Teoría de Grafos
Nociones Básicas

Juan David Rojas Gacha

2020 - II

Problema de los puentes de Königsberg

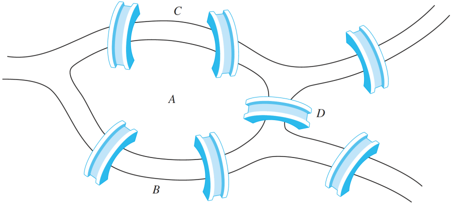


Figura: Puentes de Königsberg

Leonard Euler (1736)

Conceptos fundamentales

Grafo

Un **grafo** G es una terna que consiste en un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una relación que asocia a cada arista un par de vértices (extremos) no necesariamente distintos.

Conceptos fundamentales

Grafo

Un **grafo** G es una terna que consiste en un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una relación que asocia a cada arista un par de vértices (extremos) no necesariamente distintos.

Relación de adyacencia

- Dos vértices u y v son **adyacentes** (vecinos) si u y v son los extremos de una arista e.
- u es adyacente a v se nota: $u \leftrightarrow v$

- Un **bucle** o **lazo** es una arista cuyos extremos son iguales.
- Dos o más aristas son **múltiples** o **paralelas** si tienen el mismo par de extremos

- Un **bucle** o **lazo** es una arista cuyos extremos son iguales.
- Dos o más aristas son **múltiples** o **paralelas** si tienen el mismo par de extremos

Grafo simple

Un **grafo simple** $G = (V, E)$ es un grafo sin bucles ni aristas múltiples, donde E es un conjunto de pares no ordenados de vértices.

Grafo finito

Un grafo es **finito** si $V(G)$ y $E(G)$ son conjuntos finitos.

Grafo finito

Un grafo es **finito** si $V(G)$ y $E(G)$ son conjuntos finitos.

Grafo nulo

El **grafo nulo** es el grafo G, tal que $V(G) = \emptyset$ y $E(G) = \emptyset$

Grafo complementario

El complemento $\overline{G}$ de un grafo simple G, es el grafo simple con conjunto de vértices $V(G)$ definido por: $uv \in E(\overline{G})$ sii $uv \notin E(G)$.

Grafo complementario

El complemento $\overline{G}$ de un grafo simple G, es el grafo simple con conjunto de vértices $V(G)$ definido por: $uv \in E(\overline{G})$ sii $uv \notin E(G)$.

Clique

Un **clique** es un conjunto de vértices adyacentes 2 a 2.

Grafo complementario

El complemento $\overline{G}$ de un grafo simple G, es el grafo simple con conjunto de vértices $V(G)$ definido por: $uv \in E(\overline{G})$ sii $uv \notin E(G)$.

Clique

Un **clique** es un conjunto de vértices adyacentes 2 a 2.

Conjunto independiente

Un **conjunto independiente** es un conjunto de vértices no adyacentes 2 a 2.

Nota

W es un clique en G sii W es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

Nota

W es un clique en G sii W es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

Ejercicio

En todo grupo de 6 personas existen 3 conocidos mutuos o 3 extraños mutuos.

Nota

W es un clique en G sii W es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

Ejercicio

En todo grupo de 6 personas existen 3 conocidos mutuos o 3 extraños mutuos.

Ejercicio

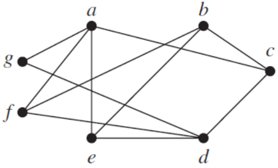
Todo grafo de 6 vértices tiene un clique o un conjunto independiente de tamaño 3.

Grafo bipartito

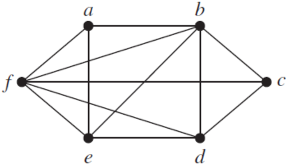
Un grafo G es **bipartito** si $V(G)$ es la unión de dos conjuntos disyuntos independientes denominados conjuntos partitos de G.

Grafo bipartito

Un grafo G es **bipartito** si $V(G)$ es la unión de dos conjuntos disyuntos independientes denominados conjuntos partitos de G.



G



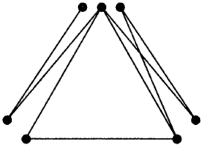
H

Grafo k-partito

Un grafo G es k-**partito** si $V(G)$ es la unión de k conjuntos disyuntos independientes.

Grafo k-partito

Un grafo G es k-**partito** si $V(G)$ es la unión de k conjuntos disyuntos independientes.



Número cromático

El **número cromático** de un grafo G, $\chi(G)$, es el mínimo número de colores necesarios para etiquetar los vértices de G de tal manera que vértices adyacentes reciban colores distintos.

Número cromático

El **número cromático** de un grafo G, $\chi(G)$, es el mínimo número de colores necesarios para etiquetar los vértices de G de tal manera que vértices adyacentes reciban colores distintos.

Teorema

Un grafo G es k-partito sii $\chi(G) \leq k$.

Subgrafo

Un **subgrafo** de un grafo G es un grafo H tal que:

1. $V(H) \subseteq V(G)$.
2. $E(H) \subseteq E(G)$.

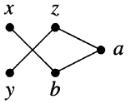
Y la asignación de extremos a las aristas en H es la misma que en G. Se nota $H \subseteq G$.

Camino

Un **camino** es un grafo simple cuyos vértices pueden ordenarse en una lista de tal manera que dos vértices son adyacentes sii son consecutivos en la lista.

Camino

Un **camino** es un grafo simple cuyos vértices pueden ordenarse en una lista de tal manera que dos vértices son adyacentes sii son consecutivos en la lista.

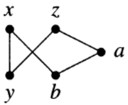


Ciclo

Un **ciclo** es un grafo simple con el mismo número de vértices y aristas cuyos vértices pueden ubicarse alrededor de un circulo de tal manera que dos vértices son adyacentes sii aparecen de manera consecutiva sobre el circulo.

Ciclo

Un **ciclo** es un grafo simple con el mismo número de vértices y aristas cuyos vértices pueden ubicarse alrededor de un circulo de tal manera que dos vértices son adyacentes sii aparecen de manera consecutiva sobre el circulo.

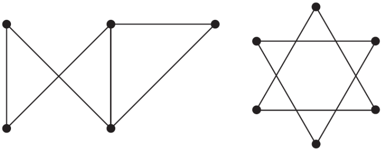


Conexidad

Un grafo G es **conexo** si cada par de vértices en G pertenece a un camino, de lo contrario, G es disconexo.

Conexidad

Un grafo G es **conexo** si cada par de vértices en G pertenece a un camino, de lo contrario, G es disconexo.



Matriz de Adyacencia - Matriz de Incidencia

Sea G un grafo sin bucles con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

- La **matriz de adyacencia** de G es la matriz $n \times n$, $A(G)$, definida por

$$a_{ij} := \text{número de aristas en G con extremos } \{v_i, v_j\}$$

- La **matriz de incidencia** de G es la matriz $n \times m$, $M(G)$, definida por

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es extremo de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nota

1. $A(G)$ depende del orden de los vértices.

Nota

1. $A(G)$ depende del orden de los vértices. $(n!)$.

Nota

1. $A(G)$ depende del orden de los vértices. $(n!)$.
2. Toda matriz de adyacencia es simétrica.

Nota

1. $A(G)$ depende del orden de los vértices. $(n!)$.
2. Toda matriz de adyacencia es simétrica.
3. Si G es simple, la matriz de adyacencia tiene entradas 1 o 0 con $0's$ en la diagonal.

Nota

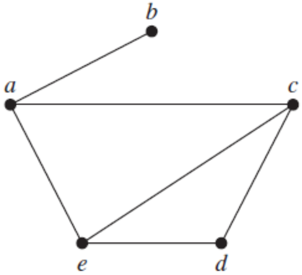
1. $A(G)$ depende del orden de los vértices. $(n!)$.
2. Toda matriz de adyacencia es simétrica.
3. Si G es simple, la matriz de adyacencia tiene entradas 1 o 0 con $0's$ en la diagonal.

Nota

1. $A(G)$ depende del orden de los vértices. $(n!)$.
2. Toda matriz de adyacencia es simétrica.
3. Si G es simple, la matriz de adyacencia tiene entradas 1 o 0 con $0's$ en la diagonal.

Grado de un vértice (1)

El **grado** de un vértice v es la suma de las entradas en la fila de v en $A(G)$ o $M(G)$. Se nota $d(v)$.


b
a
c
e
d

Nota

1. La matriz de adyacencia también se usa para representar grafos con bucles. Un bucle en el vértice v_i es representado por un 1 en la posición (i, i) de la matriz de adyacencia.

Nota

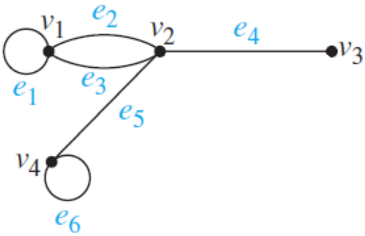
1. La matriz de adyacencia también se usa para representar grafos con bucles. Un bucle en el vértice v_i es representado por un 1 en la posición (i, i) de la matriz de adyacencia.
2. En este caso no se cumple la propiedad del grado de un vértice.

Nota

1. La matriz de adyacencia también se usa para representar grafos con bucles. Un bucle en el vértice v_i es representado por un 1 en la posición (i, i) de la matriz de adyacencia.
2. En este caso no se cumple la propiedad del grado de un vértice.

Grado de un vértice (2)

El **grado** de un vértice v es el número de aristas incidentes en v. Un bucle en v aporta dos unidades al grado de v.


v_1
v_2
v_3
v_4
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6

Bibliografía

Douglas B. West
Introduction to graph theory.
Pearson. (2005).

Kenneth Rosen
Discrete Mathematics and its Applications
McGraw Hill. (2012).