3.3.1

$$\int_0^\infty P(v) = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$$

$$\int_0^\infty 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\; v\cdot v\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$$

$$= \int_0^\infty 4\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\cdot v\cdot v\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$u = \frac{mv^2}{2kT} \;—\; v^2 = \frac{u\cdot 2kT}{m}$$

$$du = \frac{m}{kT}v \rightarrow v = \frac{kT}{m}du$$

$$= \int_0^\infty 2\cdot\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\cdot\sqrt{\frac{u\cdot 2kT}{m}}\cdot e^{-u}\, du$$

$$= \int_0^\infty 2\cdot\sqrt{\frac{u}{\pi}}\cdot e^{-u}\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{u}\, e^{-u}\, du \longleftarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, u^{1/2} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{1/2} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad (\Gamma \text{ es la función gamma})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= 1$$

3.3.3

$$\int_0^\infty v\cdot P(v) = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v\cdot v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv$$

$$u = \frac{mv^2}{2kT} \longrightarrow v^2 = \frac{u\cdot 2kT}{m}$$

$$du = \frac{m}{kT}v \rightarrow v = \frac{kT}{m}du$$

$$= \int_0^\infty \overset{2}{\cancel{4\pi}}\left(\cancel{\frac{m}{2\pi kT}}\right)\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\cdot\frac{u\cdot 2\cancel{kT}}{\cancel{m}}\cdot\frac{kT}{m}e^{-u}\,du$$

$$= \int_0^\infty 4\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\cdot u\cdot\frac{kT}{m}\,e^{-u}\,du$$

$$= \int_0^\infty 4\sqrt{\frac{kT}{2\pi\cdot m}}\cdot u e^{-u}\,du$$

$$= 4\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\int_0^\infty u e^{-u}\,du$$

$$= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\,\Gamma(2) \quad (\Gamma \text{ es la función gamma})$$

$$= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

3. 3 . 4

$$\int_0^\infty v^2 \cdot P(v) = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v \cdot v \; v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \, dv$$

$$u = \frac{mv^2}{2kT} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{u \cdot 2kT}{m}}$$

$$du = \frac{m}{kT} v \rightarrow v = \frac{kT}{m} du$$

$$= \int_0^\infty \overset{2}{\cancel{4\pi}} \cdot \left(\frac{\cancel{m}}{\cancel{2\pi kT}}\right) \sqrt{\frac{\cancel{m}}{2\pi kT}} \cdot \sqrt{\frac{u \cdot \cancel{2kT}}{\cancel{m}}} \cdot \frac{u \cdot \cancel{2kT}}{\cancel{m}} \cdot \frac{kT}{m} e^{-u} du$$

$$= \int_0^\infty 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{kT}{m} \cdot u^{3/2} e^{-u} du$$

$$= 4 \cdot \frac{kT}{\sqrt{\pi}\, m} \int_0^\infty u^{3/2} e^{-u} du$$

$$= 4 \frac{kT}{\sqrt{\pi}\, m} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$ (Γ es la función gamma)

$$= 4 \frac{kT}{\sqrt{\pi}\, m} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$= \frac{3kT}{m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\int_0^\infty v^2 p(v)\, dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Ejercicio 3.3.5

La energía interna de un gas está dada por $E_{int} = \sum_{i=1}^{N} \overline{K_i} + \overline{U_i}$, donde $\overline{K_i}$ y $\overline{U_i}$ son el promedio de la energía cinética y potencial de la molécula i, de un total de N moléculas. Así, dado que $\overline{U_i}$ no varía en el sistema, podemos fijarla en $\overline{U_i = 0}$. De esta manera, tenemos:

$$
\begin{aligned}
E_{int} &= \sum_{i=1}^{N} \overline{K_i} + \overline{U_i} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \overline{K_i} \\
&= N \cdot \overline{K_i} \\
&= N \cdot \tfrac{1}{2}(m\overline{v^2}) \\
&= n \cdot N_a \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{3KT}{m} \\
&= \frac{3}{2} n \cdot N_a K \cdot T \\
&= \frac{3}{2} n \cdot RT
\end{aligned}
$$

donde m es la masa de la molécula, Na la constante de Avogadro, n el número de moles, K la constante de Boltzmann y T la temperatura.