INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MORELIA

"José María Morelos y Pavón"

Ingeniería en Mecatrónica.

Examen 4to Parcial.

Profesor:

Johan Walter González Murueta.

Alumnos:

Román Lemus Dorantes.

Materia:

Control.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Morelia, Michoacán, México. Enero del 2022

Roman Lemus Dorantes

FECHA: 29/12/21

HOJA:

Considerando el siguiente sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+5)(s+6)}$$

1.- Obtenga su representación en espacio de estados (A, B. C y D) en las siguientes formas.

A) forma canónica controlable.

* Sustituyendo en las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -60 & -52 & -13 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D=[0]$$

B) Forma canónica observable.

* Sustituyendo en las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D=[0]$$

C) Forma canónica diagonal o de Jordan, según corresponda

* No hay polos repetidos por lo que se hace el procedimiento de la forma diagonal:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C_1}{(s+2)} + \frac{C_2}{s+5} + \frac{C_3}{s+6} = \frac{1}{(s+2)(s+5)(s+6)}$$

$$1 = C_1(s+5)(s+6) + C_2(s+2)(s+6) + C_3(s+2)(s+5)$$

- Si $s=-2$

$$1 = C_1(-2+5)(-2+6)$$

$$1 = C_1(3)(4) \longrightarrow C_1 = \frac{1}{(3)(4)} = \frac{1}{12}$$

- Si $s=-5$

$$1 = C_2(-5+2)(-5+6)$$

$$1 = C_2(-3)(1) \longrightarrow C_2 = -1/3$$

- Si $s=-6$

$$1 = C_3(-6+2)(-6+5)$$

$$1 = C_3(-4)(-1) \longrightarrow C_3 = 1/4$$

* Sustituyendo en las matrices

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1/12 & -1/3 & -1/4 \end{bmatrix} \quad D=[0]$$

NOTA:

	Roman Lemus Dorantes	FECHA: 29/12/21
		HOJA:

2.- Verifique si el sistema es completamente controlable para cada una de las formas encontradas.

$$P_c = [B \quad AB \quad A^2B]$$

A) Forma canónica controlable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -60 & -52 & -13 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -60 & -52 & -13 \\ 780 & 616 & 117 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix} \quad A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -13 \\ 117 \end{bmatrix}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -13 \\ 1 & -13 & 117 \end{bmatrix} \qquad P_c = -1$$

Como el $|P_c| \neq 0$ el sistema es completamente Controlable.

B) Forma canónica observable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -60 & 780 \\ 0 & -52 & 616 \\ 1 & -13 & 117 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |P_c| = 1$$

Como el $|P_c| \neq 0$ el sistema es completamente Controlable.

C) Forma canónica diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A^2B = \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & -6 & 36 \end{bmatrix}$$

$$|P_c| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & -6 & 36 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 25 \end{vmatrix} = -180 - 24 - 50 - [-20 - 150 - 72] \longrightarrow |P_c| = -254 + 242 = -12$$

* Como $|P_c| \neq 0$ el sistema es completamente controlable.

3.- Verifique si el sistema es completamente observable para cada una de las formas encontradas.

$$P_o = [C^T \quad A^TC^T \quad (A^T)^2 \quad C^T]$$

NOTA:

Roman Lemus Dorantes

FECHA: 29/12/21

HOJA:

A) Forma canónica controlable.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -60 & -52 & -13 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix}$ $C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(A^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -60 & 780 \\ 0 & -52 & 616 \\ 1 & -13 & 117 \end{bmatrix}$

$A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(A^T)^2 C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $|P_o| = 1$

* Como $|P_o| \neq 0$ el sistema es completamente observable

B) Forma canónica observable.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -60 & -52 & -13 \end{bmatrix}$ $C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(A^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -60 & -52 & -13 \\ 780 & 616 & 117 \end{bmatrix}$

$A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ $(A^T)^2 C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -13 \\ 117 \end{bmatrix}$ $P_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -13 \\ 1 & -13 & 117 \end{bmatrix}$ $|P_o| = -1$

* Como $|P_o| \neq 0$ el sistema es completamente observable

C) Forma canónica diagonal.

$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1/12 & -1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $C^T = \begin{bmatrix} 1/12 \\ -1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix}$ $(A^T)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$

$A^T C^T = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 5/3 \\ -3/2 \end{bmatrix}$ $(A^T)^2 C^T = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -25/3 \\ 9 \end{bmatrix}$ $P_o = \begin{bmatrix} 1/12 & -1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 5/3 & -25/3 \\ 1/4 & -3/2 & 9 \end{bmatrix}$

$$|P_o| = \begin{vmatrix} 1/12 & -1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 5/3 & -25/3 \\ 1/4 & -3/2 & 9 \\ 1/12 & -1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 5/3 & -25/3 \end{vmatrix} = \frac{9(5)}{3(12)} + \frac{3}{9(2)} + \frac{25}{4(18)} - \left[\frac{5}{9(4)} + \frac{25(3)}{12(6)} + \frac{9}{18} \right] \longrightarrow |P_o| = 1/12$$

* Como $|P_o| \neq 0$ el sistema es completamente observable

NOTA:

Roman Lemus Dorantes

FECHA: 29/12/21

HOJA:

4.- Obtenga los polos a partir de cada una de las formas encontradas.

Teniendo en cuenta la siguiente ecuación para obtener los polos

$$|sI - A|$$

A) Forma canónica controlable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -60 & -52 & -13 \end{bmatrix} \qquad sI = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \qquad |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 60 & 52 & s+13 \end{vmatrix}$$

$$|sI - A| = s(s^2+13s+52) - (-1)(-1)(60)(-1) \longrightarrow s^3+13s^2+52s+60$$

Raices de la ecuacion con matlab => $s_1 = -2$; $s_2 = -6$; $s_3 = -5$

B) Forma canónica observable

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \qquad sI = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \qquad |sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 & 60 \\ -1 & s & 52 \\ 0 & -1 & s+13 \end{vmatrix}$$

$$|sI - A| = s(s^2+13s+52) + 60(1) = s^3+13s^2+52s+60$$

Raices de la ecuacion con matlab => $s_1 = -2$; $s_2 = -6$; $s_3 = -5$

C) Forma canónica diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad sI = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \qquad |sI - A| = \begin{vmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+5 & 0 \\ 0 & 0 & s+6 \end{vmatrix} = (s+2)(s+5)(s+6)$$

Raices de la ecuacion con matlab => $s_1 = -2$; $s_2 = -6$; $s_3 = -5$

5.- Compare similitudes y diferencias de controlabilidad, observabilidad y polos entre cada una de las formas. Recordando que son representaciones de un mismo sistema. Qué explica las similitudes o diferencias?

En cuanto a la observabilidad y controlabilidad, los determinantes de las matrices entregan diferentes resultados, pero con las 3 formas se concluye que el sistema es controlable y observable. En cuanto a los polos, con las 3 formas se obtienen exactamente los mismos resultados.

NOTA:

Roman Lemus Dorantes

FECHA: 29/12/21

HOJA:

6.- Utilizando la forma canónica controlable del sistema, suponga que es retroalimentado con $u=-Kx$. Obtenga el rngo de los elementos de K para que el sistema sea estable.

A) $K=[K_1\ 0\ 0]$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-60&-52&-13\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad K=[K_1\ 0\ 0]\quad BK=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\K_1&0&0\end{bmatrix}\quad A-BK=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-(60+K_1)&-52&-13\end{bmatrix}$$

$$sI=\begin{bmatrix}s&0&0\\0&s&0\\0&0&s\end{bmatrix}\quad sI-(A-BK)=\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\60+K_1&52&s+13\end{bmatrix}\quad |sI-(A-BK)|=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\60+K_1&52&s+13\end{vmatrix}$$

$$|sI-(A-BK)|=s(s^2+13s+52)+1(1)(60+K_1)\longrightarrow s^3+13s^2+52s+60+K_1$$

• Por Routh-Hurwitz

s^3	1	52
s^2	13	$60+K_1$
s^1	$\frac{616-K_1}{13}$	0
s^0	$60+K_1$	0

$$\frac{52(13)-60-K_1}{13}=\frac{616-K_1}{13}$$

• Obteniendo los rangos

$$\frac{616-K_1}{13}>0\longrightarrow 616-K_1>0\longrightarrow 616>K_1$$

$$60+K_1>0\longrightarrow K_1>-60$$

* K_1 Solo puede tener valores positivos

$K_1>0$

* Obteniendo el rango final

$K_1>0\ \cup\ K_1<616$

$$0<K_1<616$$

b) $K=[0\ K_2\ 0]$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-60&-52&-13\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad K=[0\ K_2\ 0]\quad BK=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&K_2&0\end{bmatrix}\quad A-BK=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-60&-52-K_2&-13\end{bmatrix}$$

$$sI=\begin{bmatrix}s&0&0\\0&s&0\\0&0&s\end{bmatrix}\quad sI-(A-BK)=\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\60&52+K_2&s+13\end{bmatrix}\quad |sI-(A-BK)|=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\60&52+K_2&s+13\end{vmatrix}$$

NOTA:

Roman Lemus Dorantes

FECHA: 29/12/21

HOJA:

$|sI-(A-BK)| = s(s^2+13s+52+K_2)+60 \longrightarrow s^3+13s^2+s(52+K_2)+60$

• Por Ruth

s^3	1	$52+K_2$
s^2	13	60
s^1	$616/13+K_2$	0
s^0	60	

$$\frac{13(52)+13K_2-60}{13} = \frac{616}{13}+K_2$$

• Obteniendo rango

$\frac{616}{13}+K_2>0 \longrightarrow K_2>-\frac{616}{13}$

• K_2 Solo puede tener Valores positivos.

$K_2>0$

NOTA: