0.1. 11.08.2020 - Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Definic Partición

Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos. Decimos que $A_1, \ldots, A_n$ forman una partición de Ω si $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ donde $i, j = 1, \ldots, n$

0.1.1. Teorema de Probabilidad Total

Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos disyuntos 2 a 2 que forman una partición de Ω. Suponiendo además que $P\left(A_i > 0\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces $\forall B$ eventos $(B \in F)$.

$$P\left(B\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i \cap B\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) P\left(B|A_i\right)$$

Demostración

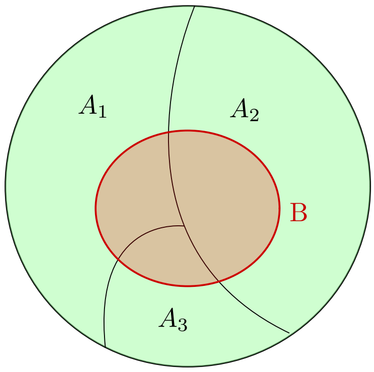


Figura 1: Representación Gráfica Probabilidad Total

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_1 \cap B\right) \rightarrow P\left(B\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i \cap B\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) P\left(B|A_i\right).$$

Observación __________________________________

Promedio Ponderado
P E N D I E N T E

Interpretación

- Se puede dividir a B en los pedazos que caen en casa evento de la partición.
- $P\left(B\right)$ es un **promedio ponderaso** de las probabilidades condicionales $\left(P\left(B|A_i\right)\right)$ donde el peso de ponderación está dado por la probabilidad se cada evento de la partición $P\left(A_i\right)$.
- También se puede interpretar el **teorema de probabilidad total** secuencialmente.

0.1.2. Ejemplos:

Ej.1) Usted está en un torneo de ajedrez. Donde se enfrenta a un oponente al azar.

- La probabilidad de ganarle a la mitad G_1 es de 0,3.
- La probabilidad de ganarle a un cuarto G_2 es de 0,4.
- La probabilidad de ganarle a un cuarto G_3 es de 0,5.

¿Cuál es la probrobabilidad de ganar la partida?

- B : ganar partida
- A_1 : Oponente está en el G_1
- A_2 : Oponente está en el G_2
- A_2 : Oponente está en el G_3

- $P(A_1) = 0{,}5$
- $P(A_2) = 0{,}25$
- $P(A_3) = 0{,}25$

Por lo tanto:

$$P(B|A_1) = 0{,}3, P(B|A_2) = 0{,}4, P(B|A_3) = 0{,}5,$$
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$
$$= P(A_1)\, P(B|A_1) + P(A_2)\, (B|A_2) + P(A_3)\, P(B|A_3),$$
$$= 0{,}375.$$

Ej.2) Se tiene un dado just de 4 caras. Si el resultado es 1 ó 2 se tira una segunda vez. ¿Cúal es la probabilidad de que la suma total sea mayor o igual a 4?

- B : suma al menos 4.
- A_1 : El primer tiro es 1.
- A_2 : El primer tiro es 2.
- A_3 : El primer tiro es 3 ó 4.

- $P(A_1) = \frac{1}{4}$
- $P(A_2) = \frac{1}{4}$
- $P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

- $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$
- $P(B|A_2) = \frac{3}{4}$
- $P(B|A_3) = \frac{1}{2}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\, P(B|A_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}.$$

0.1.3. Teorema de Bayes

Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición de Ω, talque $P(A_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces $\forall B \in F$ (B evento) tal que $P(B) > 0$, se tiene que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\, P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\, P(B|A_i)}{\sum_{i=0}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i)}.$$

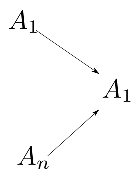
Demostración

$$P\left(A_i|B\right) = \frac{P\left(A_i \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)}{P\left(B\right)}.$$

Que por el **teorema de probabilidad total**:

$$= \frac{P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right)P\left(A_i\right)}.$$

Interpretación



Utilizamos el **teorema de Bayes** cuando le tiene distintaas causs (excluyentes)) que pueden causar un efecto, y visto el efecto se busca determinar la probabilidad de las causas.

Ejercicios:

Ej 1:

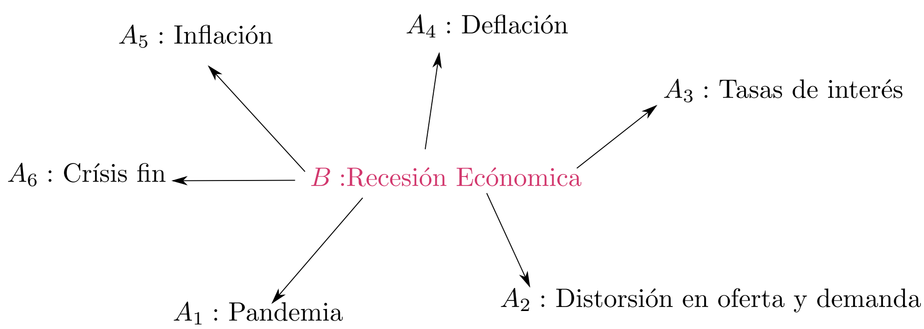


Figura 2: recesion economica

Ej 2: Se observa una mancha en la radiografía de un paciente, por lo tanto se tiene:

- A_1 : La mancha es un tumor maligno.
- A_2 : La mancha es un tumor benigno.
- A_3 : La mancha es otra cosa.
- B : Hay una mancha en la radiografía.

Tal que:

$$P\left(A_i|B\right), i = 1, 2, 3.$$

Observación

Se hacer referencia a $P\left(A_i|B\right)$ como las **probabilidades posteriores** y a $P\left(A_i\right)$ como las **probabilidades previas**.

Ej 3: Recordando al ejemplo del radar y el avión:

- A : Hay avión.
- B : Suena la alarma.

- $P\left(A\right) = 0{,}05 \rightarrow P\left(A^c\right) = 0{,}95$
- $P\left(B|A\right) = 0{,}99$
- $P\left(B|A^c\right) = 0{,}1$

Luego:

$$\begin{aligned} P\left(A|B\right) &= \frac{P\left(A\right)P\left(B|A\right)}{P\left(B\right)}, \\ &= \frac{P\left(A\right)P\left(B|A\right)}{P\left(A\right)P\left(B|A\right) + P\left(A^c\right)P\left(B|A^c\right)}, \\ &= \frac{0{,}05\left(0{,}99\right)}{0{,}5\left(0{,}99\right) + 0{,}95\left(0{,}1\right)} = 0{,}3426. \end{aligned}$$

Ej 4: Con base en el ejercicio de ajedrez:

- $P\left(A_1\right) = 0{,}5$
- $P\left(A_2\right) = 0{,}25$
- $P\left(A_3\right) = 0{,}25$

- $P\left(B|A_1\right) = 0{,}3$
- $P\left(B|A_2\right) = 0{,}4$
- $P\left(B|A_3\right) = 0{,}5$

Luego:

$$P\left(A_1|B\right) = \frac{P\left(B|A_1\right)P\left(A_1\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right)P\left(A_i\right)},$$

$$= \frac{0{,}5\left(0{,}3\right)}{0{,}5\left(0{,}3\right) + 0{,}25\left(0{,}4\right) + 0{,}25\left(0{,}5\right)} = 0{,}4.$$

Ej 5: Probabilidad fasos positivos; suponiendo que existe una enfermedad extraña entonces:

- Si el paciente tiene la enfermedad, la prueba sale positiva con probabilidad de 0.95.
- Si el paciente no tiene la enfermedad, la prueba sale negativa con probabilidad de 0.95

- A : Paciente tiene la enfermedad.
- B : Prueba positiva.

- $P(A) = 0{,}001$
- $P(A^c) = 0{,}999$

- $P(B|A) = 0{,}95 \rightarrow P(B^c|A) = 0{,}05$
- $P(B^c|A^c) = 0{,}95 \rightarrow P(B|A^c) = 0{,}05$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(A^c)\,P(B|A^c)}, \\ &= \frac{0{,}001\,(0{,}95)}{0{,}001\,(0{,}95) + 0{,}999\,(0{,}05)} = 0{,}0187. \end{aligned}$$