MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Teoría de Grafos

Juan David Rojas Gacha

2020 - II

Universidad del Rosario

Caminatas, senderos y circuitos

Caminata

Una **caminata (walk)** en un grafo G es una lista

$$v_o e_1 v_1 \cdots e_k v_k$$

de vértices y aristas tal que para todo $1 \leq i \leq k$ la arista e_i tiene extremos v_{i-1} y v_i.

Caminatas, senderos y circuitos

Caminata

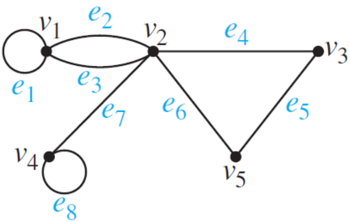
Una **caminata (walk)** en un grafo G es una lista

$$v_o e_1 v_1 \cdots e_k v_k$$

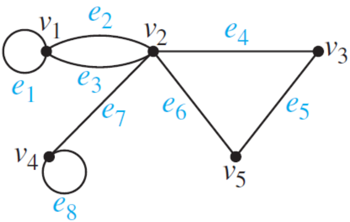
de vértices y aristas tal que para todo $1 \leq i \leq k$ la arista e_i tiene extremos v_{i-1} y v_i.

Sendero

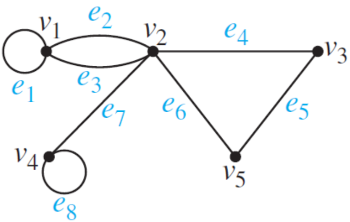
Un **sendero (trail)** es una caminata sin aristas repetidas.



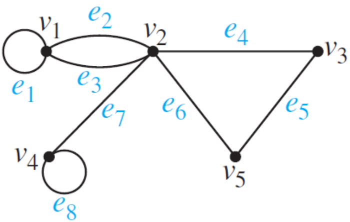
- $v_1\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3\, v_1\, e_2\, v_2\, e_4\, v_3$



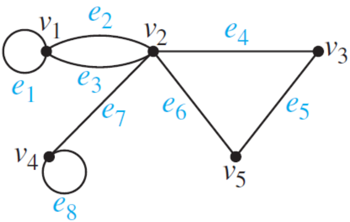
- $v_1 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_1 e_2 v_2 e_4 v_3$ (caminata).



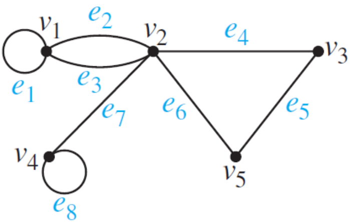
- $v_1 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_1 e_2 v_2 e_4 v_3$ (caminata).
- $v_1 e_2 v_2 e_4 v_3 e_5 v_5$



- $v_1\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3\, v_1\, e_2\, v_2\, e_4\, v_3$ (caminata).
- $v_1\, e_2\, v_2\, e_4\, v_3\, e_5\, v_5$ (sendero).



- $v_1\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3\, v_1\, e_2\, v_2\, e_4\, v_3$ (caminata).
- $v_1\, e_2\, v_2\, e_4\, v_3\, e_5\, v_5$ (sendero).
- $v_1\, e_3\, v_2\, e_4\, v_3\, e_5\, v_5$



- $v_1\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3\, v_1\, e_2\, v_2\, e_4\, v_3$ (caminata).
- $v_1\, e_2\, v_2\, e_4\, v_3\, e_5\, v_5$ (sendero).
- $v_1\, e_3\, v_2\, e_4\, v_3\, e_5\, v_5$ (sendero).

u, v-caminata

Una u, v-**caminata** tiene primer vértice u y último vértice v, estos dos son sus **extremos**. Los otros vértices son **vértices internos**. Análogamente se define un u, v-**sendero.**

u, v-caminata

Una u, v-**caminata** tiene primer vértice u y último vértice v, estos dos son sus **extremos**. Los otros vértices son **vértices internos**. Análogamente se define un u, v-**sendero.**

Camino

Un **camino** es un sendero sin vértices repetidos. Análogamente se define un u, v-**camino.**

Circuito

Una caminata es **cerrada** si sus extremos son iguales. Un **circuito** es un sendero cerrado.

Circuito

Una caminata es **cerrada** si sus extremos son iguales. Un **circuito** es un sendero cerrado.

Ciclo

Un **ciclo** es un camino cerrado.

Circuito

Una caminata es **cerrada** si sus extremos son iguales. Un **circuito** es un sendero cerrado.

Ciclo

Un **ciclo** es un camino cerrado.

Longitud

La **longitud** de una caminata, sendero, circuito, camino o ciclo es el número de aristas que la conforman.

Nota

Un bucle es un ciclo de longitud 1.

Nota

Un bucle es un ciclo de longitud 1.

Nota

Un ciclo de longitud 2 genera aristas paralelas.

Nota

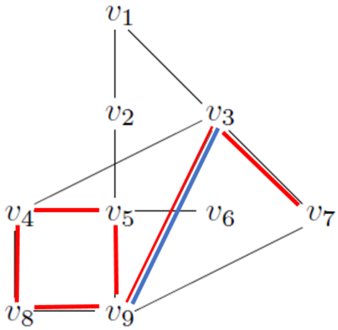
Un bucle es un ciclo de longitud 1.

Nota

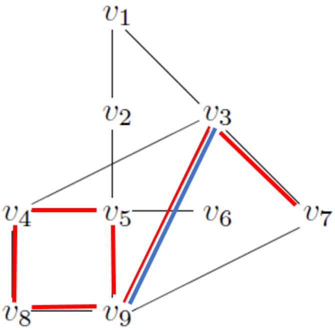
Un ciclo de longitud 2 genera aristas paralelas.

Nota

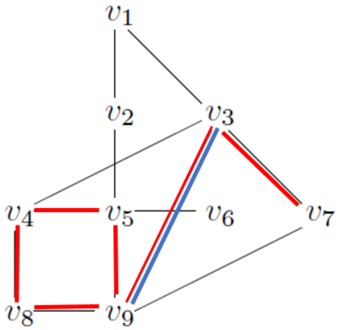
Si G es un grafo simple la caminata, sendero, circuito, camino o ciclo únicamente enlista los vértices.



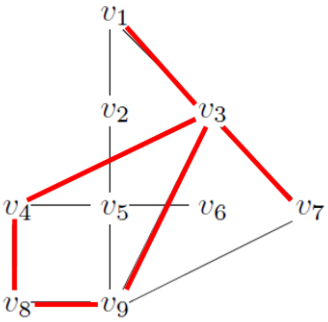
- $v_7\, v_3\, v_9\, v_8\, v_4\, v_5\, v_9\, v_3$



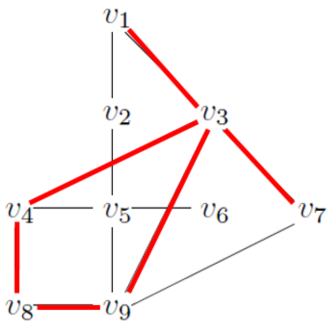
- $v_7 v_3 v_9 v_8 v_4 v_5 v_9 v_3$ v_7, v_3-caminata de longitud 7.



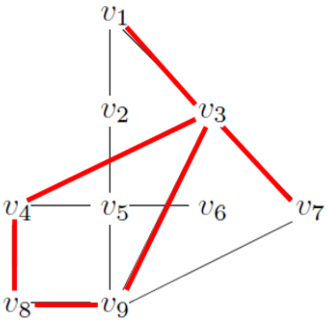
- $v_7 v_3 v_9 v_8 v_4 v_5 v_9 v_3$ v_7, v_3-caminata de longitud 7.
- No es un sendero.



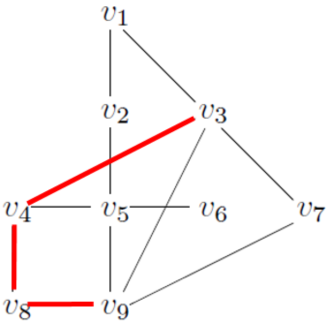
- $v_1\, v_3\, v_4\, v_8\, v_9\, v_3\, v_7$



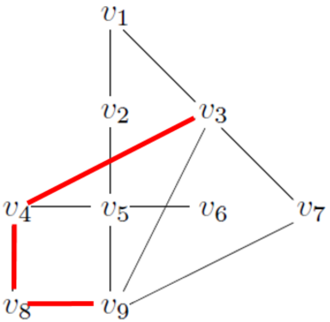
- $v_1 v_3 v_4 v_8 v_9 v_3 v_7$ v_1, v_7-sendero de longitud 6.



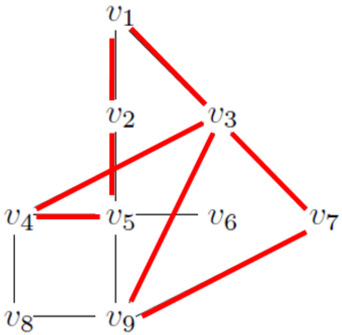
- $v_1 v_3 v_4 v_8 v_9 v_3 v_7$ v_1, v_7-sendero de longitud 6.
- No es un camino.



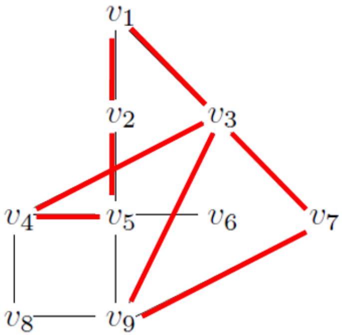
- $v_3 v_4 v_8 v_9$



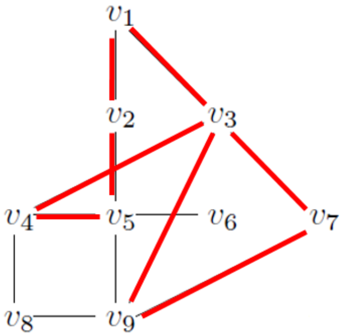
- $v_3 v_4 v_8 v_9$ v_3, v_9-camino de longitud 3.



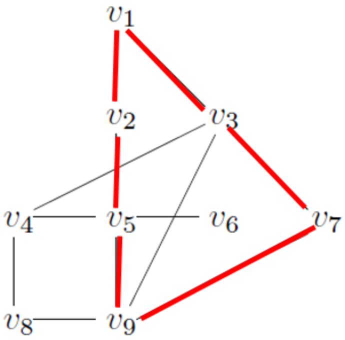
- $v_1 \, v_3 \, v_7 \, v_9 \, v_3 \, v_4 \, v_5 \, v_2 \, v_1$



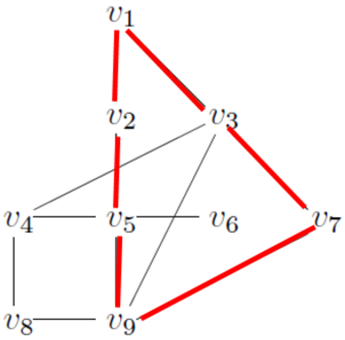
- $v_1 v_3 v_7 v_9 v_3 v_4 v_5 v_2 v_1$ circuito de longitud 8.



- $v_1 v_3 v_7 v_9 v_3 v_4 v_5 v_2 v_1$ circuito de longitud 8.
- No es un ciclo.



- $v_1\, v_2\, v_5\, v_9\, v_7\, v_3\, v_1$



- $v_1 v_2 v_5 v_9 v_7 v_3 v_1$ ciclo de longitud 6.

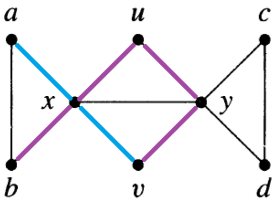
Vértices repetidos	Aristas repetidas	Cerrado	Nombre
✓	✓	✗	Caminata
✓	✓	✓	Caminata cerrada
✓	✗	✗	Sendero
✓	✗	✓	Circuito
✗	✗	✗	Camino
✗	✗	✓	Ciclo

Nota

¿Si se sigue un u, v-camino y un v, w-camino, el resultado es un u, w-camino?

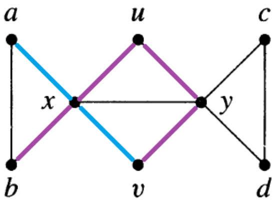
Nota

¿Si se sigue un u, v-camino y un v, w-camino, el resultado es un u, w-camino?



Nota

¿Si se sigue un u, v-camino y un v, w-camino, el resultado es un u, w-camino?



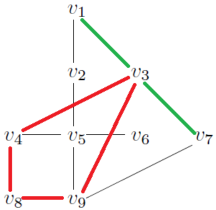
- a - x - v y v - y - u - x - b

Lema

Cada u, v-caminata contiene un u, v-camino.

Lema

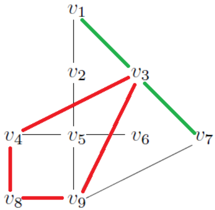
Cada u, v-caminata contiene un u, v-camino.



- $v_1\, v_3\, v_4\, v_8\, v_9\, v_3\, v_7$

Lema

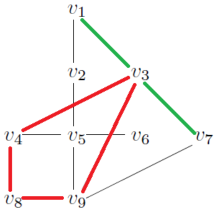
Cada u, v-caminata contiene un u, v-camino.



- $v_1\, v_3\, v_4\, v_8\, v_9\, v_3\, v_7$ v_1, v_7-caminata de longitud 6.

Lema

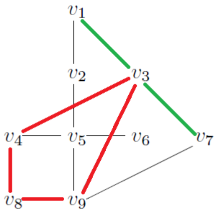
Cada u, v-caminata contiene un u, v-camino.



- $v_1\, v_3\, v_4\, v_8\, v_9\, v_3\, v_7$ v_1, v_7-caminata de longitud 6.
- $v_1\, v_3\, v_7$

Lema

Cada u, v-caminata contiene un u, v-camino.



- $v_1 v_3 v_4 v_8 v_9 v_3 v_7$ v_1, v_7-caminata de longitud 6.
- $v_1 v_3 v_7$ v_1, v_7-camino de longitud 2.

Grafo conexo

- Un grafo G es **conexo** si existe un u, v-camino entre cada par $uv \in V(G)$. En otro caso es **disconexo**.

Grafo conexo

- Un grafo G es **conexo** si existe un u, v-camino entre cada par $uv \in V(G)$. En otro caso es **disconexo**.
- Si G tiene un u, v-camino entonces u está **conectado** con v.

Grafo conexo

- Un grafo G es **conexo** si existe un u, v-camino entre cada par $uv \in V(G)$. En otro caso es **disconexo**.
- Si G tiene un u, v-camino entonces u está **conectado** con v.

Relación de conexión

La **relación de conexión** en $V(G)$ consiste en todos los pares ordenados (u, v) tales que u está conectado con v:

$$uRv \text{ sii existe un } u, v\text{-camino.}$$

Teorema

La relación de conexión en $V(G)$ es una relación de equivalencia.

Teorema

La relación de conexión en $V(G)$ es una relación de equivalencia.

Componentes

- Las **componentes** de un grafo G son sus subgrafos conexos maximales.

Teorema

La relación de conexión en $V(G)$ es una relación de equivalencia.

Componentes

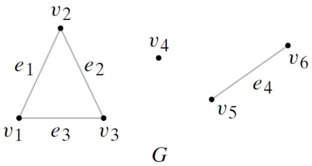
- Las **componentes** de un grafo G son sus subgrafos conexos maximales.
- Una componente es **trivial** si no tiene aristas, en otro caso es no trivial.

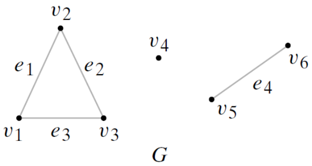
Teorema

La relación de conexión en $V(G)$ es una relación de equivalencia.

Componentes

- Las **componentes** de un grafo G son sus subgrafos conexos maximales.
- Una componente es **trivial** si no tiene aristas, en otro caso es no trivial.
- Un **vértice aislado** es un vértice de grado cero.


v_2
e_1
e_2
v_4
v_6
e_4
v_5
v_1
e_3
v_3
G



Nota

Las clases de equivalencia de la relación de conexión en $V(G)$ son los conjuntos de vértices de las componentes de G.

Proposición

Todo grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes.

Proposición

Todo grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n-k$ componentes.

Nota

- Las componentes de un grafo son disyuntas y no comparten vértices. Si se agrega una arista con extremos en distintas componentes, estas se combinan en una nueva componente.

Proposición

Todo grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n-k$ componentes.

Nota

- Las componentes de un grafo son disyuntas y no comparten vértices. Si se agrega una arista con extremos en distintas componentes, estas se combinan en una nueva componente.
- Agregar una arista a G disminuye el número de componentes en 1 ó 0.

Proposición

Todo grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes.

Nota

- Las componentes de un grafo son disyuntas y no comparten vértices. Si se agrega una arista con extremos en distintas componentes, estas se combinan en una nueva componente.
- Agregar una arista a G disminuye el número de componentes en 1 ó 0.
- Quitar una arista a G aumenta el número de componentes en 1 ó 0.

Proposición

Todo grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes.

Nota

- Las componentes de un grafo son disyuntas y no comparten vértices. Si se agrega una arista con extremos en distintas componentes, estas se combinan en una nueva componente.
- Agregar una arista a G disminuye el número de componentes en 1 ó 0.
- Quitar una arista a G aumenta el número de componentes en 1 ó 0.

Demostración

Arista de corte - vértice de corte

Una **arista de corte** o un **vértice de corte** es una arista o vértice cuya eliminación incrementa el número de componentes.

Arista de corte - vértice de corte

Una **arista de corte** o un **vértice de corte** es una arista o vértice cuya eliminación incrementa el número de componentes.

Nota

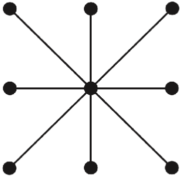
- Al eliminar un vértice se deben eliminar todas las aristas incidentes.

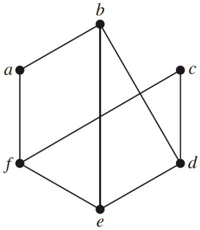
Arista de corte - vértice de corte

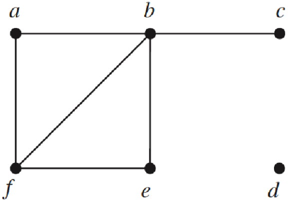
Una **arista de corte** o un **vértice de corte** es una arista o vértice cuya eliminación incrementa el número de componentes.

Nota

- Al eliminar un vértice se deben eliminar todas las aristas incidentes.
- El número de componentes podría aumentar en más de una. Observe $K_{1,m}$




b
a
c
f
d
e


a
b
c
f
e
d

Definición

- $G - e$: Subgrafo que se obtiene al eliminar la arista e.

Definición

- $G - e$: Subgrafo que se obtiene al eliminar la arista e.
- $G - v$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el vértice v.

Definición

- $G - e$: Subgrafo que se obtiene al eliminar la arista e.
- $G - v$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el vértice v.
- $G - M$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el conjunto de aristas M.

Definición

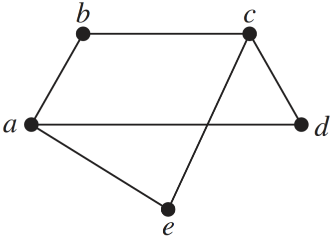
- $G - e$: Subgrafo que se obtiene al eliminar la arista e.
- $G - v$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el vértice v.
- $G - M$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el conjunto de aristas M.
- $G - S$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el conjunto de vértices S.

Definición

- $G - e$: Subgrafo que se obtiene al eliminar la arista e.
- $G - v$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el vértice v.
- $G - M$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el conjunto de aristas M.
- $G - S$: Subgrafo que se obtiene al eliminar el conjunto de vértices S.

Subgrafo inducido

Un **subgrafo inducido** es un subgrafo que se obtiene al eliminar un conjunto de vértices. Se escribe $G[T]$ para $G - \overline{T}$ donde $\overline{T} = V(G) - T$, este es el subgrafo inducido por T.



Calcular $G[S]$ y $G[T]$:

- $S = \{a, b, c\}$
- $T = \{b, d, e\}$

Ejercicio

Un conjunto S de vértices es independiente sii $G[S]$ no tiene aristas.

Ejercicio

Un conjunto S de vértices es independiente sii $G[S]$ no tiene aristas.

Teorema

Una arista e es una arista de corte sii no pertenece a ningún ciclo.

Ejercicio

Un conjunto S de vértices es independiente sii $G[S]$ no tiene aristas.

Teorema

Una arista e es una arista de corte sii no pertenece a ningún ciclo.

Lema

Toda caminata cerrada impar contiene un ciclo impar.

Ejercicio

¿Toda caminata cerrada par contiene un ciclo par?

Ejercicio

¿Toda caminata cerrada par contiene un ciclo par?

Teorema (König)

Un grafo G es bipartito sii no tiene ciclos impares.

Unión

La **unión** de grafos G_1, $G_2, \ldots, G_k$ notada $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ es el grafo G con conjunto de vértices

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$$

y conjunto de aristas

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$$

Unión

La **unión** de grafos $G_1, G_2, \ldots, G_k$ notada $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ es el grafo G con conjunto de vértices

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$$

y conjunto de aristas

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$$

Ejemplo

K_4 es la unión de dos 4-ciclos bipartitos.

Circuitos Eulerianos

Sendero Euleriano - Circuito Euleriano

- Un **sendero Euleriano** en un grafo G es un sendero que contiene todas las aristas de G.

Circuitos Eulerianos

Sendero Euleriano - Circuito Euleriano

- Un **sendero Euleriano** en un grafo G es un sendero que contiene todas las aristas de G.
- Un **circuito Euleriano** en un grafo G es un circuito que contiene todas las aristas de G.

Circuitos Eulerianos

Sendero Euleriano - Circuito Euleriano

- Un **sendero Euleriano** en un grafo G es un sendero que contiene todas las aristas de G.
- Un **circuito Euleriano** en un grafo G es un circuito que contiene todas las aristas de G.

Grafo Euleriano

Un **grafo** G es **Euleriano** si tiene un circuito Euleriano.

Vértice par - vértice impar

- Un vértice es par si su grado es par.

Vértice par - vértice impar

- Un vértice es par si su grado es par.
- Un vértice es impar si su grado es impar.

Vértice par - vértice impar

- Un vértice es par si su grado es par.
- Un vértice es impar si su grado es impar.
- Un grafo es par si todos sus vértices tienen grado par.

Vértice par - vértice impar

- Un vértice es par si su grado es par.
- Un vértice es impar si su grado es impar.
- Un grafo es par si todos sus vértices tienen grado par.

Camino maximal

Un camino P es **maximal** en un grafo G si P no está contenido en un camino de mayor longitud.

Vértice par - vértice impar

- Un vértice es par si su grado es par.
- Un vértice es impar si su grado es impar.
- Un grafo es par si todos sus vértices tienen grado par.

Camino maximal

Un camino P es **maximal** en un grafo G si P no está contenido en un camino de mayor longitud.

$\star$ Si G es finito, existe un camino maximal en G.

Lema

Si todos los vértices de un grafo G tienen grado mayor o igual a 2, entonces G contiene un ciclo.

Lema

Si todos los vértices de un grafo G tienen grado mayor o igual a 2, entonces G contiene un ciclo.

Teorema

Un grafo G es Euleriano sii tiene a lo sumo una componente no trivial y todos sus vértices tienen grado par.

Lema

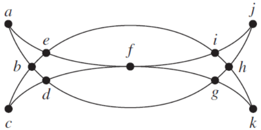
Si todos los vértices de un grafo G tienen grado mayor o igual a 2, entonces G contiene un ciclo.

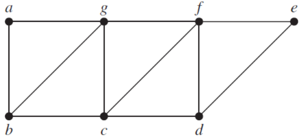
Teorema

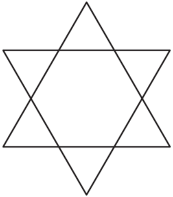
Un grafo G es Euleriano sii tiene a lo sumo una componente no trivial y todos sus vértices tienen grado par.

Teorema

Un grafo G tiene un u, v-sendero Euleriano sii G tiene a lo sumo una componente no trivial y u y v son los únicos vértices de grado impar.


a
j
e
i
f
b
h
d
g
c
k


a
g
f
e
b
c
d



Bibliografía

Douglas B. West
Introduction to graph theory.
Pearson. (2005).

Kenneth Rosen
Discrete Mathematics and its Applications
McGraw Hill. (2012).