Ingeniería Mecatrónica

CONTROL EN TIEMPO DISCRETO

Dr. Enrique Reyes Archundia

Marzo 2022

Ecuaciones de diferencias lineales

Dado un conjunto de valores discretos de la forma

$$y(kT), y[(k-1)T], \ldots y[(k-N)T]$$

Donde k =1,2,3,…
Se define la diferencia de primer retroceso (first backward)como

$$\nabla y(kT) = y(kT) - y[(k-1)T]$$

Ecuaciones de diferencias lineales

La diferencia de segundo retroceso (second backward) se define como

$$\nabla^2 y(kT) = \nabla\left(\nabla y(kT)\right) = \nabla\left(y(kT) - y[(k-1)T]\right)$$

$$= y(kT) - 2y[(k-1)T] + y[(k-2)T]$$

Discretización del proceso de derivación

$$y'(t) = D\,y(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t) - y(t-\Delta t)}{\Delta\, t}$$

Haciendo t≈kT y Δt=T

$$= \lim_{T \to 0} \frac{y(kT) - y([k-1]T)}{T}$$

Discretización del proceso de derivación

$$y'(t) = D\,y(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta\, t}$$

Haciendo t≈kT y Δt=T

$$= \lim_{T \to 0} \frac{y(kT) - y([k-1]T)}{T} \approx \frac{y(kT) - y[(k-1)T]}{T} = \frac{\nabla\, y(kT)}{T}$$

Discretización del proceso de derivación

Para la segunda derivada

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d\left[\dfrac{dy(t)}{dt}\right]}{dt} \approx \frac{d\left[\dfrac{y(kT) - y[(k-1)T]}{T}\right]}{dt}$$

$$\approx \frac{y(kT) - 2y[(k-1)T] + y[(k-2)T]}{T^2} = \frac{\nabla^2 y(kT)}{T^2}$$

Ejercicio para discretizar

Considere la funciones de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s+10}. \qquad G(s) = \frac{1}{s^2+2s+10}$$

Sugerencias:

1. A partir de G(s), obtenga la ecuación diferencial
2. Utilice la discretización de la derivada para obtener la ecuación de diferencias lineal
3. Utilice transformada Z para resolver la ecuación para y(kT)
4. Obtener G(z)
5. Simular la respuesta al escalón de G(s) y G(z)

Aproximación por primer retroceso

$$L\left\{\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right\} = s\,Y(s)$$

$$\left\{\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right\} \approx \frac{y(kT) - y[(k-1)T]}{T}$$

$$Z\left\{\frac{y(kT) - y[(k-1)T]}{T}\right\} = \frac{Y(z) - z^{-1}Y(z)}{T} = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)Y(z)$$

Por comparación

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \Rightarrow z = \frac{1}{1 - s\,T}$$

Aproximación de Tustin

$$s^q = \left[\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]^q \Rightarrow s^q = \left[\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right]^q$$

Ejercicios:

Obtener la transformada Z de

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \qquad G(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

Por aproximación de primer retroceso y Tustin y comparar resultados por simulación en MATLAB. Considerar: T=0.1s y T=1s para ambos casos

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Mapeo del plano s al z

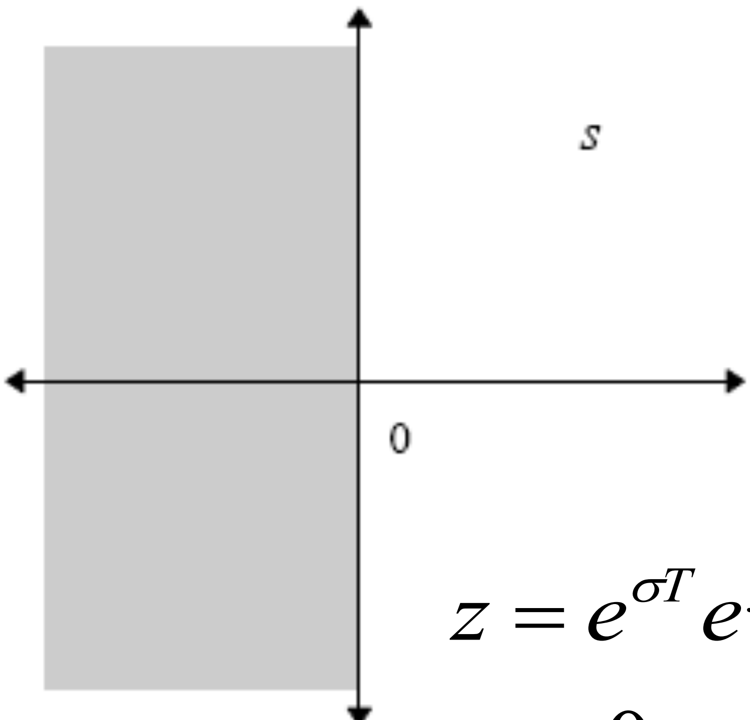
Las variables s y z están relacionadas por $z = e^{sT}$

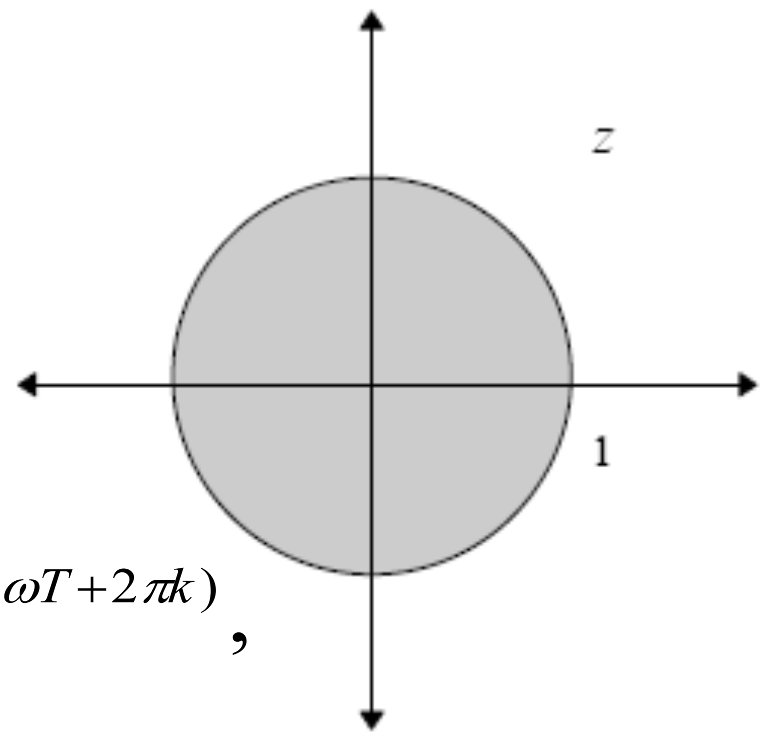
Si consideramos que $s = \sigma + j\omega$

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi k)}$$

Mapeo del plano s al z

El semiplano izquierdo en ***s*** equivale al interior del círculo unitario en ***z***



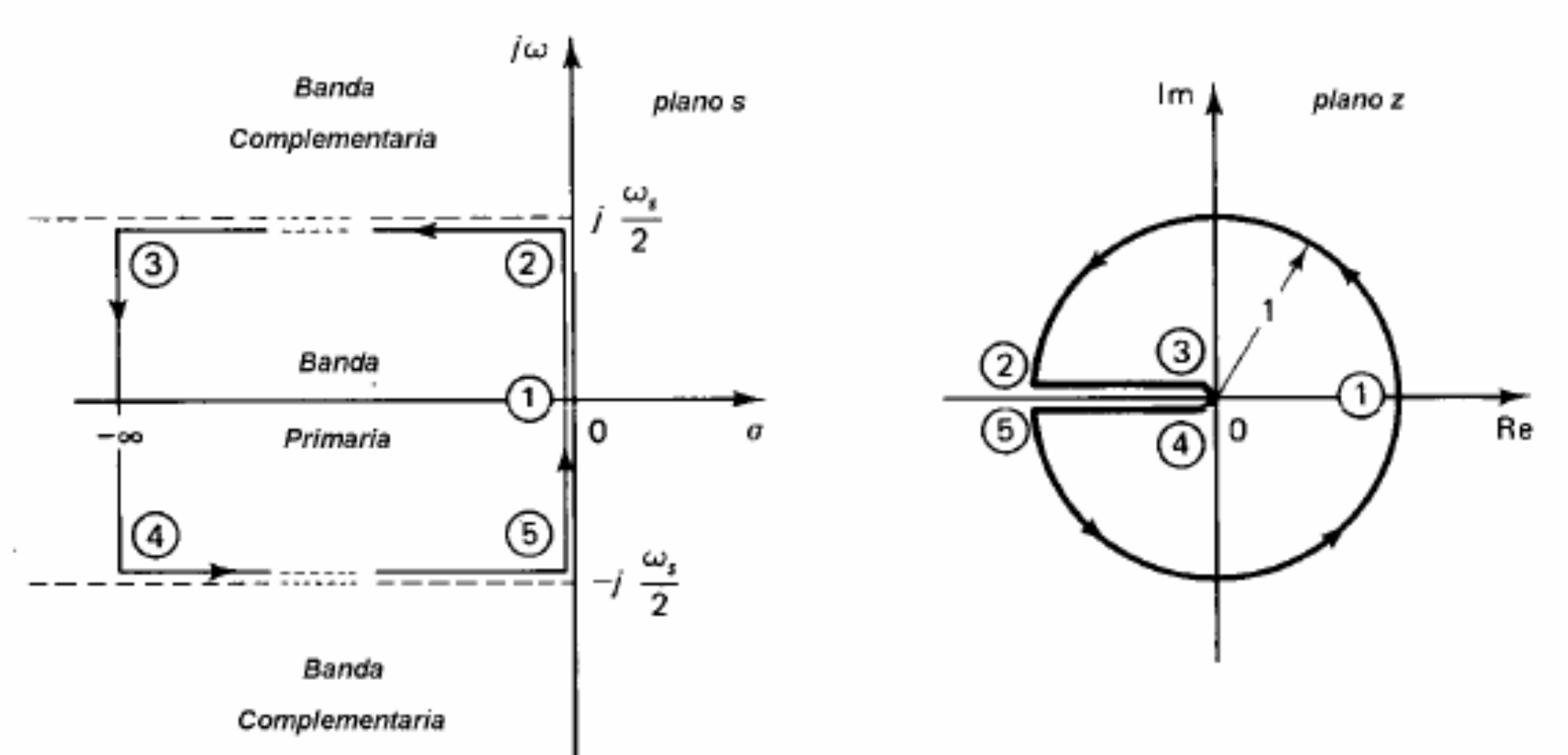


$$z = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi k)},$$

$$\sigma = 0$$

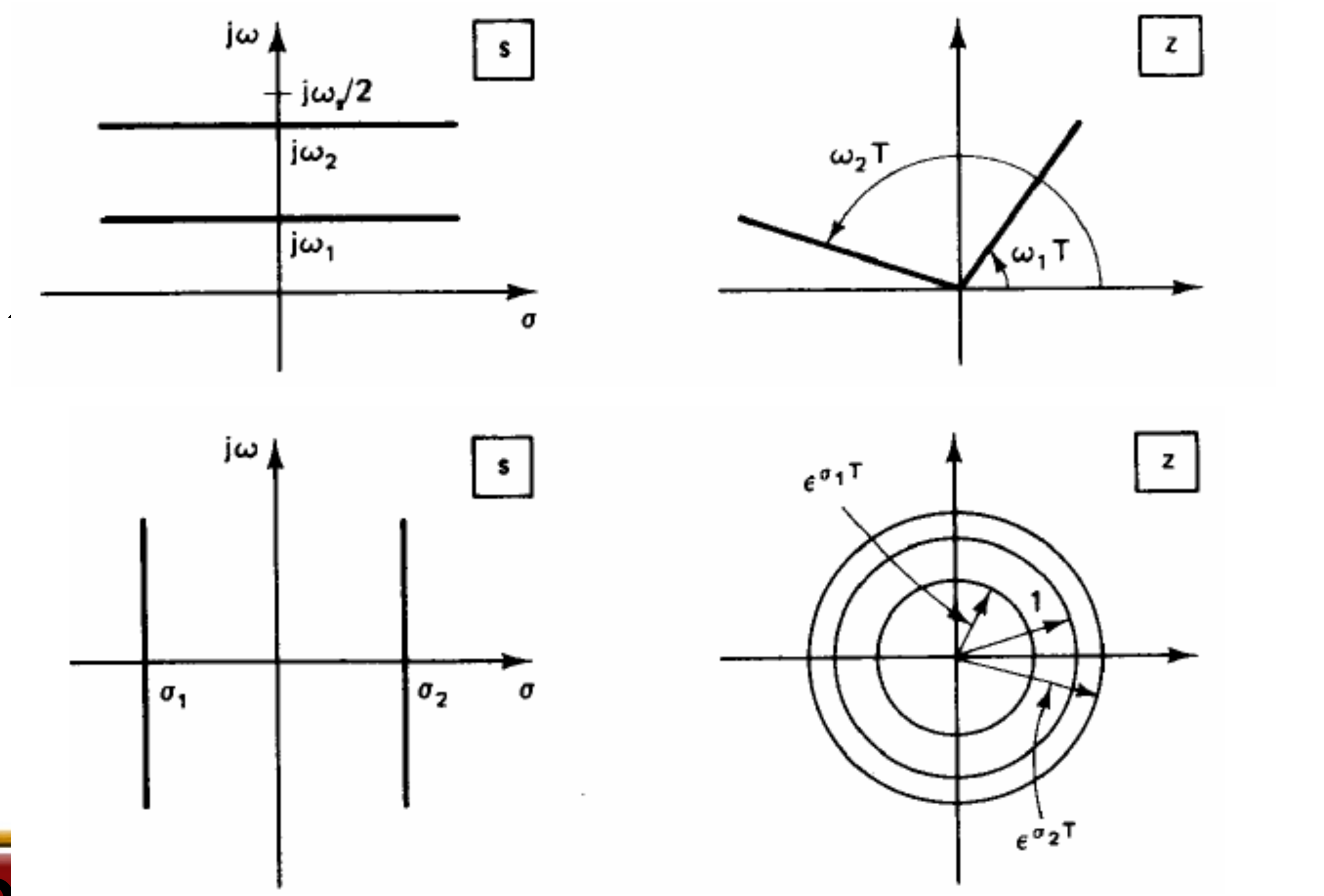
Mapeo del plano s al z

Considerar el caso en que la frecuencia de muestreo es limitada



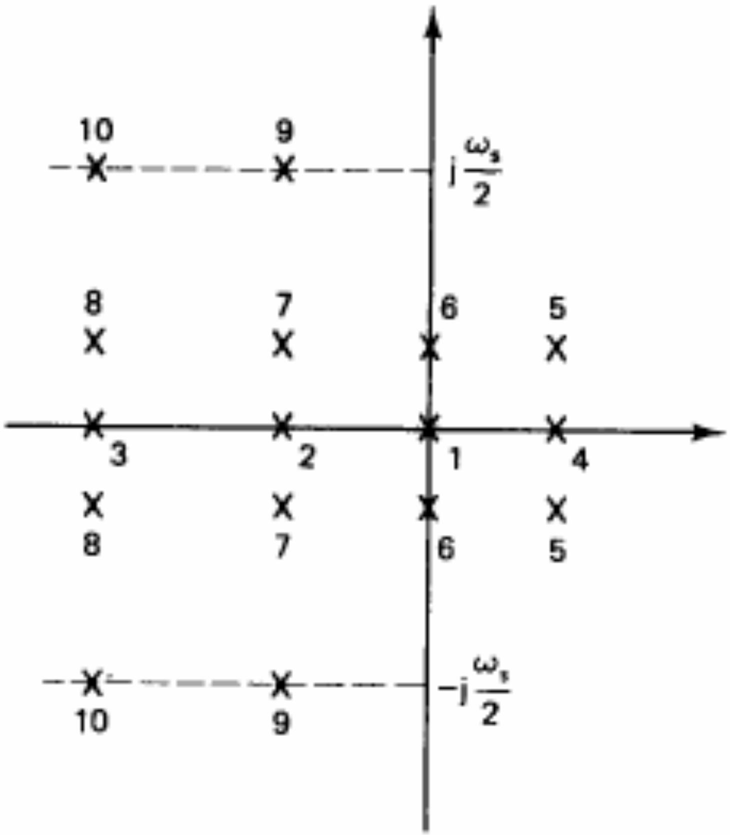
Mapeo del plano s al z

Relación entre líneas de ***s*** con ***z***

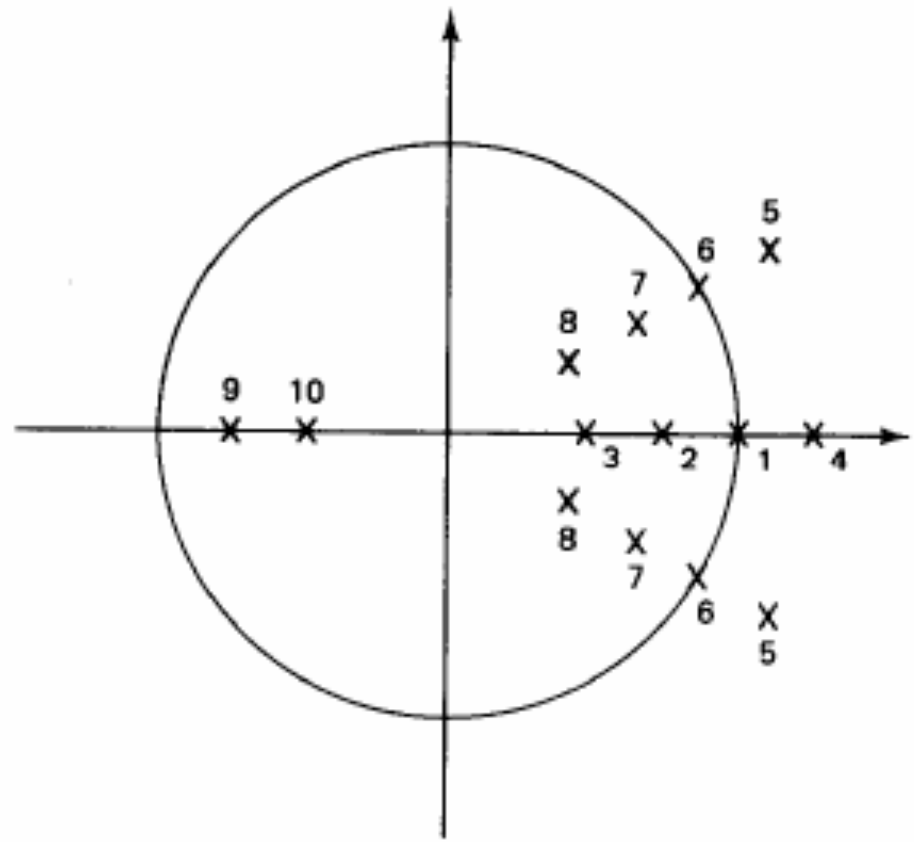


Mapeo del plano s al z

Relación entre líneas de *s* con *z*



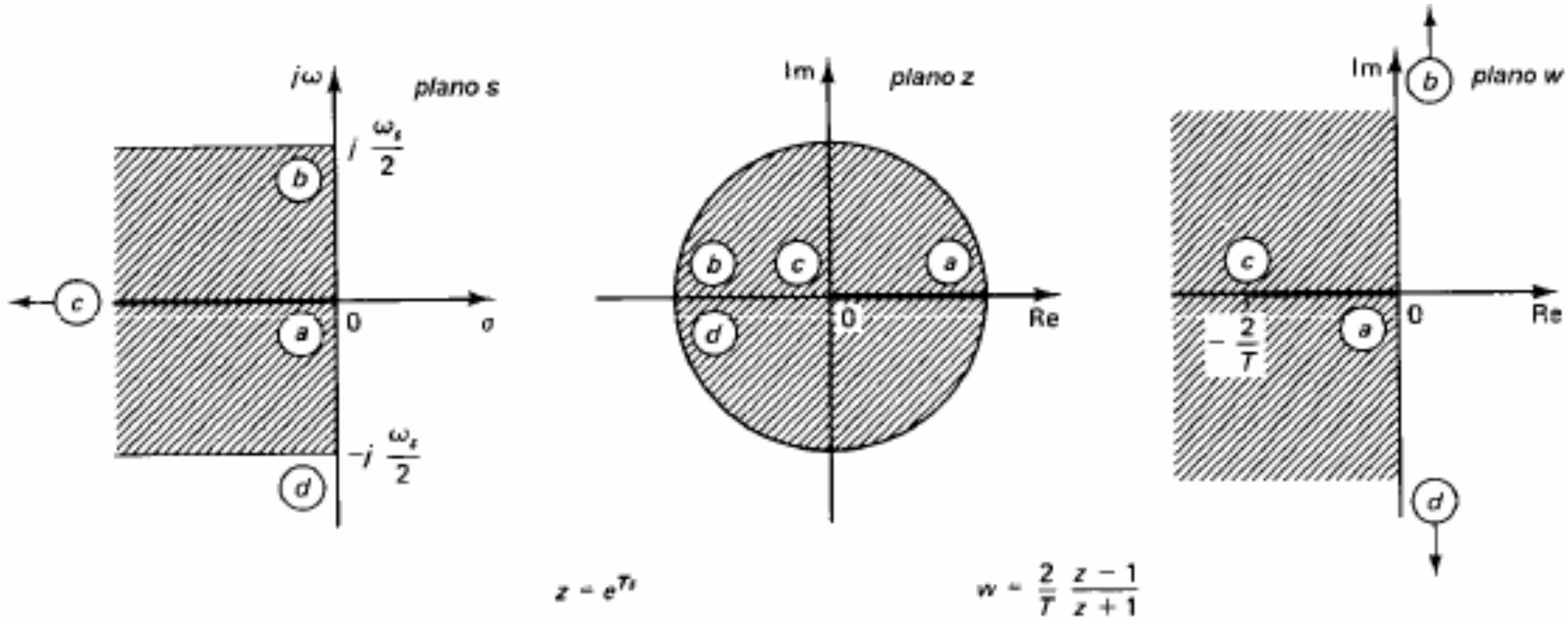
Plano s



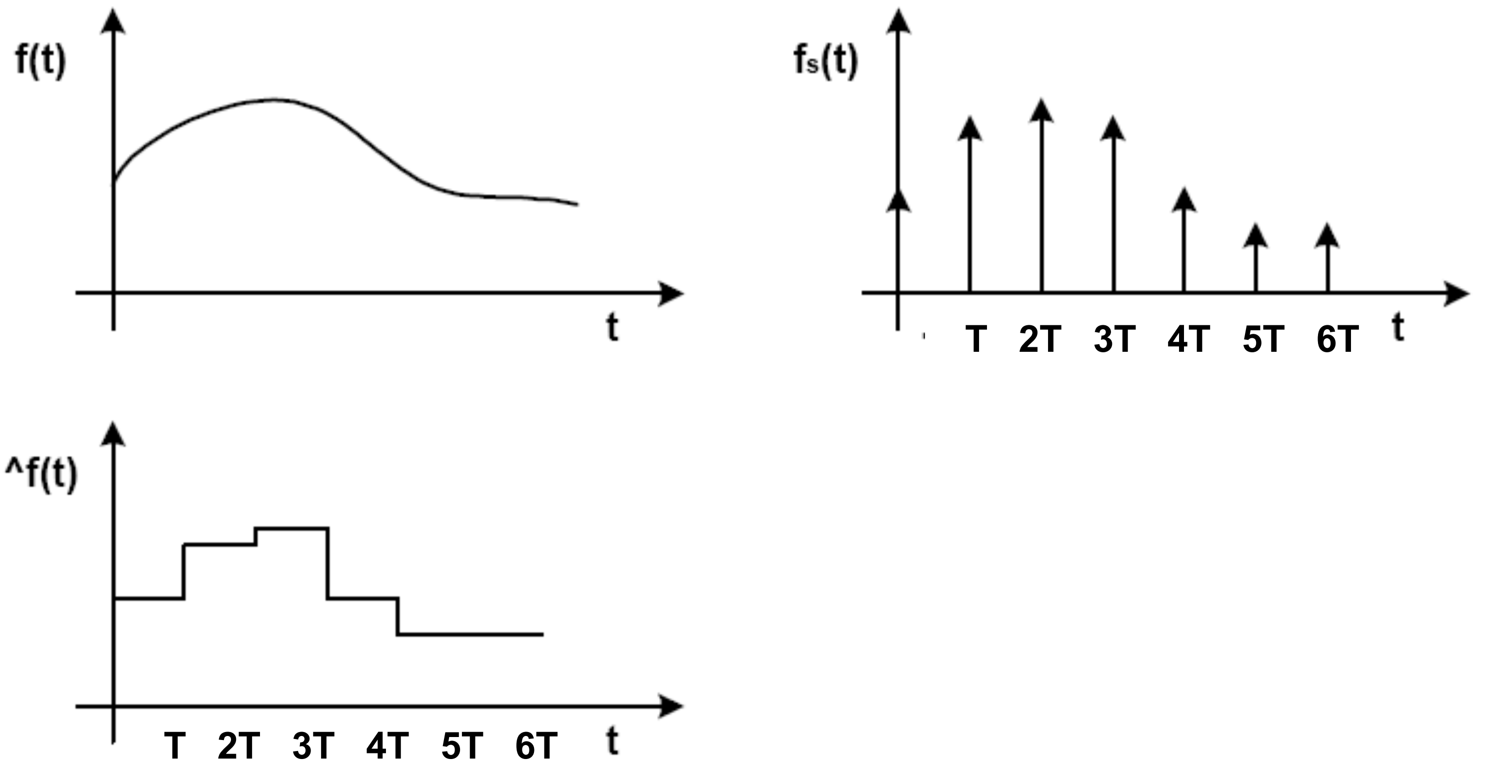
Plano z

Transformación bilineal

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1 + \frac{T}{2} \cdot w}{1 - \frac{T}{2} \cdot w}$$

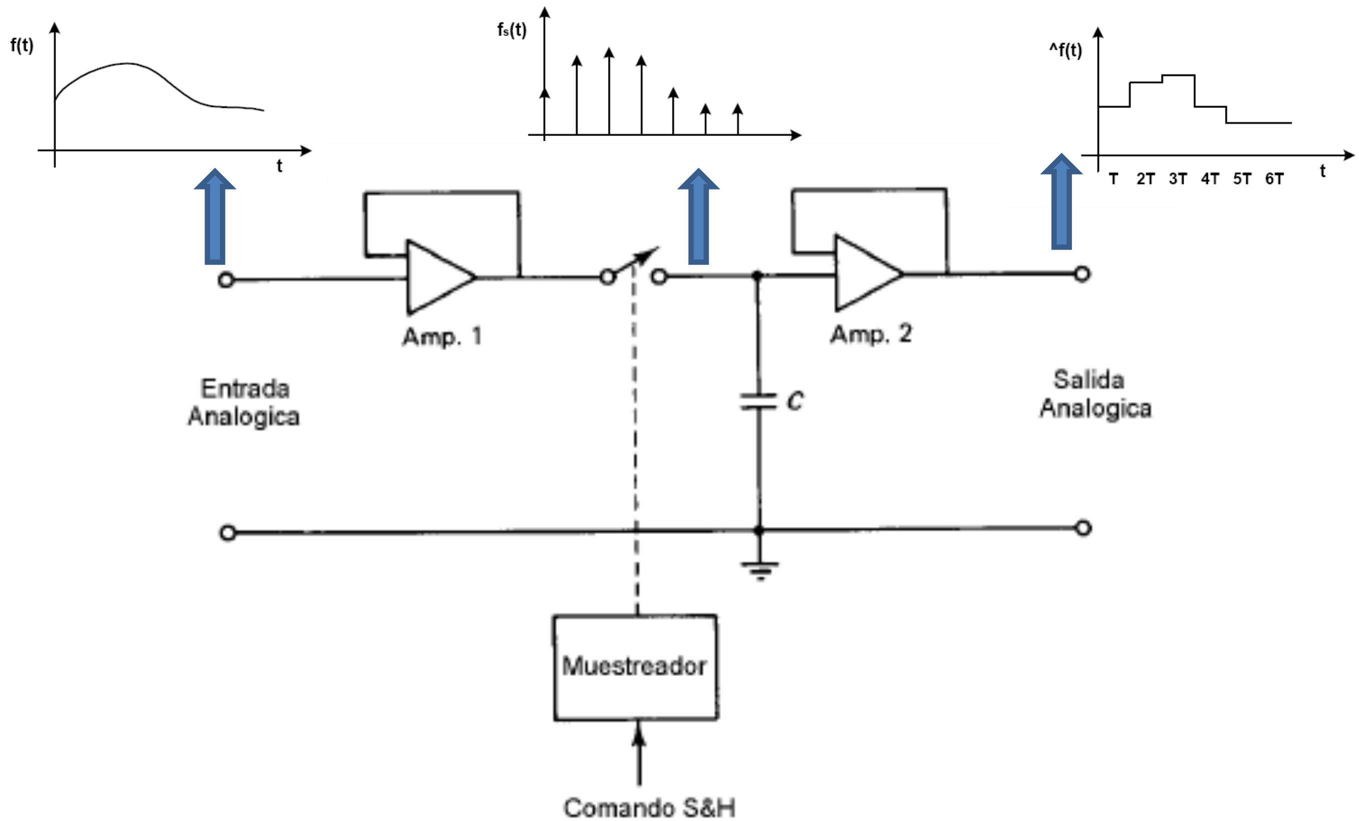


Reconstrucción de señales



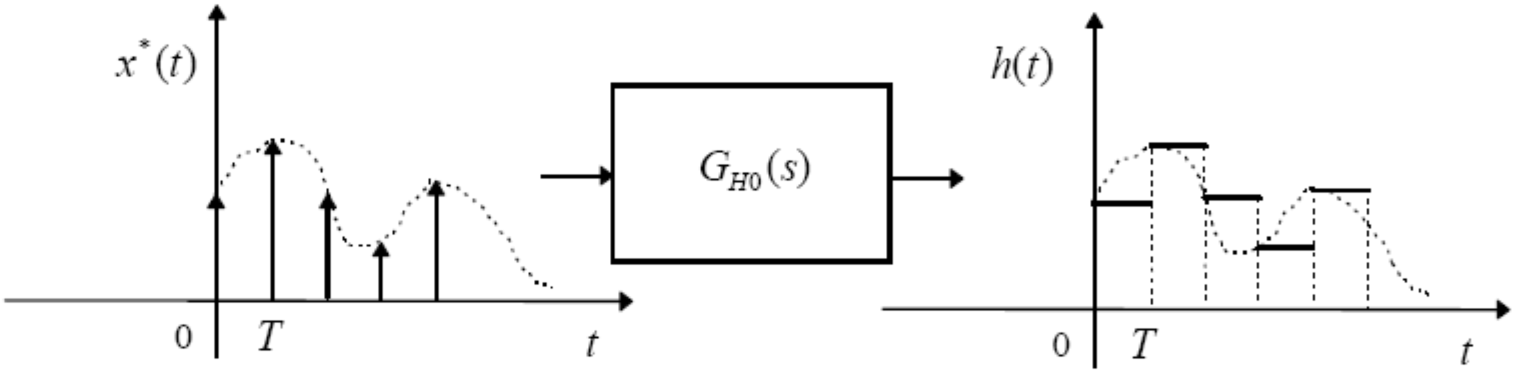
Muestreo y reconstrucción de señales

Reconstrucción de señales



Retenedor de orden cero

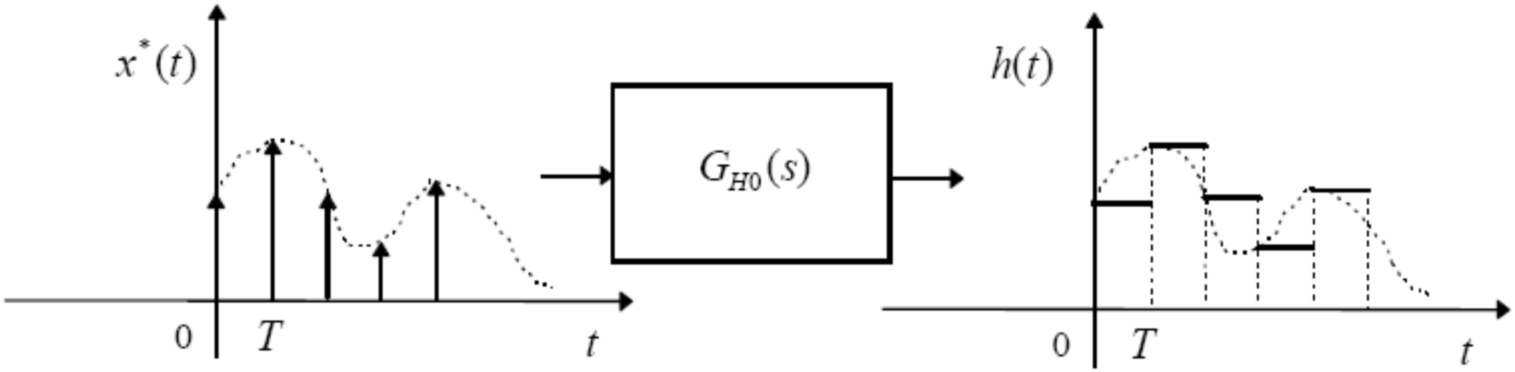
Retenedor de orden cero



$$h(t) = h(0)\cdot(u(t) - u(t-T)) + h(T)\cdot(u(t-T) - u(t-2T)) + \ldots$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\cdot\left[u(t-kT) - u(t-(k+1)T)\right]$$

Retenedor de orden cero



$$h(t) = h(0)\cdot(u(t) - u(t-T)) + h(T)\cdot(u(t-T) - u(t-2T)) + \ldots$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\cdot\left[u(t-kT) - u(t-(k+1)T)\right]$$

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\cdot\left(\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s}\right) \longrightarrow H(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\cdot e^{-kTs}\right)\cdot\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)$$

Discretización con retenedor de orden cero

$$G(z) = Z\{G_{ZOH}(s) \cdot G(s)\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Discretización con retenedor de orden cero

Ejemplo:

Discretizar Gc(s) considerando que le precede un retenedor de orden cero

$$G(s) = \frac{30}{(s+5)(s+10)}$$

Discretización con retenedor de orden cero

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{30}{s(s+5)(s+10)}\right\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{3}{5}\frac{1}{s} - \frac{30}{25}\frac{1}{s+5} + \frac{3}{5}\frac{1}{s+10}\right\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\frac{3}{5}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}} - 2\frac{1}{1 - e^{-5T}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-10T}z^{-1}}\right\}$$

Discretización con retenedor de orden cero

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{30}{s(s+5)(s+10)}\right\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{3}{5}\frac{1}{s} - \frac{30}{25}\frac{1}{s+5} + \frac{3}{5}\frac{1}{s+10}\right\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\frac{3}{5}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}} - 2\frac{1}{1 - e^{-5T}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-10T}z^{-1}}\right\}$$

$$G(z) = \frac{3}{5}\left\{1 - 2\frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-5T}z^{-1}} + \frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-10T}z^{-1}}\right\}$$

Discretización con retenedor de orden cero