0.1. 12.08.2020 - Repaso Cálculo 2

0.1.1. Sumas de Riemann con una variable

En matemáticas, la **suma de Riemann** es un tipo de aproxinación del valor de una integralmediante una suma infinita. La suma se calcula dividiendo las región en formas (rectángulos, trapezoies, parábolas o cúbicas) que juntas forman una región similar a la región que se está midiento, a las cuales se les calcula el area para así poder sumarlas (las areas).

Generalizasión

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\,\Delta x.$$

0.1.2. Terorema Fundamental del Cálculo

Parte I

Sea f una función integrable en $[a, b]$, y definimos una nueva función F en $[a, b]$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Si c pertenece a $[a, b]$ y f es continua en c, entonces F es diferenciable en c, y:

$$F'(c) = f(c).$$

Este **primera parte del teorema fundamental del cálculo** afirma que podemos construir una **primitiva**[1] de cualquier función continua por integración. Cuando se combina esto con el hecho de que dos primitivas de la misma función son iguales salvo una constante, se obtiene el la segunda parte de esté teorema. [2]

Parte II

Suponiendo que f es continua en un intervalo abierto I, y sea P cualqueir primitiva (ina integral indefinida, $P' = f$) de de f en I. Entonces, para cada a y cada b en I, se tiene que:

$$\int_a^x f(t)\,dt = P(b) - P(a).$$

Demostración

Sea:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, por la **primera parte del teorema**:

$$F'(x) = f(x) = P'(x).$$

Ya que existe C constante, se tiene:

$$F(x) = P(x) + C.$$

[1] antíderivada
[2] Apostol

Para poder calcular C se utiliza:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0P(a) + C.$$

$$C = -P(a).$$

Apartir del caso de $F(x)$ se tiene:

$$P(x) = P(x) - P(a).$$

Ahora si se tiene $x = b$ la todo lo anterior se puede reflejar de la siguiente forma:

$$P(b) = \int_a^b f(t)\,dt = P(b) - P(a).$$

Conclusión

Este teorema indica que se puede calcular el valor de una integral definida simplemente restando, si conocemos su **antiderivada**.

0.1.3. Coordenadas Polares

Teniendo en cuenta que el plano cartesiano es simplemente una **útil** forma de interpretación de puntos. Pero además de esta, existen otros sistemas de coordenadas, como por ejemplo las **coordenadas polares**. Pensando a ambos sistemas en terminos de vectores, se pueden encontrar las siguientes distinciones:

Coordenadas cartesianas las componentes x,y de un vector (en $\mathbb{R}^2$).

Coordenadas polares la magnitud (longitud) y dirección (ángulo) del vector.

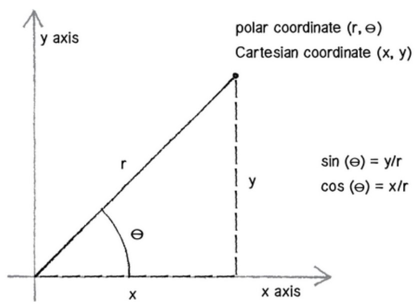

Figura 1: de cartesianas a polares

Siendo θ el ángulo y r la distancia desde el vertice, la notación para las coordenadas polares es: (θ, r) (a diferencia de (x, y) utilizado en es sistema cartesiano). Para calcular la transición de un sistema a otro se tiene:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \times \sin(\theta).$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \times \cos(\theta).$$

0.1.4. Ecuaciones Parametricas

Las ecuaciones parampétricas de cualqueir recta r se obtienen por medio de la siguiente expresión:

$$\lambda \in \mathbb{R} \to$$

$$\to \begin{cases} x = & a_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = & a_2 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

Donde:

- x e y son las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ de la recta.
- a_1 y a_2 son las coordenadas de un punto conocido de la recta $A(a_1, a_2)$.
- v_1 y v_2 son las componentes de un vector directo $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ de r.
- λ es un valor real que determina cada coordenada $P(x, y)$ dependiendo del valor que se le asigne.

Explicación

Cualquier **recta** r que se pueda dibujar sobre una hoja de papel puede ser determinada analiticamente por medio de **punto** A que forme parte de dicha recta y una dirección que se puede expresar mediante un **vector no nulo** $\overrightarrow{v}$.

Definición de una recta por medio de un punto y un vector

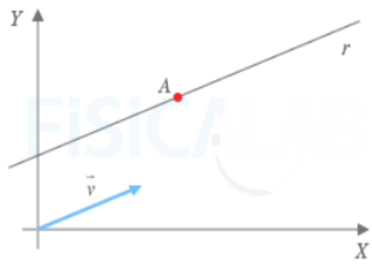

Figura 2: punto y vector

Como se observar en la figura 2, r se trata de una recta que pasa por el punto A y cuya dirección vine dada por el $\overrightarrow{v}$.

El vector encargado de determinar la dirección de la recta recibe el nombre de **vector director** el cual no es único, ya que cualquier vector paralelo a este sirve de igual forma para determinar la dirección de r. Por lo tanto si $\overrightarrow{v}$ es un vector director de la recta r, también lo será cualquier múltiplo de $\overrightarrow{v}$ $(\lambda \cdot \overrightarrow{v} | \lambda \in \mathbb{R}1)$

De parametricas a (x, y)

Teniendo en cuenta la ecuación vectorial de la recta, si $A(a_1, a_2)$ es un punto conocido de una recta r que posee un vector director $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ y $P(x, y)$ un punto cualquiera se sabe que:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda (v_1, v_2), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y) = (a_1 + \lambda v_1, a_2 + \lambda v_2), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por lo que se puede concluir la suposición inicial.

$$\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = & a_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = & a_2 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

0.1.5. Límite para dos variables por definición