

Ray tracing through the atmosphere

Ute Amerstorfer

1. Skizze der Problemstellung:

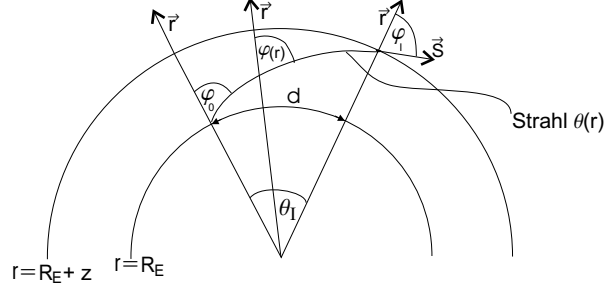


Abbildung 1: Skizze der Problemstellung für gekrümmte Strahlen.

In Abbildung 1 bezeichnet $R_E = 6371$ km den Erdradius, φ_0 ist der Winkel, mit dem der Strahl von der Bodenstation abgeschickt wird, und φ_I ist der Winkel zwischen dem Strahlvektor \vec{s} und dem Radiusvektor \vec{r} in der Höhe $z = 650$ km des Satellitenorbits. Der Strahl wird durch den Winkel θ und die radiale Distanz r charakterisiert, also in Polarkoordinaten mit dem Erdmittelpunkt als Ursprung dargestellt.

2. Gewöhnliche Differentialgleichung:

Die Differentialgleichung

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{C}{n(r) r^2 \cos(\varphi(r))}$$

beschreibt unser Problem, wobei $C = n(r_0) r_0 \sin(\varphi_0)$ eine Konstante ist, $n(r) = 1 + 10^{-6} N(r)$ ist das Brechungsindexfeld der Atmosphäre, $N(r) = N_0 \exp(-\frac{r-r_0}{H_n})$ ist die Refraktivität und $\varphi(r) = \arcsin(\frac{C}{n(r)r})$ ist der Winkel zwischen dem Strahlvektor \vec{s} und dem Radiusvektor \vec{r} .

Die Anfangsbedingungen und Parameter dieser Differentialgleichung sind folgendermaßen gegeben:

- $\theta_0 = 0^\circ$ ist die Anfangswinkelkoordinate des Strahles bei $r = R_E$,
- $\varphi_0 \in \{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ \text{ bzw. } 89.9^\circ\}$,
- $N_0 = 315$ [N-units] und
- $H_n = 7$ km (Refraktivitätsskalenhöhe) und
- $r_0 = R_E = 6371$ km.

Die gesuchten Lösungen sind die Strahlen $\theta(r)$, d.h. die numerische Sequenz der Strahlenwegkoordinaten $[r_i, \theta_i]$ von (r_0, θ_0) bis $(r_I = R_E + 650 \text{ km}, \theta_I)$ mit der Schrittweite $h_i = h = 100$ m für die vier Anfangswinkel φ_0 .

Als numerische Lösungsverfahren benutzen wir

1. die *Eulersche Methode* und
2. die 4^{th} order *Runge–Kutta–Methode*.

Die erforderlichen Resultate:

- Die gefundenen vier Strahlenwege grafisch darstellen (im Polarplot),
- separat nur den Bereich von r_0 bis $r_0 + 30$ km darstellen, und dieses Ergebnis vergleichen mit dem Ergebnis, das man mit $h = 1$ km bekommt,
- die horizontalen Distanzen (siehe Skizze) von der Station, in der die vier Strahlen den Satellitenorbit erreichen. Zum Vergleich: Wie sind die horizontalen Distanzen, wenn die Strahlen geradlinig wären?

3. Die Eulersche Methode:

Unser Problem ist im allgemeinen Fall eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

für die wir nun eine allgemeine Lösung suchen. Wir wollen eine Gleichung, die $y(x + h)$ mit $y(x)$ für kleine Schritte h , verbindet. Ein einfacher Weg, um das zu tun, ist die Taylorreihenentwicklung:

$$\begin{aligned} y(x + h) &= y(x) + h \frac{dy}{dx} \Big|_x + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_x + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y(x) + hf(x) + \frac{h^2}{2} \frac{d}{dx} f(x) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y(x) + hf(x) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right] + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y(x) + hf(x) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Der ersten zwei Terme dieser Expansion

$$y(x + h) = y(x) + hf(x)$$

können nun verwendet werden, um $y(x + h)$ bei gegebenem $y(x)$ zu berechnen. Dieser Schritt kann dann wiederholt werden

$$y(x + 2h) = y(x + h) + hf(x + h)$$

und so weiter. Dieser Algorithmus ist der einfachste Weg, um Differentialgleichungen zu lösen, und wird *Eulersche Methode* genannt.