Taller # 2

Sección 2.3.6

5. a) Comprobar que las matrices de pauli forman una base para el espacio de las matrices 2×2 hermiticas.

- Comprobar si son hermiticas:

$- \sigma_0 = (\sigma_0^t)^*$

$$(\sigma_0^t)^* = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hermitica.

- $\sigma_1 = ((\sigma_1)^t)^*$

$$((\sigma_1)^t)^* = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hermitica.

- $\sigma_2 = ((\sigma_2)^t)^*$

$$\sigma_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^t\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^*$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Hermitica.

- $((\sigma_3)^t)^* = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t\right)^*$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hermitica.

- Comprobar independencia lineal

- $\alpha_0 \sigma_0 + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha_2 \\ i\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sistema de ecuaciones:

1) $\alpha_0 + \alpha_3 = 0$

2) $\alpha_1 - i\alpha_2 = 0$

3) $\alpha_1 + i\alpha_2 = 0$

4) $\alpha_0 - \alpha_3 = 0$

Sumando y restando 2) y 3) obtenemos que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Sumando y restando 1) y 4) obtenemos que $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son linealmente independientes

- Encontrar los α para los que genera el espacio de hermiticas 2×2.

Forma general de una matriz hermitica 2x2.

$$A = \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix}$$

Matrices de pauli.

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix}$$

- Sistema de ecuaciones.

1) $\alpha_0 + \alpha_3 = a$

2) $\alpha_1 - i\alpha_2 = c + id$

3) $\alpha_1 + i\alpha_2 = c - id$

4) $\alpha_0 - \alpha_3 = b$

Sumando y restando 2) y 3) encontramos que $\alpha_1 = c$ y $\alpha_2 = d$.

Sumando y restando 1) y 4) obtenemos que:

$$\alpha_0 = \frac{a+b}{2} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{a-b}{2}$$

• La matriz que genera el espacio es:

$$A = \left(\frac{a+b}{2}\right)\sigma_0 + c\,\sigma_1 + d\,\sigma_2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)\sigma_3$$

5. b) Bajo el producto interno definido como $\langle A, B \rangle = T_r(A^\dagger B)$

Ya que las matrices son hermiticas podemos decir que:

$$T_r(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu$$

• $\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$T_r(\sigma_1 \sigma_2) = i(1-1) = 0$

• $\sigma_1 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T_r(\sigma_1 \sigma_3) = 0$

• $\sigma_2 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}(\sigma_2 \sigma_3) = 0$

La base es ortogonal.