Ingeniería Mecatrónica

CONTROL EN TIEMPO DISCRETO

Dr. Enrique Reyes Archundia

Enero 2022

Transformada Z

Definición de Transformada Z

$$Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Transformada de Laplace

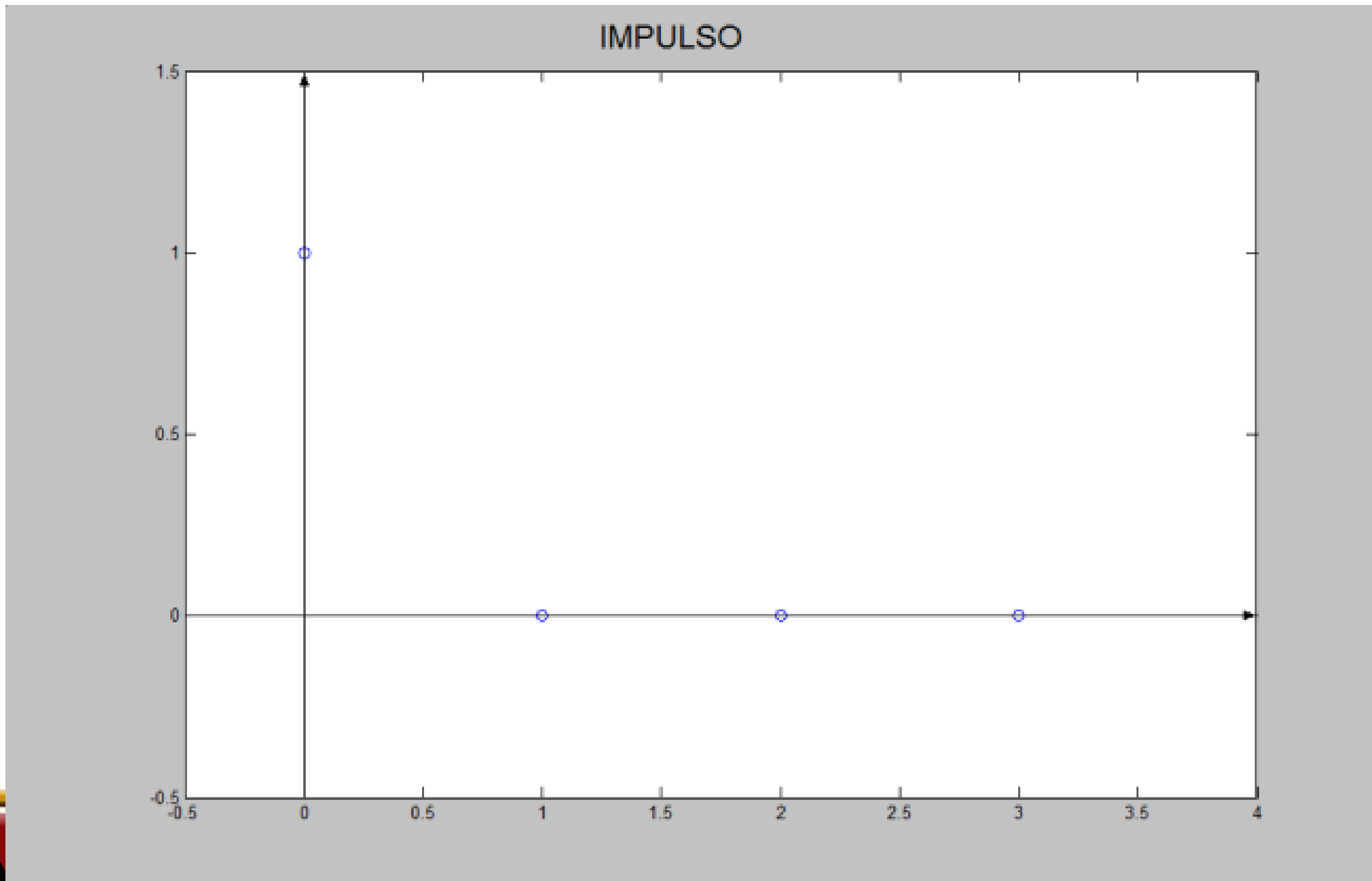
$$z = e^{sT} \quad y \quad t \approx kT$$

$$L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Transformada Z de un impulso unitario

En el dominio del tiempo

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 \quad para \quad kT = 0 \\ 0 \quad para \quad kT \neq 0 \end{cases}$$



Transformada Z de un impulso unitario

En el dominio del tiempo

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 \quad para \quad kT = 0 \\ 0 \quad para \quad kT \neq 0 \end{cases}$$

Transformada Z de un impulso unitario

En el dominio del tiempo

$$\delta(kT)=\begin{cases}1 \quad para \quad kT=0\\ 0 \quad para \quad kT\neq 0\end{cases}$$

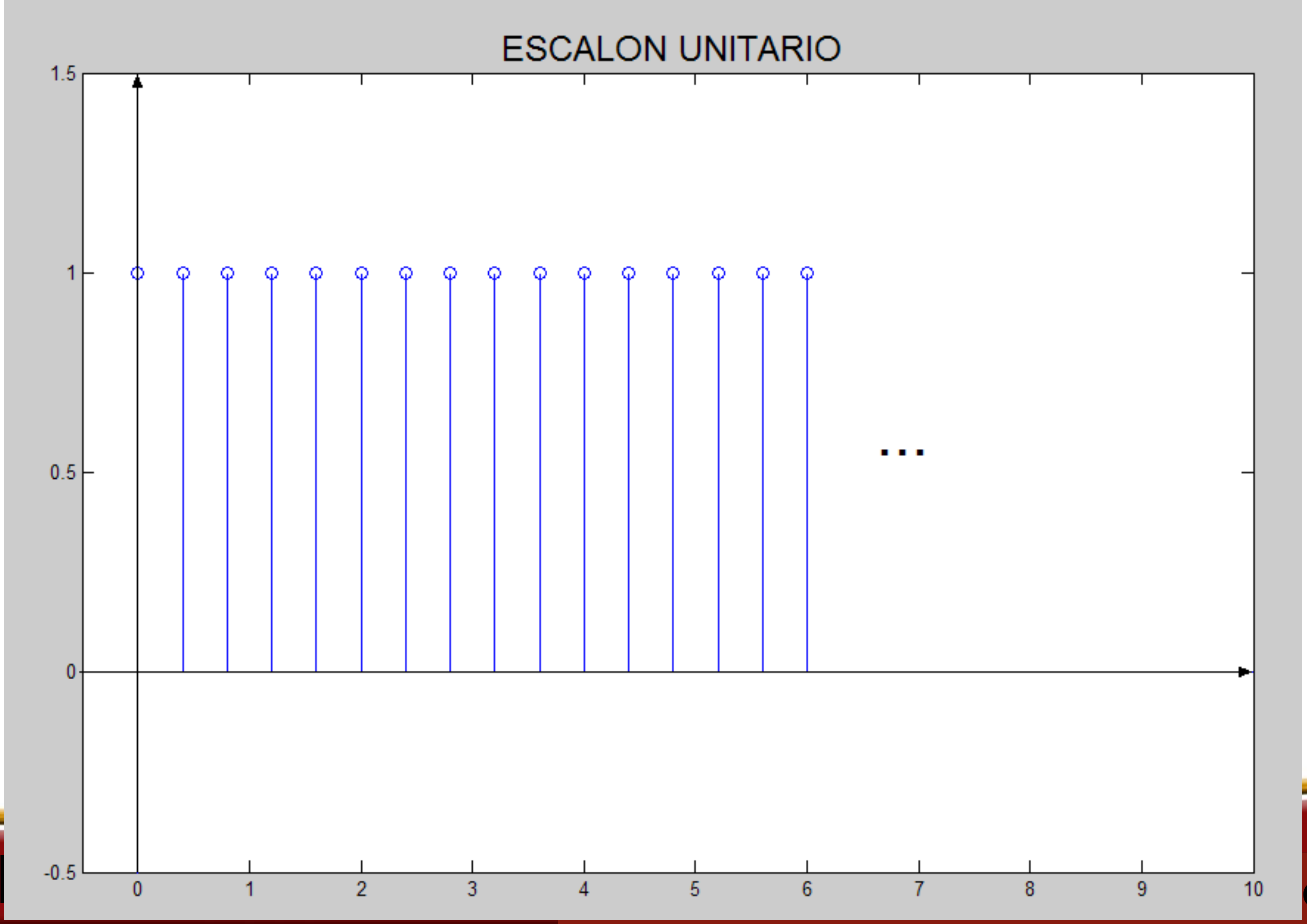
Aplicando definición de transformada Z

$$Z\{x(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$Z\{\delta(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$$

Transformada Z de un escalón unitario

En el dominio del tiempo $x(kT)=1$



Transformada Z de un escalón unitario

En el dominio del tiempo

$$x(kT) = 1$$

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Transformada Z de un escalón unitario

En el dominio del tiempo

$$x(kT) = 1$$

Aplicando definición de transformada Z

$$Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

Transformada Z de un escalón unitario

En el dominio del tiempo

$$x(kT)=1$$

Aplicando definición de transformada Z

$$Z\{x(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(1)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{-1})^{k}$$

Transformada Z de un escalón unitario

En el dominio del tiempo

$$x(kT)=1$$

Aplicando definición de transformada Z

$$Z\{x(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

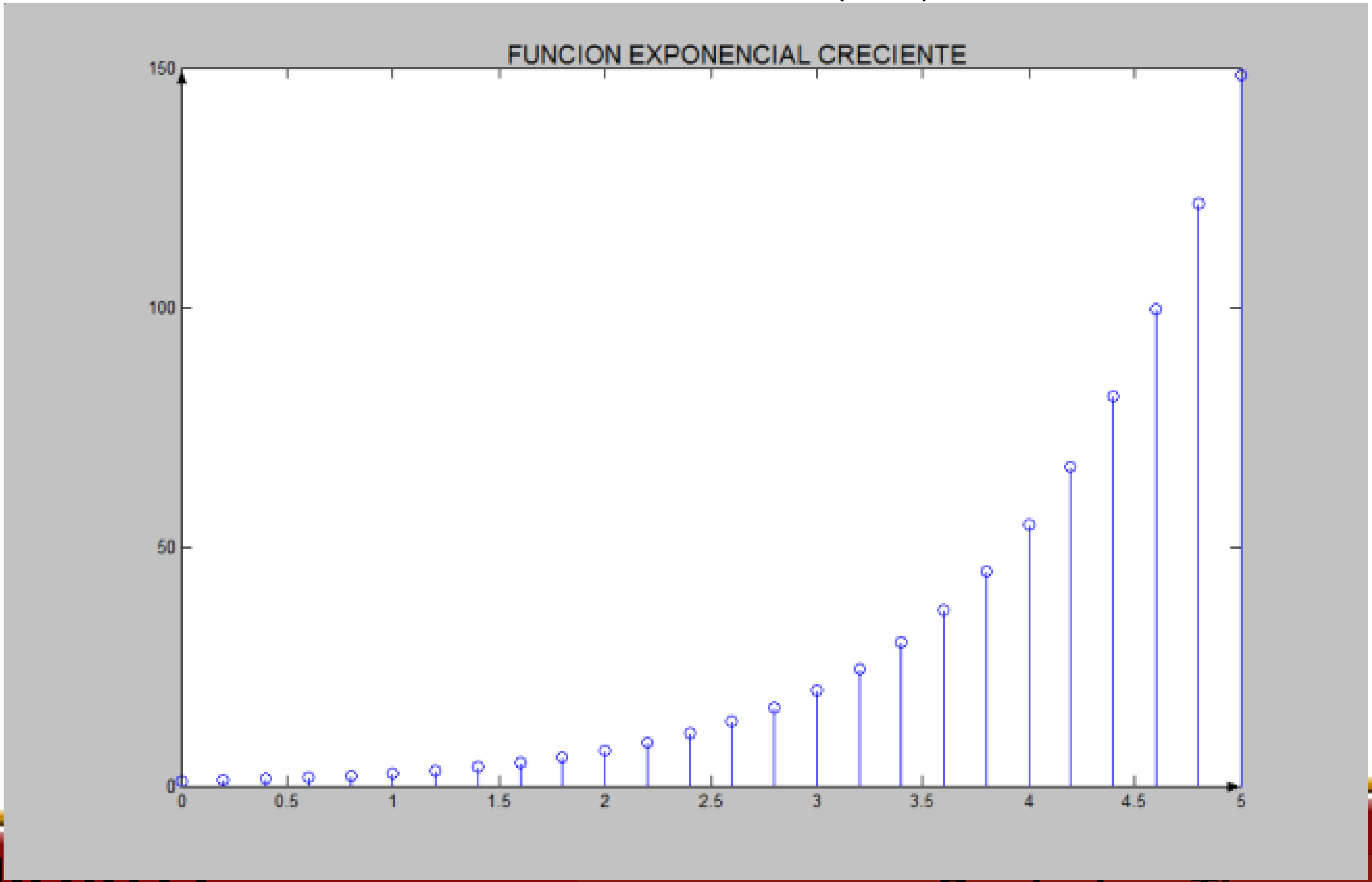
$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(1)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{-1})^{k}$$

La sumatoria se reduce a

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Transformada Z de una exponencial creciente

En el dominio del tiempo $$x(kT) = Ae^{akT}$$



Transformada Z de una exponencial creciente

En el dominio del tiempo $x(kT) = Ae^{akT}$

Transformada Z de una exponencial creciente

En el dominio del tiempo $x(kT) = Ae^{akT}$

Aplicando definición de transformada Z

$$Z\{x(kT)\} = Z\{Ae^{akT}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(Ae^{akT}\right) z^{-k}$$

Transformada Z de una exponencial creciente

En el dominio del tiempo $x(kT) = Ae^{akT}$

Aplicando definición de transformada Z

$$Z\{x(kT)\} = Z\{Ae^{akT}\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(Ae^{akT}\right)z^{-k} = A\sum_{k=0}^{\infty}(e^{aT}z^{-1})^{k}$$

Transformada Z de una exponencial creciente

En el dominio del tiempo $x(kT) = Ae^{akT}$

Aplicando definición de transformada Z

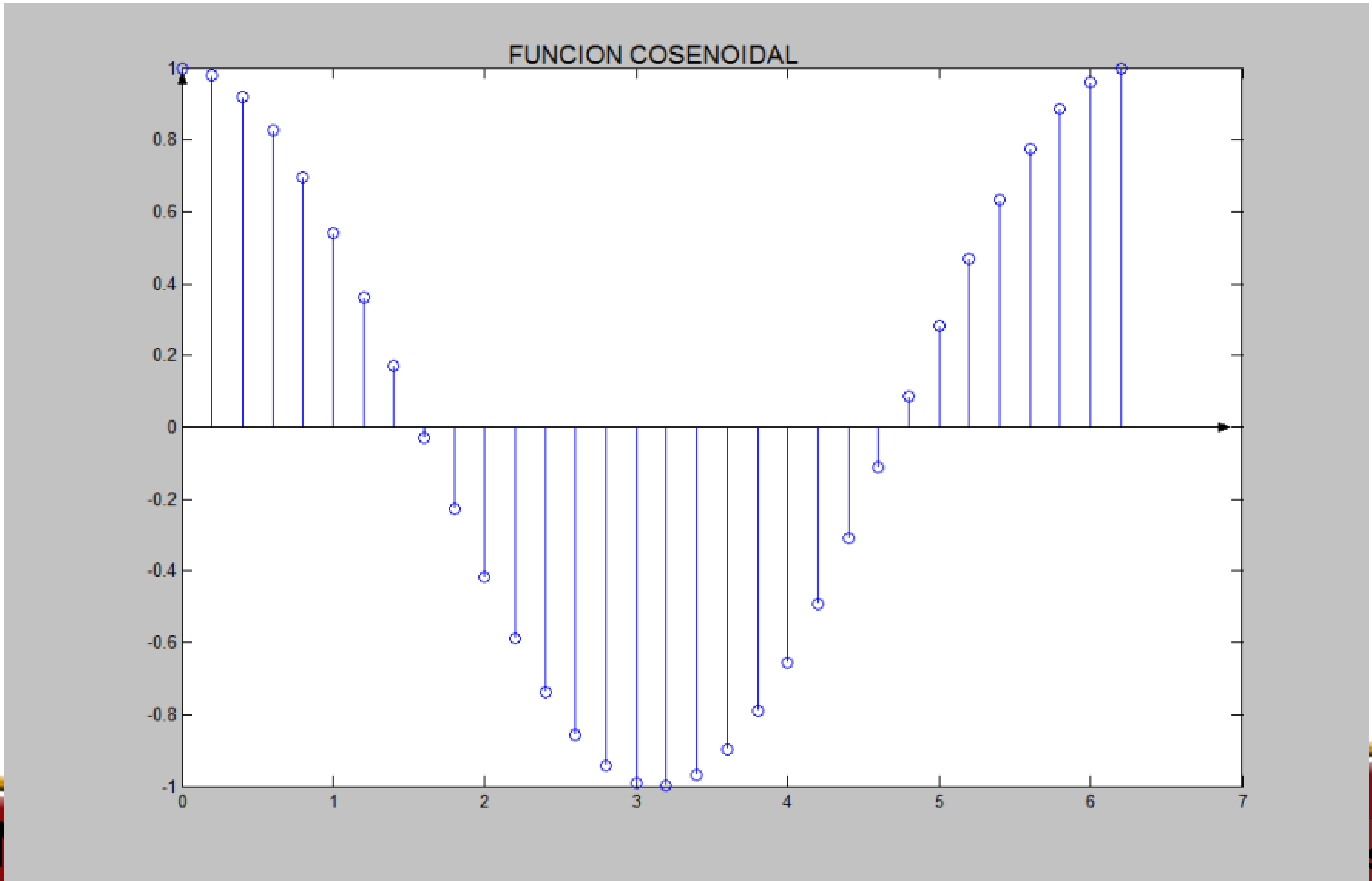
$$Z\{x(kT)\} = Z\{Ae^{akT}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(Ae^{akT}\right) z^{-k} = A \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT} z^{-1})^{k}$$

Equivale a

$$X(z) = A \frac{1}{1 - e^{aT} z^{-1}}$$

Transformada Z de una función cosenoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = A\cos(\Omega kT)$



Transformada Z de una función cosenoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = A\cos(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A\cos(\Omega kT)\right)z^{-k}$$

Transformada Z de una función cosenoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = A\cos(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A\cos(\Omega kT)\right) z^{-k}$$

Usando identidad de Euler $Cos(\Omega kT) = \dfrac{e^{j\Omega kT} + e^{-j\Omega kT}}{2}$

Transformada Z de una función cosenoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = A\cos(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A\cos(\Omega kT)\right) z^{-k}$$

Usando identidad de Euler $Cos(\Omega kT) = \dfrac{e^{j\Omega kT} + e^{-j\Omega kT}}{2}$

$$X(z) = \frac{A}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{j\Omega T} z^{-1}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-j\Omega T} z^{-1}\right)^{k}\right]$$

Transformada Z de una función cosenoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = A\cos(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A\cos(\Omega kT)\right)z^{-k}$$

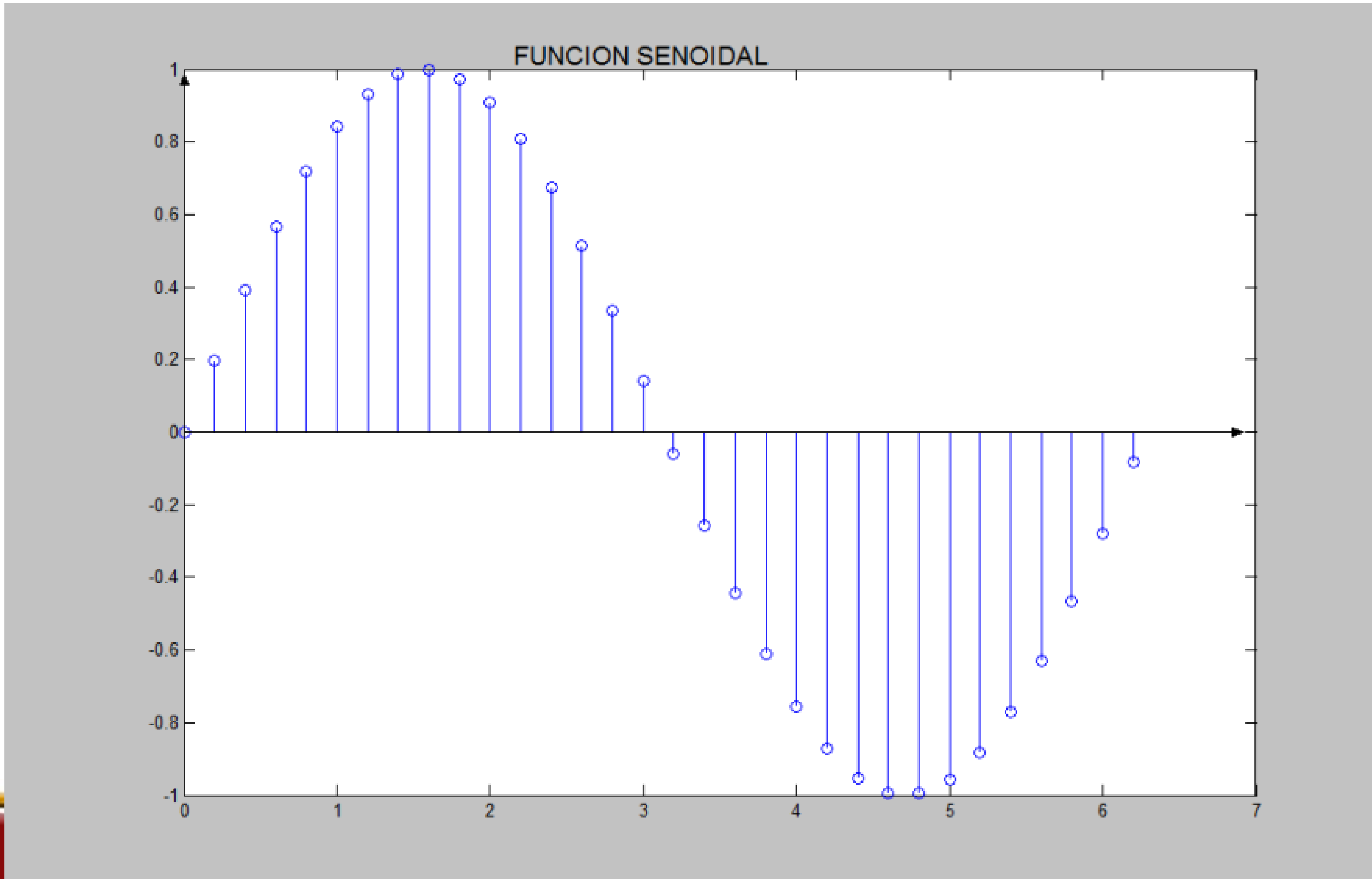
Usando identidad de Euler $Cos(\Omega kT) = \dfrac{e^{j\Omega kT} + e^{-j\Omega kT}}{2}$

$$X(z) = \frac{A}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{j\Omega T}z^{-1}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-j\Omega T}z^{-1}\right)^{k}\right]$$

$$X(z) = A\left[\frac{1-\cos(\Omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega T)z^{-1}+z^{-2}}\right]$$

Transformada Z de una función senoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = Asen(\Omega kT)$



Transformada Z de una función senoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = Asen(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A\,sen(\Omega kT)\right)z^{-k}$$

Transformada Z de una función senoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = Asen(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A\,sen(\Omega kT)\right) z^{-k}$$

Usando identidad de Euler $sen(\Omega kT) = \dfrac{e^{j\Omega kT} - e^{-j\Omega kT}}{2j}$

Transformada Z de una función senoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = Asen(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A\,sen(\Omega kT)\right)z^{-k}$$

Usando identidad de Euler $sen(\Omega kT) = \dfrac{e^{j\Omega kT} - e^{-j\Omega kT}}{2j}$

$$X(z) = \frac{A}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{j\Omega T}z^{-1}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-j\Omega T}z^{-1}\right)^{k}\right]$$

Transformada Z de una función senoidal

En el dominio del tiempo $x(kT) = Asen(\Omega kT)$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A\,sen(\Omega kT)\right)z^{-k}$$

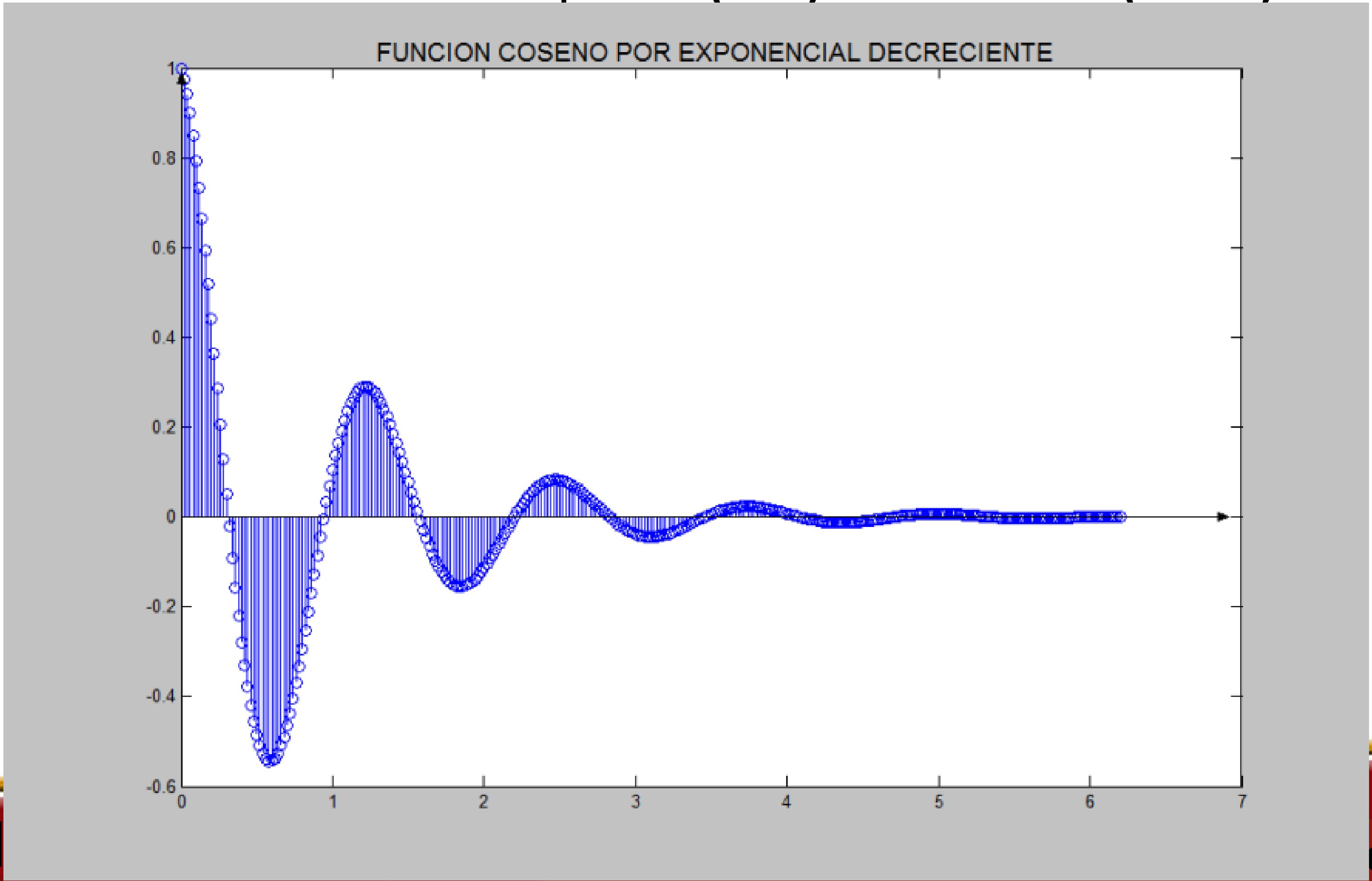
Usando identidad de Euler $sen(\Omega kT) = \dfrac{e^{j\Omega kT} - e^{-j\Omega kT}}{2j}$

$$X(z) = \frac{A}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{j\Omega T}z^{-1}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-j\Omega T}z^{-1}\right)^{k}\right]$$

$$X(z) = A\left[\frac{sen(\Omega T)z^{-1}}{1 - 2\cos(\Omega T)z^{-1} + z^{-2}}\right]$$

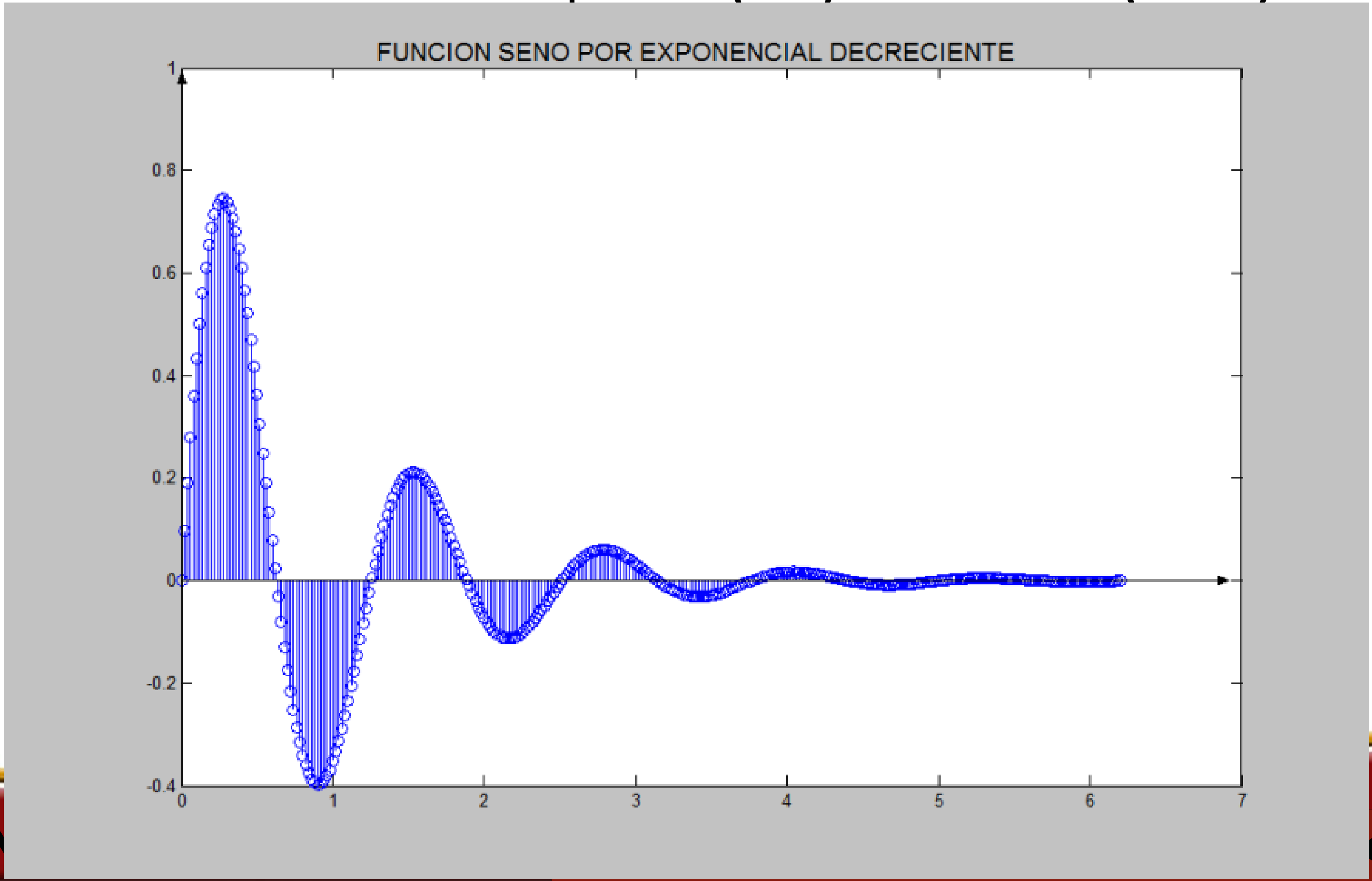
Transformada Z de una función coseno por una exponencial decreciente

En el dominio del tiempo $x(kT) = A\,e^{-akT}\cos(\Omega kT)$



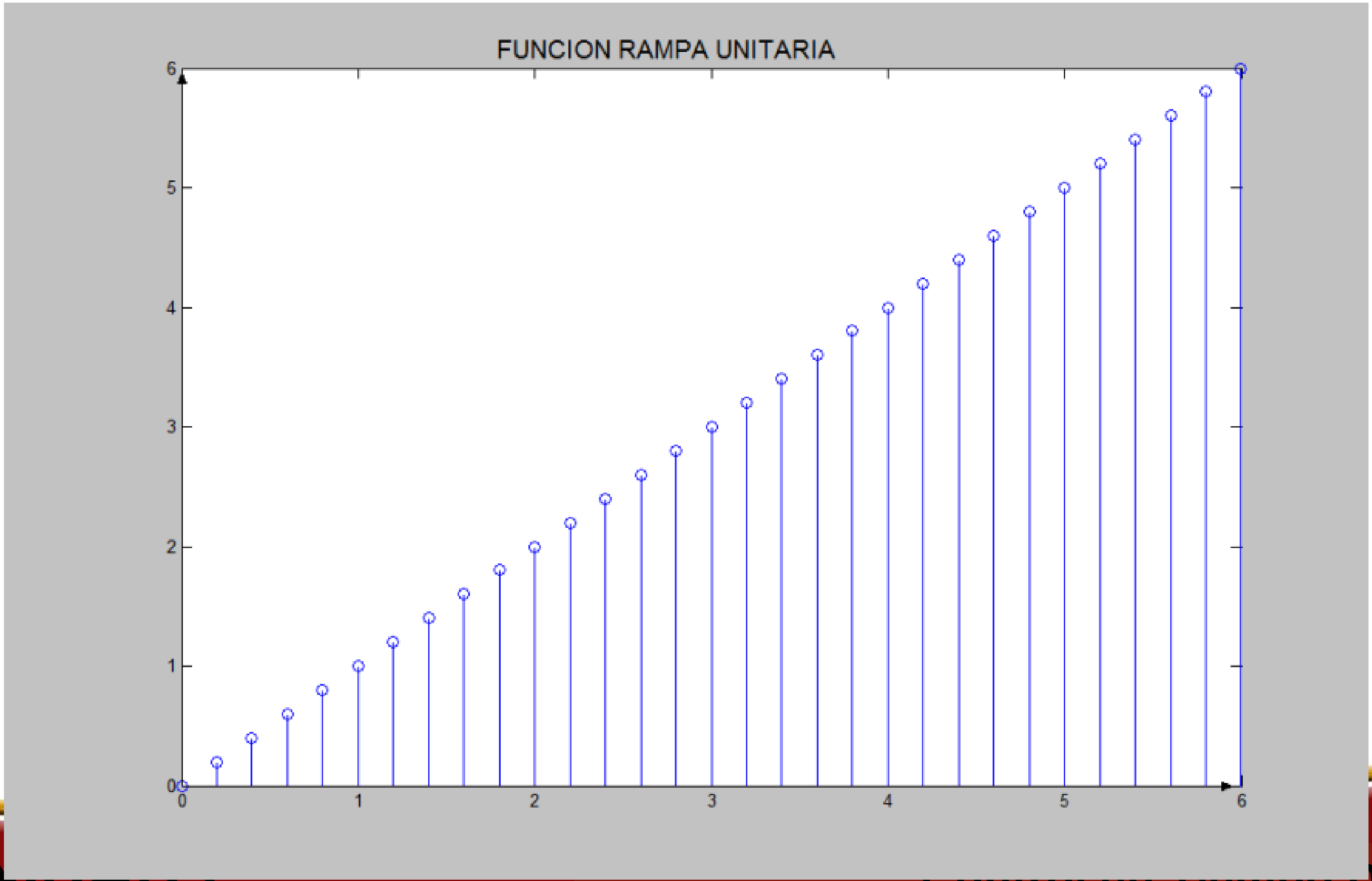
Transformada Z de una función senoidal por una exponencial decreciente

En el dominio del tiempo $x(kT) = Ae^{-akT}\,sen(\Omega kT)$



Transformada Z de una función rampa

En el dominio del tiempo $x(kT) = AkT \quad para \quad kT \geq 0$



Transformada Z de una rampa

En el dominio del tiempo $x(kT) = AkT \quad para \quad kT \geq 0$

Transformada Z de una rampa

En el dominio del tiempo $x(kT) = AkT \quad para \quad kT \geq 0$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(AkT\, z^{-k} \right)$$

Transformada Z de una rampa

En el dominio del tiempo $x(kT) = AkT \quad para \quad kT \geq 0$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(AkT\,z^{-k}\right)$$

$$= AT\left(0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \ldots\right)$$

Transformada Z de una rampa

En el dominio del tiempo $x(kT) = AkT \quad para \quad kT \geq 0$

Aplicando definición de transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(AkT z^{-k}\right)$$

$$= AT\left(0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \ldots\right)$$

Se reduce a

$$X(z) = AT\frac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$