

Teoría de la Computación

Sesión 4

Edgar Andrade, Ph.D.

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la computación

Última revisión: Agosto de 2020



MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Equivalencia entre NFAs y DFAs

Clausura bajo operaciones regulares



Contenido

Equivalencia entre NFAs y DFAs

Clausura bajo operaciones regulares



Equivalencia entre NFAs y DFAs

Teorema

Para cada DFA M existe un NFA N tal que $L(N) = L(M)$.

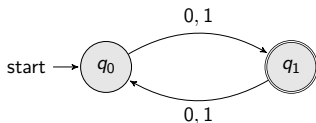


Equivalencia entre NFAs y DFAs

Teorema

Para cada DFA M existe un NFA N tal que $L(N) = L(M)$.

Ejemplo



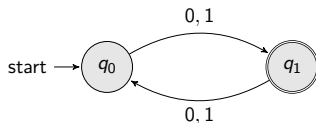
	0	1
q_0	q_1	q_1
q_1	q_0	q_0

Equivalencia entre NFAs y DFAs

Teorema

Para cada DFA M existe un NFA N tal que $L(N) = L(M)$.

Ejemplo



	0	1
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$



Equivalencia entre NFAs y DFAs

Teorema

Para cada NFA N existe un DFA M tal que $L(M) = L(N)$.



Demostración (Caso 1/2)

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA para el que no haya ninguna transición ϵ . Definimos $M = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ un DFA de la siguiente manera:



Demostración (Caso 1/2)

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA para el que no haya ninguna transición ϵ . Definimos $M = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ un DFA de la siguiente manera:

- ▶ $Q' = \wp(Q)$
- ▶ $\Sigma = \Sigma$
- ▶ $q'_0 = \{q_0\}$
- ▶ $F' = \{R \in Q' : R \text{ contiene un estado final de } N\}$



Demostración (Caso 1/2)

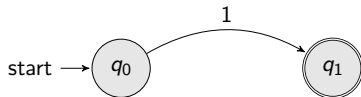
Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA para el que no haya ninguna transición ϵ . Definimos $M = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ un DFA de la siguiente manera:

- ▶ $Q' = \wp(Q)$
- ▶ $\Sigma = \Sigma$
- ▶ $q'_0 = \{q_0\}$
- ▶ $F' = \{R \in Q' : R \text{ contiene un estado final de } N\}$
- ▶ Sean $R \in Q' = \wp(Q)$ y $a \in \Sigma$

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a)$$



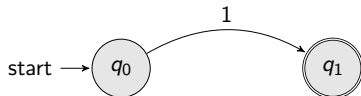
Ejemplo



	0	1
q_0	\emptyset	$\{q_1\}$
q_1	\emptyset	\emptyset



Ejemplo

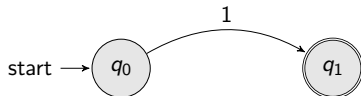


	0	1
q_0	\emptyset	$\{q_1\}$
q_1	\emptyset	\emptyset

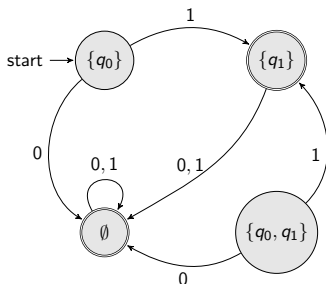
	0	1
$\{q_0\}$	\emptyset	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	\emptyset	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	\emptyset	$\{q_1\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset



Ejemplo



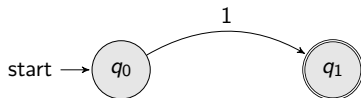
	0	1
q_0	\emptyset	$\{q_1\}$
q_1	\emptyset	\emptyset



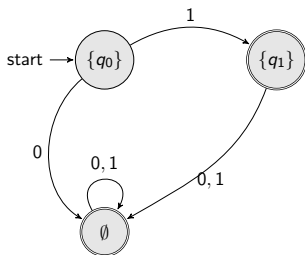
	0	1
$\{q_0\}$	\emptyset	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	\emptyset	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	\emptyset	$\{q_1\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset



Ejemplo



	0	1
q_0	\emptyset	$\{q_1\}$
q_1	\emptyset	\emptyset



	0	1
$\{q_0\}$	\emptyset	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	\emptyset	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	\emptyset	$\{q_1\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset



Demostración (Caso 2/2)

Ajustamos ahora esta construcción para el caso donde sí hay transiciones ϵ en N .



Demostración (Caso 2/2)

Ajustamos ahora esta construcción para el caso donde sí hay transiciones ϵ en N . Sea $R \subset Q$. Definimos:

$$E(R) = \{q, \text{ se puede llegar a } q \text{ desde } R \text{ siguiendo 0 o más aristas } \epsilon\}.$$



Demostración (Caso 2/2)

Ajustamos ahora esta construcción para el caso donde sí hay transiciones ϵ en N . Sea $R \subset Q$. Definimos:

$$E(R) = \{q, \text{ se puede llegar a } q \text{ desde } R \text{ siguiendo 0 o más aristas } \epsilon\}.$$

Finalmente

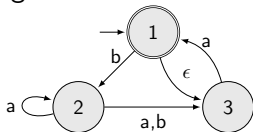
$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta(r, a)),$$

y $E(\{q_0\})$ es el nuevo estado inicial. □



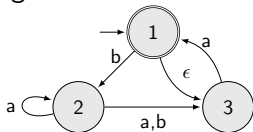
Un ejemplo

Vamos a aplicar esta construcción en un ejemplo. Sea N el siguiente NFA:



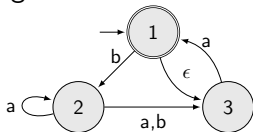
Un ejemplo

Vamos a aplicar esta construcción en un ejemplo. Sea N el siguiente NFA:



Un ejemplo

Vamos a aplicar esta construcción en un ejemplo. Sea N el siguiente NFA:

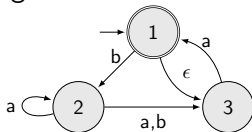


► $Q' = \wp(Q) =$
 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$



Un ejemplo

Vamos a aplicar esta construcción en un ejemplo. Sea N el siguiente NFA:

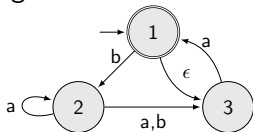


- ▶ $Q' = \wp(Q) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$
- ▶ El estado inicial es $E(\{1\}) = \{1, 3\}.$



Un ejemplo

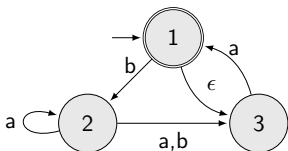
Vamos a aplicar esta construcción en un ejemplo. Sea N el siguiente NFA:



- ▶ $Q' = \wp(Q) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$
- ▶ El estado inicial es $E(\{1\}) = \{1, 3\}.$
- ▶ $F = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$



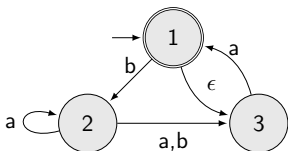
Encontrando la función de transición



	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$



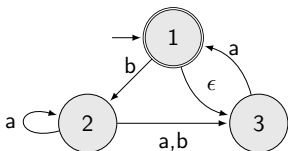
Encontrando la función de transición



	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$



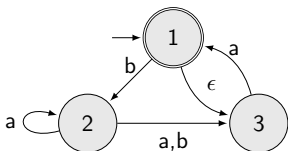
Encontrando la función de transición



	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset



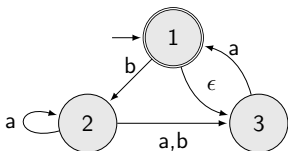
Encontrando la función de transición



	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset
$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{3\}$



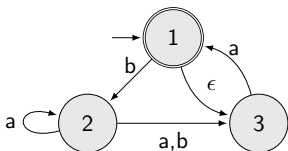
Encontrando la función de transición



	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset
$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{3\}$
$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$



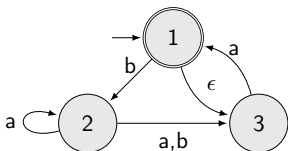
Encontrando la función de transición



	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset
$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{3\}$
$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$



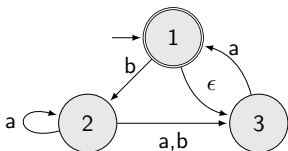
Encontrando la función de transición



	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset
$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{3\}$
$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$



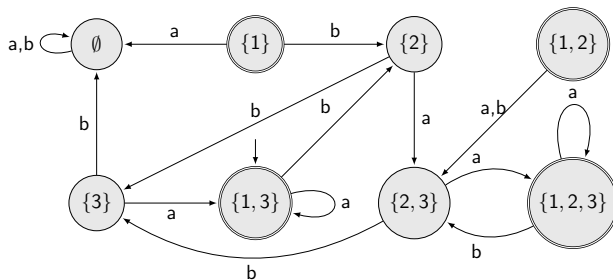
Encontrando la función de transición



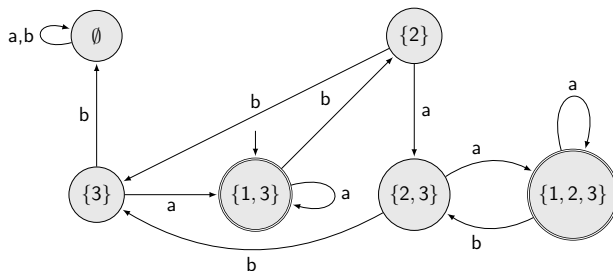
	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset
$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{3\}$
$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset



Ejemplo



Ejemplo



Contenido

Equivalencia entre NFAs y DFAs

Clausura bajo operaciones regulares



Concatenación

Teorema

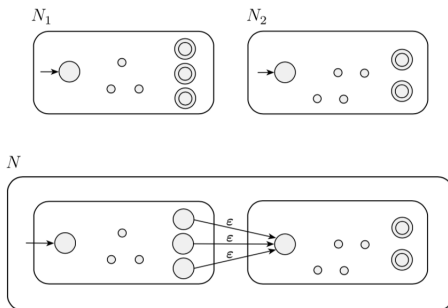
La clase de los lenguajes regulares es cerrada bajo concatenación.



Concatenación

Teorema

La clase de los lenguajes regulares es cerrada bajo concatenación.



Construcción

Formalmente, sean $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Definimos $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$, donde:

- ▶ $Q = Q_1 \cup Q_2$;
- ▶ El estado inicial de N es q_1 (el estado inicial de N_1);
- ▶ F_2 son los estados finales de N_2

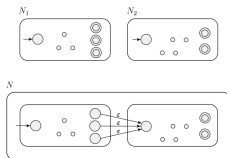


Construcción

Formalmente, sean $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Definimos $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$, donde:

- ▶ $Q = Q_1 \cup Q_2$;
- ▶ El estado inicial de N es q_1 (el estado inicial de N_1);
- ▶ F_2 son los estados finales de N_2

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & q \in Q_1 \text{ y } q \notin F_1; \\ \delta_1(q, a), & q \in F_1 \text{ y } a \neq \epsilon; \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\}, & q \in F_1 \text{ y } a = \epsilon; \\ \delta_2(q, a), & q \in Q_2. \end{cases}$$



Estrella de Kleene

Teorema

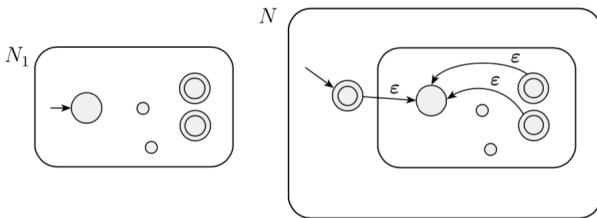
La clase de los lenguajes regulares es *cerrada* bajo estrella de Kleene.



Estrella de Kleene

Teorema

La clase de los lenguajes regulares es *cerrada* bajo estrella de Kleene.



Construcción

Formalmente, sea $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$. Construimos $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- ▶ $Q = \{q_0\} \cup Q_1$;
- ▶ q_0 es un *nuevo* estado inicial;
- ▶ $F = \{q_0\} \cup F_1$

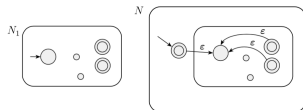


Construcción

Formalmente, sea $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$. Construimos $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- ▶ $Q = \{q_0\} \cup Q_1$;
- ▶ q_0 es un *nuevo* estado inicial;
- ▶ $F = \{q_0\} \cup F_1$

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & q \in Q_1 \text{ y } q \notin F_1; \\ \delta_1(q, a), & q \in F_1 \text{ y } a \neq \epsilon; \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_1\}, & q \in F_1 \text{ y } a = \epsilon; \\ \{q_1\}, & q = q_0 \text{ y } a = \epsilon; \\ \emptyset, & q = q_0 \text{ y } a \neq \epsilon. \end{cases}$$



Take away

En esta sesión usted aprendió:

- ▶ Construir un DFA equivalente a un NFA dado
- ▶ Construir un NFA que reconozca la unión, concatenación, y estrella de Kleene de lenguajes regulares

