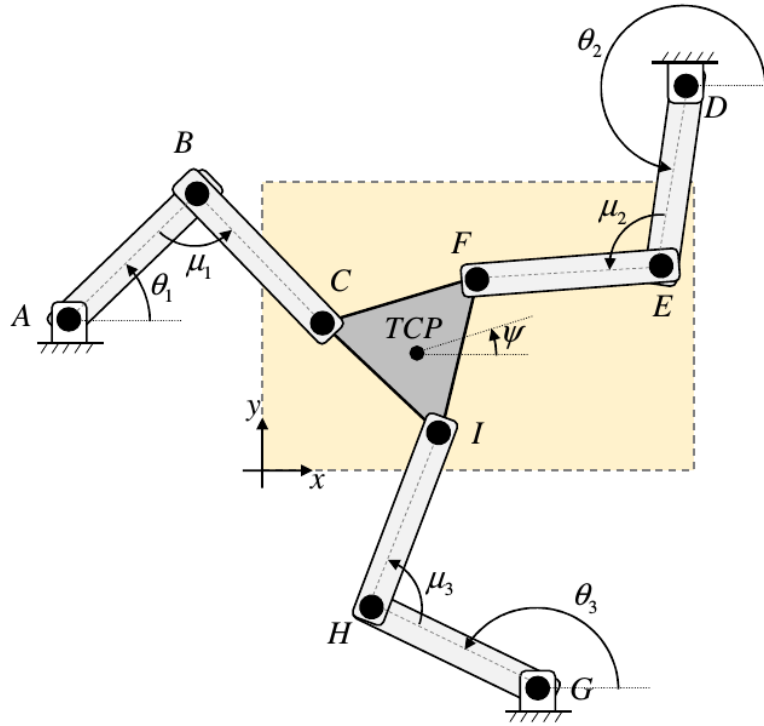


Fig. 1: Manipulador de 3 grados de libertad con 3 puntos rotacionales, punto TCP es donde se ubica la herramienta de trabajo

Siguiendo estos pasos se puede obtener un sistema de ecuaciones de restricción bastante fiable, fácil de derivar y obtener su jacobiano. Por otro lado, se identificaron 6 eslabones con 3 uniones en par R (solo revolución), usando así 3 ecuaciones de restricción, así la Fig. 2 muestra el modelo de una unión de eslabones en par R.

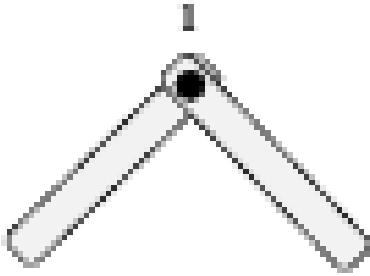


Fig. 2: Modelo de un par de eslabones sometidos a unión con par R

Por último, el mecanismo de 3 GDL contiene un elemento (cuerpo rígido) con 4 puntos claves entonces, se deben crear 5 nuevas ecuaciones de restricción, que permita conocer en todo momento la posición de los puntos que involucran este eslabón, mas adelante, se dará a conocer el procedimiento realizado, así como las ecuaciones. Como parte introductoria, se realizó una formulación en dinámica plana, pasando de ecuaciones DAE (Sistema de Ecuaciones Diferenciales Polinomiales Ordinarias e Implícitas), ecuaciones 1 y 2:

$$\bar{M} \cdot \ddot{q} + \Phi_q^T \cdot \dot{\lambda} = \vec{Q} \quad (1)$$

$$\vec{\Phi} = \vec{0} \quad (2)$$

En un sistema ODE ("Ordinary Differential Equation" o EDO en español) el cual puede ser resuelto por un integrador (ODE45, ODE15S, ODE23TB, RUNGE-KUTTA, etc), donde se tienen bastante alternativas, desde crear un propio integrador o usar los provistos por Matlab®, que son funciones ya pre-programadas, por otro lado se usó la formulación "Penalizadores" para resolver la dinámica, el cual será explicado de manera mas amplia, en los siguientes capítulos.

II. MODELAMIENTO CINEMÁTICO DEL MECANISMO DE 3 GRADOS DE LIBERTAD - 3RRR

La simulación de sistemas y mecanismos en software como Matlab®, permite obtener una respuesta valida (en la mayoría de casos) que le facilite al usuario poder tomar decisiones previas antes de trabajar con el modelo o mecanismo real [9]. En el presente caso, se realizó el modelo cinemático mediante coordenadas naturales debido a que ofrece ecuaciones en su mayoría de veces lineales, haciendo que la derivadas mas sencillas de resolver y formular. El mecanismo de la Fig. 1 está compuesto por 3 puntos fijos (bastidor) que son donde se ubican los 3 motores a usar, mientras que posee 6 eslabones rígidos, en forma de barras, y un eslabón en forma de triángulo, que estará definido por 4 puntos (1 corresponde al punto de trabajo TCP), se deben tener unas consideraciones a la hora de abordar la resolución del problema:

- 1) El espacio de trabajo deberá permitir que el punto TCP de la Fig. 1 trabaje en los siguientes rangos:

- $x_{TCP} \in [0, L_1]$
- $y_{TCP} \in [0, L_2]$
- $\psi \in [-\gamma, +\gamma]$

- 2) En el espacio de trabajo definido, se debe asegurar que los ángulos de transmisión de los 3 brazos (μ_1 , μ_2 , μ_3) estén en el rango $[60^\circ, 120^\circ]$.
- 3) El eslabón donde está el TCP es un triángulo equilátero con $L_{CF} = L_{CI} = L_{FI}$ (ver tabla I para mas información). Su giro será el de segmento CF con el semieje X positivo.
- 4) Se deben buscar las dimensiones de los 3 brazos y las coordenadas de las articulaciones A, D y G donde están los actuadores para cumplir las especificaciones asegurando una volumetría mínima del manipulador.
- 5) Debe incluirse un control que asegure el seguimiento de la trayectoria deseada incluso aunque esta tenga discontinuidades, no siendo necesario la inclusión de un control en cascada ni el modelo de los actuadores reales en la simulación.
- 6) Tener en cuenta que el vector de gravedad será: $\vec{g} = [0 \ 9.81 \ 0] \frac{m}{s^2}$.
- 7) El eslabón triangular donde está el TCP tendrá el CDG en su baricentro. El valor de su masa y su momento de inercia respecto a ese punto es conocido al igual que sus dimensiones (ver Tabla I).
- 8) Para todos los eslabones biarticulados de los brazos, se supondrá su CDG es su centro geométrico y su momento de inercia respecto a su CDG será:

$$I_{Gi} = \frac{1}{12} \cdot m_i \cdot L_i^2$$
- 9) Para determinar la masa de cada eslabón biarticulado se supondrá una densidad por unidad de longitud de $2 \frac{kg}{m}$.
- 10) En el TCP se aplica una fuerza que se opone a la velocidad con la siguiente expresión:

$$\vec{F} = -10 \frac{\vec{V}_{TCP}}{|\vec{V}_{TCP}|}$$

Al definir las especificaciones de trabajo, se definirá la trayectoria que debe realizar el punto TCP del manipulador, la cual debe seguir los siguientes lineamientos en 3 segundos:

$$Si \ t \leq 1 \ s \rightarrow \begin{cases} x = 0.1 + d_1 \cdot t \ [m] \\ y = 0.1 \ [m] \end{cases}$$

$$Si \ 1 < t \leq 2 \ s \rightarrow \begin{cases} x = 0.1 + d_1 \ [m] \\ y = 0.1 + d_2 \cdot (t - 1) \ [m] \end{cases}$$

$$Si \ 2 < t \leq 3 \ s \rightarrow \begin{cases} x = 0.1 + d_1 - d_3 \cdot (t - 2) \ [m] \\ y = 0.1 + d_2 \ [m] \end{cases}$$

Por otro lado, se debe tener en cuenta que la Tabla I muestra los parámetros asignados para cada uno de los estudiantes, estos parámetros sirven para definir el tamaño, peso y momento de inercia del triángulo equilátero, así como las distancias a recorrer en el movimiento a controlar en cada instante de tiempo. Es importante mencionar que a partir de estos datos, se pueden deducir unos valores geométricos que no se incluyen en el problema de síntesis (debido a que son valores ya asignados).

Especificaciones Geométricas y Técnicas		
Características Geométricas	Valor	Unidades
x_a	0	metros
L_1	0.6	metros
L_2	0.5	metros
γ	90	grados
LCF	0.35	metros
d1	0.4	N/A
d2	0.3	N/A
d3	0.3	N/A
m	5.5	Kilo
I_{TCP}	$5.7e^2$	$kg \cdot m^2$

Tabla I: Especificaciones iniciales de manipulador de 3 GDL

Luego de presentar de forma clara los retos y objetivos, se empezará a explicar las ecuaciones de restricción obtenidas para simular la cinemática. En primera instancia se decidió usar 22 ecuaciones equivalentes a el listado siguiente (en referencia a la Fig. 1):

- Coordenadas Naturales
 - Eslabón AB (2)
 - Eslabón BC (1)
 - Eslabón DE (2)
 - Eslabón EF (1)
 - Eslabón GH (2)
 - Eslabón HI (1)
 - Cuerpo Rígido CFI (5)
 - Punto TCP - referencia CF (2)
- Coordenadas Mixtas
 - Eslabón AB - θ_1 (1)
 - Eslabón AB - BC μ_1 (1)
 - Eslabón DE - θ_2 (1)
 - Eslabón DE - EF μ_2 (1)
 - Eslabón GH - θ_3 (1)
 - Eslabón GH - HI μ_3 (1)

Sin embargo, en las primeras simulaciones se detectaron unos problemas provenientes de las formulas que sobre determinaban el sistema y/o que a su vez contienen términos con seno o coseno, por lo cual, dependiendo si el ángulo estaba dentro de un rango, se usa una formula o la otra, como se puede ver en la Fig. 3.

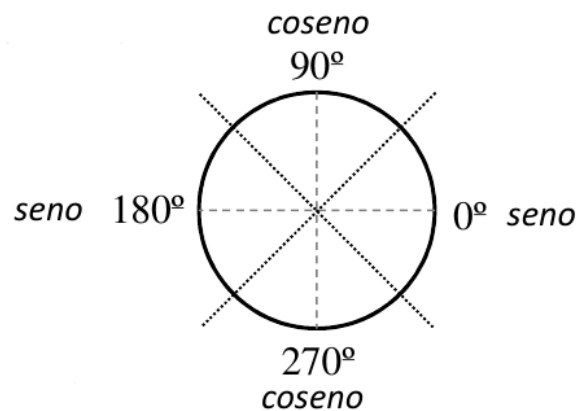


Fig. 3: Partición usada para no sobre determinar el sistema de ecuaciones de restricción

En el algoritmo, se formuló un condicional lógico, que comparando el valor del ángulo de entrada, se usa una formula u otra, como se ve en la Fig. 3. A continuación se listarán las ecuaciones de restricción en su totalidad, sin tener en cuenta el planteamiento de la Fig. 3.

Ecuaciones que modelan los eslabones (coordenadas naturales):

$$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 - L_{ab}^2 \quad (3)$$

$$(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2 - L_{bc}^2 \quad (4)$$

$$(x_e - x_d)^2 + (y_e - y_d)^2 - L_{de}^2 \quad (5)$$

$$(x_f - x_e)^2 + (y_f - y_e)^2 - L_{ef}^2 \quad (6)$$

$$(x_h - x_g)^2 + (y_h - y_g)^2 - L_{gh}^2 \quad (7)$$

$$(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2 - L_{hi}^2 \quad (8)$$

Ecuaciones que modelan el triángulo (coordenadas naturales):

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - L_{ci}^2 \quad (9)$$

$$(x_f - x_c)^2 + (y_f - y_c)^2 - L_{cf}^2 \quad (10)$$

$$(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 - L_{if}^2 \quad (11)$$

$$(x_{TCP} - x_c) - \lambda \cdot (x_i - x_c) - \mu \cdot (x_f - x_c) \quad (12)$$

$$(y_{TCP} - y_c) - \lambda \cdot (y_i - y_c) - \mu \cdot (y_f - y_c) \quad (13)$$

Ecuaciones entre eslabones (coordenadas mixtas):

$$(x_a - x_b) \cdot (x_c - x_b) + (y_a - y_b) \cdot (y_c - y_b) - L_{ab} \cdot L_{bc} \cdot \cos(\mu_1) \quad (14)$$

$$(x_d - x_e) \cdot (x_f - x_e) + (y_d - y_e) \cdot (y_f - y_e) - L_{ef} \cdot L_{de} \cdot \cos(\mu_2) \quad (15)$$

$$(x_g - x_h) \cdot (x_i - x_h) + (y_g - y_h) \cdot (y_i - y_h) - L_{gh} \cdot L_{hi} \cdot \cos(\mu_3) \quad (16)$$

Ecuaciones correspondiente con los ángulos que se forman en los eslabones AB, DE y GH con respecto al bastidor (coordenadas naturales):

Motor 1:

$$(x_b - x_a) - L_{ab} \cdot \cos(\theta_1) \quad (17)$$

$$(y_b - y_a) - L_{ab} \cdot \sin(\theta_1) \quad (18)$$

Motor 2:

$$(x_e - x_d) - L_{de} \cdot \cos(\theta_2) \quad (19)$$

$$(y_e - y_d) - L_{de} \cdot \sin(\theta_2) \quad (20)$$

Motor 3:

$$(x_h - x_g) - L_{gh} \cdot \cos(\theta_3) \quad (21)$$

$$(y_h - y_g) - L_{gh} \cdot \sin(\theta_3) \quad (22)$$

Ecuaciones correspondiente con los ángulos que se forman en ψ (coordenadas naturales), solo se toma el "eslabón" CF de todo el triángulo:

$$(x_f - x_c) - L_{cf} \cdot \cos(\psi) \quad (23)$$

$$(y_f - y_c) - L_{cf} \cdot \sin(\psi) \quad (24)$$

Ahora bien, tenemos de la ecuación 3 hasta 24, las cuales suman 22 ecuaciones, sin embargo el par de ecuaciones 17-18, 19-20, 21-22 y 23-24, se pueden omitir una u otra, dependiendo del planteamiento de la Fig. 3, entonces pasaríamos a tener 18 ecuaciones en total, que definirían en su totalidad al mecanismo, sin sobre determinar este.

A. Problema de Posición

Para la resolución de la cinemática por este método se tienen 3 problemas, que han de ser resueltos para poder determinar la posición, velocidad y aceleración en todo momento del mecanismo.

Con unas dimensiones (vector \vec{c} de constantes) y para un instante temporal específico (t), se puede desarrollar en series de Taylor alrededor de una aproximación de la solución y despreciar así términos de orden 2 o superior:

$$\vec{\Phi}(\vec{q}) \approx \vec{\Phi}(\vec{q}_0) + \Phi_q(\vec{q}_0) \cdot (\vec{q} - \vec{q}_0) = \vec{0} \quad (25)$$

Si reordenamos tenemos que:

$$\Phi_q(\vec{q}_i) \cdot (\vec{q}_{i+1} - \vec{q}_i) = -\Phi(\vec{q}_i) \quad (26)$$

A continuación se explica que que la **matriz jacobiano**, son las derivadas parciales de las ecuaciones de restricción con respecto a las variables del vector \vec{q} , en nuestro caso las dimensiones de la matriz jacobiano es 18x18, en forma general:

$$\Phi_q(\vec{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Debido a la formulación del método de Newton, sabemos que entre dos iteraciones el instante temporal de calculo del mecanismo no cambia. Por otro lado, el proceso iterativo se repite hasta que el error está por debajo de una tolerancia prefijada, así como se puede ver con la ecuación 27:

$$Error = \sqrt{\sum_{m=1}^r \Phi_m^2} < tol \quad (27)$$

De manera contraria, pueden haber casos en que este método no converja, por lo cual se debe agregar un límite de iteraciones, que para nuestro algoritmo fue 20, sin embargo, por lo general este método es muy eficiente y los problemas se generan en el instante inicial de simulación (poco frecuente).

B. Problema de la Velocidad

Este índice es mas sencillo que el problema de posición, ya que simplemente con derivar respecto al tiempo el vector de las ecuaciones de restricción, tenemos que:

$$\vec{\Phi} \cdot (\vec{q}) = \vec{0} \quad (28)$$

$$\Phi_q(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}} + \vec{\Phi}_t = \vec{0} \quad (29)$$

Por otro lado tenemos que:

$$\dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{var} \\ \dot{q}_{gdl} \end{bmatrix}$$

Para nuestro caso tenemos que el vector \vec{q} (vector de variables y que solo con derivar este vector, tenemos vector de velocidades o aceleraciones) es equivalente a:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} x_b & y_b & x_c & y_c & x_e & y_e & x_f & y_f & x_h & \cdots \\ \cdots & y_h & x_i & y_i & x_{TCP} & y_{TCP} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \\ \cdots & \psi & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & & & & & \end{bmatrix}$$

Del vector \vec{q} anterior, tenemos 3 nuevas variables que son: θ_1 , θ_2 y θ_3 los cuales son ángulos deseados en cada instante de tiempo para cada eslabón unido al bastidor, de esta manera, el mecanismo se mueve dependiendo de lo que se necesite y respetando las ecuaciones de restricciones (ecuación 3 a 24) y la ecuación 27. Importante tener en cuenta, que para el problema de la cinemática solo son las primeras 18 variables, mientras que dinámica y control son 21 variables. Por otro lado, el sistema de ecuaciones es lineal, entonces sustituyendo tenemos que:

$$\Phi_{qvar}(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}_{qvar} + \Phi_{qgdl}(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}_{gdl} = \vec{0} \quad (30)$$

Reordenando y despejando tenemos que:

$$\dot{\vec{q}}_{qvar} = \Phi_{qvar}^{-1}(\vec{q}) \cdot (-\Phi_{qgdl}(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}_{gdl}) \quad (31)$$

Entonces, la ecuación 31 explica el problema de la velocidad, donde los primeros 3 términos son conocidos del problema de la velocidad explicado anteriormente. En el siguiente apartado finalmente se explicará el problema de la aceleración, siendo lo necesario para desarrollar la cinemática del mecanismo.

C. Problema de la Aceleración

El problema de la aceleración, es similar al de velocidad, esto porque se toma la ecuación 29 (problema velocidad) y se deriva con respecto al tiempo a lo cual tenemos:

$$\Phi_q(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}} + \dot{\Phi}_t = \vec{0} \quad (32)$$

$$\Phi_q(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}} + \dot{\Phi}_q(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \cdot \dot{\vec{q}} + \ddot{\Phi}_t = \vec{0} \quad (33)$$

Igualmente tenemos que:

$$\ddot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{var} \\ \ddot{q}_{gdl} \end{bmatrix}$$

Se debe tener en cuenta que a lo largo del desarrollo de la codificación, solo se optó por tomar un vector de variables \vec{q} y no dos vectores \vec{q}_{var} y \vec{q}_{gdl} , ya que la formulación de dinámica y control que se presentará en el siguiente apartado, no tiene distinción por estos dos tipos de vectores.

Para ventaja, la ecuación 33 también es lineal, sustituyendo tenemos que:

$$\Phi_{qvar}(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}}_{var} + \Phi_{qgdl}(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}}_{gdl} + \dot{\Phi}_{qvar}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \cdot \dot{\vec{q}}_{var} \cdots \cdots + \dot{\Phi}_{qgdl}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \cdot \dot{\vec{q}}_{gdl} = \vec{0} \quad (34)$$

Luego, reordenando y despejando se obtiene:

$$\ddot{\vec{q}}_{var} = \Phi_{qvar}^{-1}(\vec{q}) \cdot (-\Phi_{qgdl}(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}}_{gdl} - \dot{\Phi}_{qvar}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \cdot \dot{\vec{q}}_{var} \cdots \cdots - \dot{\Phi}_{qgdl}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \cdot \dot{\vec{q}}_{gdl}) \quad (35)$$

Entonces la ecuación 34 y 35 sirven para modelar la cinemática del mecanismo, correspondiente con la aceleración. Lo siguiente a realizar es la simulación y posterior animación del mecanismo, así de forma gráfica y visual se puede inspeccionar si el mecanismo realiza los movimientos programados.

D. Simulación y Animación del Mecanismo 3RRR

Definir las ecuaciones de restricciones, resolver los problemas de posición, velocidad y aceleración, son pasos indispensables para obtener una cinemática correcta, sin embargo, es muy fiable poder simular y animar los mecanismos, ya que podemos visualizar los posibles problemas o posiciones singulares que se puedan alcanzar, por lo cual la simulación consiste en resolver el problema de la cinemática en un intervalo de tiempo; esto se obtiene discretizando en un rango determinando de tiempo, y creando unos intervalos, es común escuchar en Matlab® la palabra "*Linspace*", función que permite dividir un rango de tiempo en "x" intervalos separados de manera igual.

El procedimiento para obtener la cinemática en instantes intermedios, se interpola entre las soluciones ya calculadas, así se pueden obtener las siguientes situaciones:

- **Problema de la posición inicial:** Necesita una aproximación de la posición inicial para que el método de Newton pueda funcionar, en algunos casos, si esta aproximación difiere por mucho de lo deseado, puede ocasionar que el método no encuentre un punto de convergencia y arroje un problema, o por el número máximo de iteraciones, no se acerque a un error por debajo del deseado.
- **Problema de las posiciones sucesivas:** Se toma la posición anterior (instante anterior) como aproximación inicial.
- **Problemas de la velocidad y aceleración:** Estos son problemas lineales (como se ve en la ecuación 31 y 35) y no requieren de aproximaciones iniciales en cada instante.

Por otro lado la representación gráfica en secuencia o **Animación** de las posiciones del mecanismo en los sucesivos instantes de cálculo tiene los siguientes beneficios:

- Permite La verificación visual cualitativa del resultado de la simulación.
- Permite Comprobar si la configuración de montaje es la deseada y si esta cambia durante la simulación [2], [3], [8].
- No es estrictamente necesaria para realizar la simulación, sin embargo se aconseja hacerla, siempre y cuando, no demande un gran porcentaje de tiempo el realizar la animación como su programación.

Con los anteriores apartados finaliza todo lo relacionado con el diseño, simulación y animación de la cinemática plana del mecanismo de 3 grados de libertad 3RRR, a continuación se empezará a explicar la dinámica, la cual tiene un mayor grado de complejidad. Se comenzará a hablar sobre las formulaciones para abordar el problema de dinámica, el tipo de métodos a usar, un poco sobre integradores, y el procedimiento realizado para programar en Matlab® todo el código y sus respectivas funciones.

III. MODELAMIENTO DINÁMICO DEL MECANISMO DE 3 GRADOS DE LIBERTAD - 3RRR

La dinámica del sólido rígido estudia la relación entre los movimientos de los cuerpos y las fuerzas que actúan sobre ellos [9], así que podría ser llamado "Relación causa-efecto", por otro lado para el modelamiento se tienen dos posibles enfoques:

- **Análisis dinámico directo:**
 - Se conocen las fuerzas y pares externos que actúan sobre el mecanismo, por esto, se obtiene el movimiento del mecanismo
- **Análisis dinámico inverso:**
 - Se conoce el movimiento del mecanismo, por lo general, solo las coordenadas independientes, por esto, se obtienen las fuerzas y pares externos que deben actuar sobre el mecanismo

Por esto, cada formulación tiene sus ventajas, mientras que el análisis directo permite predecir el comportamiento futuro del mecanismo, el inverso permite calcular los esfuerzos en todo momento de los motores, por otro lado, el primero tiene una exigencia mayor, *integrar un sistema de ecuaciones algebraico-diferencial*, mientras que el segundo calcula las reacciones en los pares cinemáticos.

La formulación Newton-Euler nos permite modelar la dinámica del mecanismo, sin embargo no es un planteamiento muy apropiado, debido a que genera sistemas de ecuaciones de gran tamaño y por otro lado se debe resolver la cinemática aparte. Por esto, se han planteado formulaciones que reduzcan el tamaño de los sistemas, y paralelamente permitan una definición metódica. Como por ejemplo las ecuaciones de Lagrange que son el resultado de aplicar el principio de las potencias virtuales.

De la ecuación 36 se tiene la energía cinética (energía potencial es 0 porque no hay desplazamiento en altura):

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\vec{Z}}^T \cdot \vec{M}^* \cdot \dot{\vec{Z}} \quad (36)$$

Energía cinética del mecanismo a partir de la ecuación 36:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\vec{Z}}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \vec{Z}} = \vec{Q} \quad (37)$$

Donde E_c es la energía cinética del mecanismo, $\partial_{\vec{Z}}$ son las coordenadas independientes, mientras que \vec{Q} es el vector de fuerzas generalizadas en las coordenadas independientes, que en el presente caso son 3 (mecanismo 3RRR).

Sin embargo, para simplificar la formulación, el problema se plantea en coordenadas dependientes:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \vec{q}} + \Phi_q^T \cdot \vec{\lambda} = \vec{Q} \quad (38)$$

La diferencia principal entre la ecuación 37 y 38, es que en la última se agrega la matriz jacobiano de las restricciones cinemáticas (ecuaciones 3 a 24 del apartado anterior), se cambian las coordenadas independientes "Z" por el vector de coordenadas dependientes \vec{q} , y se agrega el vector de multiplicadores de Lagrange $\vec{\lambda}$.

Finalmente, sustituyendo y operando, se llega a la siguiente ecuación:

$$\vec{M} \cdot \ddot{\vec{q}} + \Phi_q^T \cdot \vec{\lambda} = \vec{Q} \quad (39)$$

De la ecuación 39 la Matriz de Masas "M" puede ser constante (casos en 2D) o variable (Mayoría de casos en 3D) en este caso, el vector \vec{Q} incluiría las fuerzas de inercia y Coriolis. A pesar de esto, el sistema de ecuaciones tiene n ecuaciones con n variables (coordenadas del sistema). Sin embargo, el número de incógnitas del sistema es n+m porque hay m multiplicadores de Lagrange desconocidos (tantos como ecuaciones de restricción). Por lo cual es necesario añadir m ecuaciones adicionales (las m restricciones cinemáticas).

Se obtiene un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales:

- Las n primeras son diferenciales porque las incógnitas son las derivadas segundas de las variables
- Las m últimas son algebraicas formuladas en las variables

A. Matriz de Masas y Vector de Fuerzas Generalizadas de un Eslabón Rígido

Para modelar la dinámica de un mecanismo plano, se debe primero obtener la matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas de los eslabones rígidos que posee el mecanismo, en el presente caso, 6 eslabones rígidos en forma de un rectángulo, y otro eslabón en forma triangular, donde se encuentra el TCP, sin embargo también se modela igual que los anteriores 6, esto con referencia al mecanismo de la Fig. 1.

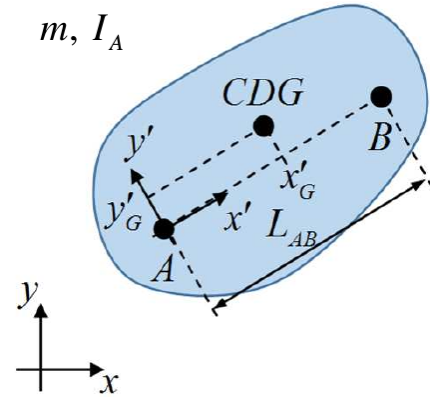


Fig. 4: Modelo de eslabón rígido, para determinar la Matriz de Masa. Ubicación de puntos y distancias claves, como centro de gravedad

Como se puede observar en la Fig. 4 los elementos planos se modelizan en coordenadas naturales con mínimo 2 puntos, entonces primero se define una matriz de masas de un eslabón en base a dos puntos que permitan definirlo como un modelo matemático, cuando se tiene mecanismos en 2D, esta matriz es simétrica y constante. La Tabla II presenta la matriz correspondiente que se debe crear a partir de un eslabón rígido, importante es determinar cuando el punto "A" o "B" se encuentra unido al bastidor, porque se debe tener una consideración especial, que se mencionará mas adelante.

De esta manera se reduce la inestabilidad, y los valores de ξ y que ω por lo general están preestablecidos, pero se pueden cambiar y observar los cambios, por ejemplo cuando se está a llegando a posiciones singulares, o imposibles. Se recomienda su uso, cuando se quiere calcular las reacciones en los pares, además del movimiento del mecanismo completo (tantas incógnitas como ecuaciones).

2) Formulación en Matriz R

Si se plantea la siguiente relación entre velocidades:

$$\dot{\vec{q}} = \bar{R} \cdot \dot{\vec{z}} \quad (42)$$

Luego, esto se deriva respecto al tiempo:

$$\ddot{\vec{q}} = \bar{R} \cdot \ddot{\vec{z}} + \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\vec{z}} \quad (43)$$

Siguientemente, se sustituye en el conjunto de ecuaciones diferenciales y se tiene que:

$$\bar{M} \cdot \bar{R} \cdot \ddot{\vec{z}} + \bar{M} \cdot \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\vec{z}} + \Phi_q^T \cdot \vec{\lambda} = \vec{Q} \quad (44)$$

Premultiplicando por R^T y reordenando se tiene que:

$$\bar{R}^T \cdot \bar{M} \cdot \bar{R} \cdot \ddot{\vec{z}} + (\Phi_q \cdot \bar{R})^T \cdot \vec{\lambda} = \bar{R}^T \cdot (\vec{Q} - \bar{M} \cdot \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\vec{z}}) \quad (45)$$

Además podemos hacer una suposición que es:

$$\dot{\vec{\Phi}} = \Phi_q \cdot \dot{\vec{q}} = 0 \Rightarrow \Phi_q \cdot \bar{R} \cdot \dot{\vec{z}} = 0 \Rightarrow \Phi_q \cdot \bar{R} = 0$$

En consecuencia tenemos que:

$$\bar{R}^T \cdot \bar{M} \cdot \bar{R} \cdot \ddot{\vec{z}} = \bar{R}^T \cdot (\vec{Q} - \bar{M} \cdot \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\vec{z}}) \quad (46)$$

Las principales ventajas de esta formulación es que se tiene un sistema de tamaño pequeño (pocas incógnitas), sin embargo el inconveniente principal es que se debe calcular la matriz R en cada instante temporal, lo cual puede demandar mucho tiempo de procesamiento en mecanismos que tengan muchos eslabones y/o grados de libertad. Lo que ve el usuario es la integración de los componentes de z pero internamente, se debe resolver la cinemática completa. Se recomienda cuando solo se necesita la variación de las coordenadas independientes, sin importar la variación en las dependientes.

3) Formulación en Penalizadores

La última formulación que se presentará, es penalizadores, esta se enfoca en evitar calcular el valor de los multiplicadores de Lagrange, tratando de asignarles un valor proporcional a la violación de las restricciones cinemáticas y sus derivadas, por eso se tiene que:

$$\vec{\lambda} = \alpha \cdot (\ddot{\vec{\Phi}} + 2\xi\omega \cdot \dot{\vec{\Phi}} + \omega^2 \cdot \vec{\Phi}) \quad (47)$$

De la ecuación 47 se tiene que:

- α : penalizador \rightarrow Suele tomarse un valor entre 10^6 o 10^7 .
- ξ : amortiguamiento \rightarrow Suele tomarse un valor de 1.
- ω : frecuencia natural del sistema \rightarrow Suele tomarse un valor de 10

Sustituyendo y reordenando en el conjunto de ecuaciones diferenciales, se tiene que:

$$\bar{M} \cdot \ddot{\vec{q}} + \Phi_q^T \cdot \alpha \cdot (\ddot{\vec{\Phi}} + 2\xi\omega \cdot \dot{\vec{\Phi}} + \omega^2 \cdot \vec{\Phi}) = \vec{Q} \quad (48)$$

Y así,

$$(\bar{M} + \alpha \cdot \Phi_q^T \cdot \Phi_q) \cdot \ddot{\vec{q}} = \vec{Q} - \alpha \cdot \Phi_q^T \cdot (\dot{\vec{\Phi}}_q \cdot \dot{\vec{q}} + 2\xi\omega \cdot \dot{\vec{\Phi}} + \omega^2 \cdot \vec{\Phi}) \quad (49)$$

De la ecuación 49 podemos concluir que esta formulación equivale a introducir en cada restricción:

- Un muelle de gran rigidez.
- Un amortiguador de elevada constante.
- Una masa de gran inercia.

A su vez, el seleccionar un penalizador muy pequeño, se generan grandes violaciones de las restricciones cinemáticas, por otro lado, un valor muy grande, genera problemas de mal condicionamiento numérico en los sistemas a resolver.

A manera de conclusión, esta formulación tiene la ventaja de ser muy robusto frente a configuraciones singulares, ecuaciones redundantes, cambios de configuración, etc. Además se usa cuando se quiere el movimiento de todo el mecanismo y se necesita robustez ante configuraciones singulares, junto con una velocidad de simulación alta (depende del mecanismo). De esta manera se concluye la metodología implementada para desarrollar la dinámica del mecanismo 3RRR, el apartado siguiente se enfocará en el tipo de control usado -CTC- para luego seguir con el apartado de resultados y finalmente conclusiones.

IV. FORMULACIÓN DEL CONTROL CTC DEL MECANISMO DE 3 GRADOS DE LIBERTAD - 3RRR

La simulación dinámica inversa permite obtener los esfuerzos motrices en un mecanismo que generan un movimiento deseado, en el presente caso, la trayectoria que debe seguir el elemento TCP de la Fig. 1. Sin embargo, esto presenta unas limitaciones, las cuales son:

- El movimiento deseado debe ser compatible con las limitaciones físicas que imponen la mecánica.
- No se pueden conseguir velocidades y aceleraciones infinitas.
- El movimiento de cada coordenada deber ser, al menos, una función de tipo C^2 respecto del tiempo, es decir, su derivada segunda respecto del tiempo debe ser continua.
- Su derivada tercera con respecto al tiempo debe estar acotada (no alcanzar el valor de infinito).
- El movimiento deseado debe estar completamente definido para todos los eslabones y para cualquier instante de tiempo.
- No se deben programar trayectorias que puedan estar fuera del área de trabajo, y en algunos casos, muy cerca del límite de esta área.

Por fortuna, cuando no se cumplen todas estas condiciones anteriormente mencionadas, se debe recurrir al control, el cual consiste en incluir acciones sobre el mecanismo (fuerzas y/o pares de fuerzas), cuyo valor, dirección y/o sentido (como vectores) son dependientes del error (que es calculado por la diferencia de una medición con un sensor) con el que el mecanismo sigue el movimiento tomado como referencia, comúnmente llamado, movimiento deseado.

Existen muchos tipos de controles posibles, como los siguientes (de menor a mayor complejidad y capacidad de seguimiento de referencia):

- Regulador PID (acción Proporcional, Integral y Derivativa) [10]–[12].
- Prealimentado con regulador PD
- Computed Torque Control (CTC), usado en el presente artículo
- Control predictivo por Modelo (MPC)

1) Control CTC para movimiento definido

Para el presente caso, el control CTC será el implementado. El control CTC implica calcular los torques y/o fuerzas en los actuadores, imponiendo una aceleración [13] como se muestra en la ecuación 50:

$$Q_{control} = M \cdot (\ddot{Z}_{des} + K_D \cdot (\dot{Z}_{des} - \dot{Z}) + K_P \cdot (\ddot{Z}_{des} - \ddot{Z})) - Q \quad (50)$$

Donde K_D y K_P son matrices diagonales:

$$K_D = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{Di} & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad K_P = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{Pi} & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Si se impone la siguiente relación:

$$K_{Di} = 2 \cdot \sqrt{K_{Pi}} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n_z$$

Esto, entre las ganancias de la posición (K_P) y la velocidad (K_D) de una coordenada i , para conseguir amortiguamiento crítico, de manera que solo se debe ajustar un número como coeficiente. Se encuentra interesante remarcar que:

- El método de control CTC es muy robusto frente a la elección de ganancias.
- Al tener una relación directa entre las ganancias, se puede dar la misma ganancia a todas las coordenadas, ajustando así, una sola ganancia.
- El vector de fuerzas de control generado, se puede utilizar como salida del bucle mas externo, quizás de un control en cascada, e incluir el modelo de los actuadores en la simulación controlada, o de otros elementos internos del sistema.

2) Control CTC para Movimiento Infradefinido

En el caso que se tenga un movimiento infradefinido, se requiere controlar un subconjunto de coordenadas y de las coordenadas independientes "z" [13], las cuales se definen mediante una matriz booleana "H":

$$\vec{y} = H \cdot \vec{z}$$

Derivando dos veces respecto del tiempo:

$$\dot{\vec{y}} = H \cdot \dot{\vec{z}}$$

$$\ddot{\vec{y}} = H \cdot \ddot{\vec{z}}$$

Despejando y sustituyendo en la ecuación de dinámica:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{y}} &= \overline{H} \cdot \ddot{\vec{z}} = \overline{H} \cdot M^{-1} \cdot (Q + \overline{B} \cdot \vec{u}) = \\ &= \overline{H} \cdot M^{-1} \cdot Q + \overline{H} \cdot M^{-1} \cdot \overline{B} \cdot \vec{u} \end{aligned} \quad (51)$$

Entonces la actuación necesaria para obtener ese subconjunto de aceleraciones será:

$$\vec{u} = (\overline{H} \cdot M^{-1} \cdot \overline{B})^{-1} \cdot (\ddot{\vec{y}} - \overline{H} \cdot M^{-1} \cdot Q) \quad (52)$$

Sin embargo, también puede ser agregado un control CTC en la aceleración, siendo así mas robusto:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\overline{H} \cdot M^{-1} \cdot \overline{B})^{-1} \cdot (\ddot{\vec{y}}_{des} + K_D \cdot (\dot{\vec{y}}_{des} - \dot{\vec{y}}) \dots \\ &\dots K_P \cdot (\vec{y}_{des} - \vec{y}) - \overline{H} \cdot M^{-1} \cdot Q) \end{aligned}$$

Reemplazando tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\overline{H} \cdot M^{-1} \cdot \overline{B})^{-1} \cdot (\ddot{\vec{y}}_{des} + K_D \cdot (\dot{\vec{y}}_{des} - \overline{H} \cdot \dot{\vec{z}}) \dots \\ &\dots K_P \cdot (\vec{y}_{des} - \overline{H} \cdot \vec{z}) - \overline{H} \cdot M^{-1} \cdot Q) \end{aligned} \quad (53)$$

La ecuación 53 modela el control CTC para un movimiento infradefinido, incluyendo el control para aceleración. A pesar de esto, el mecanismo propuesto (Fig. 1) no se encuentra infradefinido, por lo cual se usará la ecuación 50.

Finalmente, el control CTC, permite una minimización del error a un costo lógico, mas par motriz deben aportar los motores en el momento que se necesite. En el siguiente apartado se explicará el procedimiento elegido para la síntesis del mecanismo 3RRR.

V. SÍNTESIS DIMENSIONAL DEL MECANISMO DE 3 GRADOS DE LIBERTAD - 3RRR

El diseño de un mecanismo, implica pasar por varias etapas, que no solo se enfocan en la síntesis dimensional, sino, en entender el problema de manera general y así plantear una solución pertinente, que permita minimizar los requisitos propuestos inicialmente. Con referencia a esto, se tienen unas etapas en el proceso de diseño las cuales son:

1) Definición de las condiciones de diseño:

- Obtener una determinada trayectoria de un elemento o punto,
- Coordinación entre giros de elementos,
- Minimizar la fuerza o par necesario en determinado instante de tiempo,
- Evitar obstáculos sobre un área de trabajo específico.

2) Síntesis estructural:

- Definir la topología del mecanismo, por ejemplo, el número de eslabones, a su vez, se tienen 2 clases, síntesis de tipo (tipo de eslabones) y síntesis de número (aplicar criterio de Grübler para determinar combinaciones, pares y Grados de Libertad)

3) Síntesis dimensional:

- Determinar las dimensiones principales de los eslabones que componen el mecanismo, en este caso el mecanismo 3RRR, además se tiene síntesis cinemática, cineto-estática y dinámica.

4) Análisis de esfuerzos

- Esta etapa permite la realización de la simulación del mecanismo para determinar los esfuerzos que están sometidos los elementos del mecanismo.

5) Definición de las dimensiones secundarias:

- Permite definir las dimensiones secundarias del mecanismo de los elementos, es clave la fase previa de los esfuerzos en los eslabones, ya que permite elegir, espesores, holguras, etc.

Como el presente proyecto se enfoca en la síntesis dimensional, a continuación se presentan los 3 tipos mas usados:

- Método de síntesis gráfico
- Método de síntesis analítico
- Método de síntesis numérico

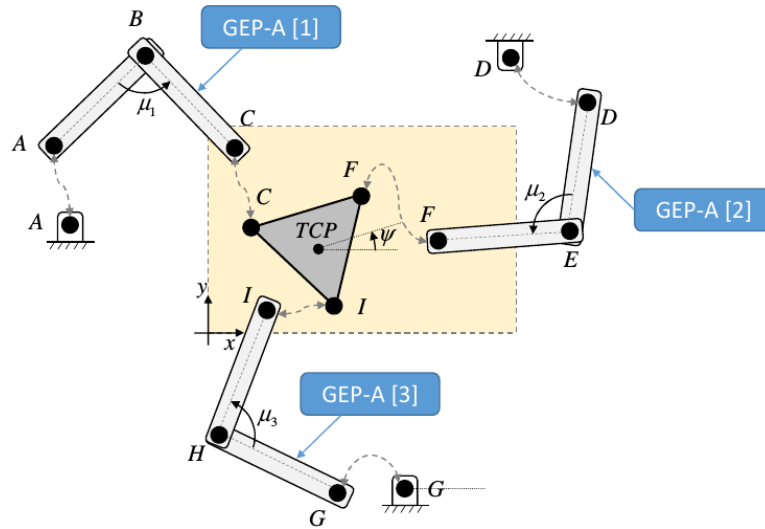


Fig. 6: División del mecanismo en grupos de elementos

Por otro lado, esta la necesidad de que la función objetivo de un problema de síntesis dimensional numérica sea del tipo suprayectivo. Sin embargo, en muchos casos es difícil de conseguir con las técnicas de modelado tradicional de la cinemática (por ejemplo, con coordenadas naturales, caso en el cual se desarrolló el mecanismo 3RRR en el apartado 2 del presente artículo).

Entonces, algunos autores han propuesto la utilización de modelados alternativos para evitar este problema. Uno de esos modelados se basa en la división del mecanismo en grupos de elementos. El modelado de mecanismos planos mediante grupos de elementos es muy antiguo (Assur, 1952) y se remonta a más de 60 años atrás [14].

Las principales ventajas de este tipo de modelado es que tiene un análisis sencillo y metódico, con una resolución secuencial de los elementos, se empieza por un grupo, y se sigue con el siguiente, gracias a la unión entre eslabones. Por esto, se tiene una mayor velocidad computacional, y menor coste de manera simultánea (por ser secuencial), por otro lado, el modo de ensamblado se puede elegir fácilmente teniendo como resultado que un error de 0 equivale a que el mecanismo se puede ensamblar, y que un error mayor a 0, es proporcional a lo incorrectamente ensamblado que está el mecanismo, en el presente caso, el mecanismo 3RRR, obtuvo un error de 0 en los tres grupos de elementos que se definieron, de manera que se obtuvo un respuesta óptima.

En contraposición, los inconvenientes de este tipo de modelado, tiene como principal enfoque, que la movilidad de los grupos de elementos no es fija y que esta puede cambiar durante una simulación, luego, la modelización no abarca todos los mecanismos posibles, finalmente, solo es posible usar cinemática directa.

El modelado de mecanismos planos con grupos de elementos, tiene 3 características especiales:

- Asegura que siempre hay una solución (real o virtual) para la cinemática directa,
- En el caso que la configuración es posible, el error de ensamblaje del mecanismo será cero.

- Si la configuración es imposible, el error será proporcional a cuán lejos este el mecanismo de montarse.

Para finalizar, el orden de actividades que se debe plantear cuando se afronte problemas de síntesis dimensional es el siguiente:

- 1) Definir los indicadores de calidad de referencia para el mecanismo.
- 2) El modelado de la cinemática usando grupos de elementos.
- 3) Modelado de la dinámica inversa del mecanismo (opcional, y cuando sea necesario para obtener pares, fuerzas, aceleraciones).
- 4) Planteamiento formal - problema de síntesis dimensional.
- 5) Resolución del problema de síntesis dimensional, y evaluación.

VI. RESULTADOS

El apartado de resultados se irá explicando empezando con la síntesis dimensional, sus resultados, como valores óptimos de los eslabones, y posiciones en el plano cartesiano de los motores, luego se explicará los resultados de control CTC, aplicado a esos valores constantes determinados, como también los resultados de los pares con control.

A. Síntesis Dimensional - Resultados

La resolución de la síntesis dimensional, se debe empezar con conocer los indicadores de calidad y parámetros que se quieren controlar o restringir, por ejemplo un ángulo o una posición. Un ejemplo claro, son los ángulos de transmisión en cada brazo, la rotación del cuerpo rígido donde está la herramienta de trabajo, etc.

La Fig. 6 muestra la división en grupos de elementos del mecanismo de la Fig. 1, así mismo se identifican las variables y puntos a vigilar. Por otro lado, se debe crear un vector con las constantes del sistema, y a su vez asignar unos rangos en la simulación (rangos en los cuales el algoritmo se debe mantener).

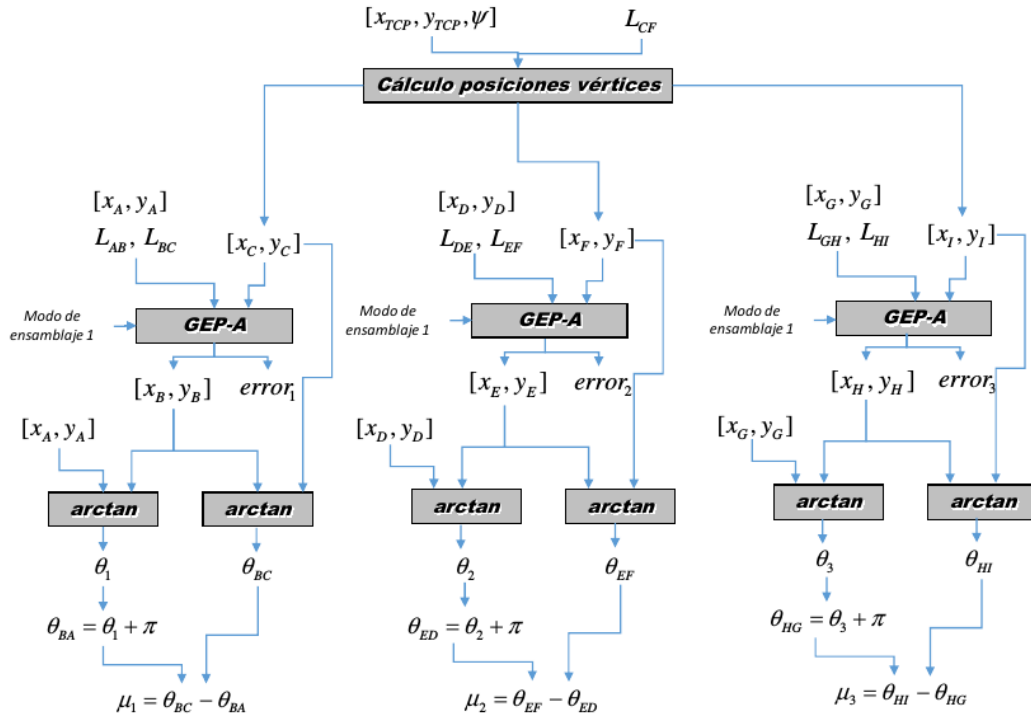


Fig. 7: Diagrama de bloques para cinemática inversa

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} x_A & y_A & x_D & y_D & x_G & y_G & L_{AB} & \dots \\ \dots & L_{BC} & L_{DE} & L_{EF} & L_{GH} & L_{HI} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

El anterior vector \vec{c} , contendrá el resultado necesario para definir para la posterior simulación dinámica y de control.

La Fig. 7 corresponde al diagrama de bloques para la cinemática inversa, la cual se parte del cuerpo rígido CFI, que contiene la herramienta de trabajo "TCP", por lo cual a partir de la posición de los vértices (plano x,y), se puede encontrar el valor de cada uno de los puntos de interés. Para todos los grupos de elementos, se usó un modo 1 de ensamblaje. Para la determinación de los ángulos μ_1 , μ_2 y μ_3 se usó una función auxiliar que determinara el arco tangente, de los eslabones AB, DE, GH y se comparara correspondiente con los eslabones BC, EF y HI.

El cálculo de las posiciones de los vértices se hicieron por medio de una función "pos-vertices", que a partir de la posición del "TCP", el ángulo ψ y longitud L_{CF} , se devuelven los valores en x,y de los 3 puntos asociados al cuerpo rígido que se ve en la Fig. 1 y Fig. 7:

$$\begin{aligned} x'_C &= -\frac{L_{CF}}{2} & x'_F &= \frac{L_{CF}}{2} & x'_I &= 0 \\ y'_C &= \frac{L_{CF}}{2 \cdot \sqrt{3}} & y'_F &= \frac{L_{CF}}{2 \cdot \sqrt{3}} & y'_I &= -\frac{L_{CF}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Las 6 anteriores ecuaciones, permiten encontrar los valores relativos en x,y de las vértices asociados al cuerpo rígido, y usando la ecuación 54 la cual es la matriz de rotación con respecto al lado CF, se pueden encontrar las posiciones absolutas de los vértices.

$$R = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (54)$$

Para obtener las coordenadas globales, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{TCP} \\ y_{TCP} \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{TCP} \\ y_{TCP} \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} x'_F \\ y'_F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{TCP} \\ y_{TCP} \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} x'_I \\ y'_I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definiendo como se obtienen los vértices, además con base a las especificaciones geométricas de la Tabla I, y las consideraciones planteadas en el apartado 2 de modelamiento cinemático del mecanismo de 3 grados de libertad. Se plantea la función que se debe minimizar (en error), para obtener las dimensiones adecuadas de los eslabones (6) y de los puntos en el plano cartesiano, donde deben ir los motores; así se obtiene la siguiente ecuación:

$$\min f(\vec{c}) = \min (x_{max} - x_{min}) \cdot (y_{max} - y_{min}) \quad (55)$$

Siendo x e y, máximos y mínimos absolutos dentro del grupo de todas los puntos del mecanismo, así se puede obtener el área que cubren los eslabones. Por otro lado hemos definido 10 restricciones que el mecanismo debe cumplir, esto con referencia a las consideraciones del apartado numero II. Entonces:

- Para cualquier grupo de elementos el error de montaje debe ser cero, así se asegura la construcción de un mecanismo correcto:
 - $\forall i, error1_i = 0$
 - $\forall i, error2_i = 0$
 - $\forall i, error3_i = 0$

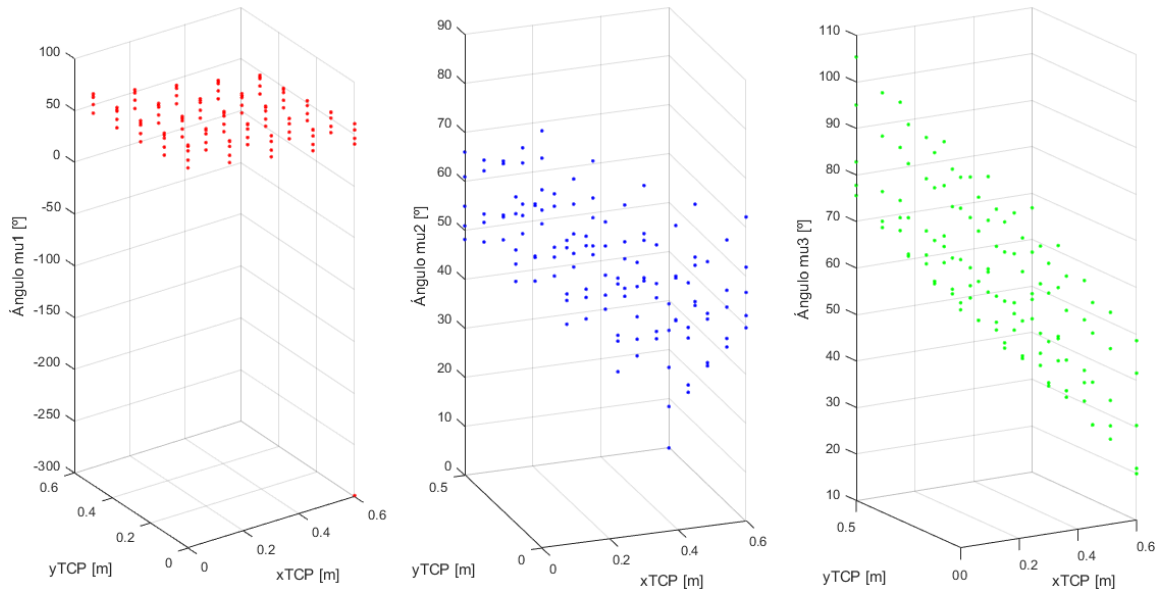


Fig. 8: Combinaciones entre coordenadas en el plano (x,y) con los ángulos de transmisión, (a) TCP vs μ_1 , (b) TCP vs μ_2 y (c) TCP vs μ_3

- Para los ángulos μ_1 , μ_2 y μ_3 , que son los ángulos de transmisión, se debe asegurar que sean mayores a 60 grados:
 - $\forall i, 90^\circ - 30^\circ \leq \mu_{1i} \rightarrow 0 \leq \mu_{1i} - 60^\circ = gan_{men1i}$
 - $\forall i, 90^\circ - 30^\circ \leq \mu_{2i} \rightarrow 0 \leq \mu_{2i} - 60^\circ = gan_{men2i}$
 - $\forall i, 90^\circ - 30^\circ \leq \mu_{3i} \rightarrow 0 \leq \mu_{3i} - 60^\circ = gan_{men3i}$
- Simultáneamente, los ángulos μ_1 , μ_2 y μ_3 (ángulos de transmisión) se debe asegurar que sean menores a 120 grados:
 - $\forall i, \mu_{1i} \leq 90^\circ + 30^\circ \rightarrow 0 \leq 120^\circ - \mu_{1i} = gan_{may1i}$
 - $\forall i, \mu_{2i} \leq 90^\circ + 30^\circ \rightarrow 0 \leq 120^\circ - \mu_{2i} = gan_{may2i}$
 - $\forall i, \mu_{3i} \leq 90^\circ + 30^\circ \rightarrow 0 \leq 120^\circ - \mu_{3i} = gan_{may3i}$

De esta manera, tendríamos 10 restricciones (9 anteriores, mas una restricción del área de trabajo mostrada en la ecuación 55. Adicionalmente sabemos que:

- 1) $\mu_{1i} = \theta_{BCi} - \theta_{BAi}$
- 2) $\mu_{2i} = \theta_{EFi} - \theta_{EDi}$
- 3) $\mu_{3i} = \theta_{HIi} - \theta_{HGi}$

Donde, θ_{BCi} , θ_{EFi} y θ_{HGi} son menores a 90° , o por lo menos se debe asegurar que no sean mayores a este valor, debido a que generaría -en teoría- un ángulo negativo.

Como siguiente medida, la variable "i" utilizada en el presente apartado, es un contador que recorre los "n" puntos dispuestos, de manera gráfica, es como un cubo en 3 dimensiones $\vec{\Delta} = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta \psi]$, y a su vez, este cubo se divide en cubos mas pequeños (125), los lados del cubo tienen como límite:

- 1) 5 porciones para el eje x (n1):
 - $x_{min} = 0 \text{ m}$
 - $x_{max} = 0.6 \text{ m}$
- 2) 5 porciones para el eje y (n2):
 - $y_{min} = 0 \text{ m}$
 - $y_{max} = 0.5 \text{ m}$

- 3) 5 porciones para el ángulo ψ (n3):

- $\psi_{min} = -90^\circ$
- $\psi_{max} = 90^\circ$

Adicionalmente, se puede saber que en cada generación, el algoritmo hace $n1 \cdot n2 \cdot n3$ evaluaciones de como está "montado" el mecanismo, por lo cual tenemos un total de 125 combinaciones, y cada una de estas ocupa una posición en un vector llamado "evaluación" y que pasa los datos a la función designada para modelar la cinemática inversa con respecto a la entradas dadas.

La Fig. 8 presentan, los ángulos de transmisión con respecto a la trayectoria que seguía el elemento TCP, es importante mencionar que es una gráfica en 3 dimensiones de Matlab®, además por cada eje se tienen varios puntos en el mismo eje, por ejemplo, en una combinación específica xTCP e yTCP, se tienen varios ángulos, ya sea μ_1 , μ_2 o μ_3 .

La estrategia evolutiva DDM-ES (toolbox de funciones para Matlab®) se ha seleccionado, debido a que trabaja de manera nativa con variables continuas y acotadas además de tener un buen rendimiento ante funciones con varios óptimos [15]. Sin embargo, este algoritmo no permite que sean agregadas restricciones, entonces, el problema de síntesis dimensional del mecanismo 3RRR, se convertirá en un problema "sin restricciones" como se explica a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \omega_1 \cdot (x_{max} - x_{min}) \cdot (y_{max} - y_{min}) + \dots \\
 & \dots + \omega_2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} error1_i + \omega_3 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} error2_i + \omega_4 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} error3_i \dots \\
 & \dots + \omega_5 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} gan_{may1i} + \omega_6 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} gan_{men1i} + \omega_7 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} gan_{may2i} \dots \\
 & \dots + \omega_8 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} gan_{men2i} + \omega_9 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} gan_{men3i} + \omega_{10} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} gan_{may3i} \dots
 \end{aligned}$$

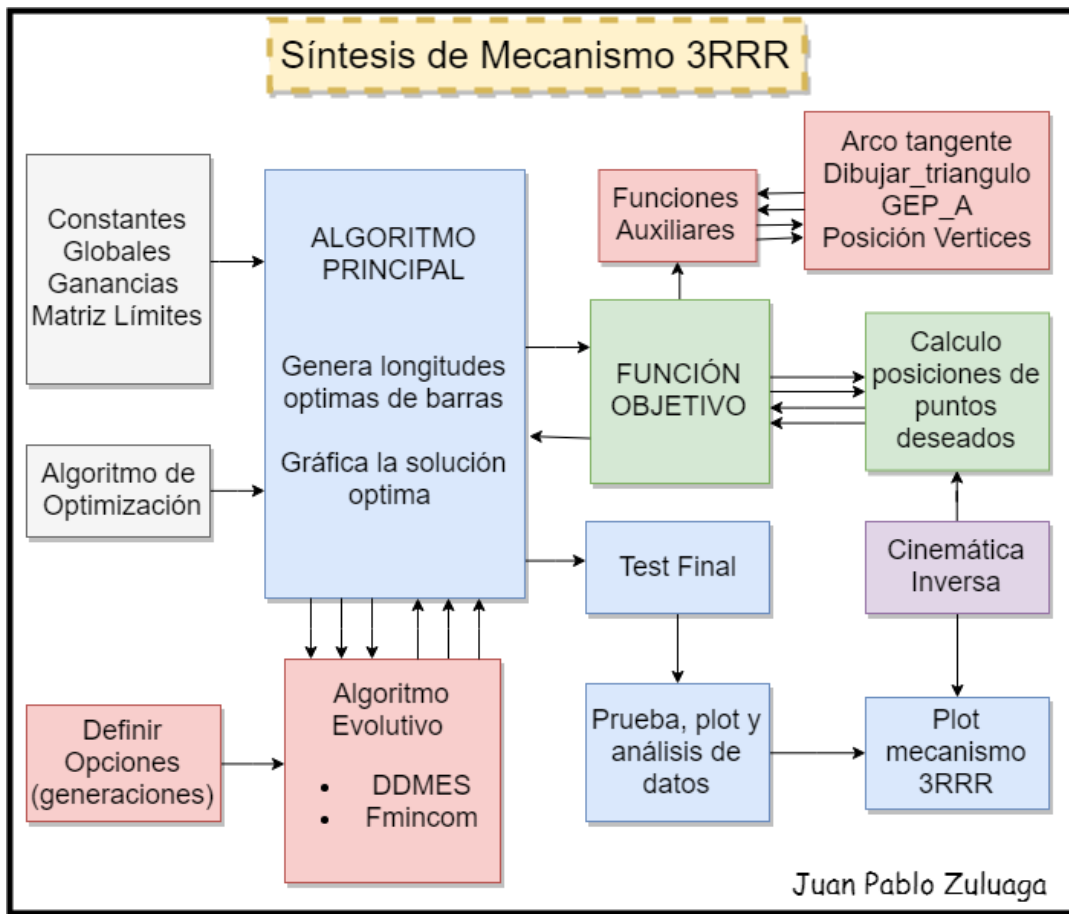


Fig. 9: Diagrama de bloques para algoritmo en Matlab® de la síntesis cinemática

Así, solo tenemos que minimizar la función principal, la cual está afectada de cierta manera, por lo pesos $\omega_1 - \omega_{10}$, y que la correcta selección de estos hace crucial la acertada resolución del problema de síntesis dimensional.

El algoritmo implementado en Matlab® para resolver la síntesis dimensional por cinemática inversa, se puede observar en la Fig. 9, el algoritmo principal consta de generar las longitudes adecuadas para que el mecanismo 3RRR se pueda montar, con error de 0 en los tres grupos de elementos, adicionalmente, permite la animación (y generar gráfica adicional) de la solución óptima, pudiendo contrastar el resultado con lo deseado por el usuario.

Siguientemente, este algoritmo principal, es alimentando por las constantes globales, que se usaran a lo largo de las funciones auxiliares y demás cálculos. Por otro lado el Algoritmo de optimización DDM-ES [15] y el "fmincom" (usado para generar una última respuesta, y/o optimización) permiten obtener los resultados.

El bloque "Función Objetivo" de la Fig. 9, está encargada de recoger y guardar los datos que son recopilados y enviados por las otras funciones auxiliares, las funciones auxiliares, constan, de una que calcula el arco-tangente, dibujar un triangulo correspondiente con el elemento rígido, determinar las coordenadas de los vértices de este elemento rígido, y por último, la función para generar los grupos de elementos.

Finalmente, se realiza un último test, como prueba, y se anima el mecanismo, permitiendo saber el desempeño de este, siguiendo una trayectoria específica, en este caso, la descrita en las especificaciones del apartado II. De todo el proceso de simulación, para obtener las dimensiones óptimas, además la posición de los motores, se obtuvieron los datos que se presentan en la Tabla III, la cual consta similarmente al vector de constantes presentado en el apartado anterior.

Dimensiones Determinadas		
Constante Determinada	Valor	Unidades
x_a	0	metros
y_a	0.6	metros
x_d	0	metros
y_d	0.6	metros
x_g	0	metros
y_g	0.6	metros
L_{AB}	0	metros
L_{BC}	0	metros
L_{DE}	0	metros
L_{EF}	0	metros
L_{GH}	0	metros
L_{HI}	0	metros

Tabla III: Dimensiones Finales Mecanismo 3RRR

El siguiente apartado se enfocará en los resultados de la dinámica y control CTC implementado con las dimensiones obtenidas de la Tabla III.

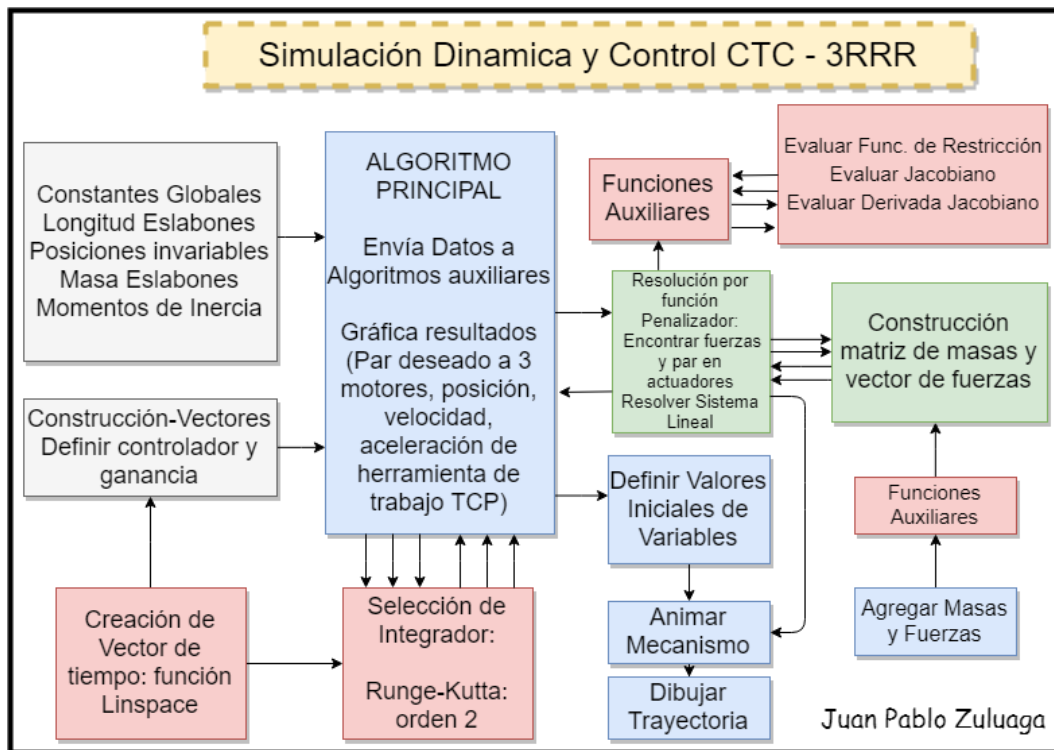


Fig. 10: Diagrama de bloques para algoritmo en Matlab® del control CTC y dinámica con formulación de Penalizadores

B. Dinámica y Control CTC - Resultados

El desarrollo de la dinámica implicó la selección de un integrador adecuado (Runge-Kutta de segundo orden), un tipo de formulación para resolver la dinámica (Penalizadores), y por ultimo la incorporación de los datos obtenidos en el apartado de Síntesis Dimensional (Tabla III). La Fig. 10 presenta el diagrama de bloques que resume de cierta manera el algoritmo implementado.

El algoritmo principal se encarga de enviar datos iniciales a los auxiliares, por otro lado, este es alimentado por las constantes globales, que son 43, y se encuentran detalladas en el código adjunto a este artículo en los anexos. Estas constantes globales están compuestas por la longitud de los eslabones, posiciones invariables, masa de los eslabones, momentos de inercia y posiciones relativas de los eslabones (a su centro de inercia).

Las funciones auxiliares incluye, una función de restricción, que a su vez contiene las 18 ecuaciones que se mencionan en el apartado II, por otro lado esta la función para evaluar el Jacobiano y la derivada del Jacobiano de todas estas 18 ecuaciones. Para la resolución de la función Penalizador, se debe crear la matriz de masas y vector de fuerzas generalizado, así se encuentran los pares y fuerzas deseados que deben tener los eslabones para que se cumplan las restricciones y que a su vez, el mecanismo desarrolle la trayectoria planeada por el usuario.

Por último, el algoritmo es capaz de generar una gráfica donde muestra la posición, velocidad y aceleración que desarrolla los puntos x,y de la herramienta de trabajo ubicada en el cuerpo rígido, y también generar la animación, para contrastar de manera visual la trayectoria efectuada.

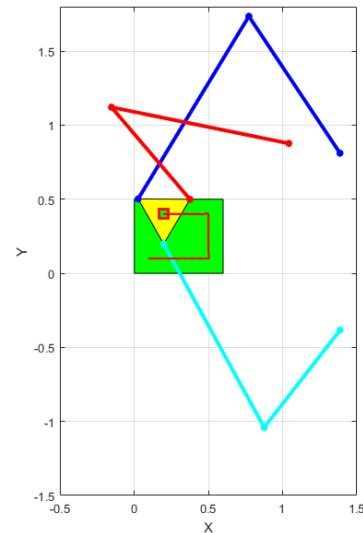


Fig. 11: Trayectoria del mecanismo 3RRR con control CTC y síntesis dimensional, mecanismo sin modificación

La Fig. 11 muestra la trayectoria del mecanismo 3RRR, sin embargo se notó en los resultados que el par generado en los motores era muy alto en los momentos donde la trayectoria cambiaba de dirección, por ejemplo en el segundo "1" y "2". Por inspección visual, se detectó que los eslabones del grupo de elementos 2 (color rojo), era el causante del problema, por lo cual se procedió a cambiar de lugar la posición fija donde se encontraba el motor, y así evitar que el ángulo de transmisión que se genera entre el eslabón DE y EF, no estuviera muy cercano a los límites.

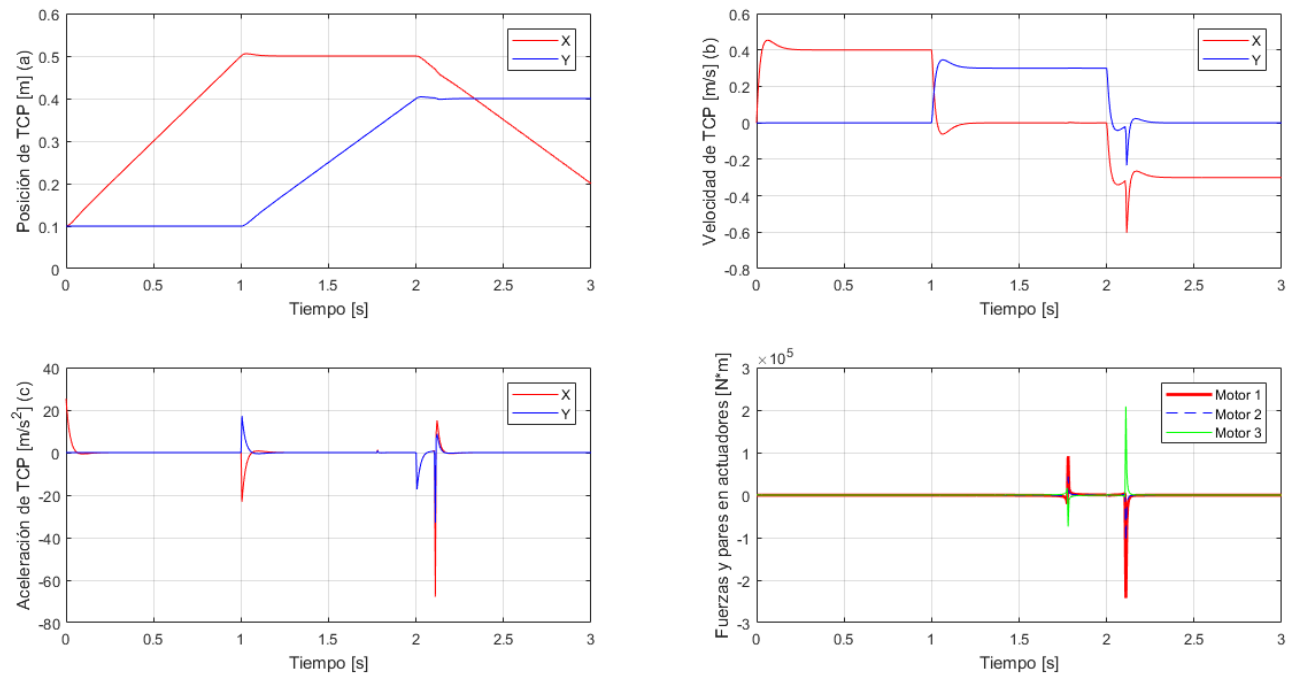


Fig. 12: Gráfica de Posición (a), Velocidad (b), Aceleración (c) y Par en los 3 motores (d), sin modificaciones implementadas

Este planteamiento de inspeccionar los resultados, y tomar decisiones, convierte en muy versátil este tipo de algoritmos, por ejemplo la Fig. 12 muestra que se tiene un seguimiento de la trayectoria (Fig. 12 (a)) muy buena, sin embargo en la subgráfica del par motriz, se exige de manera extraordinaria a los motores, haciendo casi imposible su implementación.

Por esto, se proponen dos posibles soluciones para el anterior problema:

- 1) Disminuir la ganancia del controlador CTC.
- 2) Cambiar de posición alguno de los puntos fijos (de manera razonable) y determinar el nuevo par motriz exigido a lo largo de la trayectoria.

Después de aplicar la primera solución, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- El mecanismo redujo el par motriz que exigió a los 3 motores.
- El seguimiento a la trayectoria fue mucho peor, incluso llegando a descontrolar el sistema y el control.
- Se probaron varios valores de ganancia del controlador CTC, sin embargo se llegaba a mejorar la trayectoria pero a coste de mayor par motriz exigido por los motores.

Sin embargo, después de aplicar la segunda solución, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- El mecanismo redujo de manera abrumadora el par motriz exigido por los motores, pasando de $200.000N \cdot m$ a unos menos de $400N \cdot m$, y esto, simplemente cambiando de posición el punto unido al bastidor, del grupo de elementos número 2.
- El seguimiento a la trayectoria, disminuyó, pero apenas se puede apreciar, a lo cual el error es realmente bajo, y esto se puede contrastar observando la Fig. 11 comparada con la Fig. 13.

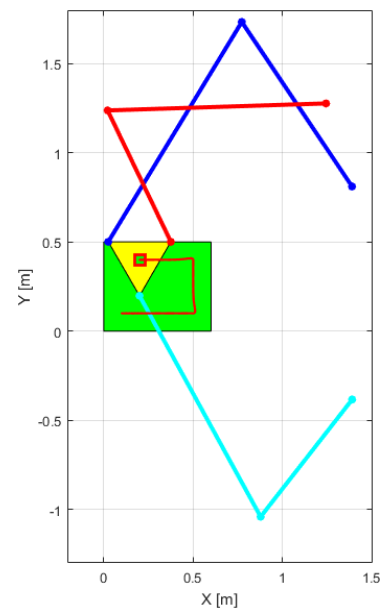


Fig. 13: Trayectoria del mecanismo 3RRR con control CTC y síntesis dimensional, mecanismo con modificación en el segundo grupo de elementos

De manera exacta, las modificaciones realizadas fueron:

- El valor en x se aumentó en 0.2 metros, esto para el punto "d", segundo grupo de elementos, barras rojas.
- Igualmente el valor en y se aumentó en 0.4 metros, también para el mismo grupo de elementos.
- Finalmente, se disminuyó la ganancia del sistema de "1000" a "200", así se aseguró un buen seguimiento de la trayectoria, con el menor par motriz para los motores.

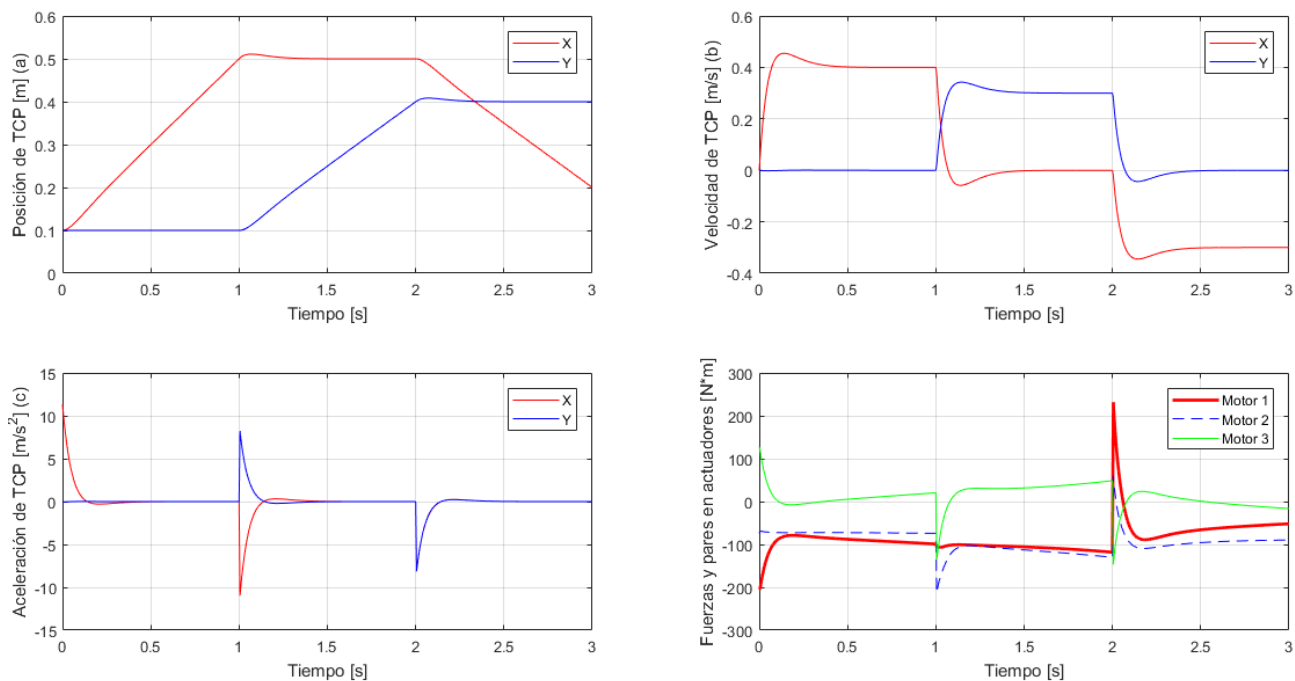


Fig. 14: Gráfica de Posición (a), Velocidad (b), Aceleración (c) y Par en los 3 motores con modificación implementada

A manera de conclusión, la Fig. 14 muestra la gran diferencia de par motriz que exigen los motores, por lo cual se puede determinar que la inspección visual y posterior adición de mejoras de parte del usuario, puede ser de gran ayuda para la resolución de este tipo de problemas. La trayectoria tampoco se ve afectada, comparación entre Fig. 12 (a) y Fig. 14 (a).

VII. CONCLUSIÓN

Se concluye que el modelamiento cinemático por el método de grupos de elementos, es mucho mas eficaz y sencillo que el de coordenadas naturales (ambos implementados en el presente artículo), adicionalmente el modelamiento por grupos de elementos, permitió la obtención de las dimensiones necesarias de los eslabones, para cumplir con todos los requisitos exigidos.

Se concluye que la utilización de condicionales para la selección de cuando usar "coseno" o "seno" en las funciones de restricción y así evitar sobredimensionar el grupo de ecuaciones de restricción, es una buena metodología que evita momentos de singularidad en la simulación dinámica.

Se concluye que el análisis dinámico directo es mucho mas versátil, ya que a partir de las fuerzas y pares externos, podemos conocer el movimiento del mecanismo 3RRR. Así mismo la formulación de penalizadores para resolver la dinámica, se muestra muy versátil, ya que tiene un coste computacional medio, y se puede modificar las ganancias como el penalizador, coeficiente de amortiguamiento o frecuencia natural de manera sencilla.

Se concluye que se logró una correcta síntesis dimensional, respetando todas las exigencias mencionadas en el primer apartado del presente artículo, así mismo, el control y la dinámica, fue coherente con esto.

Por otro lado, los objetivos fueron completados de manera satisfactoria, además, es muy importante mencionar que la inspección visual y análisis de datos finales, pueden ser de gran ayuda para reducir y obtener mejor resultados, el mejor ejemplo, fue el mover el punto fijo del segundo grupos de elementos, y obtener una disminución significativa del par motriz usado por los motores.

Finalmente, se concluye que este tipo de trabajos son muy innovadores y enriquecen a los estudiantes de manera general, ya que se aplican conocimientos, como programación, síntesis, cinemática y dinámica de mecanismos, por otro lado, el control CTC se muestra como un nuevo tipo de control, que los estudiantes pueden implementar en otro tipo de proyectos.

REFERENCES

- [1] G. Baranov, *Curso de la teoría de mecanismos y máquinas*. Mir Moscú, 1979.
- [2] Á. Noriega González, A. García Martínez, and M. Muñiz Calvente, "Resolución del problema cinemático inverso en un robot scara mediante grupos de assur," in *Anales de Ingeniería Mecánica*. Área de Ingeniería Mecánica Departamento de Ingeniería Mecánica Universitat Jaume I, 2012.
- [3] Á. Noriega González, M. Cadenas Fernández, and R. Fernández Rodríguez, "Una modelización cinemática completa y robusta del grupo de assur rrt," in *Anales de Ingeniería Mecánica*. Área de Ingeniería Mecánica Departamento de Ingeniería Mecánica Universitat Jaume I, 2013.
- [4] S. Mitsi, K. D. Bouzakis, G. Mansour, and I. Popescu, "A method for forward displacement analysis of 3-rpr and 3-prp planar parallel manipulators," *Romanian Review Precision Mechanics, Optics and Mechatronics*, vol. 39, pp. 137–140, 2011.
- [5] Z. Ni, Q. Liao, and S. Wei, "New research of forward displacement analysis of 6-link assur group," in *Information Science and Engineering (ICISE), 2010 2nd International Conference on*. IEEE, 2010, pp. 5187–5190.
- [6] X. Kong and C. M. Gosselin, "Forward displacement analysis of third-class analytic 3-rpr planar parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 36, no. 9, pp. 1009–1018, 2001.

- [7] J. Lenarcic and P. Wenger, *Advances in robot kinematics: analysis and design*. Springer, 2008.
- [8] Á. Noriega González, Y. Moreda Vázquez, and J. M. Sierra Velasco, "Síntesis cineto-estática de una suspensión delantera alternativa para una motocicleta," in *Anales de Ingeniería Mecánica*, 2012.
- [9] A. Avello-Iturriagoitia, "Teoría de máquinas," 2014.
- [10] M. Shahrokhi and A. Zomorodi, "Comparison of pid controller tuning methods," 2012.
- [11] K. Premkumar and B. Manikandan, "Fuzzy pid supervised online anfis based speed controller for brushless dc motor," *Neurocomputing*, vol. 157, pp. 76–90, 2015.
- [12] S. Thamizmani and S. Narasimman, "Design of fuzzy pid controller for brushless dc motor," *Int. J. Emerg. Res. Manag. Technol.*, vol. 9359, no. 4, p. 66, 2014.
- [13] F. Park and K. Lynch, "Introduction to robotics: Mechanics, planning, and control," *Seoul National University*, 2012, 2015.
- [14] A. Noriega, M. Cadenas, and R. Fernández, "Position problem in assurs groups with revolute pairs," in *New Trends in Mechanism and Machine Science*. Springer, 2013, pp. 141–148.
- [15] A. Noriega, E. Rodriguez, J. Cortizo, R. Vijande, and J. Sierra, "A new evolution strategy for the unconstrained optimization problem," in *2nd International Conference on Multidisciplinary Design Optimization and Applications*. Gijón, España, 2008.