1. Demuestre por medio de inducción matemática que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Solución

a) $$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Demostración

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Si $n=1$ se cumple que (base inductiva)

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1(4)}{4} = 1$$

Supongase que se cumple para $n=k$, es decir

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$; veamos si se cumple para $n = k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad (*)$$

se demuestra que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{2^2} + \frac{2^2 k}{2^2} + \frac{2^2}{2^2}\right)$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{(k+2)^2}{4}\right) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad (*)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

b) $$2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Demostración.

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Si $n=1$ se cumple que (base inductiva)

$$\sum_{i=1}^{1} (2i)^2 = \frac{2(1)(1+1)(2(1)+1)}{3}$$

$$= \frac{2(2)(3)}{3} = 4$$

Supongase que se cumple para $n=k$ (Hipótesis)

$$\sum_{i=1}^{k} (2i)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

Veamos si se cumple para $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i)^2 = \frac{2(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{3}$$

$$= \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

Se demuestra que

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i)^2 = \sum_{i=1}^{k}(2i)^2 + (2(k+1))^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} + (2(k+1))^2$$

$$= \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} + 4(k+1)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1) + 12(k+1)^2}{3}$$

$$= (k+1)\left[\frac{2k(2k+1)}{3} + 4(k+1)\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{4k^2 + 2k + 12k + 12}{3}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{2(2k+3)(k+2)}{3}\right]$$

$$= \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k+1}(2i)^2 = \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

2. Diga si las siguientes proposicciones de la lógica de Boole son o no Tautológicas. Construya las respectivas tablas de verdad.

$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Eq.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 1

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Eq.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 2

Conclusión:

La primera proposición (tabla 1) no es tautológica, mientras que la segunda proposición sí es tautológica. (tabla 2)

3. Calcule las clausuras reflexivas, simétrica y transitiva. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación $R \subseteq A \times A$ tal que $R = \{(a;b), (a;c), (a;e), (e;d), (b;c), (c;c), (c;d), (d;a), (d;c)\}$

Clausura reflexiva:

$$R_{ref} = R \cup \{(a,a), (b,b), (d,d), (e,e)\}$$

$$R_{ref} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,e), (b,b), (b,c), (c,c), (c,d), (d,a), (d,d), (d,c), (e,d), (e,e)\}$$

Clausura simétrica:

$$R_{sym} = R \cup \{(b,a), (c,a), (e,a), (d,e), (c,b), (a,d)\}$$

$$R_{sym} = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,e), (e,a), (b,c), (c,b), (c,c), (c,d), (d,c), (d,a), (a,d), (d,e), (e,d)$$

Clausura transitiva:

$R^{+} = A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,b), (b,c),$
$(b,d), (b,e), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (c,e),$
$(d,a), (d,b), (d,c), (d,d), (d,e), (e,a), (e,b),$
$(e,c), (e,d), (e,e)\}$

4. Recuerde y muestre que las siguientes igualdades son verdaderas para tres conjuntos X, Y, Z

a) $(X - Y) \cap (X - Z) = X - (Y \cup Z)$

b) $(X - Y) \cup (X - Z) = X - (Y \cap Z)$

c) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

d) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

Solución

a) $(X - Y) \cap (X - Z) = X - (Y \cup Z)$

Sea m un elemento cualquiera

$m \in X \wedge m \notin Y \wedge m \in X \wedge m \notin Z$

$m \in X \wedge (m \notin Y \wedge m \notin Z)$

$m \in X \wedge m \notin (Y \wedge Z)$

$m \in X \wedge \neg(m \in (Y \vee Z)$

$X - (Y \cup Z)$

$(X - Y) \cap (X - Z) \subseteq X - (Y \cup Z) \qquad (1)$

luego:

$X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cap (X - Z)$

Sea m un elemento cualquiera

$m \in X \wedge \neg(m \in Y \vee m \in Z)$

$m \in X \wedge (m \notin Y \wedge m \notin Z)$

$(m \in X \wedge m \notin Y) \wedge (m \in X \wedge m \notin Z)$

$(X - Y) \cap (X - Z)$

$X - (Y \cup Z) \subseteq (X - Y) \cap (X - Z) \quad (2)$

$\therefore$ por (1) y (2) $(X - Y) \cap (X - Z) = X - (Y \cup Z)$

b). $(X - Y) \cup (X - Z) = X - (Y \cap Z)$

Sea p un elemento cualquiera

$(p \in X \wedge p \notin Y) \vee (p \in X \wedge p \notin Z)$

$p \in X \wedge (p \notin Y \vee p \notin Z)$

$p \in X \wedge p \notin (Y \vee Z)$

$p \in X \wedge \neg (p \in (Y \wedge Z)$

$X - (Y \cap Z)$

$(X - Y) \cup (X - Z) \subseteq X - (Y \cup Z) \quad (1)$

Entonces: $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$

$p \in X \wedge \neg (p \in (Y \wedge Z)$

$p \in X \wedge (p \notin (Y \vee Z)$

$p \in X \wedge (p \notin Y \vee p \notin Z)$

$(p \in X \wedge p \notin Y) \vee (p \in X \vee p \notin Z)$

$(X - Y) \cup (X - Z)$

$X - (Y \cap Z) \subseteq (X - Y) \cup (X - Z) \quad (2)$

con (1) y (2) $(X - Y) \cup (X - Z) = X - (Y \cap Z)$

son iguales

$(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z)$ (2)

$\therefore$ por (1) y (2) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

5

a. Muestre que la cardinalidad del conjunto de partes $\wp(X)$ para un conjunto dado X en 2^n

Sea X un conjunto con n elementos.

El conjunto de partes $p(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X

Si $X = \{a, b, c\}$, entonces $|X| = 3$

Los subconjuntos son:

$\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

Hay $8 = 2^3$ subconjuntos

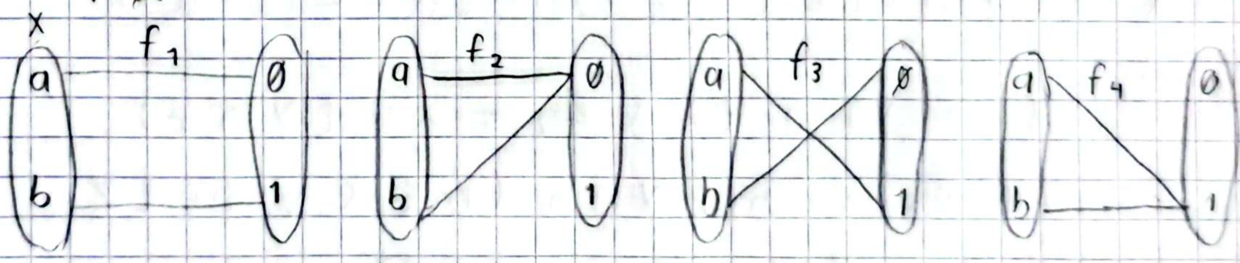
Conclusión

La cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto X con $|X| = n$ es: $|p(X)| = 2^n$

b. Muestre que la cardinalidad de $p(X)$ es igual a la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de X en $\{0, 1\}$

$X = \{a, b\}$ $|X| = 2$ $p(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$|p(X)| = 4$ $|X| = m$, ahora $|p(X)| = 2^m = 2^{|X|}$



$f(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$ $|f(X)| = 4$

c. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Sea r un elemento cualquiera

$r \in X \wedge (r \in Y \vee r \in Z)$

$(r \in X \wedge r \in Y) \vee (r \in X \wedge r \in Z)$

$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

$X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (1)

Tenemos:

$(X \cap Y) \cup (X \cap Z) = X \cap (Y \cup Z)$

$(r \in X \wedge r \in Y) \vee (r \in X \wedge r \in Z)$

$r \in X \wedge (r \in Y \vee r \in Z)$

$X \cap (Y \cup Z)$

$(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$ (2)

con (1) y (2)

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

d. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cap Z)$

Sea m un elemento cualquiera

$m \in X \vee (m \in Y \wedge m \in Z)$

$(m \in X \vee m \in Y) \wedge (m \in X \vee m \in Z)$

$(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

$X \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ (1)

luego:

$(Y \cup Y) \cap (X \cup Z) = X \cup (Y \cap Z)$

$(m \in X \vee m \in Y) \wedge (m \in X \vee m \in Z)$

$m \in X \vee (m \in Y \wedge m \in Z)$

$X \cup (Y \cap Z)$

$|f(x)| = |p(x)|$

$4 = 4$

$n=0$, ahora $|x| = 0$ si y solo si $x = \emptyset$ $|P(x)| = \{\emptyset\}$

$\therefore |P(0)| = 2^0 = 1$

$n = 1$, $P(x) = \{\emptyset, x\}$ $|P(x)| = 2^1 = 2$

$n = k > 0$, sea a un elemento que pertenece a x

$|x - \{a\}| = k$ $|p(x - \{a\}) = 2^k$, Dado un subconjunto N obtengo un subconjunto $x - \{a\}$

$\therefore |P(x)| = 2|P(x - \{a\}| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$