MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Teoría de Grafos
Isomorfismo de Grafos

Juan David Rojas Gacha

2020 - II

Universidad del
Rosario

Isomorfismo

Sean G y H grafos simples. Un **isomorfismo** de G a H es una función biyectiva $f : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ sii $f(u)f(v) \in E(H)$.

Isomorfismo

Sean G y H grafos simples. Un **isomorfismo** de G a H es una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ sii $f(u)f(v) \in E(H)$.

Grafos Isomorfos

G es **isomorfo** a H si existe un isomorfismo de G a H. Se nota $G \cong H$.

Invariante

Un **invariante** de un grafo es una propiedad P preservada por isomorfismos. De forma más precisa, P es un invariante si siempre que $G \cong H$:

Si G satisface P entonces H satisface P.

Invariante

Un **invariante** de un grafo es una propiedad P preservada por isomorfismos. De forma más precisa, P es un invariante si siempre que $G \cong H$:

Si G satisface P entonces H satisface P.

Nota:

Sea P es una propiedad invariante, si G satisface P y H no satisface P entonces $G \ncong H$.

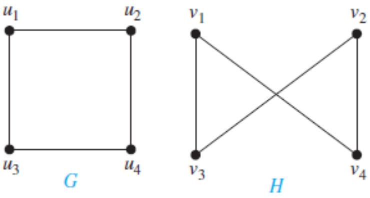
Invariantes

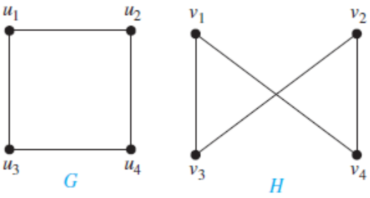
- G tiene n vértices.
- G tiene m aristas.
- G tiene n vértices de grado k.
- G tiene n ciclos de longitud k.
- G tiene n vértices adyacentes a m vértices de grado k.
- $\chi(G) = k$.
- G es conexo.
- G es k-partito.
- G es plano.
- G es euleriano.
- G es hamiltoniano.

Invariantes

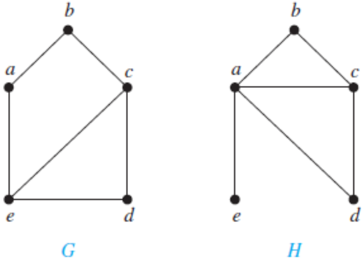
- G tiene n vértices.
- G tiene m aristas.
- G tiene n vértices de grado k.
- G tiene n ciclos de longitud k.
- G tiene n vértices adyacentes a m vértices de grado k.
- $\chi(G) = k$.
- G es conexo.
- G es k-partito.
- G es plano.
- G es euleriano.
- G es hamiltoniano.

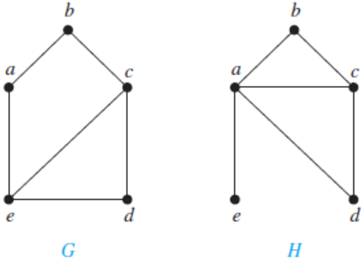
G tiene un vértice dentro de algún ciclo.


u_1
u_2
u_3
u_4
G
v_1
v_2
v_3
v_4
H

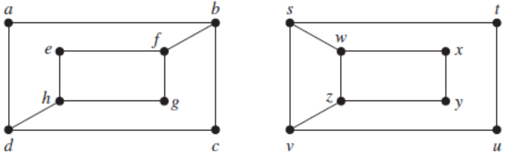


$$G \cong H$$

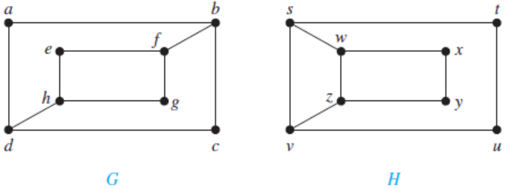

b
a
c
e
d
G
b
a
c
e
d
H



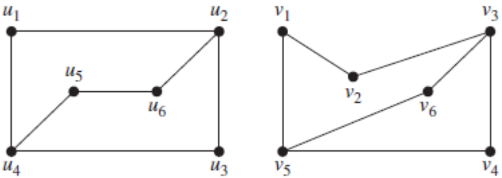
$$G \not\cong H$$



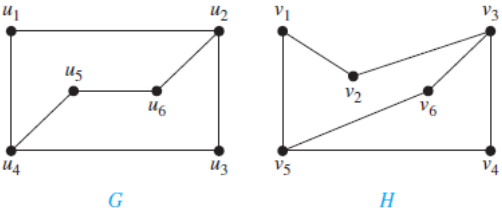
G $\qquad$ H



$$G \not\cong H$$



G H



$$G \cong H$$

$$
\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},
\quad
\mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

Teorema

La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de grafos simples.

Teorema

La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de grafos simples.

- Reflexiva: $G \cong G$.

Teorema

La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de grafos simples.

- Reflexiva: $G \cong G$.
- Simétrica: Si $G \cong H$, entonces $H \cong G$.

Teorema

La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de grafos simples.

- Reflexiva: $G \cong G$.
- Simétrica: Si $G \cong H$, entonces $H \cong G$.
- Transitiva: SI $G \cong H$ y $H \cong J$, entonces $G \cong J$.

Clase de Isomorfismo

Una **clase de isomorfismo** de un grafo es una clase de equivalencia de grafos bajo la relación de isomorfismo.

Clase de Isomorfismo

Una **clase de isomorfismo** de un grafo es una clase de equivalencia de grafos bajo la relación de isomorfismo.

Ejemplo

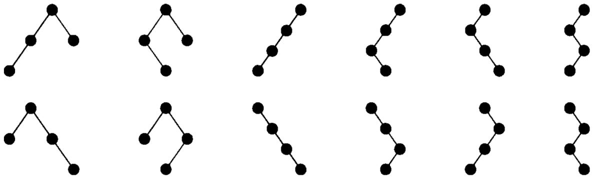
- Todos los caminos de n vértices son isomorfos.
- El conjunto de todos los caminos de n vértices forma una clase de isomorfismo.

Clase de Isomorfismo

Una **clase de isomorfismo** de un grafo es una clase de equivalencia de grafos bajo la relación de isomorfismo.

Ejemplo

- Todos los caminos de n vértices son isomorfos.
- El conjunto de todos los caminos de n vértices forma una clase de isomorfismo.



Grafos sin etiquetas

Un **grafo sin etiquetas** es una clase de isomorfismo.

Grafos sin etiquetas

Un **grafo sin etiquetas** es una clase de isomorfismo.

P_n

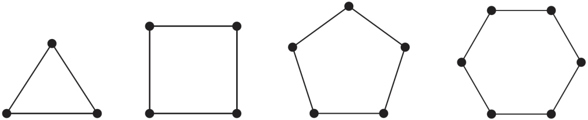
Camino P_n: Camino con n vértices.

C_n

Ciclo C_n: Ciclo con n vértices. (n-ciclo).

C_n

Ciclo C_n: Ciclo con n vértices. (n-ciclo).

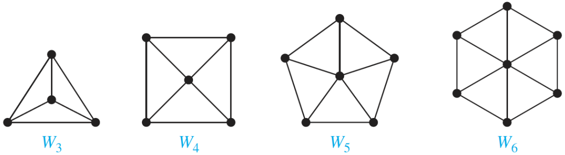


W_n

Rueda W_n: Ciclo C_n con un vértice adicional adyacente a todos los vértices del ciclo.

W_n

Rueda W_n: Ciclo C_n con un vértice adicional adyacente a todos los vértices del ciclo.

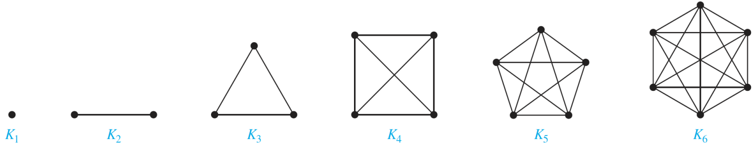


K_n

Grafo completo K_n: Grafo simple de n vértices que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices. (Vértices adyacentes 2 a 2.)

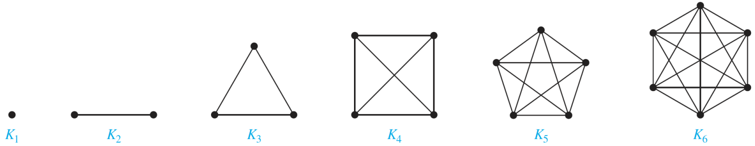
K_n

Grafo completo K_n: Grafo simple de n vértices que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices. (Vértices adyacentes 2 a 2.)



K_n

Grafo completo K_n: Grafo simple de n vértices que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices. (Vértices adyacentes 2 a 2.)



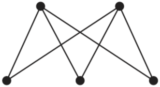
¿Clique de tamaño n?

$K_{m,n}$

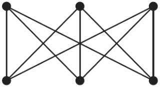
Grafo bipartito completo $K_{m,n}$: Grafo bipartito simple tal que dos vértices on adyacentes sii están en conjuntos partitos diferentes de tamaño m y n respectivamente. (**biclique**).

$K_{m,n}$

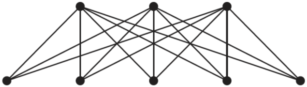
Grafo bipartito completo $K_{m,n}$: Grafo bipartito simple tal que dos vértices on adyacentes sii están en conjuntos partitos diferentes de tamaño m y n respectivamente. (**biclique**).



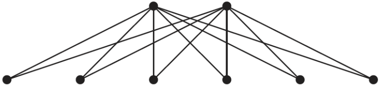
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

Ejemplo - Grafos de n vértices

- Si $|V(G)| = n$ entonces se pueden seleccionar $\binom{n}{2}$ parejas de vértices.

Ejemplo - Grafos de n vértices

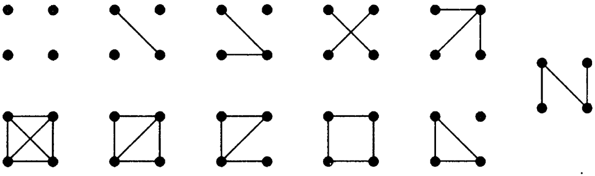
- Si $|V(G)| = n$ entonces se pueden seleccionar $\binom{n}{2}$ parejas de vértices.
- El par podría formar una arista o no.

Ejemplo - Grafos de n vértices

- Si $|V(G)| = n$ entonces se pueden seleccionar $\binom{n}{2}$ parejas de vértices.
- El par podría formar una arista o no.
- Entonces hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples de n vértices. (Subconjuntos del conjunto de pares de vértices).
- Si $n = 4$, hay 64 grafos simples de 4 vértices.
- Hay 11 clases de isomorfismo.

Ejemplo - Grafos de n vértices

- Si $|V(G)| = n$ entonces se pueden seleccionar $\binom{n}{2}$ parejas de vértices.
- El par podría formar una arista o no.
- Entonces hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples de n vértices. (Subconjuntos del conjunto de pares de vértices).
- Si $n = 4$, hay 64 grafos simples de 4 vértices.
- Hay 11 clases de isomorfismo.

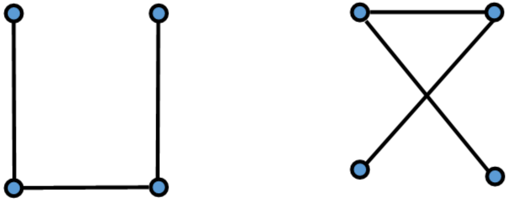


Grafo Autocomplementario

Un grafo G es **autocomplementario** si es isomorfo a su complemento.

Grafo Autocomplementario

Un grafo G es **autocomplementario** si es isomorfo a su complemento.



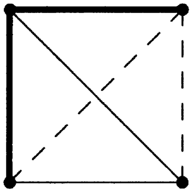
$$P_4 \cong \overline{P_4}$$

Descomposición

Una **descomposición** de un grafo G es una lista de subgrafos $H_i \subseteq G$ tal que cada arista $e \in E(G)$ pertenece exactamente a un subgrafo de la lista.

Descomposición

Una **descomposición** de un grafo G es una lista de subgrafos $H_i \subseteq G$ tal que cada arista $e \in E(G)$ pertenece exactamente a un subgrafo de la lista.



Descomposición de K_4 usando tres copias de P_3

Ejercicio

Cualquier grafo G de n vértices y su complemento forman una descomposición de K_n.

Ejercicio

Cualquier grafo G de n vértices y su complemento forman una descomposición de K_n.

Ejercicio

Un grafo $K_{1,n-1}$ y K_{n-1} forman una descomposición de K_n.

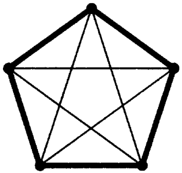
Teorema

Un grafo G de n vértices es autocomplementario sii K_n tiene una descomposición que consiste en dos copias de G. (Grafos isomorfos con G).

Teorema

Un grafo G de n vértices es autocomplementario sii K_n tiene una descomposición que consiste en dos copias de G. (Grafos isomorfos con G).

C_5 es autocomplementario:



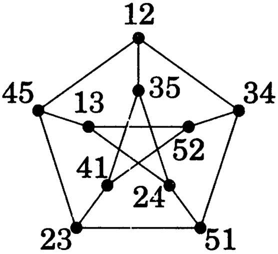
Descomposición de K_5 en dos 5-ciclos.

Grafo de Petersen

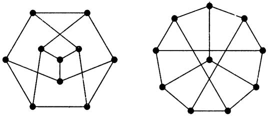
El **grafo de Petersen** es el grafo simple cuyo conjunto de vértices son los subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de 5 elementos y sus aristas son pares disyuntos de éstos subconjuntos.

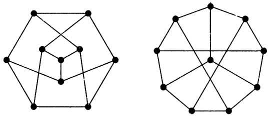
Grafo de Petersen

El **grafo de Petersen** es el grafo simple cuyo conjunto de vértices son los subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de 5 elementos y sus aristas son pares disyuntos de éstos subconjuntos.



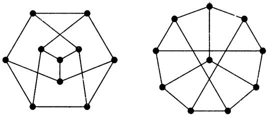
Grafo de Petersen





Cintura

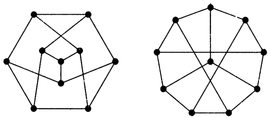
La cintura (girth) de un grafo con ciclos es la longitud de su ciclo más pequeño. Un grafo sin ciclos tiene cintura infinita.



Cintura

La cintura (girth) de un grafo con ciclos es la longitud de su ciclo más pequeño. Un grafo sin ciclos tiene cintura infinita.

El grafo de Petersen tiene cintura igual a 5.



Cintura

La cintura (girth) de un grafo con ciclos es la longitud de su ciclo más pequeño. Un grafo sin ciclos tiene cintura infinita.

El grafo de Petersen tiene cintura igual a 5.

Circunferencia

La circunferencia de un grafo es la longitud de su ciclo más largo.

Bibliografía

Douglas B. West
Introduction to graph theory.
Pearson. (2005).

Kenneth Rosen
Discrete Mathematics and its Applications
McGraw Hill. (2012).