Tercer Semestre

Probabilidad y Estadística 1

Juan Pablo Sierra Useche

Universidad Del Rosario
Escuela de Ingeniería, Ciencia y tecnología
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Índice general

Capítulo 1

Evetos y Conteo

03.08.2020 | Conjuntos, Modelos Probabilísticos y Axiomas

1.1.1. Repaso Tería de Conjuntos

Conjunto Un conjunto es una colección de objetos de cualquier tipo (ej: números, personas, colores, sabores, etc...), a estos objetos se les conoce como los elementos del conjunto.
Ejemplos:

- Los números naturales $\mathbb{N}$.
- Los alumnos del curso.

Objetos Siendo así, son los objetos aquellos que definen a los **conjuntos** en su totalidad.

Notación de Conjuntos

Si $\mathbb{S}$ es un conjunto y **x** un elemento de $\mathbb{S}$, escribimos $x \in \mathbb{S}$. Pero en el caso contrario, donde **x** no es un elemento de $\mathbb{S}$ escribimos $x \notin \mathbb{S}$.

Conjunto Vacío Este conjunto se caracteriza por no tener ningún elemento dentro de si mismo, y se denota: $\emptyset$.

Notación Conjunto Finito

Si $\mathbb{S}$ es un conjunto finito co elementos $x_1, x_2, ..., x_n$. Podemos denotar a S como:

$$\mathbb{S} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Ejemplos: $\mathbb{S}$ conjuto de resulatdos de un dado

$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, ..., 6\}$$

Notación Conjunto Infinito

Si $\mathbb{S}$ es un conjunto infinito enumerable con elementos $x_1, x_2, ...$ se puede escribir a $\mathbb{S}$ como:

$$\mathbb{S} = \{x_1, x_2, ...\}$$

1.1.2. Tipos de Notación

Extención Como los casos presentados anteriormente, esté tipo de notación implica en enumerar elementos demostrando el patron que describe el comportamiento del conjunto.

$$\mathbb{P} = \{2, 4, 6, ..., 40\}$$

$$\mathbb{W} = \{amarillo, azul, rojo\}$$

Comprención En este caso tipo de notación no se mencionan los elemento, sino que se mencionan las caracteristicas que tiene cada elemento perteneciete a el dicho conjunto.

$$\mathbb{W} = \{x|x \ es \ un \ color \ primario\}$$

$$\mathbb{P} = \{x|x \ es \ un \ número \ par \ entre \ el \ 2 \ y \ el \ 40\}$$

1.1.3. Relaciones Entre Conjuntos

Se dice que $\mathbb{S}$ es un subconjunto de $\mathbb{T}$ ($\mathbb{S}, \mathbb{T}$ conjuntos) es decir que $\mathbb{S}$ está contenido en $\mathbb{T}$ si todo elemento de $\mathbb{S}$ es también un elemento de $\mathbb{T}$.

Notación Sub Conjuntos

En el caso donde el **sub conjunto** puede ser el mismo **conjunto** se utiliza la siguiente notación:

$$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$$

Pero si el **sub conjunto** no puede ser el mismo **conjunto** se utiliza la siguiente notación:

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$$

En el caso de que un **conjunto** no esté contenido en otro, se utiliza la siguiente notación:

$$\mathbb{S} \not\subseteq \mathbb{T}$$

1.1.4. Conjunto Universal

Denotamos con Ω el **Conjunto Universal**; un conjunto especial que como caracteristica principal tiene a todos los elementos de interés en un determinado contexto.

Ejemplo $\Omega = \mathbb{C}$ si estudiamos raíces de polinomios con coeficientes reales. (*Teorema Findamental del Álgebra*).

1.1.5. Álgebra de Conjuntos

Complemento La notación pala el complemento es $\mathbb{S}^c$ dondo nos referimos al **complemento** de $\mathbb{S}$. Y esté se puede definir de la siguiente forma:

$$\mathbb{S}^c = \{x|x \notin \mathbb{S} \ (x \in \Omega)\}$$

Unión Donde $\mathbb{S}$ y $\mathbb{J}$ son conjuntos, la notación para la unión entre dos conjuntos es $\mathbb{S} \cup \mathbb{J}$ e implica:

$$\mathbb{S} \cup \mathbb{J} = \{x|x \in \mathbb{S} \ ó \ x \in \mathbb{J}\}$$

Intersección Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ conjuntos, su intersección se escribe: $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, y se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{x|x \in \mathbb{S} \ y \ x \in \mathbb{T}\}$$

Unión entre varios (o infinitos) conjunto

$$\bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{S}_i = \{x|x \in \mathbb{S}_i \ (0 > i > n)\}$$

Intersección entre varios (o infinitos) conjunto

$$\bigcap_{i=0}^{n} \mathbb{S}_i = \{x|x \in \mathbb{S}_i \ (0 > i > n)\}$$

Conjuntos Disyuntos Dos conjuntos $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ se dicen disyuntos o disjuntos si $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \emptyset$ lo que se generaliza al decir que $\bigcap_{i=0}^{n} \mathbb{S}_i = \emptyset$.

Disyunción 2 a 2 Varios conjuntos $\mathbb{S}_i$ se dicen conjuntos disyuntos 2 a 2 si $\mathbb{S}_i \cap \mathbb{S}_j = \emptyset$.

Observación

El par ordenado de dos objetos x, y se denota por (x, y) donde $(x, y) \neq (y, x)$. Lo que se diferencia de conjuntos donde $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Observación

Los diagramas de venn (representaciones graficas de conjuntos) resultan útiles al realizar problemas que involucran conjuntos.

Probabilidad y Estadística 1 - Juan Pablo Sierra Useche

1.1.6. Tarea Demostración De Lemas

Desde: 03.08.2020
Hasta: 05.08.2020

Ej 1. Demostrar los siguientes lemas:

a) $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T} \cup \mathbb{S}$ (conmutatividad)
Demostración
Sean $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ conjuntos, para demostrar que $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T} \cup \mathbb{S}$ es necesario demostrar las dos siguientes condiciones:

- Si $x \in (\mathbb{S} \cup \mathbb{T})$ es decir $x \in \mathbb{S}$ o $x \in \mathbb{S}$ o $x \in \mathbb{T}$, luego se pude decir que $x \in (\mathbb{T} \cup \mathbb{S})$.
- Si $x \in (\mathbb{T} \cup \mathbb{S})$ es decir $x \in \mathbb{T}$ o $x \in \mathbb{S}$ o $x \in \mathbb{S}$, luego se pude decir que $x \in (\mathbb{S} \cup \mathbb{T})$.

Como ambas situaciones son verdaderas, se puede concluir que la proposición es verdadera. ■

b) $\mathbb{S} \cap (\mathbb{T} \cup \mathbb{U}) = (\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \cup (\mathbb{S} \cap \mathbb{U})$ (distributividad)
Demostración
Sean $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ *y* $\mathbb{U}$ conjuntos, para demostrar que la proposición es verdadera hay que demostrar las dos siguientes condiciones:

- Si $x \in (\mathbb{S} \cap (\mathbb{T} \cup \mathbb{U}))$ significa que $x \in \mathbb{S}$ y también que $x \in (\mathbb{T} \cup \mathbb{U})$ es decir, que incondicionalmente $x \in \mathbb{S}$ pero también $x \in \mathbb{T}$ ó $x \in \mathbb{U}$. Por lo tanto se puede decir que $x \in ((\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \cup (\mathbb{S} \cap \mathbb{U}))$.
- Por otro lado hay que asumir que $x \in ((\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \cup (\mathbb{S} \cap \mathbb{U}))$, lo que significa que ó $x \in (\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$ ó $x \in (\mathbb{S} \cap \mathbb{U})$. A partir de lo anterior se puede asegurar que $x \in \mathbb{S}$ y que $x \in \mathbb{T}$ ó $x \in \mathbb{U}$, que es lo mismo que decir $x \in (\mathbb{S} \cap (\mathbb{T} \cup \mathbb{U}))$

Ya que se cumplen ambas condiciones, se puede concluir que la proposición es verdadera. ■

c) $(\mathbb{S}^c)^c = \mathbb{S}$
Demostración
Sea $\mathbb{S}$ un conjunto, es necesario demostrar dos situaciones para demostrar verdadera a la proposición:

- El hecho de que $x \in (S^c)^c$ quiere decir que $x \notin \mathbb{S}^c$ y por la definición de complemento, se puede asegurar que $x \in \mathbb{S}$.
- Asumiendo que $x \in \mathbb{S}$, por definición se puede decir que $x \notin \mathbb{S}^c$, implicando que x pertenece al complemento de $\mathbb{S}$.

Ya que ambas situaciones son verdaderas se a demostrado verdadera a la proposición. ■

d) $\mathbb{S} \cup \Omega = \Omega$
Demostración
Sea $\mathbb{S}$ un **sub conjunto** de Ω, se tiene:

- Al decir $x \in (\mathbb{S} \cup \Omega)$, por definición de **sub conjunto** se puede asegurar que es lo mismo que decir que $x \in \Omega$ ya que todo x que esté en $\mathbb{S}$ va a estar en Ω.
- Por otro lado al decir que $x \in \Omega$ se asegura que x pertenece a la unión entre Ω y cualquiera de sus **sub conjuntos**. Por lo tanto se puede igualar con $\mathbb{S} \cup \Omega$.

Teniendo en cuenta de que ambas condiciones se cumplen, se ha demostrando que la proposición es verdadera. ■

e) $\mathbb{S} \cup (\mathbb{T} \cup \mathbb{U}) = (\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) \cup \mathbb{U}$ (asociatividad)
Demostración
Sean $\mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{U}$ conjuntos luego:

$$\begin{aligned} x \in (\mathbb{S} \cup (\mathbb{T} \cup \mathbb{U})) &\iff x \in \mathbb{S} \vee x \in (\mathbb{T} \cup \mathbb{U}) \\ &\iff x \in \mathbb{S} \vee (x \in \mathbb{T} \vee x \in \mathbb{U}) \\ &\iff x \in \mathbb{S} \vee x \in \mathbb{T} \vee x \in \mathbb{U} \\ &\iff x \in ((\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) \cup \mathbb{U}) \end{aligned}$$

Así demostrando que la proposición es verdadera. ■

f) $\mathbb{S} \cup (\mathbb{T} \cap \mathbb{U}) = (\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) \cap (\mathbb{S} \cup \mathbb{U})$
Demostración
Sean $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup \mathbb{U}$ conjuntos, entonces:

$$\begin{aligned} x \in (\mathbb{S} \cup (\mathbb{T} \cap \mathbb{U})) &\iff x \in \mathbb{S} \vee (\mathbb{T} \cap \mathbb{U}) \\ &\iff x \in \mathbb{S} \vee (x \in \mathbb{T} \wedge x \in \mathbb{U}) \\ &\iff (x \in \mathbb{S} \vee x \in \mathbb{T}) \wedge (x \in \mathbb{S} \vee x \in \mathbb{U}) \\ &\iff x \in ((\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) \cap (\mathbb{S} \cup \mathbb{U})) \end{aligned}$$

De está forma se acaba de comprobar que la proposición es verdadera. ■

g) $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^c = \emptyset$
Demostración
Sea $\mathbb{S}$ un conjunto, y por contradicción suponiendo que $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^c \neq \emptyset$, por lo tanto $\exists x$ tal que $x \in (\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^c)$ pero por definición del complemento de $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}^c$ es todo lo que no está dentro de $\mathbb{S}$) significa que $\nexists x$ $(\rightarrow\leftarrow)$. Asi demostrando que la proposición es verdadera. ■

h) $\mathbb{S} \cap \Omega = \mathbb{S}$
Demostración
Sea $\mathbb{S}$ un conjunto, entonces es necesario evealuar las siguientes situaciones:

- Suponiendo que $x \in (\mathbb{S} \cap \Omega)$ como $\mathbb{S} \subseteq \Omega$ entonces de cualquier forma $\forall x \in \mathbb{S}$ tambien $x \in \Omega$. Pero x talque $x \in \mathbb{S}^c$.
- Suponiendo que $x \in \mathbb{S}$, y como $\mathbb{S} \subseteq \Omega$ entonces $x \in \mathbb{S} \wedge x \in$ es decir $x \in (\mathbb{S} \cap \Omega)$.

Ya que en ambos casos son verdaderos se ha demostrado que la proposición es verdadera. ■

Ej 2. Demostrar las **Leyes de De Morgan**:

a)

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{S}_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{S}_i^c$$

Demostración
Sea la union de varios **conjuntos** tal que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{S}_i = \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2 \cup \mathbb{S}_3 \cup ... \cup \mathbb{S}_n$ ahora por induccion matematica se van a revisar los siguientes casos:

Caso base (n=1)

$$\left(\bigcup_{i=1}^{1} \mathbb{S}_i\right)^c = \left(\mathbb{S}_i\right)^c = \mathbb{S}_1^c = \bigcap_{i=1}^{1} \mathbb{S}_1^c$$

Caso inductivo Suponiendo que $\bigcup_{i=1}^{n}\mathbb{S}_i$ la propiedad tal que:

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbb{S}_i\Big)^c = \mathbb{S}_1^c = \bigcap_{i=1}^{n}\mathbb{S}_i^c$$

$$Ahora:$$

$$(\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2 \cup ... \cup \mathbb{S}_n)^c \cap \mathbb{S}_{n+1}^c = (\mathbb{S}_1^c \cap \mathbb{S}_2^c \cap ... \cap \mathbb{S}_n^c) \cap \mathbb{S}_{n+1}^c$$

$$(\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2 \cup ... \cup \mathbb{S}_n \cup \mathbb{S}_{n+1})^c = \big(\mathbb{S}_1^c \cap \mathbb{S}_2^c \cap ... \cap \mathbb{S}_n^c \cap \mathbb{S}_{n+1}^c\big)$$

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1}\mathbb{S}_i\Big)^c = \bigcap_{i=1}^{n+1}\mathbb{S}_i^c$$

Así demostrando por inducción matemática que la proposición es verdadera para todo $n > 1$. ■

$b)$

$$\Big(\bigcap_{i=0}^{n}\mathbb{S}_i\Big)^c = \bigcup_{i=0}^{n}\mathbb{S}_i^c$$

04.08.2020 | Modelos Probabilisticos

Un modelo probabilístico consiste en la traducción situaciones inciertas a un lenguaje matemático.

Suponiendo que existe un experimento incierto al que se le va a asociar un modelo probabilistico, el cual se construye de los siguientes tres elementos:

1. El espacio muestral denotado por Ω. Este espacio es el conjunto con todos los posibles resultados del experimento.

2. Ley de probabilidad denotada por P.

3. Un espacio de eventos denotados por F, donde $F \subseteq \varphi(\Omega)$.

Para cada elemento de F se le va a asociar la probabilidad con la notación: $F(A)$ donde $A \subseteq F$.

Todos los dichos elementos pertencecientes a F tienen siertas caracteristicas:

Observación

Los subconjuntos medibles de Ω se llaman eventos.

- Los elementos deben ser **mutuamente excluyentes**, es decir que si un elemento del espacio muestral es solución al **modelo** entonces ningun otro elemento puede ser solución para el modelo.

- Los elementos del conjunto deben ser colectivamente exhaustivo, lo que quiere decir que la suma de todos los elementos en el conjuntos representan todas las posibles soluciones al experimento.

Observación

- El grado de detalle al definir Ω depende del interés en el problema (se debe incluir todo lo nnecesario y excluir todo lo no necesario).

- Ω puede ser *finito* o *infinito*.

Modelos Secuenciales

Si el experimento es de carácter secuencial, es útil describir Ω cuadriculas o **arboles**.

1.2.1. Axiomas de Probabilidad

Suponiendo que se conoce Ω y F. P debe reflejar qué tan posible son los eventos; a un evento $A \in F$ asociamos $P(A)$.

No negatividad $P(A) > 0, \forall A \in F$

Aditividad Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Normalización $P(\Omega) = 1$

1.2.2. Lemas

1. $P(\emptyset) = 0$

   Demostración

   Por normalización $1 - P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset) \to P(\emptyset) = 0$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Demostración

$$
\begin{aligned}
A &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\
B &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \\
P(A) + P(B) &= (A \cap B) + (A \cap B^c) + (A \cap B) + (A^c \cap B) \\
P(A) + P(B) - (A \cap B) &= (A \cap B^c) + (A \cap B) + (A^c \cap B) \\
P(A) + P(B) - (A \cap B) &= P(A \cup B)
\end{aligned}
$$

3. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

   Demostración

   Tarea

4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

   Demostración

   Tarea

1.2.3. Modelos Pobabilísticos Discretos y Continuos

Modelos Discretos Cuando Ω es finito o enumerable.

Observación

Si Ω es finito o enumerable, la función de probabilídad queda totalmente definida por los *singletons.*

1.2.4. Ley de probabilidad discreta uniforme

Si Ω tiene n elementos, todos igualmente posibles (todos los singletons tiene la misma probabilidad). Entonces $\forall A \in F, A \subseteq \Omega,\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Modelos Continuos Cuando Ω no es enumerable $Ej : (\Omega = \mathbb{R})$.

Observación

En este caso los singletons normalmente no son suficientes para definir toda la ley de probabilidad.

05.08.2020 | Probabilidad Condicional

Utilizamos probabilidad condicional cuando queremos sobre posibles resultados del experimento, teniendo alguna información parcial.

Ejemplo

- Tiro un dado y se que salió par. Queremos calcular la prob. de tener 4.
- Una persona sale negativaen un examen medico y queremos sabere la prob. de que si haya enfermedad (falso negativo).

Suponiendo que hay un experimento incierto. Sabemos que ocurrió un evento B. Queremos determinar la prob. de que ocurrio otro evento A.

Objetivo

Construir una nueva función de prob. que incorpore información que se tiene (acurrio B).

Observación

---

1. La nueva función de prob. debe satisfacer las axiomas.
2. La nueva función de prob. debe heredar la estructura de la función de prob. original.

1.3.1. Definición Formal

Sea b un evento tal que $P(B) > 0$. Se define la prob. condicional de un evento A (condicional al evento B) como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observación

Si $P(B) = 0$, la probabilidad condicional a B no está definida.

Teorema

Sea P una función de prob. sea B evento tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicinal en B es una ley de probabilidad. (Es decir qu cumple los axiomas de probabilidad).

Demostración

- $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- A_1, A_2 eventos disyuntos luego:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} \\ \frac{P(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B) \end{aligned}$$

- Sea A un evento.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 0$$

Es decir $P(|B)$ es una ley de probabilidad. ■

Corolario

Las propiedades de las funciones de probabilidad tambien se cumplen para la probabilidad condicional.

Ejemplo

- A_1, A_2 eventos: $A_1 \leq A_2 \to P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_1|B) - P(A_1 \cap A_2)$
