# 3. ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES EN EL TIEMPO

Control

Ing. Mecatrónica

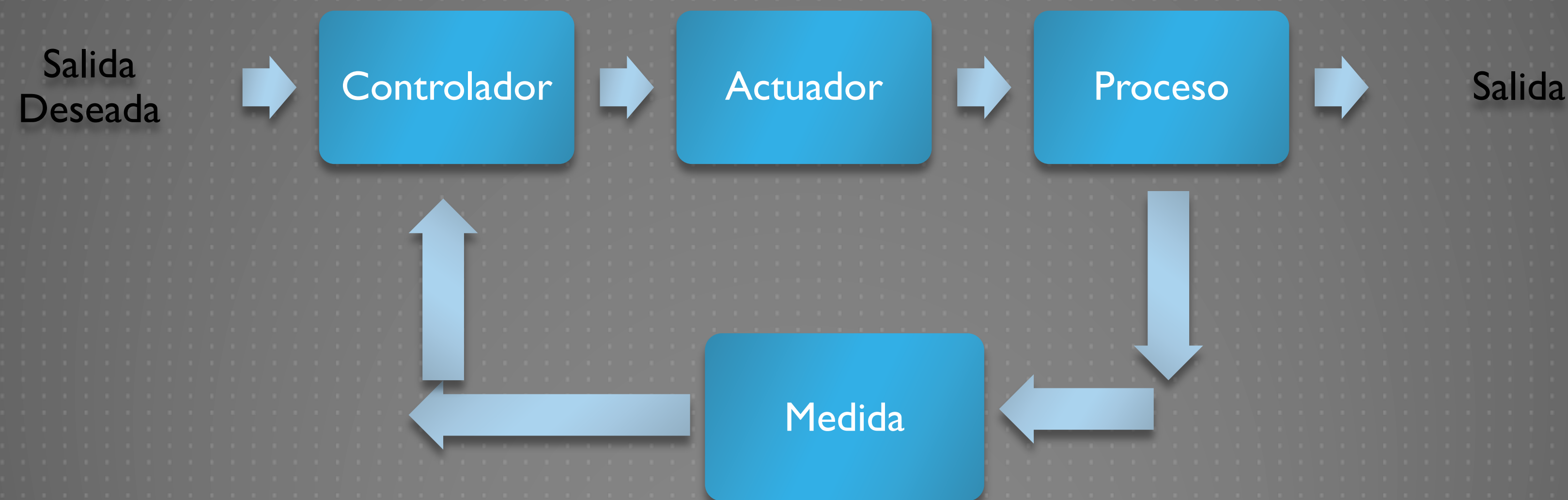
D.C. Johan Walter González Murueta

3. Análisis y diseño de controladores en el tiempo

# 3.1 DEFINICIÓN DE CARACTERÍSTICAS DE UN CONTROLADOR

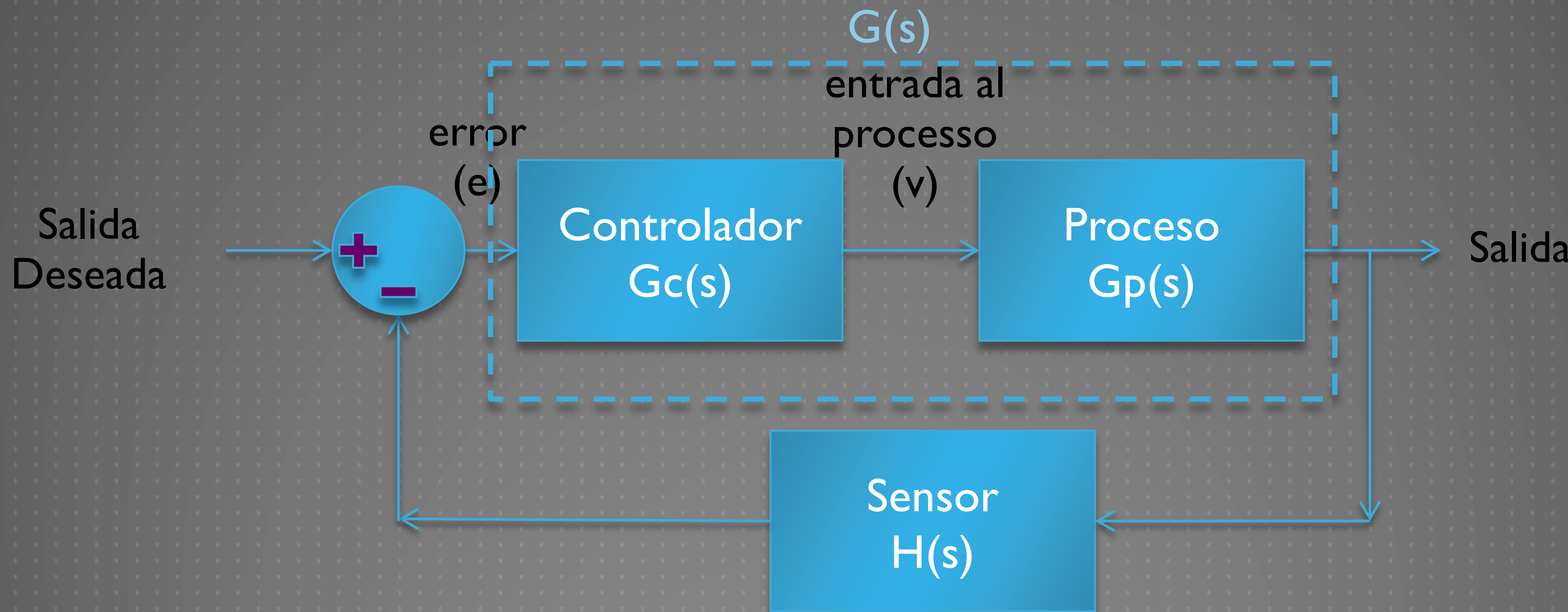
# 3.2 TIPOS DE CONTROLADORES

# RECORDANDO LA ESTRUCTURA DE UN SISTEMA EN LAZO CERRADO



# SISTEMA CONTROLADO EN LAZO CERRADO

- Tomando el actuador y proceso juntos tenemos lo que hemos considerado



# CONTROLADOR PROPORCIONAL P

- Un controlador proporcional es aquel en el que:

$$G_c = K_p$$

$$v(t) = K_p\, e(t)$$

$$V(s) = K_p\, E(s)$$

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p$$

Multiplica por una constate

# CONTROLADOR INTEGRAL (I)

- Un controlador integral es aquel en el que:

$$v(t) = K_i \int e(t)\,dt$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

$$V(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \quad \therefore \quad G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} = \frac{K_p}{T_i\, s}$$

Multiplica por una constate y tiene un polo en el origen

# CONTROLADOR DERIVATIVO (D)

- Un controlador derivativo es aquel en el que:

$$v(t) = K_d \frac{d\,e(t)}{d\,t}$$

$$K_d = K_p \, T_d$$

$$V(s) = K_d \, s \, E(s) \quad \therefore \quad G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_d \, s = K_p \, T_d \, s$$

Multiplica por una constate y tiene un cero en el origen

# CONTROLADOR PROPOCIONAL-INTEGRAL (PI)

- Se define en el tiempo como:

$$v(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t)\, dt = K_p e(t) + \frac{Kp}{Ti} \int e(t) dt$$

- Obtener Gc(s) en forma:

$$G_c = \frac{\prod_i^m (s - z_i)}{\prod_i^n (s - p_i)}$$

Multiplica por una constate, tiene un cero real movible y un polo en origen

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p \left[ \frac{s + 1/T_i}{s} \right] = K_p \left[ \frac{s + (K_i / K_p)}{s} \right]$$

# RESUMEN CONTROLADORES

| Sistema | Polos | Ceros |
|---|---|---|
| Propircional | - | - |
| Integral | Origen | - |
| Derivativo | - | Origen |
| Proporcional Integral | Origen | Real movible |
| Proporcional Derivativo | - | Real movible |
| Proporcional Integral Derivativo | Origen | 2 movibles |

# DISEÑO DE CONTROLADORES

- Muchas veces se requiere cambiar los parámetros de respuesta de un sistema.
- El diseño de un controlador se basa en las especificaciones deseadas del comportamiento de un sistema.
- Tener especificaciones demasiado detalladas puede hacer costosa la situación o complicar el diseño
- Hay que buscar un equilibrio costo-beneficio en el diseño de controladores

# DISEÑO DE CONTROLADORES
# DISEÑO EN TIEMPO

Cuando las especificaciones de diseño se enfocan en:

- Factor de amortiguamiento
- Frecuencia natural del sistema
- Sobretiro máximo
- Tiempo de crecimiento (T)
- Tiempo de decaimiento (T)

Se considera que es un diseño en el tiempo y el método del Lugar Geométrico de las Raíces es muy útil.

# 3. ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES EN EL TIEMPO

Control

Ing. Mecatrónica

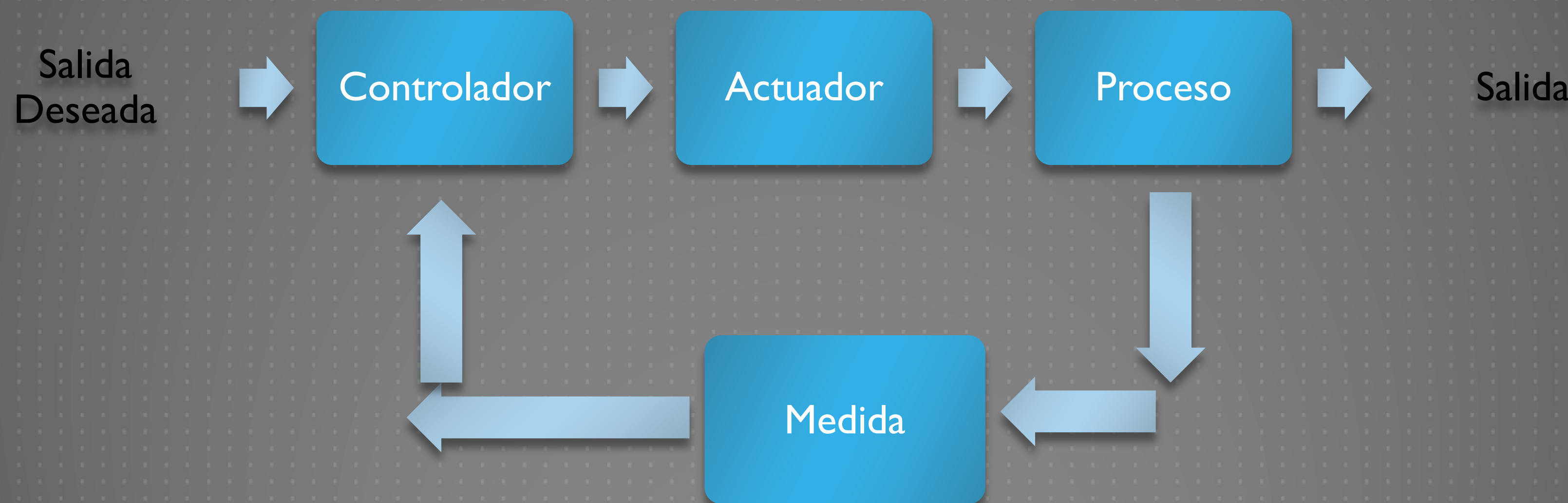
D.C. Johan Walter González Murueta

3. Análisis y diseño de controladores en el tiempo

# 3.1 DEFINICIÓN DE CARACTERÍSTICAS DE UN CONTROLADOR

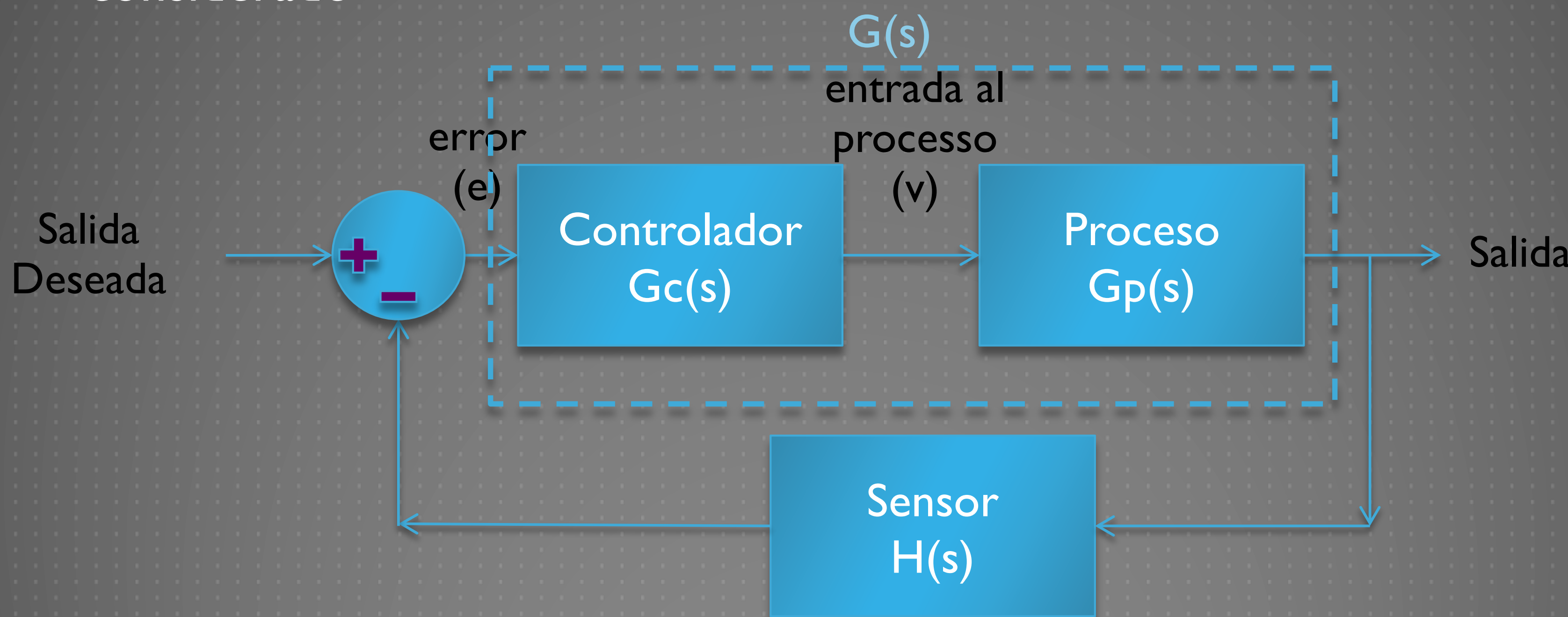
# 3.2 TIPOS DE CONTROLADORES

# RECORDANDO LA ESTRUCTURA DE UN SISTEMA EN LAZO CERRADO



# SISTEMA CONTROLADO EN LAZO CERRADO

- Tomando el actuador y proceso juntos tenemos lo que hemos considerado



# CONTROLADOR PROPORCIONAL P

- Un controlador proporcional es aquel en el que:

$$G_c = K_p$$

$$v(t) = K_p\, e(t)$$

$$V(s) = K_p\, E(s)$$

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p$$

Multiplica por una constate

# CONTROLADOR INTEGRAL (I)

- Un controlador integral es aquel en el que:

$$v(t) = K_i \int e(t)\,dt$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

$$V(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \quad \therefore \quad G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} = \frac{K_p}{T_i\, s}$$

Multiplica por una constate y tiene un polo en el origen

# CONTROLADOR DERIVATIVO (D)

- Un controlador derivativo es aquel en el que:

$$v(t) = K_d \frac{d\,e(t)}{d\,t}$$

$$K_d = K_p\, T_d$$

$$V(s) = K_d\, s\, E(s) \quad \therefore \quad G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_d\, s = K_p\, T_d\, s$$

Multiplica por una constate y tiene un cero en el origen

# CONTROLADOR PROPOCIONAL-INTEGRAL (PI)

- Se define en el tiempo como:

$$v(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t)\, dt = K_p e(t) + \frac{Kp}{Ti} \int e(t) dt$$

- Obtener Gc(s) en forma:

$$G_c = \frac{\prod_i^m (s - z_i)}{\prod_i^n (s - p_i)}$$

Multiplica por una constate, tiene un cero real movible y un polo en origen

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p \left[ \frac{s + 1/T_i}{s} \right] = K_p \left[ \frac{s + (K_i / K_p)}{s} \right]$$

# CONTROLADOR PROPORCIONAL-DERIVATIVO (PD)

- Se define en el tiempo como:

$$v(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Obtener Gc(s) en forma:

$$G_c = \frac{\prod_i^m (s - z_i)}{\prod_i^n (s - p_i)}$$

Multiplica por una constate y tiene un cero real movible

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d \left[ s + 1/T_d \right] = K_p T_d \left[ s + (K_p / K_d) \right]$$

# CONTROLADOR PROPOCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO (PID)

- Se define en el tiempo como:

$$v(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{Kp}{Ti} \int e(t)dt$$
$$= K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t)dt$$

- Obtener Gc(s) en forma:

$$Gc = \frac{p(s)}{q(s)}$$

- Y analizar su efecto en el plano s

Multiplica por una constate, tiene 2 ceros movibles y un polo en el origen

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d \left[ \frac{s^2 + (1/T_d)s + 1/T_i T_d}{s} \right]$$

# RESUMEN CONTROLADORES

| Sistema | Polos | Ceros |
| --- | --- | --- |
| Propircional | - | - |
| Integral | Origen | - |
| Derivativo | - | Origen |
| Proporcional Integral | Origen | Real movible |
| Proporcional Derivativo | - | Real movible |
| Proporcional Integral Derivativo | Origen | 2 movibles |

# DISEÑO DE CONTROLADORES

- Muchas veces se requiere cambiar los parámetros de respuesta de un sistema.
- El diseño de un controlador se basa en las especificaciones deseadas del comportamiento de un sistema.
- Tener especificaciones demasiado detalladas puede hacer costosa la situación o complicar el diseño
- Hay que buscar un equilibrio costo-beneficio en el diseño de controladores

# DISEÑO DE CONTROLADORES
# DISEÑO EN TIEMPO

Cuando las especificaciones de diseño se enfocan en:

- Factor de amortiguamiento
- Frecuencia natural del sistema
- Sobretiro máximo
- Tiempo de crecimiento (T)
- Tiempo de decaimiento (T)

Se considera que es un diseño en el tiempo y el método del Lugar Geométrico de las Raíces es muy útil.

# EJERCICIO SISTEMA DE PRIMER ORDEN

En un sistema mecánico de primer orden se realizó un analisis de las piezas movibles, y se cocnluyo que el sistema está respondiendo demasiado rápido y forza dichas piezas, pues al ser de primer orden no tiene oscilación y acelera y frena de inmediato. Se requiere que el sistema responda de forma mas lenta e icluso pueda llegar a oscilar a una frecuencia baja.

¿Qué tipo de controlador ayudaría para este caso?

Estableciendo que el sistema oscile a 1 rad/seg, calcule los parametros necesarios del controlador elegído, sabiendo que el polo del sistema se encuentra en s=-6

# EJERCICIO SISTEMA DE PRIMER ORDEN

- Al ser un sistema de primer orden sólo tiene un polo
- Las especificaciones del sistema puede ser T y K

Diseñe un controlador proporcional derivativo para un sistema de primer orden con la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{2}{2s+1}$$

El cual provoque que el sistema responda 2 veces mas rápido y sin oscilar (en la mitad del tiempo) de lo original.

Suponga que se cuenta con un sensor con H(s)=1.

Elija el cero en el doble del valor del polo en el que se establecerá el sistema.

1.- ¿Cuál debe ser el polo del sistema ya controlado?

2.- ¿Cuáles son los valores de Kp y Td del controlador?

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d\left[s + 1/T_d\right] = K_p T_d\left[s + (K_p/K_d)\right]$$

# DETALLES EN LA SOLUCIÓN EJERCICIO DE PRIMER ORDEN

Se parte de ecuación característica del sistema

$$G(s)H(s) = -1$$

$$\frac{K_p(\ ½\ )\ (s+2)(2)}{2s+1} = -1$$

$$\frac{K_p(s+2)}{2s+1} = -1$$

Y se toma solo la condicíon de magnitud (solo magnitudes)

$$\frac{|K_p||s+2|}{|2s+1|} = 1$$

$$|K_p| = \frac{|2s+1|}{|\ s+2\ |}$$

Calculando $K_p$ para el polo deseado, p=-1

$$\left|K_p\right| = \frac{|-2+1|}{|\ -1+2\ |} = \frac{|-1|}{|1|}$$

$$Kp = 1$$

# CONTROLADOR PARA SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

- Se tiene el siguiente sistema de segundo orden:

$$G_p = \frac{13}{s^2 + 6s + 13}$$

Se desea implementar un controlador para que el sistema no oscile y asegurar al menos su misma velocidad de estabilización.

1. En base a los polos del sistema ¿Qué tipo de controlador, eligiendo el mas sencillo de diseñar, logra el objetivo?
2. ¿Cual es el valor de los polos a definir para que cumpla las especificaciones dadas?
3. Calcule los parámetros necesarios del controlador

# CONTROLADOR PROPORCIONAL-DERIVATIVO (PD)

- Se define en el tiempo como:

$$v(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Obtener Gc(s) en forma:

$$G_c = \frac{\prod_i^m (s - z_i)}{\prod_i^n (s - p_i)}$$

Multiplica por una constate y tiene un cero real movible

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d \left[ s + 1 / T_d \right] = K_p T_d \left[ s + (K_p / K_d) \right]$$

# EJERCICIO SISTEMA DE PRIMER ORDEN

En un sistema mecánico de primer orden se realizó un analisis de las piezas movibles, y se cocnluyo que el sistema está respondiendo demasiado rápido y forza dichas piezas, pues al ser de primer orden no tiene oscilación y acelera y frena de inmediato. Se requiere que el sistema responda de forma mas lenta e icluso pueda llegar a oscilar a una frecuencia baja.

¿Qué tipo de controlador ayudaría para este caso?

Estableciendo que el sistema oscile a 1 rad/seg, calcule los parametros necesarios del controlador elegído, sabiendo que el polo del sistema se encuentra en s=-6

# EJERCICIO SISTEMA DE PRIMER ORDEN

- Al ser un sistema de primer orden sólo tiene un polo
- Las especificaciones del sistema puede ser T y K

Diseñe un controlador proporcional derivativo para un sistema de primer orden con la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{2}{2s+1}$$

El cual provoque que el sistema responda 2 veces mas rápido y sin oscilar (en la mitad del tiempo) de lo original.

Suponga que se cuenta con un sensor con H(s)=1.

Elija el cero en el doble del valor del polo en el que se establecerá el sistema.

1.- ¿Cuál debe ser el polo del sistema ya controlado?

2.- ¿Cuáles son los valores de Kp y Td del controlador?

$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d\left[s + 1/T_d\right] = K_p T_d\left[s + (K_p / K_d)\right]$$

3. Análisis y diseño de controladores en el tiempo

# CRITERIOS DE SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES

# CRITERIO DE COHEN-CON O ZIEGLER-NICHOLS DE LAZO ABIERTO

Criterios de sintonización de controladores

# SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES

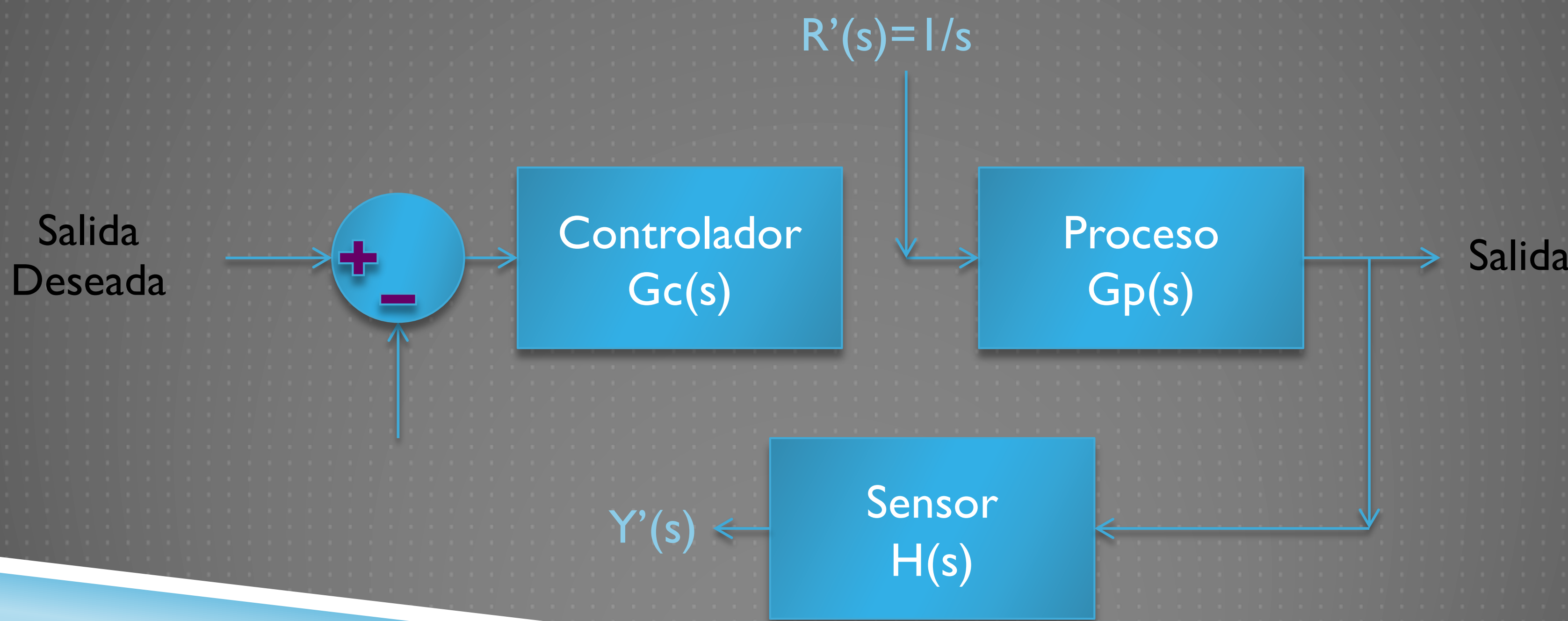
Debido a que el método del Lugar Geométrico de las Raíces, (LGR) puede llegar a tornarse algo complejo para el diseño de controladores, existen ya algunos criterios (métodos) para el cálculo de controladores que facilitan dicha tarea.

De hecho dichos métodos surgieron de la necesidad de diseñar un controlador sin contar con la función de transferencia de un sistema.

# CURVA DE REACCIÓN DEL SISTEMA

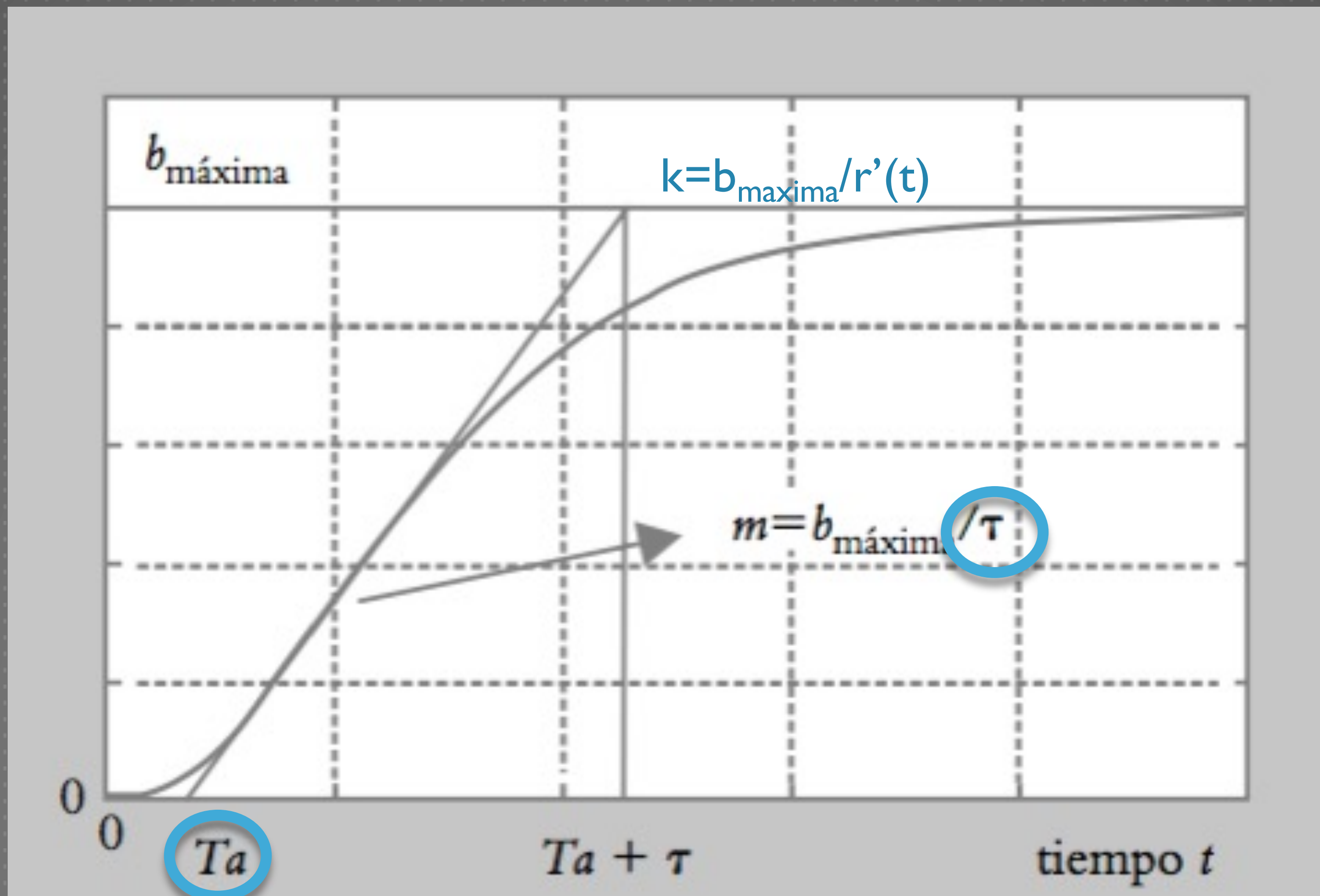
La curva de reacción del sistema es la salida del sensor ante la aplicación de una entrada escalón unitario a Gp(s) desconectando el controlador.

Esta curva es útil en algunos criterios de sintonización.




y'(t) =Curva de reacción del sistema

# FORMA CARACTERÍSTICA Y DATOS IMPORTANTES DE LA CURVA DE REACCIÓN DEL SISTEMA



# CÁLCULO DE CONTROLADORES

| Tipo de controlador | Parámetros por sintonizar |
|---|---|
| P | $K_p = \frac{\tau}{KT_a}\left[1 + \frac{T_a}{3\tau}\right]$ |
| PI | $K_p = \frac{\tau}{KT_a}\left[0.9 + \frac{T_a}{12\tau}\right]$ <br> $T_i = T_a \frac{30 + 3T_a/\tau}{9 + 20T_a/\tau}$ |
| PD | $K_p = \frac{\tau}{KT_a}\left[1.25 + \frac{T_a}{6\tau}\right]$ <br> $T_d = T_a \frac{6 - 2T_a/\tau}{22 + 3T_a/\tau}$ |
| PID | $K_p = \frac{\tau}{KT_a}\left[1.3333 + \frac{T_a}{4\tau}\right]$ <br> $T_i = T_a \frac{32 + 6T_a/\tau}{13 + 8T_a/\tau}; \quad T_d = \frac{4T_a}{11 + 2T_a/\tau}$ |

# EJEMPLO CALCULO DE CONTROLADOR

$$G_P = \frac{1}{S^2 + 4S + 4}, H(s) = 1$$

Ante una entrada ecalon unitario:

$$Y'(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

Se obtiene la curva de reacción del sistema

$$y'(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}$$

Y la segunda derivada, para obtener el punto de infelcción

$$\dot{y}'(t) = te^{-2t}$$

$$\ddot{y}'(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

Al igualar la segunda derivada a cero se encuantra el tiempo del punto de inflección

$$e^{-2t} - 2te^{-2t} = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

# EJEMPLO CALCULO DE CONTROLADOR

Y se calcula el punto de inflección evaluendo la curva de reacción en dicho tiempo:

$$y'(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-1} = 0.066$$

Como Ta es el tiempo en el que donde dicha recta pendiente al punto calculado cruza el eje de tiempo, solo falta calcular “m” de dicha recta para poder calcular dicho tiempo. Para calcularla se evalua la primer derivada en el tiempo del punto de inflexión

$$m = \dot{y}'\left(t = \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}e^{-1} = 0.1839$$

# EJEMPLO CALCULO DE CONTROLADOR

Y el valor de Ta se calcula con la ecuación de la pendiente con dos puntos, donde uno es el de inflexión y otro el cruce del eje en Ta

$$m = \frac{y1-y0}{x1-x0} = \frac{0.066-0}{0.5-Ta} = 0.1839 \quad \rightarrow \quad T_a = 0.14$$

Para calcular $\tau$ ya tenemos el valor de "m" y podemos calcular bmax, observando y'(t) en infinito.

$$Lim_{t\to\infty}\, y'^{(t)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} = \frac{1}{4}$$

Con esto entonces $\tau = \frac{0.25}{0.1839} = 1.3594$

$$\text{Finalmente K} = \frac{b_{max}}{r`(t)} = \frac{0.25}{1} = 0.25$$

# EJEMPLO CALCULO DE CONTROLADOR

| Tipo de controlador | $K_p$ | $T_i$ | $K_i$ | $T_d$ | $K_d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 40.1733 | | | | |
| PI | 35.2893 | 0.3837 | 91.9791 | | |
| PD | 49.2167 | | | 0.0364 | 1.7895 |
| PID | 52.7854 | 0.3303 | 159.793 | 0.049 | 2.6379 |

# EJERCICIO, LAZO ABIERTO

$$G_p = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Sintonice los controladores P, PD, PI, PID con el método de Cohen-Con (Ziegle-Nichols de lazo abierto)

1.- Obtenga la curva de reacción del sistema ( y'(t) )

2.- Obtenga la primera y segunda derivada de la función de racción del sistema

(Recuerde expresar los coeficientes en fracciones)

3.- Punto de inflexión (Recuerde expresar los valores en fracciones o con alguna función)

- Obtenga el tiempo en el que se encuentra
- Obtena el valor de la función en el que se da
- Obtenga la pendiente de la función en este punto (m)

4.- Obtenga los valores de Ta, τ y K

# EJERCICIO, LAZO ABIERTO

$$G_p = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

1.- Obtenga la curva de reacción del sistema ( y'(t) )

$$Y`(s) = \frac{1}{s} Gp(S)H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

$$A = \frac{1}{8} \qquad B = -\frac{1}{4} \qquad C = \frac{1}{8} \qquad y'(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-4t}$$

2.- Obtenga la primera y segunda derivada de la función de racción del sistema

(Recuerde expresar los coeficientes en fracciones)

$$\dot{y}'(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}$$

$$\ddot{y}'(\mathrm{t}) = -e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

# EJERCICIO, LAZO ABIERTO

3.- Punto de inflexión (Recuerde expresar los valores en fracciones o con alguna función)

- Obtenga el tiempo en el que se encuentra
- Obtena el valor de la función en el que se da
- Obtenga la pendiente de la función en este punto (m)

$\ddot{y}'(\mathrm{t}) = -e^{-2t} + 2e^{-4t} = 0$

$2e^{-4t} = e^{-2t}$

$\ln(2) - 4t = -2t$

$2t = ln(2)$

$t = ln(\sqrt{2})$

$$y'(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2\ln(\sqrt{2})} + \frac{1}{8}e^{-4\ln(\sqrt{2})}$$

$$y'(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{8}e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$$

$$y'(t) = \frac{1}{32}$$

$$\dot{y}'(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}e^{-2\ln(\sqrt{2})} - \frac{1}{2}e^{-4\ln(\sqrt{2})}$$

$$\dot{y}'(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}e^{\ln(1/2)} - \frac{1}{2}e^{\ln(1/4)}$$

$$\dot{y}'(\mathrm{t}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\dot{y}'(\mathrm{t}) = \frac{1}{8}$$

# EJERCICIO, LAZO ABIERTO

$$G_p = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

4.- Obtenga los valores de Ta, τ y K

$$t_0 = t_1 - \frac{y_1 - y_0}{m}$$

$$T_A = \ln(\sqrt{2}) - \frac{\frac{1}{32} - 0}{\frac{1}{8}}$$

$$\mathrm{T_a} = \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{4}$$

$$b_{max} = \lim_{s\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-4t} = \frac{1}{8}$$

$s \to \infty$

$$\tau = \frac{b_{max}}{m} = \frac{1/8}{1/8} = 1$$

$Dado\ a\ que\ el\ escalon\ es\ unitario$ $\quad K = b_{max} = \frac{1}{8}$

# EJERCICIO, LAZO ABIERTO

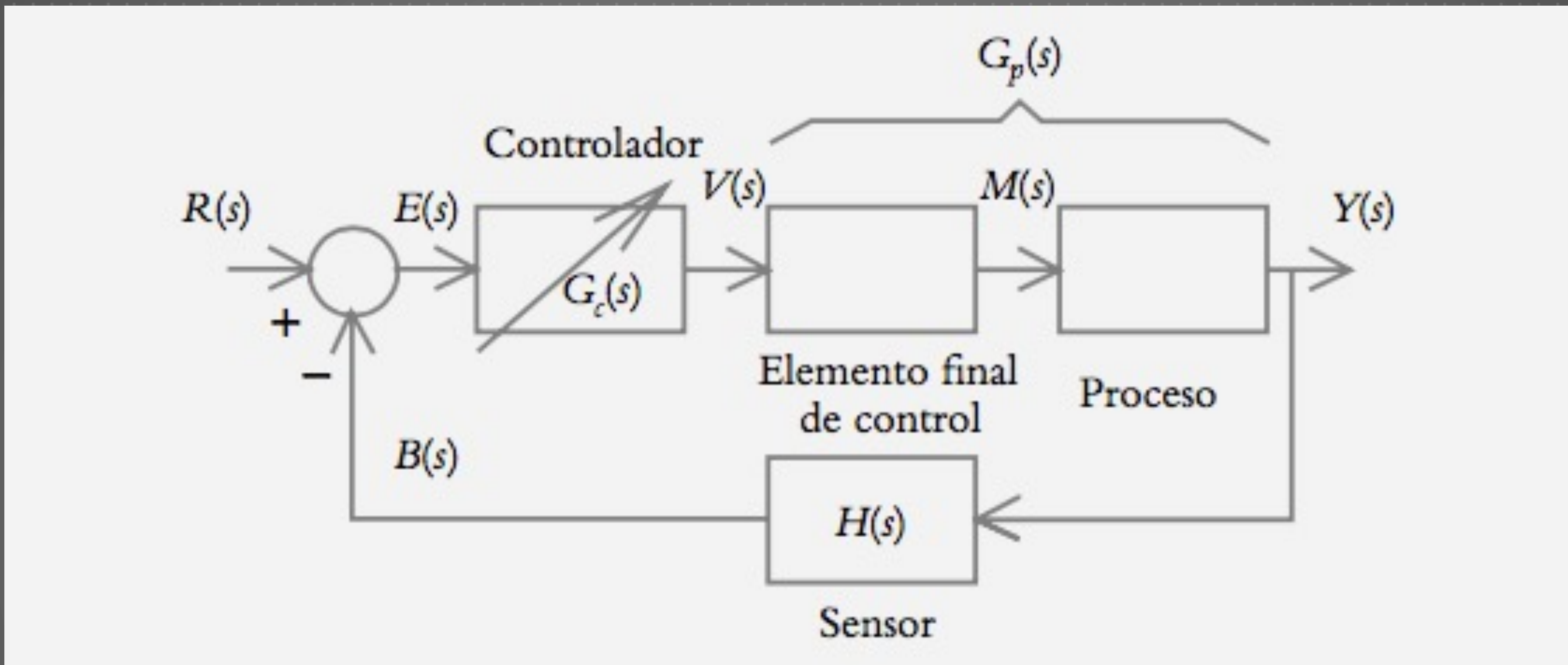
$$G_p = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

| Controlador | Kp | Ti | Ki | Td | Kd |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 85.5050 | | | | |
| PI | 75.2212 | 0.2676 | 281.1029 | | |
| PD | 104.8813 | | | 0.0252 | 2.6387 |
| PID | 112.4484 | 0.2284 | 492.2287 | 0.0345 | 3.8808 |

# ZIEGLER-NICHOLS DE LAZO CERRADO

Criterios de sintonización de controladores

# CALCULO DE CONTROLADORES



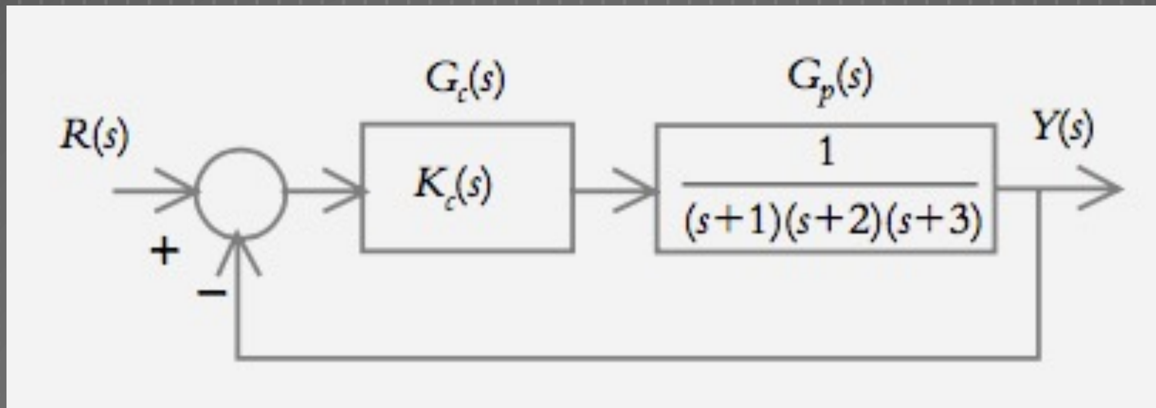
# CALCULO DE CONTROLADORES

Este método se basa en un controlador Proporcional que llevaría el sistema a una oscilación sostenida, es decir a estabilidad marginal: polo=jw

La K de este caso será Ku y el periodo de w será Pu

| Tipo de controlador | $G_c(s)$ | $K_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $K_p$ | $0.5\ K_u$ | | |
| PI | $K_p\left[1+\frac{1}{T_i\ s}\right]$ | $0.45\ K_u$ | $\frac{P_u}{1.2}$ | |
| PID | $K_p\left[1+\frac{1}{T_i\ s}+T_d\ s\right]$ | $0.6\ K_u$ | $\frac{P_u}{2}$ | $\frac{P_u}{8}$ |

# EJEMPLO ZIEGLER-NICHOLS




$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6+K)}$$

donde se sustituye $s$ por $j\omega$:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11(j\omega) + (6+K) = 0$$

La expresión anterior puede separarse en las partes imaginaria y real:

$$(j\omega)\left[(j\omega)^2 + 11\right] + \left[6(j\omega)^2 + (6+K)\right] = 0$$

# EJEMPLO ZIEGLER-NICHOLS

De la parte imaginaria se obtiene la frecuencia $\omega_u$ con la que el sistema cruza el eje $j\omega$: $\omega_u = \pm j(11)^{½} = \pm 3.3166j$, con lo cual:

$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = 1.89445$$

De la parte real sale el valor de la ganancia máxima $K_u$, lo que corresponde a la ganancia que requiere el sistema para que éste se comporte en forma libre oscilatoria:

$$6(j\omega)^2 + (6+K) = 0 \qquad \therefore \quad K = K_u = 60$$

# EJEMPLO ZIEGLER-NICHOLS

| Tipo de controlador | $K_p$ | $T_i$ | $K_i$ | $T_d$ | $K_d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 30 | | | | |
| PI | 27 | 1.5787 | 17.1024 | | |
| PID | 36 | 0.9472 | 38.0054 | 0.2368 | 8.5261 |

# EJERCICIO, LAZO CERRADO

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+5)(s^2+2s+1)} \qquad H(s) = 1$$

Sintonice los controladores P, PI, PID con el método de Ziegle-Nichols de lazo cerrado

1.- Obtenga la ecuación caracteristica del sistema al retroalimentarlo con un controlador P, Gc(s)=Kp. Es decir la T(s) para un controlador proporcional.

2.- Sustituya s=jw en la ecuación característica obtenida y separe la parte real de la imaginaria igualandolas a 0.

3.- Obtenga Ku y Pu

4.- Calcule los parámetros de los controladores soliciitados

# EJERCICIO, LAZO CERRADO

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+5)(s^2+2s+1)} \qquad H(s) = 1$$

1.- Obtenga la ecuación caracteristica del sistema al retroalimentarlo con un controlador P, Kc(s)=$K_P$ . Es decir la T(s) para un controlador proporcional.

$$s^3 + 2s^2 + s + 5s^2 + 10s + 5 = s^3 + 7s^2 + 11s + 5$$

$$s^3 + 7s^2 + 11s + 5 + K_p = 0$$

2.- Sustituya s=jw en la ecuación característica obtenida y separe la parte real de la imaginaria igualandolas a 0.

$$w_u^3 - 11w_u = 0 \qquad -7w_u^2 + 5 + K_u = 0$$

Im

Re

# EJERCICIO, LAZO CERRADO

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+5)(s^2+2s+1)} \qquad H(s) = 1$$

3.- Obtenga Ku y Pu

$$w_u = 0$$

$$P_u = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$$

$$w_u = \sqrt{11}$$

$$-7w_u^2 + 5 + K_u = 0 \qquad K_u = 7w_u^2 - 5 = 7(11) - 5$$

$$K_u = 72$$

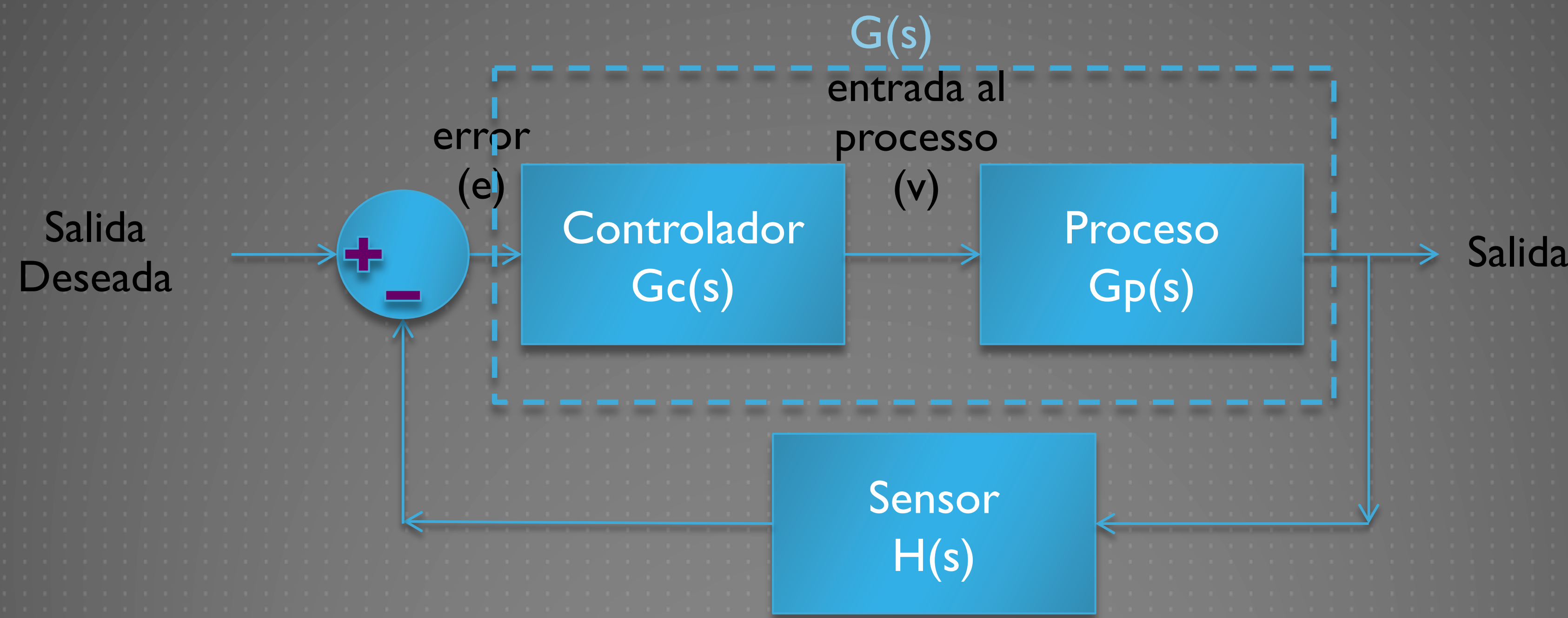
# EJERCICIO, LAZO CERRADO

4.- Calcule los parámetros de los controladores soliciitados

| Controlador | Kp | Ti | Ki | Td | Kd |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 36.0000 | | | | |
| PI | 32.4000 | 1.5787 | 20.5231 | | |
| PID | 43.2000 | 0.9472 | 45.6069 | 0.2368 | 10.2300 |

# IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES

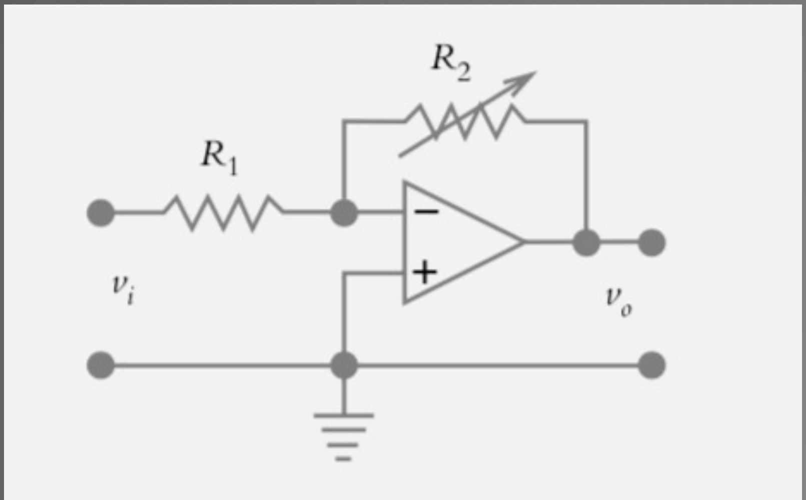
# SISTEMA CONTROLADO EN LAZO CERRADO



# CONTROLADORES ELECTRÓNICOS
# CONTROLADOR P

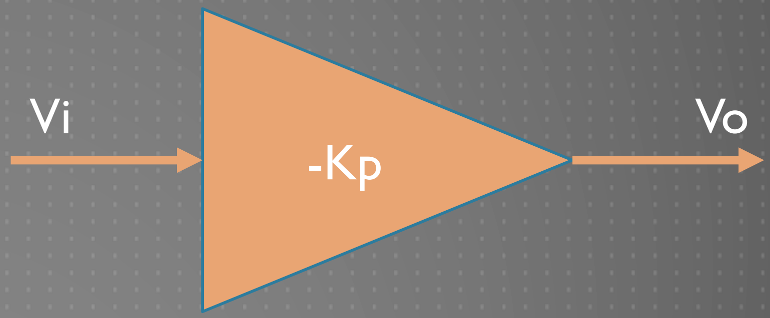
- *Circuito eléctrico*

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i$$




- *Representación*

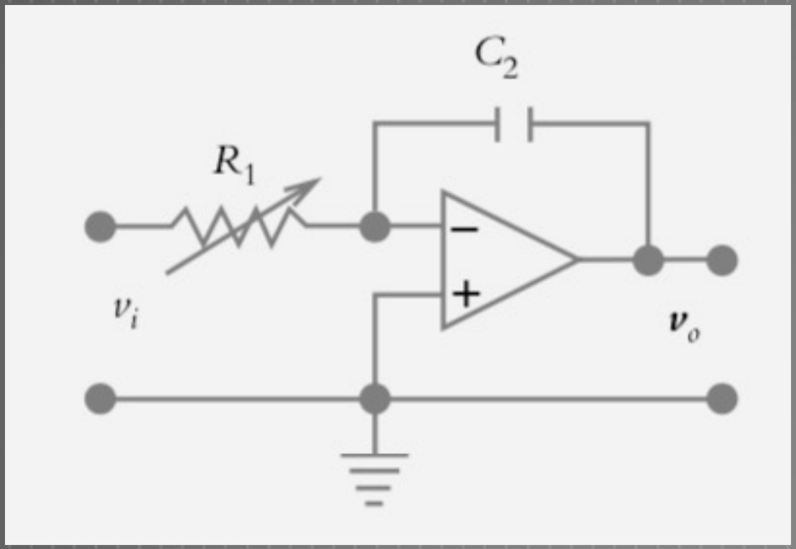
$$v_o = -K_p v_i$$



# CONTROLADORES ELECTRÓNICOS
# CONTROLADOR I

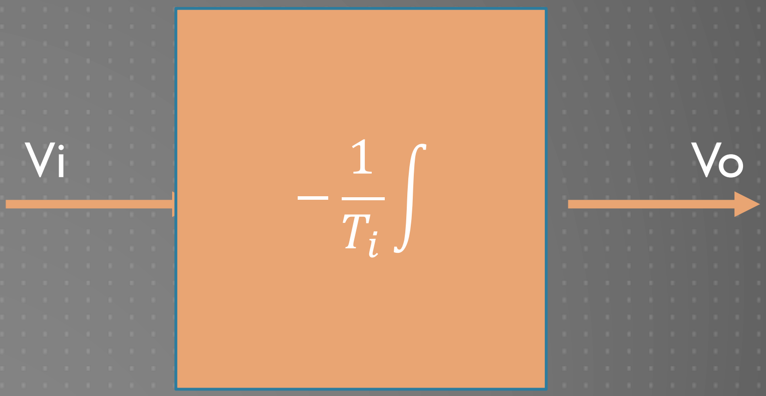
- *Circuito eléctrico*

$$v_o = -\frac{1}{R_1 C_2} \int v_i \; dt$$




- *Representación*

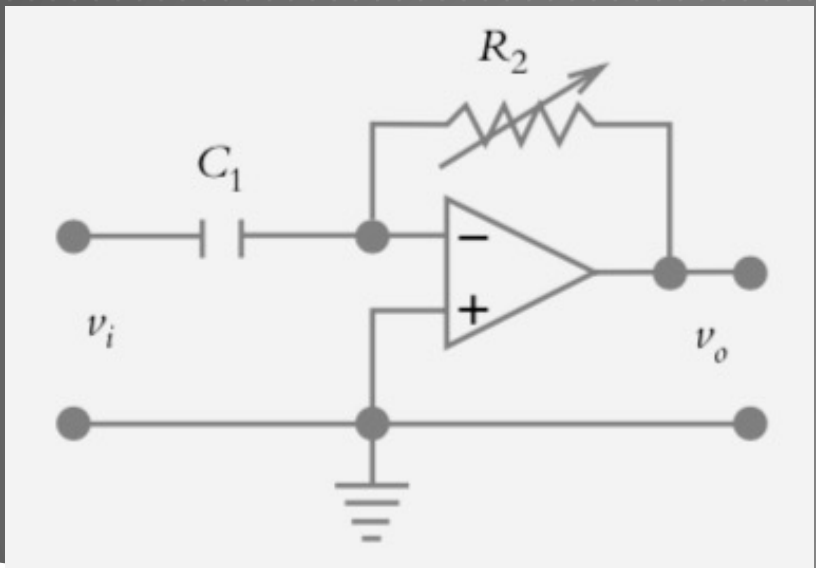
$$v_o = -\frac{1}{Ti} \int v_i$$



# CONTROLADORES ELECTRÓNICOS CONTROLADOR D

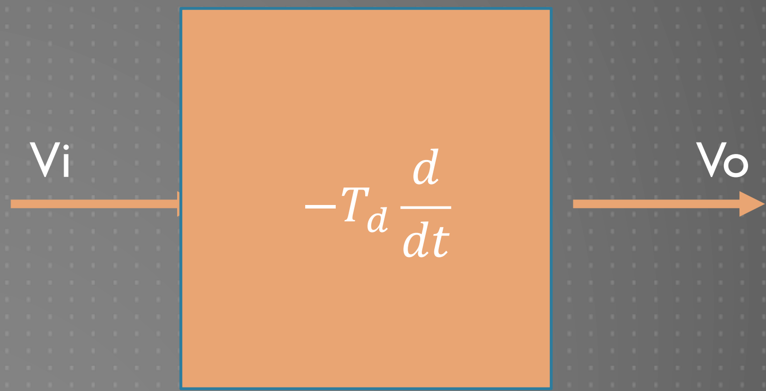
- *Circuito eléctrico*

$$v_o = -R_1 C_2 \frac{dv_i}{dt}$$



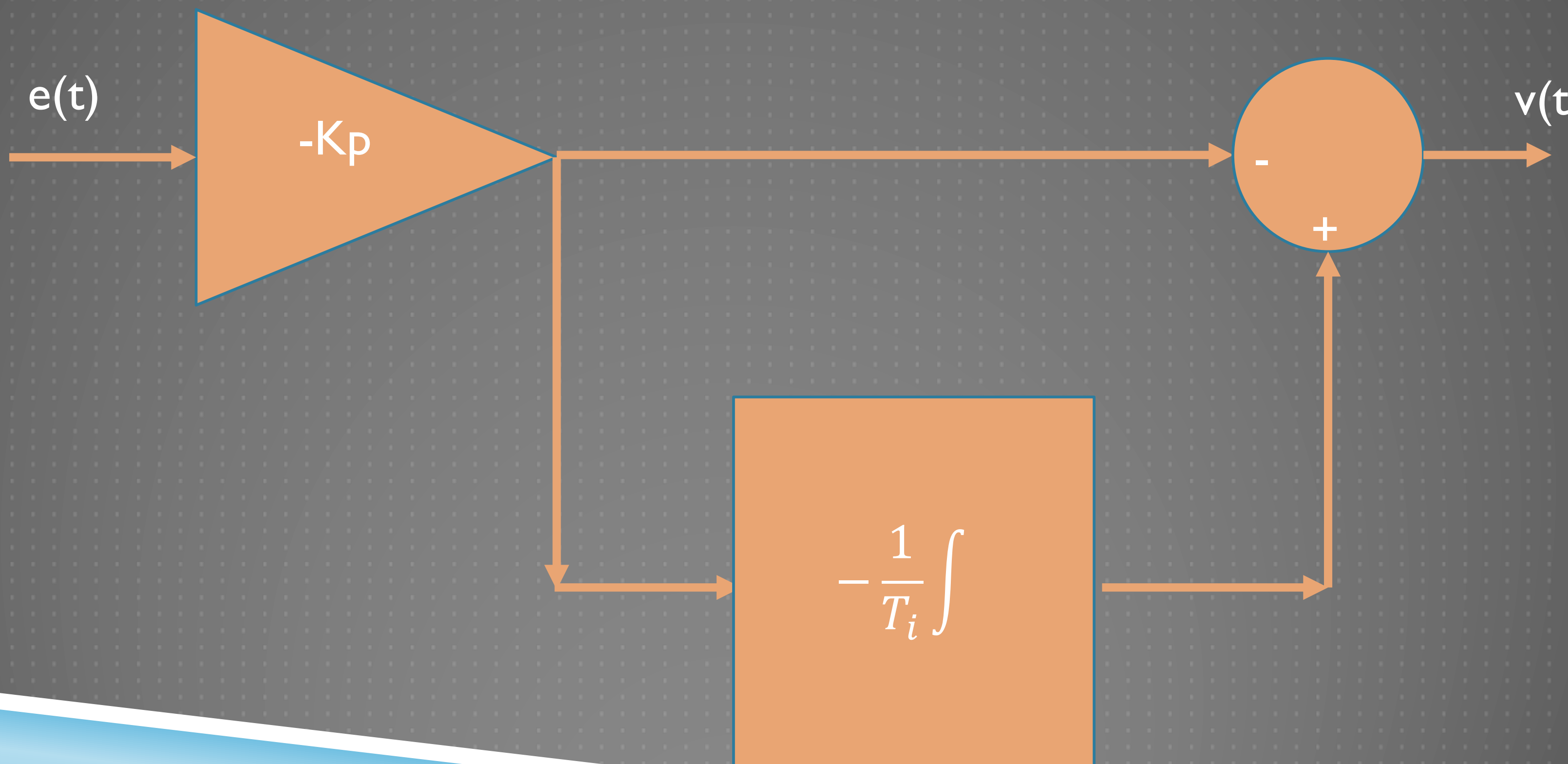

- *Representación*

$$v_o = -T_d \frac{dv_i}{dt}$$



# CONTROLADORES ELECTRÓNICOS
# CONTROLADOR PI

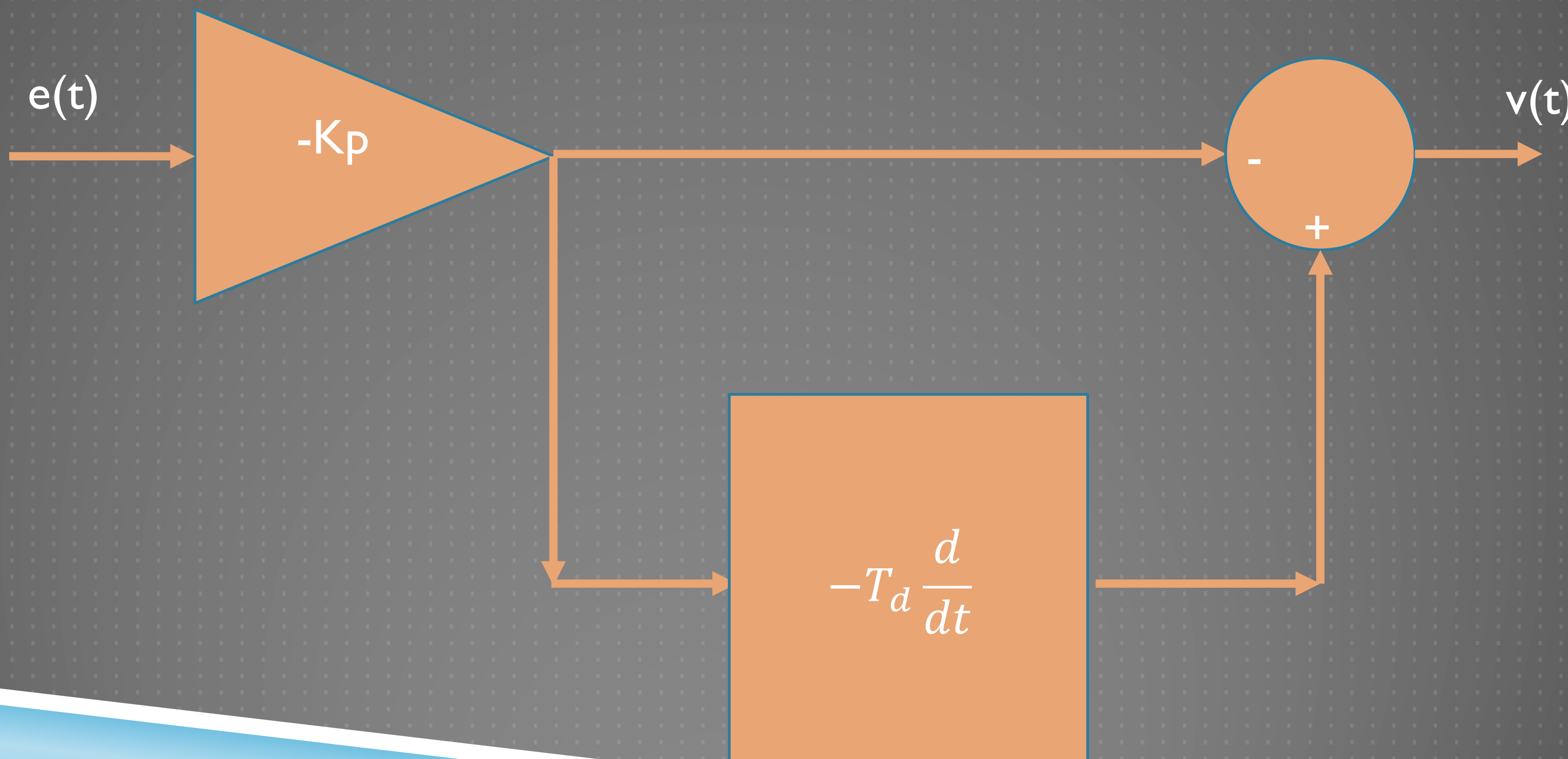
$$v(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t)\,dt = K_p e(t) + \frac{Kp}{Ti} \int e(t)dt$$




$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p\left[\frac{s+1/T_i}{s}\right] = K_p\left[\frac{s+(K_i/K_p)}{s}\right]$$

# CONTROLADORES ELECTRÓNICOS
# CONTROLADOR PD

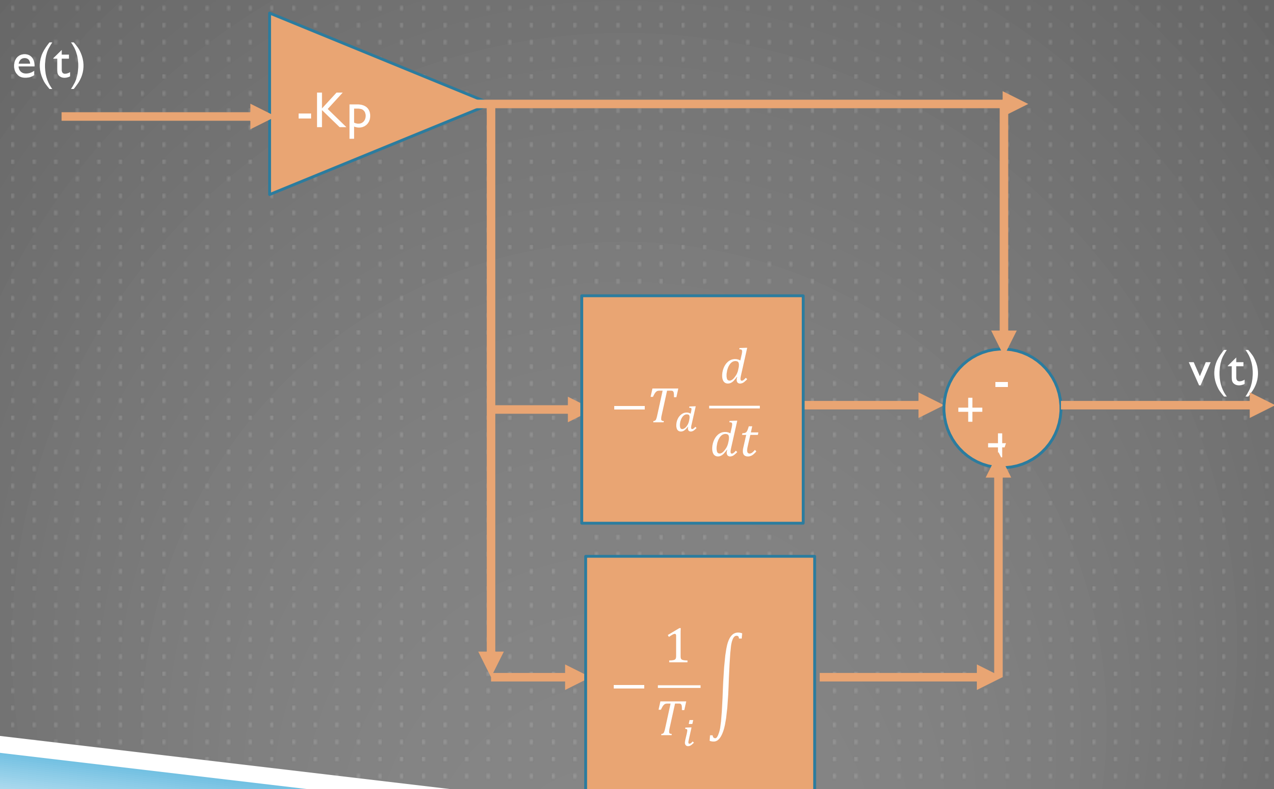
$$v(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$




$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d \left[ s + 1/T_d \right] = K_p T_d \left[ s + (K_p / K_d) \right]$$

# CONTROLADORES ELECTRÓNICOS
# CONTROLADOR PID

$$v(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{Kp}{Ti} \int e(t)dt = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t)dt$$




$$G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d \left[ \frac{s^2 + (1/T_d)s + 1/T_i T_d}{s} \right]$$