ANALISIS DE ESTABILIDAD EN LA FRECUENCIA

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA SUS DOS DISTINTAS FORMAS

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

FUNCION DE TRANSFERENCIA ESPCIFICAMENTE CUANDO S=JW

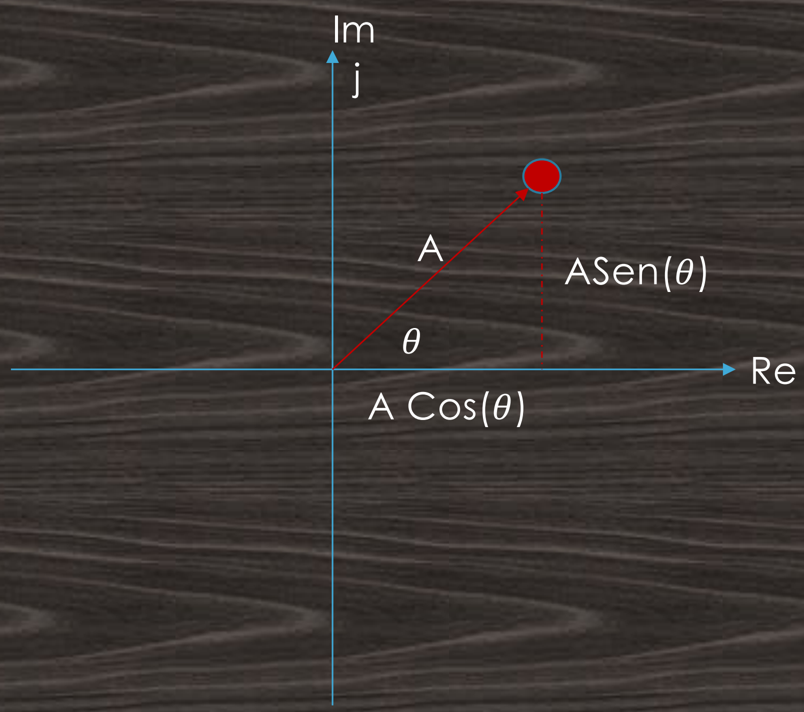
$$\frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{K(jw-z_1)(jw-z_2)\ldots(jw-z_m)}{(jw-p_1)(jw-p_2)\ldots(jw-p_n)}$$

$$Mag\left\{\frac{Y(jw)}{X(jw)}\right\} = \frac{K\sqrt{w^2+z_1^2}\sqrt{w^2+z_2^2}\ldots\sqrt{w^2+z_m^2}}{\sqrt{w^2+p_1^2}\sqrt{w^2+p_2^2}\ldots\sqrt{w^2+p_n^2}}$$

$$Ang\left\{\frac{Y(jw)}{X(jw)}\right\} = tg^{-1}\left(\frac{w}{z_1}\right) + tg^{-1}\left(\frac{w}{z_2}\right) + \cdots + tg^{-1}\left(\frac{w}{z_m}\right)$$
$$-tg^{-1}\left(\frac{w}{p_1}\right) - tg^{-1}\left(\frac{w}{p_2}\right) - \cdots - tg^{-1}\left(\frac{w}{p_n}\right)$$

NÚMEROS COMPLEJOS

$s = A\,e^{j\theta} = ACos(\theta) + jASen(\theta)$



$$s_1 s_2 = A_1 e^{j\theta_1}\; A_2 e^{j\theta_2}$$

$$s_1 s_2 = A_1 A_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2}$$

$$s_1 s_2 = A_1 A_2 e^{j\theta_1 + \theta_2}$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{A_1 e^{j\theta_1}}{A_2 e^{j\theta_2}}$$

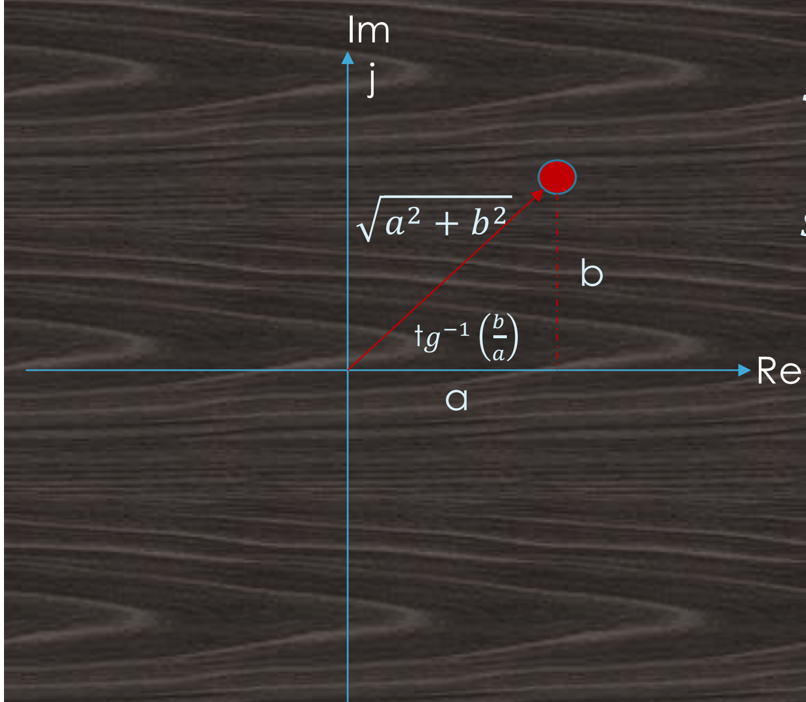
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{j\theta_1 - \theta_2}$$

EJERCICIOS

Obtenga la multiplicación (s1*s2) y la división (s1/s2) de los siguientes pares de números complejos. Exprese el resultado en la misma nomenclatura en que están expresados los números. (Recuerde dejar expresadas fracciones y operaciones reduciéndolas a su mínima expresión). Es impresindible marcar las operaciones del proceso para que la participación sea válida.

1. $s_1 = 4e^2$ $\qquad s_2 = 5e^3$
2. $s_1 = 2\ Ang(5)$ $\qquad s_2 = 3Ang(2)$

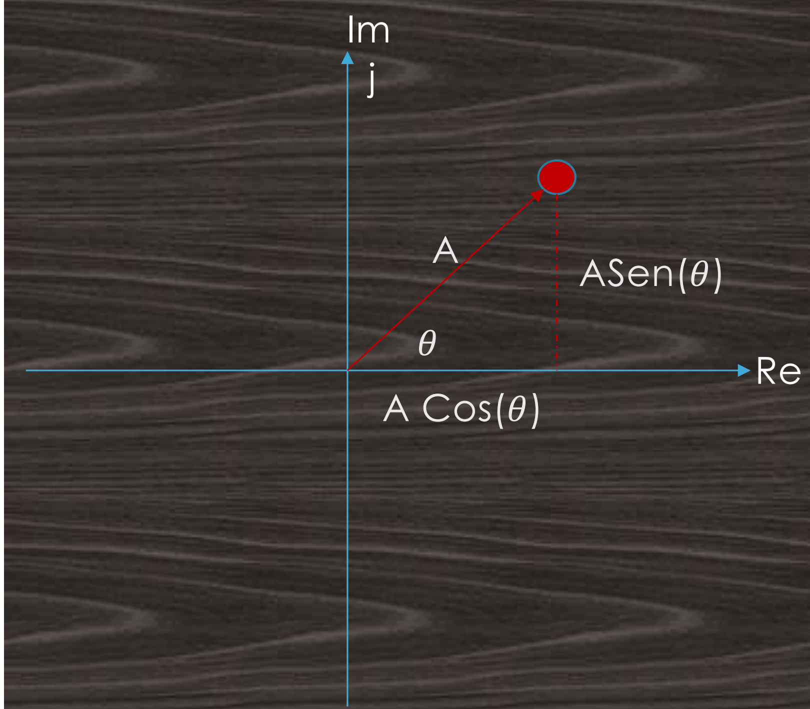
CONVERSIÓN NÚMEROS COMPLEJOS



$$s_1 = a + jb$$

$$s_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\ Ang\left(Arctg\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \sqrt{a^2 + b^2}\ e^{jArctg\left(\frac{b}{a}\right)}$$

CONVERSIÓN NÚMEROS COMPLEJOS



$$s_1 = A_1 e^{j\theta_1} = \mathrm{A}_1\ \mathrm{Ang}(\theta_1) = A_1 \,|\, \underline{\theta_1}$$

$$s_1 = A_1 Cos(\theta_1) + jA_1 Sen(\theta_1)$$

EJERCICIOS

Obtenga la multiplicación (s1*s2) y la división (s1/s2) del siguiente par de números complejos y exprese el resultado en magnitud y ángulo con cualquier nomenclatura. (Recuerde dejar expresadas fracciones y operaciones reduciéndolas a su mínima expresión)

$s_1 = 1 + j \qquad s_2 = 2 + j$

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA

$Y(s)=X(s)G(s)$

$y(t) = x(t) \circledast g(t)$

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA

$$x(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) \circledast g(t)$$

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{G(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega)$$

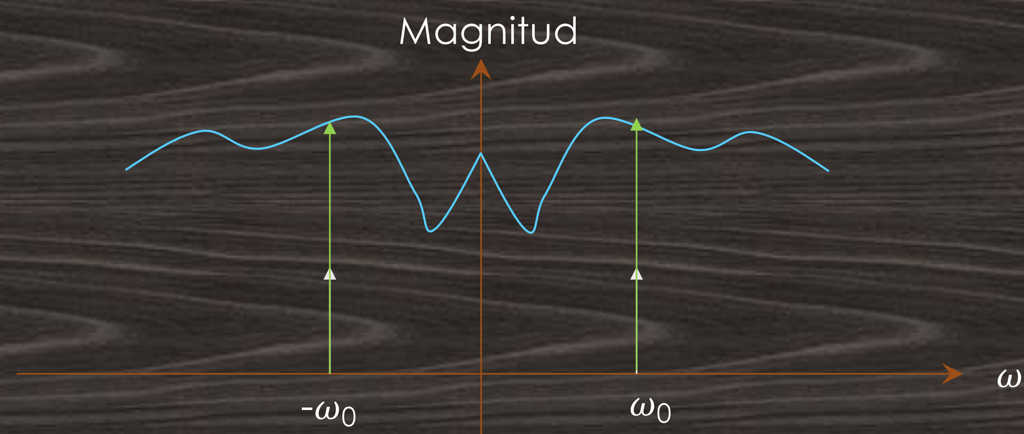
$$Y(j\omega)=X(j\omega)G(j\omega)$$

RESPUESTA A FUNCIÓNES SENOIDALES

$g(t) \rightarrow G(\omega)$

$x(t) = Cos(\omega_0 t)$

$X(\omega) = \pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$



$Y(\omega) = X(\omega)G(\omega)$

$Y(\omega) = G(\omega_0)\,\pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$

$\boldsymbol{y(t) = G(\omega_0)Cos(\omega_0 t)}$

$\boldsymbol{y(t) = G(\omega_0)Cos(\omega_0 t + \phi_0)}$

Una función senoidal modifica su amplitud y fase de acuerdo a G(ω)

RESPUESTA A FUNCIÓNES SENOIDALES

Dado el sistema: $Gp(s) = \frac{1}{s+5}$ $\quad Gc(s) = Kc$ $\quad H(s) = 1$

Se quiere observar su respuesta ante dos senoidales (señal y ruido): x(t)= Cos(2t) + Cos(90t)

Para obtener la respuesta en frecuencia hacemos s=jω y obtenemos su magnitud y ángulo.

$$Gp(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 5} = \frac{1}{\sqrt{25+\omega^2}} Ang\left\{-Tg^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)\right\} = Gp(\omega)$$

La respuesta completa será la suma de la respuesta a cada una de las senoidales, y recordando la respuesta a cada una será:

$$\boldsymbol{y(t) = |G(\omega_0)|\, Cos(\omega_0 t + \phi_0)}$$

Participación: Obtenga la respusta completa, reporte con numeros decimales y angulo en grados

RESPUESTA A FUNCIÓNES SENOIDALES

$$Gp(j2) = \frac{1/5}{\sqrt{1+\frac{4}{25}}}.\ Ang\left\{-Tg^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right\}$$

Mag=0.1857 = -14.62dB   Ang=-21.8° = $-0.38rad$

$$Gp(j90) = \frac{1/5}{\sqrt{1+\frac{90^2}{25}}}.\ Ang\left\{-Tg^{-1}\left(\frac{90}{5}\right)\right\}$$

Mag=0.0111=-39.1dB   Ang=-86.82° = -1.51rad

x(t)= 0.1857 Cos(2t - 21.8°) + 0.0111Cos(90t - 86.82°)

Observar en Matlab

CONCLUSIONES DE EJEMPLO SISTEMA DE PRIMER ORDEN

- Concluimos que un sistema de primer orden me ayuda a disminuir ruido a frecuencias altas y mantener señales senoidales a frecuencias bajas

- Si recordamos que toda señal puede representarse como la suma de muchas senoidales a diferentes frecuencias podemos observar a un sistema de primer orden como un filtro pasa bajas con frecuencia de corte en “w=-p”

- Generalizando, un sistema puede observarse como un filtro que permnite pasar solo ciertas frecuencias de una señal

CONCLUSIONES DEL ANALISIS REVISADO

- Las señales senoidales también son señales muy comunes de pureba en un sistema, sin embargo el análisis del error visto con anterioridd no es el mas apropiado para observar el comportamiento del sistema.
- El mejor análisis de la respuesta de un sistema ante una o varias señales senoidales es en analisis en fecuencia.
- El análisis en frecuencia es un caso específico el análisis general que se ha realizado en el pano s, pues se genera haciendo s=jw
- Este análisis sobre el eje w (eje imaginario) muestra que tanto afect el sistema a la ganancia y al angulo de desfasamiento de una señal senoidal en función de su frecuencia

Componentes principales del Diagrama de bode

Integrador primer oren - Decaimiento a 20db por década

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad G(jw) = \frac{1}{jw} = \frac{1}{w}\,Ang(-90°)$$

$$Mag = 20Log\left(\frac{1}{w}\right) db = 20Log(1) - 20Log(w)\, db$$

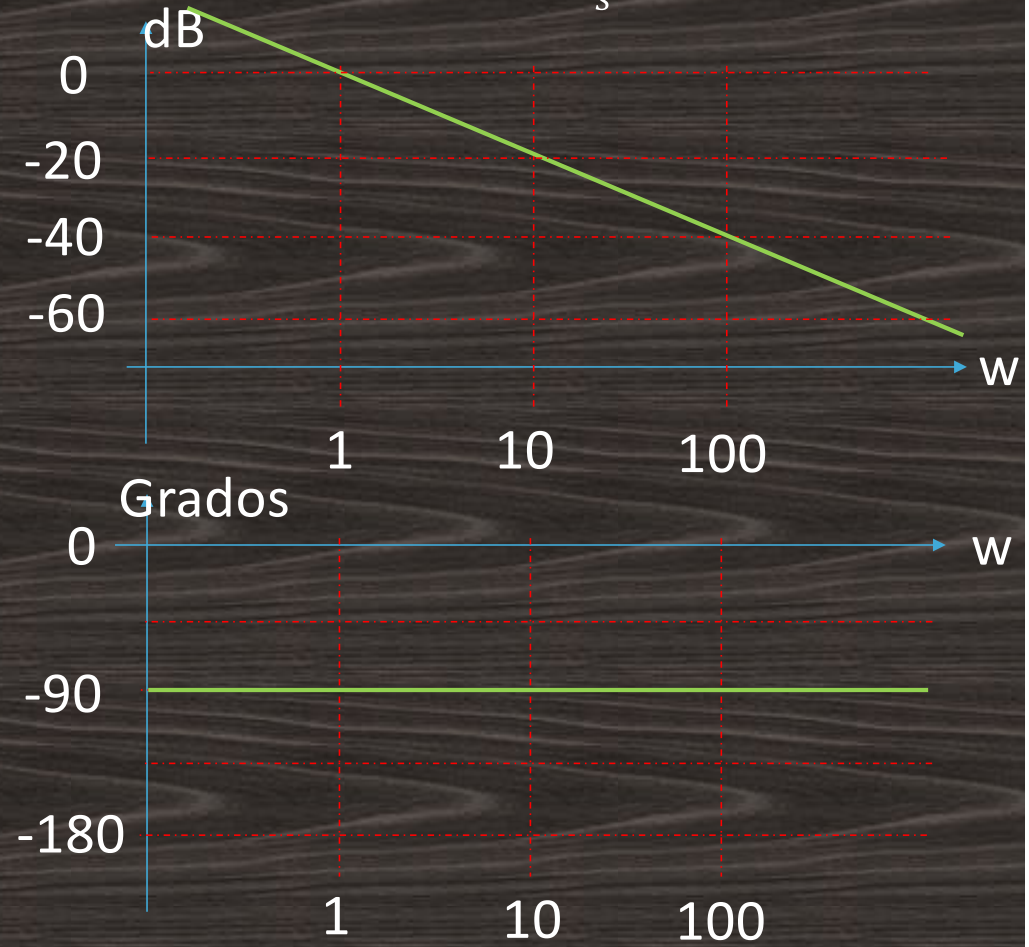
$$Mag = -20Log(w)\, db$$

- El 0 (ganancia unitaria) se presenta en w = 1rad/s
- Cada década (w*10) la magnitud decae 20db
    - Mag(1)=0 db
    - Mag(10)=-20 db
    - Mag(100)=-40 db
    - Mag(1000)=-60 db

$$Ang = -90°$$

- Desfasamiento constante para cualquier w

$$G(s) = \frac{1}{s}$$



Componentes principales del Diagrama de bode

Integrador segundo oren - Decaimiento a 40db por década

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \qquad G(jw) = \frac{1}{(jw)^2} = \frac{1}{w^2} Ang(180°)$$

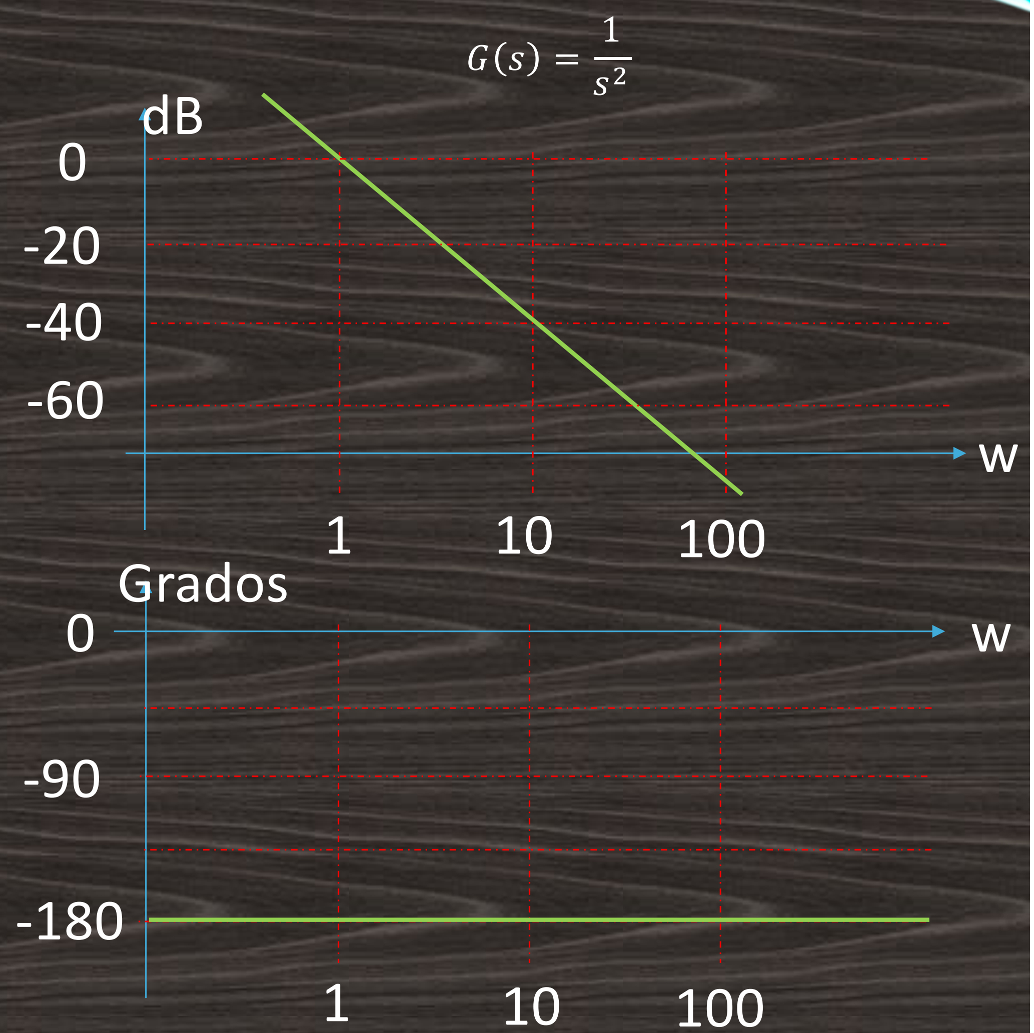
$$Mag = 20Log\left(\frac{1}{w^2}\right) db \; = 20Log(1) - 20Log(w^2)\; db$$

$$Mag = -20Log(w^2)\; db$$

- El 0 (ganancia unitaria) se presenta en w = 1rad/s
- Cada década (w*10) la magnitud decae 40db
  - Mag(1)=0
  - Mag(10)=-40
  - Mag(100)=-80
  - Mag(1000)=-120

$$Ang = 180°$$

- Desfasamiento constante para cualquier w



Componentes principales del Diagrama de bode

Derivador primer oren - Incremento a 20db por década

$$G(s) = s \qquad G(jw) = jw = w\ Ang(90°)$$

$$Mag = 20Log(w)\ db$$

- El 0 (ganancia unitaria) se presenta en w = 1rad/s
- Cada década (w*10) la magnitud se incrementa 20db
  - Mag(1)=0 db
  - Mag(10)=20 db
  - Mag(100)=40 db
  - Mag(1000)=60 db

$$Ang = 90°$$

- Desfasamiento constante para cualquier w

Derivador segundo oren - Incremento a 40db por década

$$G(s) = s^2 \qquad G(jw) = (jw)^2 = w^2\ Ang(180°)$$

$$Mag = 20Log(w^2)\ db$$

- El 0 (ganancia unitaria) se presenta en w = 1rad/s
- Cada década (w*10) la magnitud se incrementa 40db
  - Mag(1)=0 db
  - Mag(10)=40 db
  - Mag(100)=80 db
  - Mag(1000)=120 db

$$Ang = 180°$$

- Desfasamiento constante para cualquier w

Sistema de primer orden
Decaimiento a 20db por década a partir de la frecuencia de corte

$$G(s) = \frac{C}{s-(p)} = \frac{\mathrm{K}}{Ts+1} \qquad T = \frac{1}{-p} \qquad \frac{1}{T} = -p$$

$$G(jw) = \frac{\mathrm{K}}{T(jw)+1} = \frac{K}{\sqrt{(Tw)^2+1}} Ang\{-tg^{-1}(Tw)\}$$

$$Mag = 20Log\left(\frac{K}{\sqrt{(Tw)^2+1}}\right) dB$$

$$Mag = 20Log(K) - 20Log\left(\sqrt{(Tw)^2+1}\right) dB$$

Analicemos como inicia y como termina el diagrama, es decir:

$$Cuando\ w \ll \frac{1}{T} \quad y\ cuando\ w \gg \frac{1}{T}$$

$$Cuando\ w \ll \frac{1}{T}$$

$$Mag = 20Log(K) - 20Log\left(\sqrt{1}\right) dB$$

$$Mag = 20Log(K)\ dB$$

Inicia en un valor constante de decibeles positivos si k>1 y decibeles negativos si k<1

$$Cuando\ w \gg \frac{1}{T}$$

$$Mag = 20Log(K) - 20Log(Tw)\ dB$$

Termina en un decaimiento de 20 db por decada que comenzó a decaer desde 20Log(k)

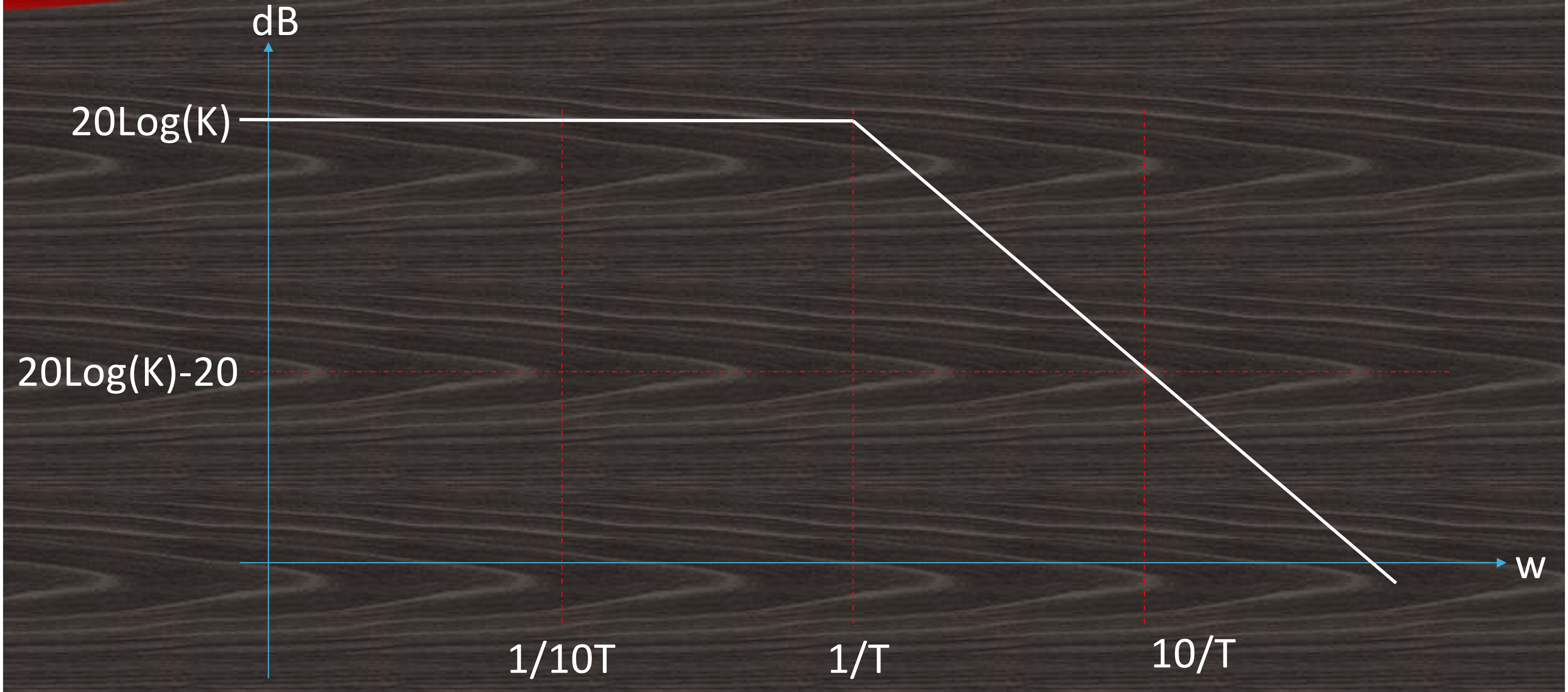
¿En que valor de w comienza el decaimiento?

Se tomará en el valor que hemos tomado de referencia o de separacíon de ambos análisis al cual se le denomina frecuencia de corte

$$w = \frac{1}{T}$$

Sistema de primer orden

Decaimiento a 20db por década a partir de la frecuencia de corte



Sistema de primer orden
Decaimiento a 20db por década a partir de la frecuencia de corte

Analicemos el valor real en la frecuencia de corte:

$$Cuando\ w = \frac{1}{T}$$

$$Mag = 20Log(K) - 20Log\left(\sqrt{1+1}\right)\ dB$$

$$Mag = 20Log(K) - 20Log\left(\sqrt{2}\right) = 20Log(K) - 3\ dB$$

Este error de la aproximación asintótca es el de mayor magnitud en todo el diagrama, se le denomina “error de esquina”

La ganancia del sistema analizada para el escalón unitario sigue siendo válida para frecuencias bajas. Se observa con su diagrama de bode iniciando en w << 1/T

$$Ang = -tg^{-1}(Tw)$$

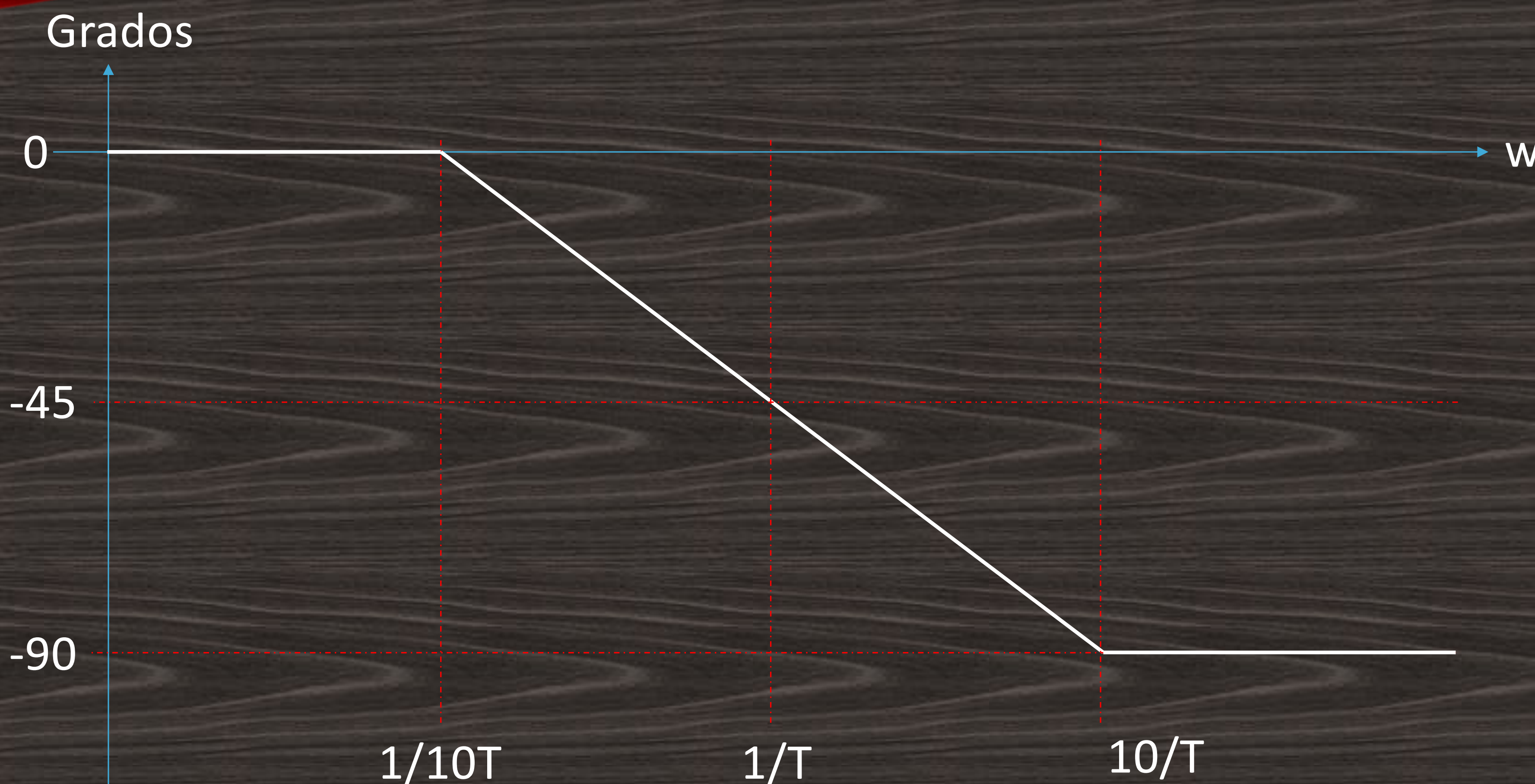
La frecuencia de corte w=1/T sigue observandose muy característica tambien para el desfasamiento

Observamos que para este punto Ang=-45 grados
Para valores muy pequeños Ang tiende a 0
Y para valores muy grandes Ang tiende a 90

Sistema de primer orden

Decaimiento a 20db por década a partir de la frecuencia de corte

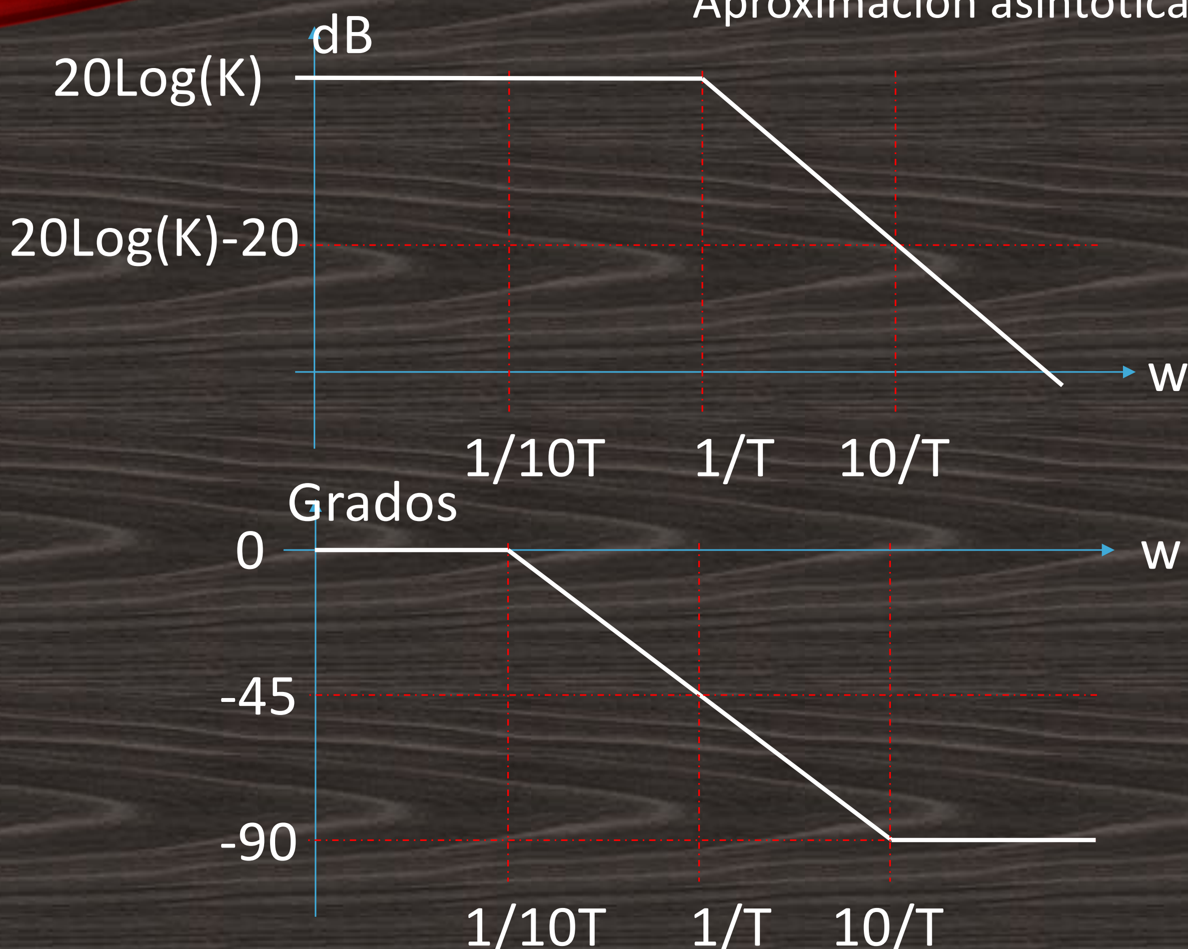
Aproximación asintótica de fase



Sistema de primer orden

Decaimiento a 20db por década a partir de la frecuencia de corte

Aproximación asintótica completa



$$G(s) = \frac{C}{s-(p)} = \frac{\mathrm{K}}{Ts+1}$$

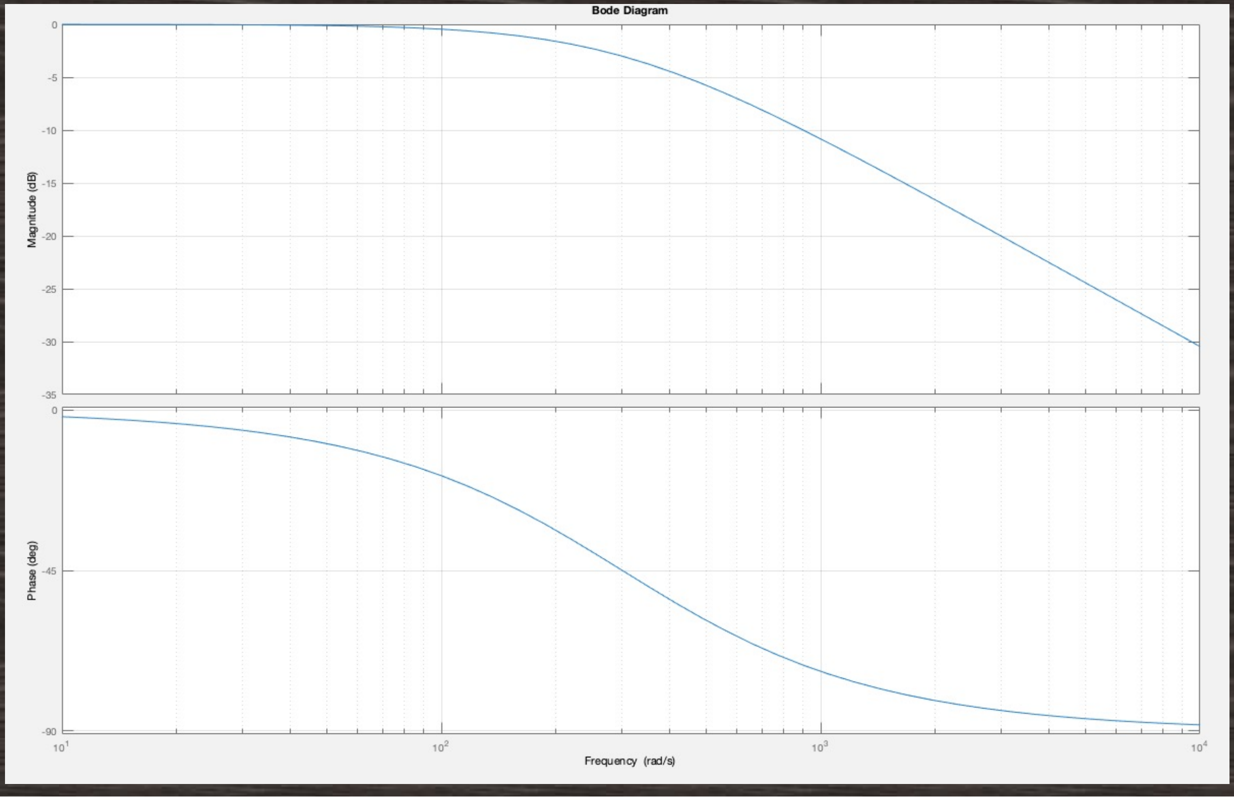
Sistema de primer orden

Decaimiento a 20db por década a partir de la frecuencia de corte

Ejercicio

A partir del diagrama de bode ¿Cuál es la Función de transferencia de este sistema?

Expresela en sus dos formas $\frac{C}{s-(p)}$ $\frac{K}{Ts+1}$

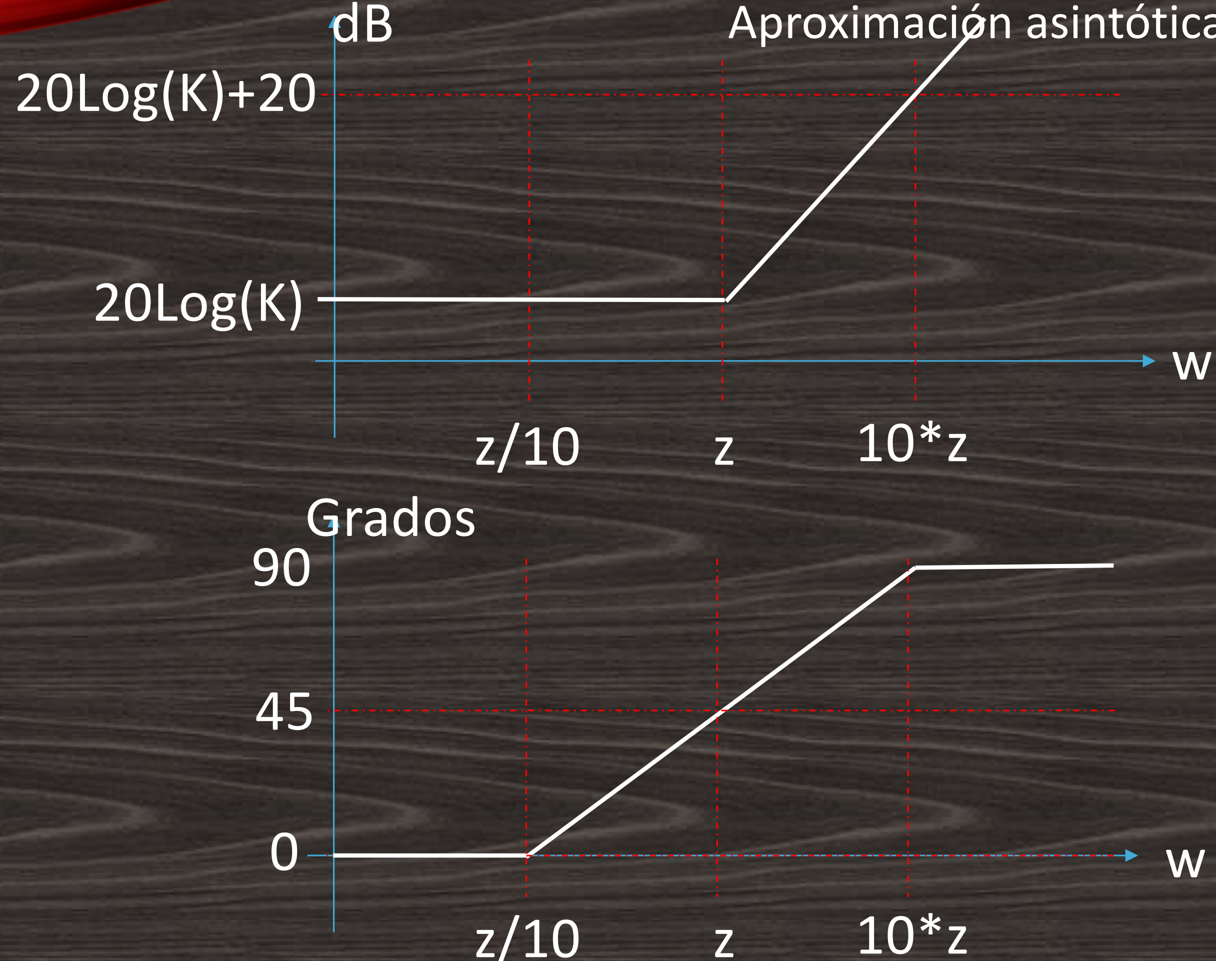


Tip: Ubique la frecuencia de corte en la gráfica de fase

Sistema con unincamente un cero

Incremento a 20db por década a partir de la frecuencia de corte

Aproximación asintótica completa

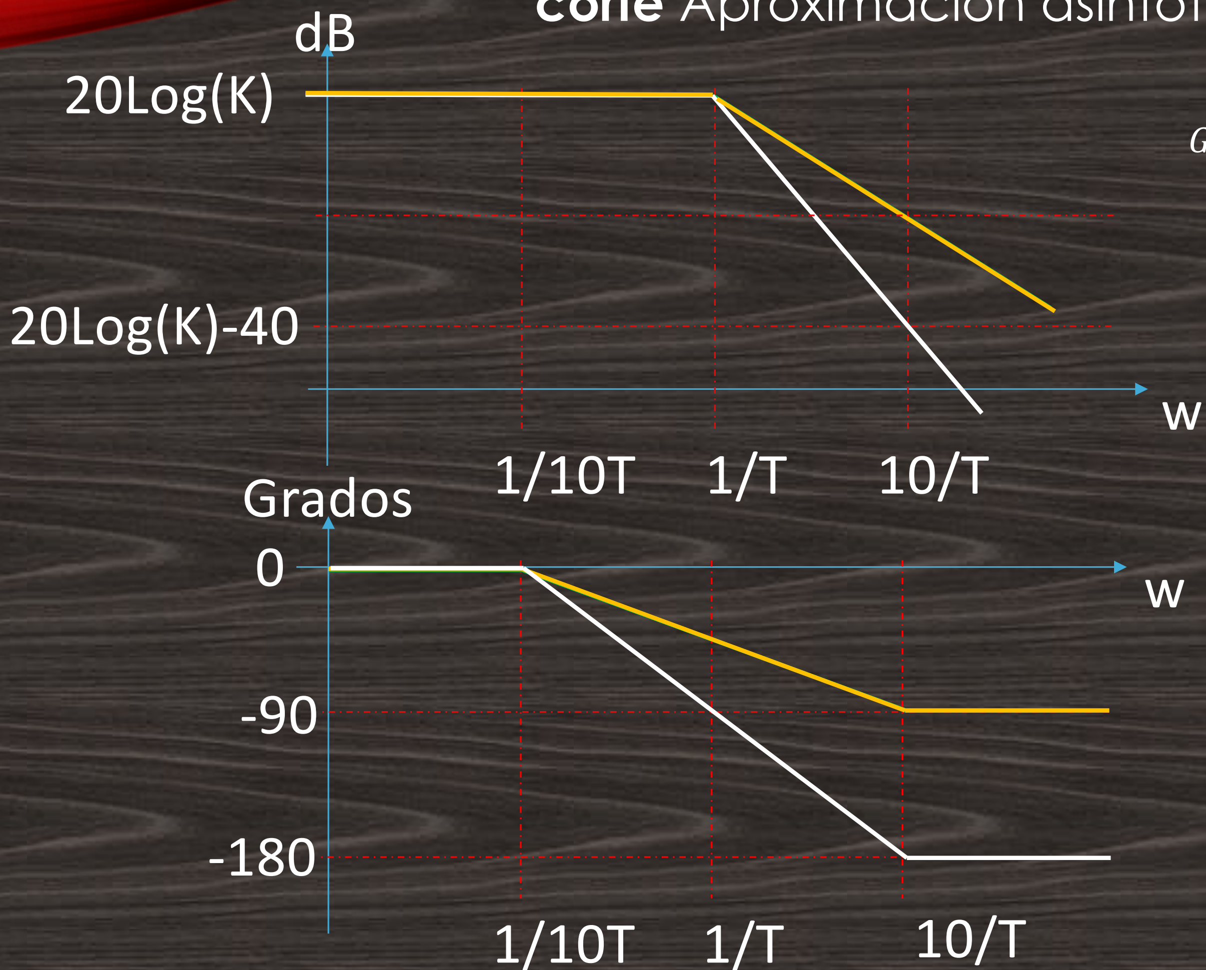


$G(s) = s - z$

EJERCICIO DE REPASO Y ASIMILACIÓN DEL TEMA

Trace en una hoja semilogarítmica, ya sea de forma electrónica o físicamente, la aproximación asintótica del diagrama de bode de un sistema de primer orden y un sistema con solamente un cero. Es decir copie los diagramas presentados anteriormente de forma exacta.

Sistema de segundo orden doble polo
Decaimiento a 40db por década a partir de la frecuencia de corte Aproximación asintótica completa



$$G(s) = \frac{C}{\left(s-(p)\right)^2} = \frac{C}{s^2 - 2ps + p^2}$$

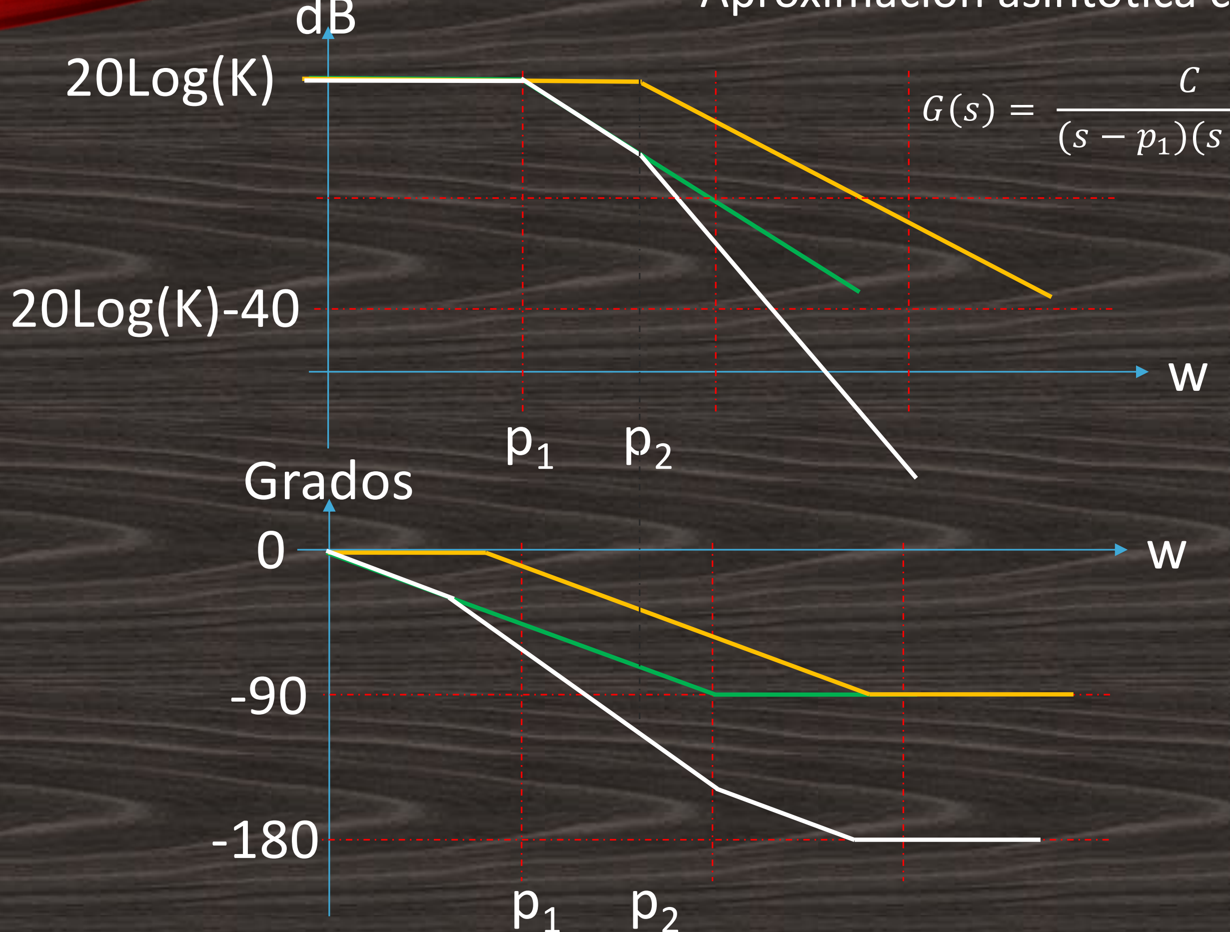
$$K = \frac{C}{p^2} \qquad T = \frac{1}{-p}$$

Sistema de segundo orden polos reales diferentes
Decaimiento combinado a partir de frecuencias de corte

Aproximación asintótica completa

$$G(s) = \frac{C}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{C}{s^2-(p_1+p_2)s+p_1p_2}$$

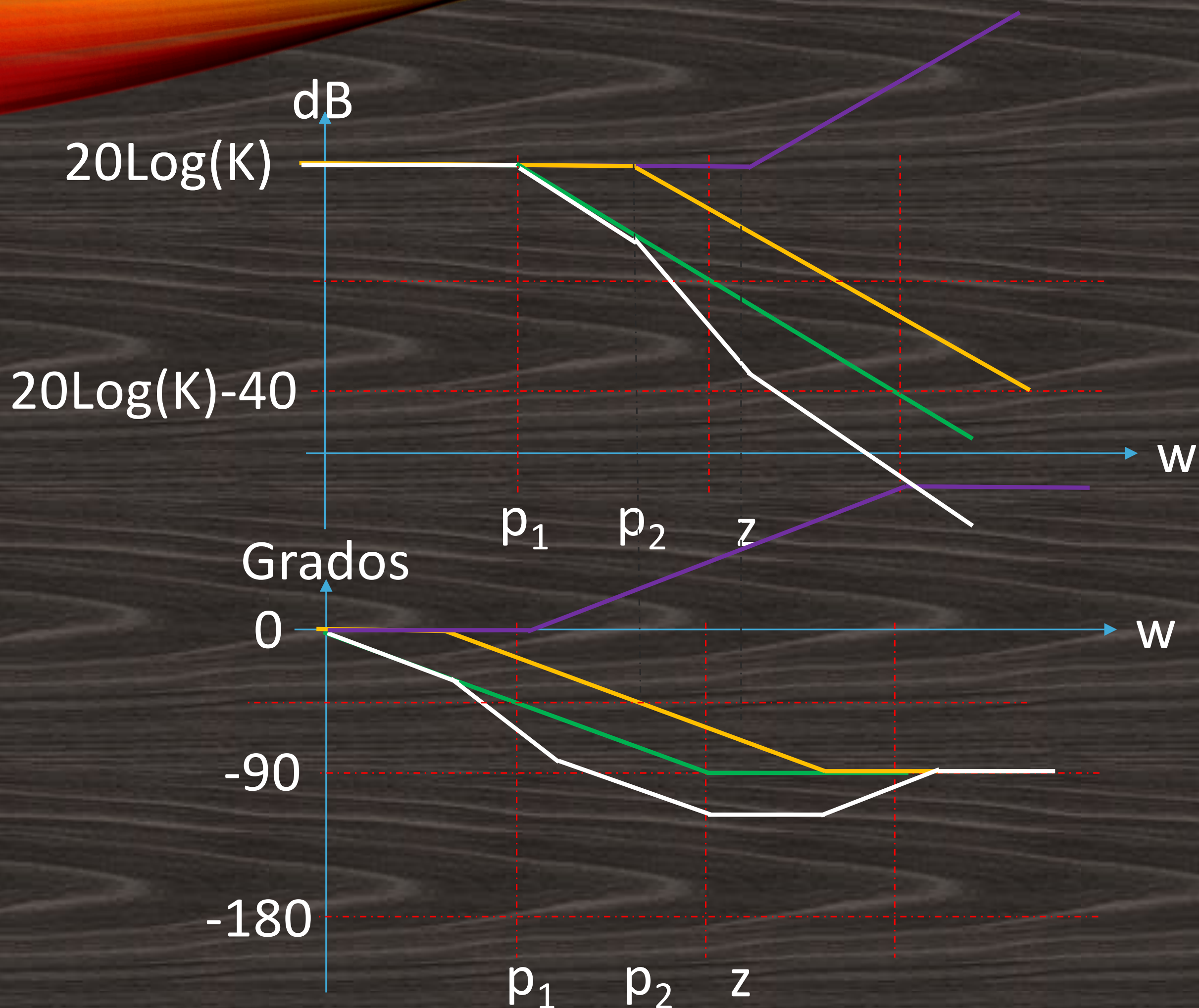
$$K = \frac{C}{p_1p_2}$$



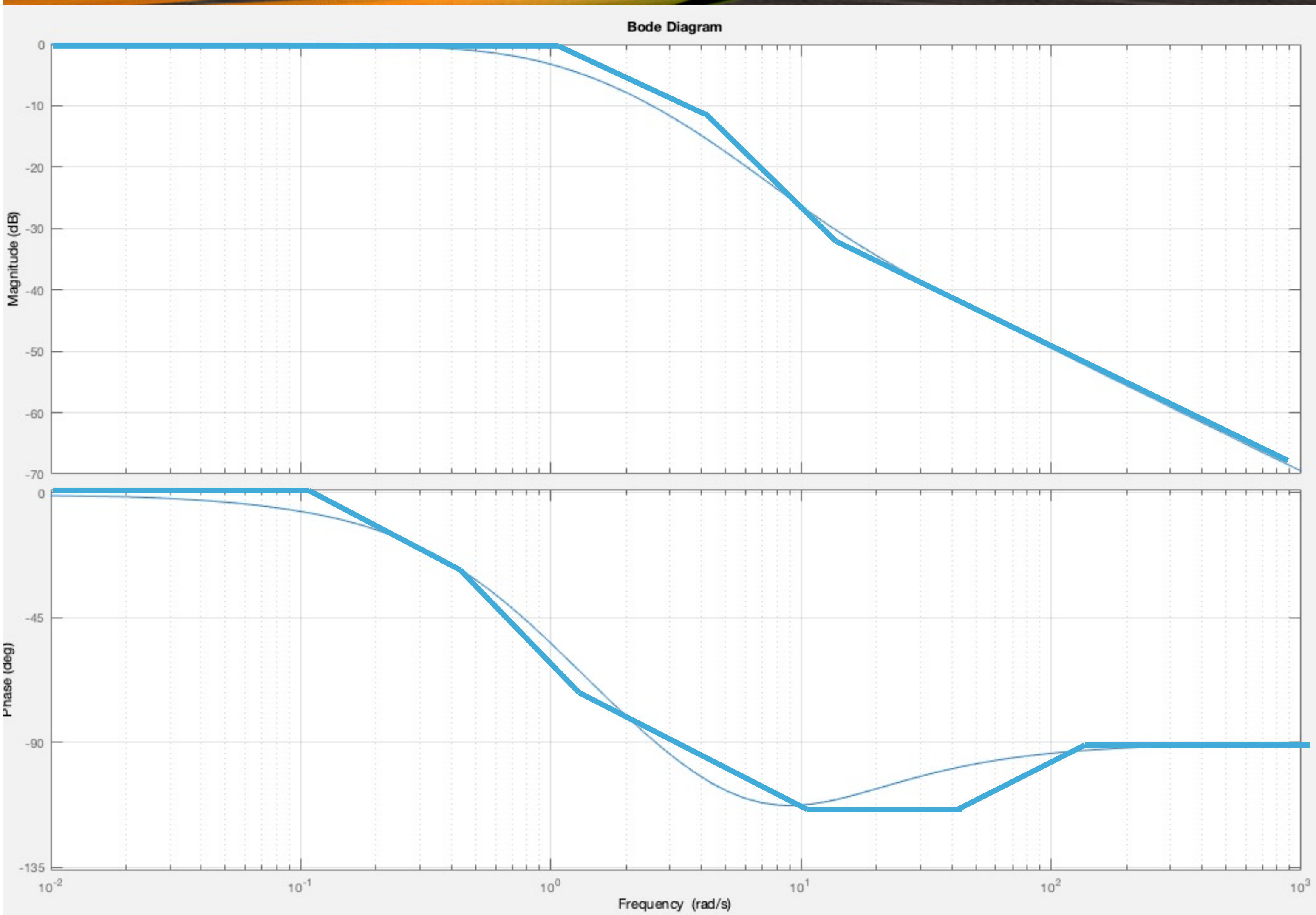
Ejemplo aproximacion asintótica cualquier función

$$G(s) = \frac{C(s+z)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$K = \frac{C * z}{p_1 p_2}$$



Ejemplo aproximacion asintótica cualquier función



$$G(s) = \frac{C(s+12)}{(s+1)(s+4)}$$

Sistema con ganancia unitaria
Calcular C

$$G(s) = \frac{C(s+12)}{s^2 + (4+1)s + 1 * 4}$$

$$G(s)_{s\to 0} = K = \frac{C(0+12)}{0+0+1*4}$$

$$K = \frac{C * 12}{1 * 4}$$

Como sabemos que K=1

$$C = \frac{K(1)(4)}{12}$$

$$C = \frac{1}{3}$$

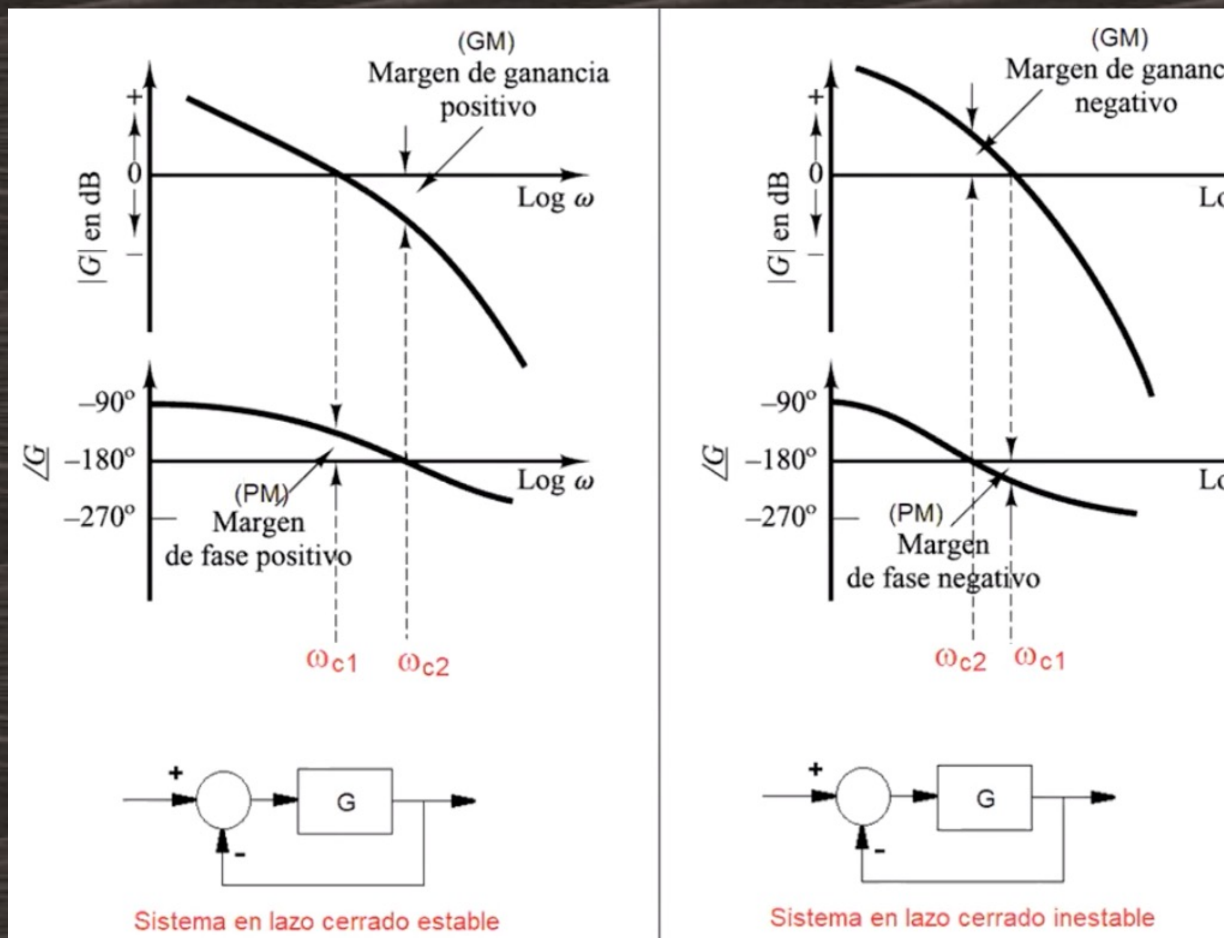
Ejercicio aproximacion asintótica cualquier función

Grafíque a mano, en una hoja semilogarítmica, la aproximación asintótica del diagrama de bode correspondiente al siguiente sistema (magnitud y fase):

$$G(s) = \frac{16(s+1)}{(s+4)^2}$$

Poner su firma y nombre autógrafos

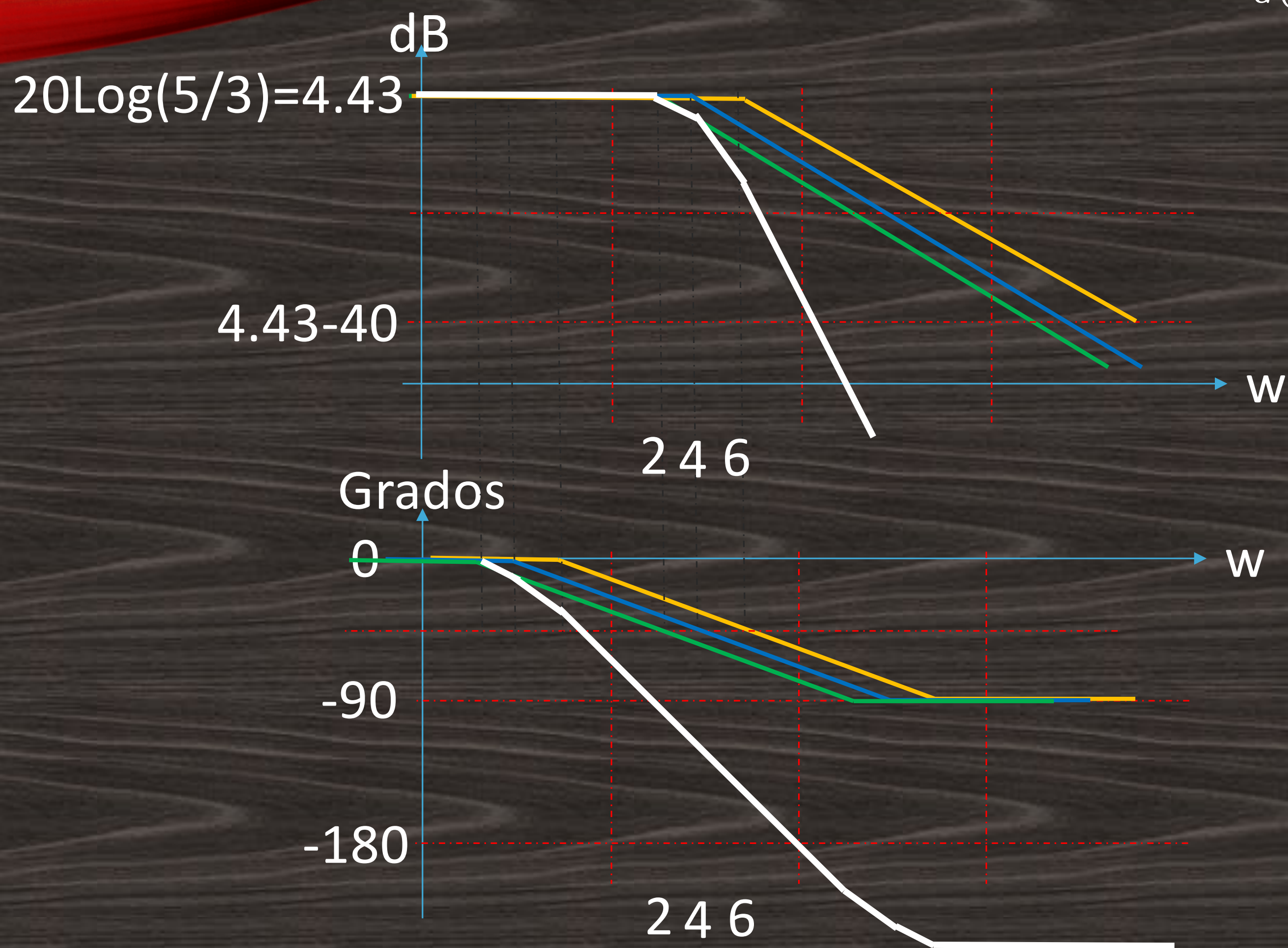
ESTABILIDAD DE BODE. MARGEN DE GANANCIA Y MARGEN DE FASE



Ejemplo aproximacion asintotica

$$G(s) = \frac{80}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

$$K = \frac{80}{48} = \frac{5}{3}$$



Ejemplo Margen de fase y de ganancia

$$G(s) = \frac{80}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

$$G(jw) = \frac{80}{(jw+2)(jw+4)(jw+6)}$$

Para Margen de fase.
Se calcula w_f

$$\frac{80}{\sqrt{w_f^2+4}\sqrt{w_f^2+16}\sqrt{w_f^2+36}} = 1$$

$$w_f = 2\, rad/seg$$

Se calcula el margen de fase

$$\mathrm{MF} = \mathrm{Ang}\left(\frac{80}{(jw_f+2)(jw_f+4)(jw_f+6)}\right) - (-180°)$$

$$\mathrm{MF} = -90° - (-180°) = 90°$$

Para Margen de ganancia.
Se calcula w_g

$$\mathrm{Ang}\left(\frac{80}{(jw_g+2)(jw_g+4)(jw_g+6)}\right) = -180°$$

$$\mathrm{Ang}\left(\frac{80}{(48-12w_g^2)+j(44w-w^3)}\right) = -180°$$

$$w_g = 2\sqrt{11}\, rad/seg$$

Se calcula el margen de ganancia

$$MG = 1 - \frac{80}{\sqrt{w_g^2+4}\sqrt{w_g^2+16}\sqrt{w_g^2+36}}$$

$$MG = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Solo ayuda a verificar que es positivo

$$MG_{dB} = 0 - 20\log\left(\frac{1}{6}\right) = 20\log(6)$$

<u>K= 6</u>