Universidad de Sonora
Departamento de Física

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Física Computacional I

Reporte PDEs

Juan Pedro Del Castillo Valencia

219208472

Mayo 2021

Índice

1. Introducción

Una PDE (Partial Differential Equation) o EDP (Ecuación Diferencial Parcial) es una ecuación compuesta de las derivadas parciales de una función multivariable. Por la complejidad de este tipo de ecuaciones, se continua investigando herramientas o métodos para encontrar soluciones numéricas de PDEs.

En este reporte, nos dedicaremos a las PDEs Lineales de Segundo Orden. Especialmente, las PDEs parabólicas, hiperbólicas y elípticas, una familia de ecuaciones estudiadas e investigadas en la actualidad.

2. PDEs Lineales de Segundo Orden

Si establecemos que u denota la variable dependiente x y la variable independiente y, entonces la forma general de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden está dada por:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + CD\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

donde los coeficientes $A, B, C, ..., G$ son constantes o funciones de x y de y.
En nuestro caso, analizaremos las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Este tipo de ecuaciones pueden clasificarse de la siguiente manera:

- **Hiperbólica** si $B^2 - 4AC < 0$
- **Parabólica** si $B^2 - 4AC = 0$
- **Elíptica** si $B^2 - 4AC > 0$

2.1. Parabólicas

Las ecuaciones parabólicas tienen soluciones que se vuelven suaves mientras aumenta el tiempo. Un ejemplo de estas ecuaciones es la ecuación de calor.

2.2. Hiperbólicas

Las ecuaciones hiperbólicas retienen en sus soluciones discontinuidades de sus derivadas o funciones inciales. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es la ecuación de onda.

2.3. Elípticas

Las ecuaciones elípticas tienen soluciones suaves en el interior de donde está definida, sin embargo, puede tener valores de frontera no suaves. Un ejemplo de estas ecuaciones es la ecuación de Poisson.

3. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera son restricciones hacia las soluciones o derivadas de estas, impuestas sobre las fronteras del dominio de las mismas. A menudo, un problema de ecuaciones diferenciales parciales, viene dado con una condición inicial y condiciones de frontera. En este reporte, veremos tres tipos de condiciones de frontera.

3.1. Dirichlet

La condición de frontera de Dirichlet es una condición de frontera que especifica los valores sobre las fronteras del dominio de las soluciones. Es decir, esta condición te da el valor de la función solución sobre las fronteras.

3.2. Neumann

La condición de Neumann es un tipo de condición de frontera que impone el valor de las derivadas de la solución sobre las fronteras de su dominio. Es decir, la condición indica como debe ser la razón de cambio en las fronteras del problema.

3.3. Robin

La condición de Robin es un tipo de condición es una combinación lineal de los valores de la función y las derivadas en las fronteras del dominio de la solución. Es decir, es una combinación de los dos tipos anteriores de condiciones de frontera, obteniendo así, un sistema de ecuaciones a partir de las condiciones.

4. Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas es un método numérico para encontrar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales. Como se mencionó al inicio, obtener una expresión analítica de estas ecuaciones puede ser un trabajo realmente complicado o imposible, por ello, el uso de métodos numéricos es indispensable para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

El método de diferencias finitas consiste en discretizar tanto el dominio espacial como el intervalo temporal, para así, resolver ecuaciones de diferencias finitas y sus alrededores. Cuando analizamos una dimensión espacial, se puede interpretar como una malla discretizada cuyas coordenadas son el tiempo y espacio, donde se resuelve a partir de pasos utilizando los puntos alrededores a este.

En nuestras actividades, resolvimos ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden. En estas, obtenemos aproximaciones a las segundas derivadas (centrada) y sus primeras derivadas con las cuales se resuelven las ecuaciones utilizando un algoritmo para cada punto discretizado.

5. Solución de la Ecuación de Calor

La ecuación diferencial de calor es de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Para simplificar los cálculos, se resolvió para únicamente una dimensión espacial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

En primer lugar, se necesita una expresión para la segunda derivada espacial, para esto se utiliza una diferencia finita centrada de segundo orden, para $f''(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Ahora bien, dependiendo del tipo de condición de frontera, se procede de una manera u otra. Para el tipo de Dirichlet, nomás se especifican los valores de la función solución en las fronteras. Para el tipo de Neumann, es necesario realizar una aproximación finita de la primera derivada espacial. Y hacer la siguiente consideración:

$$u_{N+1} = u_{N-1}$$

Puesto que no se tiene información fuera del dominio. De este modo, la condición de frontera de Neumann resulta como:

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \kappa \frac{2u_{N-1}(t) - 2u_N(t)}{h^2}$$

Los algoritmos realizados son mostrados en el siguiente hipervínculo (Actividad 10):

Actividad 10

6. Solución de la Ecuación de Onda

La ecuación de onda tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

Para simplificar el algoritmo se reduce a solamente una dimensión espacial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(x, t)$$

En este caso, requerimos cuatro condiciones para poder resolver un problema de ecuación de onda. Dos de estas son condiciones inciales y dos condiciones de frontera.

Para simplificar la notación definimos, $u(x, t) = u(jh, nk) = u_j^n$, de este modo, la ecuación de onda al aplicar las diferencias finitas queda como:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

De donde se despeja u_j^{n+1}, obtenemos el paso para barrer la solución buscada.

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + C^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Al igual que en la ecuación de calor, utilizamos la siguiente consideración para la condición inicial:

$$u_j^1 = u_j^{-1}$$

de este modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j^0 = \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2k} = 0$$

Sustituimos la igualdad anterior en la ecuación de onda y nos queda que

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Ya tenemos la expresión para encontrar diferencias finitas, y ya están listas las condiciones iniciales y de frontera. Ahora sí, se utiliza el algorítmo para encontrar la solución.

Los algorítmos utilizados para la ecuación de onda se presentan en el siguiente hipervínculo (Actividad 11):

Actividad 11

7. Solución de la Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson es de la siguiente forma:

$$-\nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

Aplicando las diferencias finitas, utilizando notación simplificada y eliminando errores de orden superior, nos queda:

$$-\left(\frac{U_{i+1,k}+U_{i-1,k}}{h_x^2}+\frac{U_{i,k+1}+U_{i,k-1}}{h_y^2}\right)+2\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)U_{i,k}=f_{i,k}$$

Al igual que en la ecuación de onda, requerimos un esténcil de 5 puntos, por lo tanto utilizamos la misma consideración.

Los algoritmos para resolver la ecuación de Poisson se presentan en el siguiente hipervínculo (Actividad 12):

Actividad 12

8. Resumen y Conclusiones

Para resolver ecuacioens diferenciales parciales de segundo orden, hemos estudiado el método de diferencias finitas en el código de Python. Se estudiaron las ecuaciones más importantes y sus condiciones de frontera. Este método consiste en la discretización del intervalo temporal y el dominio espacial, esta técnica nos permite encontrar una solución a partir de sus condiciones iniciales y de frontera, dando pasos temporales y espaciales.

Como se vio en las tres actividades anteriores, este método es muy útil para resolver problemas reales de física, química, computación, entre otras. Personalmente, considero bastante acertada revisar estos códigos. Aunque en este momento no estemos completamente preparados para comprender como funcionan estas ecuaciones, tener esta herramienta a la mano será posiblemente de ayuda para futuros problemas a resolver.

9. Bibliografía

Referencias

[1] Partial differential equation. (2021, April 30). In Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation`

[2] Dennis G. Zill y Michael R. Cullen Ecuaciones diferenciales Matemáticas avanzadas para ingeniería, vol. 1 Ed. Thomson Paraninfo, 2006 Tercera edición

[3] Dirichlet boundary condition. (2021, April 21). In Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_boundary_condition`

[4] Neumann boundary condition. (2021, March 16). In Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann_boundary_condition`

[5] Robin boundary condition. (2020, December 9). In Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Robin_boundary_condition`

[6] Finite difference method. (2021, April 14). In Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method`

[7] Heat equation. (2021, May 2). In Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation#Solving_the_heat_equation_using_Fourier_series`

[8] Wave equation. (2021, March 28). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation

[9] Poisson's equation. (2021, March 24). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson%27s_equation