0.1. 13.08.2020 - Caminos y Ciclos

En esta sección se va hacer referencia al problema de **los puentes de Königsberg**, para poder deteminar cuando es podible hacer el recorrido por todas las aristas del grafo. Para estó se van a implementar utilies propiedades como la conexión, los caminos y los ciclos.

0.1.1. Caminata

Una **caminata (walk)** en un grafo G es una lista:

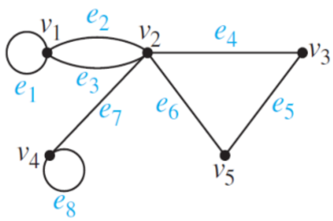
$$v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k.$$

de vértices y aristas tal que para todo $1 \leq i \leq k$ la arista e_i tiene extremos v_{i-1} y v_i.

0.1.2. Sendero

Un **sendero (trail)** es una caminata sin aristas repetidas.

Ejemplo



- $v_1 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_1 e_2 v_2 e_4 v_3 \rightarrow$(caminata)
- $v_1 e_2 v_2 e_4 v_3 e_5 v_5 \rightarrow$(sendero)
- $v_1 e_3 v_2 e_4 v_3 e_5 v_5 \rightarrow$(sendero)

0.1.3. u,v-caminata

Una u,v-caminata tiene primer vértice u u último vértice v. estos dos son sus **extremos**. Los otros vértices son **vértices internos**. Análogamente se define un u,v-**sendero**.

0.1.4. Camino

Un **camino** es un sendero sin vértices repetidos. Análogamente se define un u,v-**camino**.

0.1.5. Circuito

Una caminata es **cerrada** si sus extremos son iguales. Un **circuito** es un sendero cerrado.

0.1.6. Ciclo

Un **ciclo** es un camino cerrado.

0.1.7. Longitud

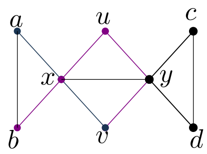
La **longitud** de una caminata, sendero, camino o ciclo es el número de aristas que la conforman.

Observación

- Un bucle es un ciclo de longitud 1.
- Un ciclo de longitud 2 genera aristas paralelas.
- Se G es un grafo simple la cominata, sendero, circuito, camino o ciclo únicamente elista los vértices.

Observación

¿Si se sigue un u,v-camino y un v,w-camino, el resultado es un u,w-camino?



- $a - x - v$ y $v - y - u - x - b$

0.1.8. Lema

Cada u,v-caminata contiene un u,v-camino.

Demostración (Inducción fuerte sobre longitud de la caminata)

P Base: Sea $l = 0$. Al no tener aristas,la caminata consiste de un único vértice ($u = v$). Este es un u, v-camino de $l = 0$.

P Inductivo: $l \geq 1$. Suponiendo que la proposición se cumple para caminatas de longitud menor a l. Si la caminata no tiene vertices repetidos, entonces sus vertices y aristas forman un u, v-camino. Si la caminata tiene un vértice w repetido, entonces si se limita al camino a todos los vértices y ejes despues de w (incluyendo a w) creando una w, v-caminata dentro de la u, v-caminata. Por lo tanto, por hipotesis de inducción se puede asegurar que en la w, v-caminata existe un camino. Y como esté camino tambien va a estar en la u, v-caminata, se ha demostrado por inducción que la propiedad se cumple para toda caminata con $l \geq 0$.

0.1.9. Grafo Conexo

- Un grafo G es **conexo** si existe un u,v-camino entre cada par $uv \in V(G)$. En otro caso es **disconexo**.
- Si G tiene un u,v-camino entonces u está **conectado** con v.

0.1.10. Relación de conexión

La **relación de conexión** en $V(G)$ consiste en todos los pares ordenados (u, v) tales que u está conectado con v:

$$uRv \text{ sii existe un } u, v\text{-camino.}$$

0.1.11. Teorema

La relación de conexión en $V(G)$ es una relación de equivalencia, Es decir que si $uRv \to vRu$.

0.1.12. Componentes

- Las **componentes** de un grafo G son sub grafos conexos maximales.
- Una componente es **trivial** si no tiene aristas, en otro caso no es trivial.
- Un **vértice aislado** es un vértice de grado cero.