



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

## Ingeniería Mecatrónica

# ***CONTROL EN TIEMPO DISCRETO***

**Dr. Enrique Reyes Archundia**

**Enero 2022**

**Instituto Tecnológico de Morelia**

# Transformada Z inversa

## Métodos para la resolución de la transformada z

- División directa
- Método computacional
- Fracciones parciales

# División directa

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

# División directa

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \\ & \quad \left( z^{-1} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \right. \\ & \quad \left. - z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \right. \\ & \quad \left. - 2z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-4} \right. \\ & \quad \left. + 3z^{-3} - 2z^{-4} \right) \end{aligned}$$

# División directa

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \\ & \quad z^{-1} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ & \quad -z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \end{aligned}$$

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$\begin{aligned} & -2z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-4} \\ & + 3z^{-3} - 2z^{-4} \end{aligned}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + x(4)z^{-4} + \dots$$

# División directa

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \\ & \quad z^{-1} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ & \quad -z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \end{aligned}$$

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$\begin{aligned} & -2z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-4} \\ & + 3z^{-3} - 2z^{-4} \end{aligned}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + x(4)z^{-4} + \dots$$



$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$x(2) = 2$$

$$x(3) = 3$$

$$x(4) = 4, etc$$

# División directa

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \\ & \quad z^{-1} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ & \quad -z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \end{aligned}$$

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$\begin{aligned} & -2z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-4} \\ & + 3z^{-3} - 2z^{-4} \end{aligned}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + x(4)z^{-4} + \dots$$



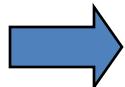
$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$x(2) = 2$$

$$x(3) = 3$$

$$x(4) = 4, etc$$



$$x(k) = k$$

# Método Computacional

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)}$$

# Método Computacional

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)}$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

# Método Computacional

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)}$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

$$X(z) = \frac{z U(z)}{z^2 - 0.5z - 0.5} \quad \text{donde } U(z) = 1$$

# Método Computacional

$$X(z)[z^2 - 0.5z - 0.5] = zU(z)$$

# Método Computacional

$$X(z)[z^2 - 0.5z - 0.5] = zU(z)$$

$$z^2 X(z) - 0.5z X(z) - 0.5 X(z) = zU(z)$$

# Método Computacional

$$X(z)[z^2 - 0.5z - 0.5] = zU(z)$$

$$z^2 X(z) - 0.5zX(z) - 0.5X(z) = zU(z)$$

Considerando condiciones iniciales igual a cero

$$x(k+2) - 0.5x(k+1) - 0.5x(k) = u(k+1)$$

# Método Computacional

$$X(z)[z^2 - 0.5z - 0.5] = zU(z)$$

$$z^2 X(z) - 0.5z X(z) - 0.5 X(z) = zU(z)$$

Considerando condiciones iniciales igual a cero

$$x(k+2) - 0.5x(k+1) - 0.5x(k) = u(k+1)$$

$$x(k+2) = 0.5x(k+1) + 0.5x(k) + u(k+1)$$

# Método Computacional

Se calculan manualmente los valores para  $x(0)$  y  $x(1)$  y después se obtienen los valores para  $x(k+2)$  con un ciclo usando:

$$x(k+2) = 0.5x(k+1) + 0.5x(k) + u(k+1)$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)}$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z+0.5}$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z+0.5}$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z+0.5}$$

$$z = Az(z+0.5) + Bz(z-1)$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z+0.5}$$

$$z = Az(z+0.5) + Bz(z-1)$$



$$z \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 = 1.5A \therefore A = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z+0.5}$$

$$z = Az(z+0.5) + Bz(z-1)$$



$$z \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 = 1.5A \therefore A = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

$$z = -0.5 \Rightarrow -0.5 = B(-0.5)(-1.5) \therefore B = -\frac{1}{1.5} = -\frac{2}{3}$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{2}{3} \frac{z}{z+0.5}$$

# Fracciones parciales

$$G(z) = \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{2}{3} \frac{z}{z+0.5}$$

$$g(k) = \frac{2}{3}(1) - \frac{2}{3}(-0.5)^k \therefore g(k) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-0.5)^k$$