INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MORELIA

"José María Morelos y Pavón"

Ingeniería en Mecatrónica.

Tarea 4.

Profesor:

Johan Walter González Murueta.

Alumnos:

Román Lemus Dorantes.

Materia:

Control.

Morelia, Michoacán, México. Diciembre del 2021

1 Control clásico a control moderno.

1.1 Investigue y reporte paso a paso el proceso para llevar la representación en Función de Transferencia de un sistema a su representación en Espacio de Estados [1].

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots(s-p_n)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{K(b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m)}{(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)} \; Ec.1$$

Debido a la adición de la constante K en la ecuación, multiplicando por los términos del numerador:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{(Kb_0s^m + Kb_1s^{m-1} + \cdots + Kb_{m-1}s + Kb_m)}{(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)}$$

Normalizando la ecuación dividiendo numerador y denominador entre a_0:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{\left(\frac{Kb_0}{a_0}s^m + \frac{Kb_1}{a_0}s^{m-1} + \cdots + \frac{Kb_{m-1}}{a_0}s + \frac{Kb_m}{a_0}\right)}{\left(s^n + \frac{a_1}{a_0}s^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}s + \frac{a_n}{a_0}\right)} \; Ec.2$$

$$Y(s)\left(s^n + \frac{a_1}{a_0}s^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}s + \frac{a_n}{a_0}\right) = U(s)\left(\frac{Kb_0}{a_0}s^m + \frac{Kb_1}{a_0}s^{m-1} + \cdots + \frac{Kb_{m-1}}{a_0}s + \frac{Kb_m}{a_0}\right) Ec.3$$

Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$\frac{d^ny}{dt^n} + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_0}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{a_n}{a_0}\right)y = \left(\frac{Kb_0}{a_0}\right)\frac{d^mu}{dt^m} + \left(\frac{Kb_1}{a_0}\right)\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots + \left(\frac{Kb_{m-1}}{a_0}\right)\frac{du}{dt} + \left(\frac{Kb_m}{a_0}\right)u \quad Ec.4$$

Sustituyendo la ecuación 4 con $f = \frac{1}{a_0}$:

$$\frac{d^ny}{dt^n} + (\mathrm{a_1 f})\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + (\mathrm{a_{n-1} f})\frac{dy}{dt} + (a_nf)y = (Kb_0\,\mathrm{f})\frac{d^mu}{dt^m} + (Kb_1\mathrm{f})\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots + (Kb_{m-1}\mathrm{f})\frac{du}{dt} + (Kb_m\mathrm{f})u \quad Ec.5$$

Después se definen las variables de estado y sus derivadas. Debido a que se tienen ceros en el sistema, los términos de las entradas quedan derivados, por lo que las variables de estado deben eliminar las derivadas de u, esto se logra aplicando las siguientes variables de estado:

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt} - \beta_0 \frac{du}{dt} - \beta_1 u = \frac{dx_1}{dt} - \beta_1 u$$

$$x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} - \beta_0 \frac{d^2 u}{dt^2} - \beta_1 \frac{du}{dt} - \beta_2 u = \frac{dx_2}{dt} - \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} - \beta_0 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} - \beta_1 \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} - \cdots - \beta_{n-2} \frac{du}{dt} - \beta_{n-1} u = \frac{dx_{n-1}}{dt} - \beta_{n-1} u$$

En donde los coeficientes de β se forman de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta_0 = Kfb_0}$$

$$\boldsymbol{\beta_1 = Kfb_1 - a_1 f \beta_0}$$

$$\boldsymbol{\beta_2 = Kfb_2 - a_1 f \beta_1 - a_2 f \beta_0}$$

$$\boldsymbol{\beta_3 = Kfb_3 - a_1 f \beta_2 - a_2 f \beta_1 - a_3 f \beta_0}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\beta_{n-1} = Kfb_{n-1} - a_1 f \beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2} f \beta_1 - a_{n-1} f \beta_0}$$

$$\boldsymbol{\beta_n = Kfb_n - a_1 f \beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1} f \beta_1 - a_{n-1} f \beta_0}$$

Con estas variables de estado se obtienen:

$$\frac{dx}{dt} = x_2 + \beta_1 u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 + \beta_2 u$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4 + \beta_3 u$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n + \beta_{n-1} u$$

La derivada de orden n se obtiene del despeje de la ecuación 5:

$$\frac{dx_n}{dt} = -afx_1 - a_{n-1}fx_2 - \cdots - a_1 fx_n + \beta_n u$$

Las ecuaciones de espacios de estados son:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Que expresado en forma de matriz queda:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n f & -a_{n-1} f & -a_{n-2} & \dots & -a_1 f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \quad Ec.6$$

Sustituyendo el valor de *f* en la ecuación 6 se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{-a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \cdots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

Y la matriz de salida queda:

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

1.2 Investigue y reporte las siguientes formas canónicas de representación de un sistema a partir de su función de transferencia.

Para las diferentes representaciones de un sistema en espacio de estados, se usó la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)} \; Ec.7$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}\frac{du}{dt} + b_n u$$

a) **Forma canónica controlable.**

Esta representación es importante cuando se usa el método de asignación de polos para el diseño del sistema de control, su representación queda:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{a_n b_0} \quad \boldsymbol{b_{n-1}} - \boldsymbol{a_{n-1} b_0} \quad \cdots \quad \boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a_1 b_0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b_0 u}$$

b) **Forma canónica observable.**

Esta forma es muy parecida a la canónica controlable, sin embargo, la ecuación de estados utiliza la transpuesta para su formación, la representación queda:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_n - a_n b_0} \\ \boldsymbol{b_{n-1} - a_{n-1} b_0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_1 - a_1 b_0} \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{y} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \boldsymbol{b_0 u}$$

c) Forma canónica diagonal.

Tomando en cuenta que la ecuación 7 solamente tiene raíces diferentes en su ecuación característica, se puede escribir como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \ Ec. 8$$

Aplicando fracciones parciales a la ecuación 8:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{b_0} + \frac{\boldsymbol{c1}}{s + p_1} + \frac{\boldsymbol{c2}}{s + p_2} + \cdots + \frac{\boldsymbol{c_n}}{s + p_n} \ \boldsymbol{Ec. 9}$$

La representación de forma canónica diagonal de la función de transferencia de la ecuación 9 es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{c_1} \quad \boldsymbol{c_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{c_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \boldsymbol{b_0 u}$$

d) Forma canónica de Jordan.

Para este caso a diferencia que en la forma canónica diagonal, se toma en cuenta que los 3 primeros polos tienen el mismo valor, con ello la función de transferencia queda:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n)}{(s+p_1)^3(s+p_4)(s+p_5)\cdots(s+p_n)} \quad Ec. 10$$

Aplicando fracciones parciales a la ecuación 10:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{b_0} + \frac{\boldsymbol{c1}}{(s+p_1)^3} + \frac{\boldsymbol{c2}}{(s+p_1)^2} + \frac{\boldsymbol{c3}}{s+p_1} + \frac{\boldsymbol{c4}}{s+p_4} + \cdots + \frac{\boldsymbol{c\_n}}{s+p_n} \quad \boldsymbol{Ec. 11}$$

La representación en forma canónica de Jordan de la función de transferencia de la ecuación 11 es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{c_1} \quad \boldsymbol{c_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{c_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \boldsymbol{b_0 u}$$

2 Controlabilidad y observabilidad.

Dé una explicación de los conceptos "Controlabilidad" y "Observabilidad" en la representación de Espacio de Estados. Es decir, reporte el concepto (no olvide cita y referencias bibliográficas) y redacte su propia explicación (esta última puede ser con citas o sin ellas).

2.1 Controlabilidad.

Un sistema es completamente controlable si existe un control sin restricción $u(t)$ que pueda llevar cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado deseado $x(t)$ en un tiempo finito, $t_0 \leq t \leq T$.

Para el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Se puede determinar si es controlable mediante la condición:

$$rango\,[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

Si el sistema tiene solamente una entrada y una salida, la matriz de controlabilidad es:

$$P_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

Si el determinante de la matriz anterior es diferente de cero, el sistema es completamente controlable [2].

Parafraseando la definición anterior, para que un sistema pueda ser controlable en el tiempo t_0, éste se debe poder transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

2.2 Observabilidad.

Un sistema es completamente observable si y sólo si existe un tiempo finito T de forma que el estado inicial $x(0)$ se pueda determinar a partir de la observación de la historia de $y(t)$ dado el control $u(t)$.

Considerando un sistema de solamente una entrada y una salida:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad e \qquad y = Cx$$

La matriz de observabilidad queda como se muestra a continuación:

$$P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si el determinante de la matriz anterior es diferente de cero, el sistema es completamente observable [2].

Parafraseando la definición anterior, un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

3 Referencias

[1] K. Ogata, Ingeniería de control moderna, España: Pearson educación S.A, 2010.

[2] R. C. D. y. R. H. Bishop, Sistemas de control moderno, España: Pearson Educación S.A, 2015.