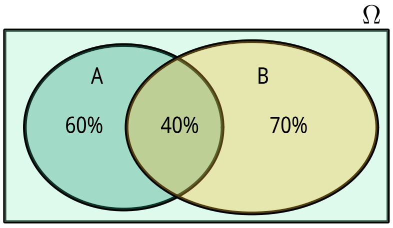
0.1. 16.08.2020 - Taller 1

Ej1. En una clase el 60 % de los estudiantes son genios, al 70 % les gusta el chocolate y el 40 % cae en las dos categorías. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar no sea genio ni le guste el chocolate?

Respuesta



Para resolver esté problema es necesario encontrar el valor de $A \cup B$, pues de esta forma solo sería necesario calcular $1 - (A \cup B)$ para obtener la respuesta a la probabilidad de seleccionar al azar un estudiante que no sea genio ni que le guste el chocolate.

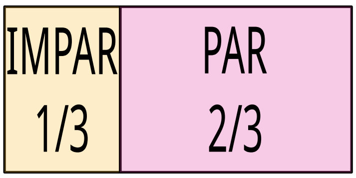
$$\begin{aligned} P(A) = 0{,}7 / P(B) &= 0{,}6 / P(A \cap B) = 0{,}4 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}4 \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) \qquad = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

Por lo tanto se puede concluir que la probabilidad de que al azar sea seleccionado un estudiante que no sea genio ni le guste el chocolate es de 0.1.

Ej2. Un dado de seis caras está cargado para que la probabilidad que caiga en un número par sea dos veces la probabilidad de que caiga en un número impar. Construya un modelo de probabilidad para un lanzamiento de este dado y calcule la probabilidad de que el resulatado sea menor a 4.

Respuesta



Como la probabilidad entre cada uno de los lados es igual para los elementos que estan en cada uno de los subconjuntos se sabe lo siguiente:

- $P\{i\} = \frac{2}{9}, i \in \{2, 4, 6\}$
- $P\{j\} = \frac{1}{9}, j \in \{1, 3, 5\}$

Como solo con los valores 1,2,3 se cumple la condición, se tiene que la probabilidad que se nos pide es igual $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$ lo que es igual a $\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$, lo que nos lleva a concluir que la probabilidad de que al lanzar el dado cargado caiga un valor menor a cuatro es de $\frac{4}{9}$.

Ej3. Una moneda se lanza repetidamente hasta que sale cara. Determine el espacio muestral de este experimento.

Respuesta

Como lo que se está observando es la cantidad de lansamientos requeridos, el espacio muestral se conforma por n, tal que $\Omega = \{n|n \text{ es la cantidad de veces que se lanza la moneda}\}$.

Ej4. Usted entra a un torneo de ajedez en el que debe jugar contra 3 oponentes. Aunque los oponentes están fijos, usted puede escoger el orden en que los enfrente orden en que los enfrenta. De experiencias anteriores, usted sabe cuál es la probabilidad de derrotar a cada uno de los oponentes.Usted gana el torneo si logra derrotar a dos de forma consecutiva. Si usted quiere maximizar la probabilidad de ganar el torneo, muestre que la estrategia óptima es jugar con el oponente más debil en el segundo partido, y que el orden en que juegue contra los otros dos no importa.

Respuesta

Ej5. Utilice los axiomas de probabilidad para demostrar, que para dos eventos A y B,

$$P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B),$$

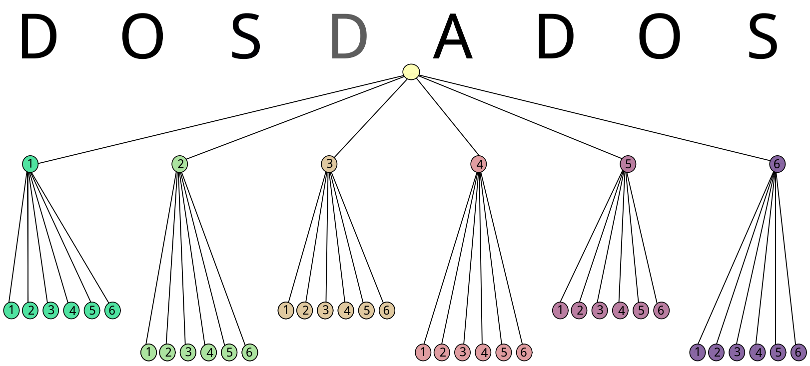
que es la probabilidad de que exactamente uno de los eventos A o B ocurra.

Respuesta

Ej6. Se lanzan dos dados justos de seis caras. Asuma que cada uno de los 36 posibles resultadoses igualmente probable.

a) Determine la probabilidad de que salga un doble (1 y 1, 2 y 2, etc).
b) Dado que el resultado es menor o igual a 4, determine la probabilidad condicional de que halla salido un doble.
c) Determine la probabilidad de que al menos uno de los dados sea 6.
d) Dado que los dos dados caes en números diferentes, determine la probabilidad de que al menos uno de los dados haya caído en 6.

Respuestas



a) Ya que todos los valores tiene la misma posibilidad, significa que cualquiera de las 36 combinaciones de numeros tienen $\frac{1}{36}$ de posibilidad. Luego como hay seis situaciones donde se cumple la condición, se puede concluir afirmando que la posibilidad de sacar soble es de $\frac{1}{6}$.

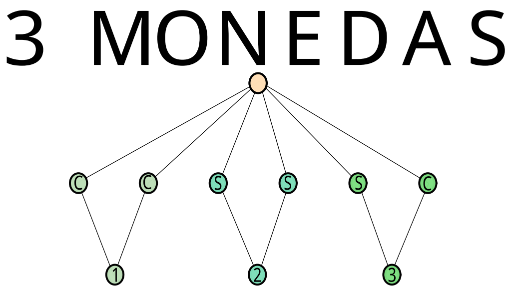
b) Como los únicos dobles menores o iguales a cuatro son los que se forman con 1 y 2, se puede concluir que la probabilidad de que salgnan dobles es igual a $\frac{1}{18}$.

c) Ya que entre las 36 situaciones posibles de esté lanzamiento once cumplen la condición, se puede concluir afirmando que la probabilidad de que al menos uno de los dados sea 6, es de $\frac{11}{36}$.

d) Revisando el *punto* anterior, se puede ver que la unica situación que encaja ahí pero no en este *punto*, es en el caso de que ambos dados caigan en seis, por lo tanto se debe hacer el mismo cálculo pero con una opción menos; siendo esto igual $\frac{5}{18}$.

Ej7. Se tienen 3 monedas, una con dos caras, una con dos sellos, y una con una cara y un sello. Se selecciona una moneda al azar y el resultado es cara. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado de la moneda sea sello?

Respuesta



Ej8. Un vuelo programado tiene probabilidades iguales a 0.93 de salir a tiempo y 0.90 de llegar a tiempo. Además se sabe que la probabilidad de salir y llegar a tiempo es de 0.85.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo dado que salió a tiempo?.

b) Si el vuelo llegó a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido a tiempo?

Ej9. Pepa tiene que pesentar los exámenes de cálculo y álgebra el mismo día. La probabilidad de pasar el examen de cálculo es de $\frac{3}{4}$, la de pasar el de álgebra es de $\frac{1}{2}$ y la de pasar ambos es de $\frac{1}{4}$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que pase al menos uno de los exámenes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que pase exactamente uno de los exámenes?

c) Si aprueba solo un examen, ¿cuál es la probabilidad de que sea el de álgebra?

Ej10. Se tiene un grupo de personas conformado por 40 hombres y 60 mujeres. El grupo presenta un examen y obtienen los siguientes resulatados:

Resultado	H	M	
Aprobado (A)	24	36	60
Reprobado (R)	16	24	40
	40	60	

Se selecciona una persona al azar:

a) Si selecciona a un hombre ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?

b) Si selecciona alguien que aprobó, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Ej11. Se tienen dos eventos $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$. Determine:

- $P(A|B)$
- $P(B|A)$

- $P(A|A \cap B)$
- $P(A|A \cap B)$
- $P(A \cap B|A \cap B)$

Ej12. Sean A y B eventos. Muestre que $P(A \cap B|B) = P(A|B)$, suponiendo que $P(B) > 0$.

Ej13. Se tienen k cajas, cada una con m bolas blancas y n negras. Se selecciona al azar una bola de la primera caja y se transfiere a la segunda caja. Luego se selecciona al azar una bola de la segunda caja y se transfiere a la tercera. Se repite el ejercicio hasta que al final se selecciona una bola al azar de las k-ésima caja. Muestre que la probabilidad de que la última bola seablanca es la misma que de que al primera sea blanca,$i.e$, $\frac{m}{(m+n)}$.

Ej14. Dos jugadores se turnan para seleccionar una bola de una caja que inicialmente contiene m bolas rojas y n bolas azules. El primer jugador en extraer una bola roja gana. Determine una formula recursiva (sobre n) que permita calcular la probabilidad de que el jugador que empieza gane.

Pista: Calcule primero P_0 (probabilidad de que el primer jugador gane cuando no hay bolaz azules), luego $P_1, P_2, etc.$, usando el teorema de probabilidad total sobre los eventos:

(1) Seleccionar una bola roja en el primer intento.

(2) Seleccionar una bola azul en el primer intento.

Recuerde que la probabilidad de que el primer jugador gane es uno menos la probabilidad de que el segundo gane.