0.1. 17.08.2020 - Independencia

Cuando se introdujo la probabilidad condicional $P(A|B)$, se hizo para para capturar la información parcial que B entrga con respecto de A. Una sotiación interesante (e importante) sucede cuando el hecho de que B haya sucedido no altera la probabilidad de que A suceda, tal que:

$$P(A|B) = P(A)$$

Cuando esté tipo de situación sucede, se dice que A es **independiente** de B. En esté caso por definición de $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ es equivalente a:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,.$$

Esta ultima relación se adopta como la definición de **independencia** pues esta se puede usar en el caso tal donde $P(B) = 0$, algo que con la probabilidad condicional no se podría a causa de que $P(A|B)$ quedaría indefinido.

Simetría

La simetría de está relación tambien indica que la **independencia** es una propiedad simetrica; es decir, si A es independiente de B, de igual manera B es independiente de A. Por lo tanto cuando hay una relación de independencia se describe como un par de eventos independientes,ej: A y B son eventos **independientes**.

Observación

Aunque en los entornos abituales del anánlisis y del pensamiento la **independencia** es bastante inintuitiva, en la visualización de Ω suele ser algo confusa; ya que lo mas común es que se vea a una relación independiento como un par de conjuntos *disyuntos*, pero en realidad es todo lo contrario. Es decir, si se tienen dos conjuntos disyuntos A y B donde $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$ nunca serán independientes ya que su intersección $A \cap B = 0$. El ejemplo más obvio es el de una probabilidad A con respecto a su complemento A^c, estó pues si lo que sucede esta en uno de los dos conjuntos, es obvio que no está en el otro. Lo que contradice la definición de **independencia**.

0.1.1. Ejemplo

Condiferando un experimento donde se lancen dos dados de cuatro caras en forma simultania, se tendrian 16 posibles resultados con la misma probabilidad de $\frac{1}{16}$.

(a) Son los eventos A_i y B_j independientes? tal que:

$$A_i = \{\text{Primer lanzamiento resulata en } i\}\,, B_j = \{\text{Segundo lanzamiento resulata en } j\}\,.$$

Se tiene que:

$$P(A_i \cap B_j) = P(\text{el resultado de los dos lanzamientos es } (i,j)) = \frac{1}{16},$$

$$P(A_i) = \frac{\text{número de elementos en } A_i}{\text{cantidad total de elementos}} = \frac{4}{16},$$

$$P(B_j) = \frac{\text{número de elementos en } B_j}{\text{cantidad total de elementos}} = \frac{4}{16}.$$

Con lo anterior podemos observar que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(B_j)$, confirmando que A_i y B_j son independietes.

(b) Siendo A y B los eventos definidos de forma:

$$A = \{\text{el primer tiro es } 1\}, B = \{\text{la suma de los dos tiros es } 5\}$$

son A y B independientes? Se tiene:

$$P(A \cap B) = P(\text{el resultado de los dos lanzamientos está entre 1 y 4}) = \frac{1}{16},$$

tambien:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos en } A}{\text{cantidad total de elementos}} = \frac{4}{16},$$

El evento B se puede formar con los resultaddos (1,4), (2,3), (3,2) y (4,5). Ahora:

$$P(B) = \frac{\text{numero de elmentos en } B}{\text{cantidad total de elementos}} = \frac{4}{16}.$$

Teniendo ahora que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, se puede concluir de que A y B son eventos independientes.

(c) Los eventos:

$$A = \{\text{el resultado máximo de dos lanzamientos es } 2\},$$

$$B = \{\text{el resultado mínimo de los dos lanzamientos es } 2\}.$$

Intuitivamente se diría que estos dos eventos no son independientes, pues el valor mínimo entre dos lanzamientos comparte información con el máximo. Por ejemplo, si el mínimo es 2, el máximo no puede ser 1. Pero para salír de las dudas lo mejor es demostrar la relacción. Por lo tanto se tiene:

$$P(A \cap B) = P(\text{el resultado de dos lanzamientos es } (2,2)) = \frac{1}{16},$$

además:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos en } A}{\text{cantidad total de elementos}} = \frac{3}{16},$$

$$P(B) = \frac{\text{número de elementos en } B}{\text{cantidad total de elementos}} = \frac{5}{16},$$

Pero en esté coso $P(A)P(B) = \frac{15}{256}$, confirmando la sospecha de que A y B no son eventos independientes.

Observación

Se puede verificar que si A y B son independientes, la mísma propiedad se cumple entre A y B^c.[1]

0.1.2. Independencia Condicional

Apartir de la conclusión previa donde se extrajo el concepto de la **probabilidad condicional** desde el razonamiento de leyes legitimas de la probabilidad, que indicaba que esté tipo de probabilidad también sería tratada como una ley legitima de la probabilidad. Se puede hacer mencón de la independencia de varios eventos con respecto a esta ley de la probabilidad condicional. En particular, teniendo un evento C, los eventos A y B son llamados **condicionalmente independientes** si:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

[1]Revisar los problemas al final del capitulo.

Propiedad anexa

Par deribar un caracterización alternativa de la condiciónal independiente, se utiliza la definición de *probabilidad condicional* y la regla de la multiplicación para obtener:

$$
\begin{aligned}
P\left(A \cap B|C\right) &= \frac{P\left(A \cap B \cap C\right)}{P\left(C\right)} \\
&= \frac{P\left(A|B \cap C\right) P\left(B|C\right) P\left(C\right)}{P\left(C\right)} \\
&= P\left(A|B \cap C\right) P\left(B|C\right),
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la igualdad principal de la independencia condicional:

$$P\left(A|C\right) P\left(B|C\right) = P\left(A|B \cap C\right) P\left(B|C\right)$$

Y si se divide por $P\left(B|C\right)$ en ambos lados queda:

$$P\left(A|C\right) = P\left(A|B \cap C\right).$$

Es decir que si $P\left(B \cap C\right) > 0$, donde A, B son eventos condicionalmente independientes, no importa si despues de que ocurra C ocurra B con respecto de A.

Observación

¿Independencia implica independencia condicional?

N O P

0.1.3. Ejemplo

Considere dos lanzamientos de ponedas (justos), en donde los cuatro distintos posibles resultados son igualmente posibles; Ahora:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \{\text{la primera lanzada cae cara}\}, \\
H_2 &= \{\text{la segunda lanzada cae cara}\}, \\
D &= \{\text{ambos lanzamientos entregan resultados distintos}\}.
\end{aligned}
$$

Los eventos H_1 y H_2 son independientes, pero:

$$P\left(H_1|D\right) = \frac{1}{2}, \qquad P\left(H_2|D\right) = \frac{1}{2}, \qquad P\left(H_1 \cap H_2|D\right) = 0$$

en esté caso se tiene que $P\left(H_1 \cap H_2|D\right) \neq P\left(H_1|D\right) P\left(H_2|D\right)$, por lo tanto H_1 y H_2 no son condicionalmente independientes.

Observación

Con esté ejemplo se puede generalizar el hecho de que si teniendo a los eventos independientes A y B y además al evento C tal que: $P\left(C\right) > 0$, $P\left(A|C\right) > 0$ y $P\left(B|C\right) > 0$, pero que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Entonces A y B no pueden ser condicionalmente independientes dado C, pued $P\left(A \cap B|C\right) = 0$ mientras que $P\left(A|C\right) P\left(B|C\right) > 0$.

0.1.4. Independencia de varios eventos

Se dice que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si:

$$P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P\left(A_i\right), \text{para todo subset } S \text{ en } \{1, 2, \ldots, n\}.$$