

Titulo

Juan David Rueda,* Sofia Naranjo Barros,** Daniel Santiago Rueda,*** and Marlon Stiven Farfan****
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
 (Dated: 19 de mayo de 2023)

Abstract

I. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se analizará el movimiento acoplado de una pelota que rueda sin deslizar sobre una cuña circular, y que justo en la base de esta golpea un carro que tiene integrado un péndulo, teniendo en cuenta que todo el sistema parte desde el reposo. Se usarán métodos de energía, conservación de momentum y ecuaciones de Euler-Lagrange para describir analíticamente el movimiento del sistema.

Analizando en primer lugar el movimiento de la pelota que rueda sin deslizar sobre la rampa circular, por métodos de energía encontramos que la velocidad final de la pelota $v_{f,b}$ (es decir, justo en el momento de la colisión) está dada por

$$v_{f,b} = \sqrt{\frac{2m_bgh}{m_b + I/r^2}} = \sqrt{\frac{6gh}{5}} = \sqrt{11,76h} \quad (1)$$

Tomando $I = \frac{2}{3}m_br^2$ el momento de inercia de la pelota (hueca) de radio $r = 2,9\text{ cm}$, y teniendo en cuenta que hemos tomado $g = 9,8\text{ m/s}^2$ y h como la altura (variable) desde la cual se suelta la pelota.

Ahora bien, asumiendo un choque elástico entre la pelota de masa $m_b = 71,0\text{ g}$ y el carro de masa $M = 233,9 + m_p$ (siendo m_p la masa del péndulo (liviano o pesado)), obtenemos las siguientes ecuaciones analizando el momento justo antes y justo después del choque:

$$m_b v_{f,b} = M v_{o,c} - m_b v'_b \quad (2)$$

$$m_b v_{f,b}^2 = M v_{o,c}^2 + m_b v_b'^2 \quad (3)$$

donde se ha definido v'_b como la velocidad de la pelota después del choque, y $v_{o,c}$ es la velocidad del carro justo después del choque, la cual consideraremos desde ahora como su velocidad inicial. Despejando esta velocidad de las ecuaciones 2 y 3 tenemos

$$v_{o,c} = \frac{2m_b v_{f,b}}{M + m_b} = \frac{142 v_{f,b}}{304,9 + m_p} \quad (4)$$

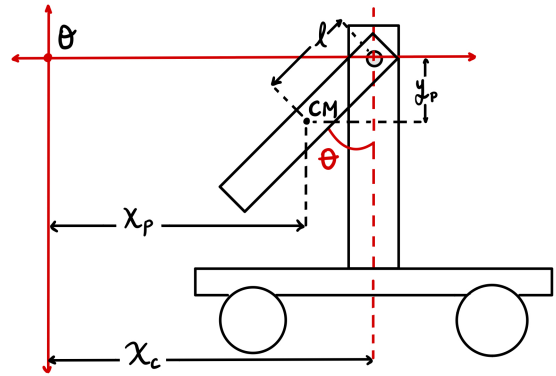


Figura 1. Esquema de coordenadas para el sistema carro y péndulo.

Finalmente, para el movimiento del carro, a partir de lo mostrado en la figura 1 obtenemos las siguientes ecuaciones de coordenadas:

$$x_p = x_c - l \sin \theta$$

$$y_p = -l \cos \theta$$

donde x_c , x_p y y_p representan las coordenadas del carro y el péndulo respectivamente, y l representa la distancia que hay entre el pivote del péndulo físico y la posición de su centro de masa. Con esto se obtiene el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}m_p \left(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}_c^2 - 2l\dot{\theta}\dot{x}_c \cos \theta \right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + m_p g l \cos \theta \quad (5)$$

con m_p la masa del péndulo físico, e I el momento de inercia del péndulo físico. Ahora bien, asumiendo una fuerza de fricción debido al rozamiento de las ruedas dada por $F_{f,c} = \mu Mg$, y otra fuerza debida al rozamiento del péndulo con su pivote, dada por $F_{f,p} = b\dot{\theta}$ donde b es el coeficiente de fricción, podemos obtener la siguiente ecuación modificada de Euler-Lagrange

* Correo institucional: jd.ruedat@uniandes.edu.co

** Correo institucional: s.naranjob@uniandes.edu.co

*** Correo institucional: d.ruedav@uniandes.edu.co

**** Correo institucional: ms.farfan@uniandes.edu.co

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$$

Definiendo \mathcal{D} como la *Función de Disipación* dada por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{n+1} \sum_j c_j v_j^{n+1},$$

donde n representa la proporcionalidad que sigue la fuerza de fricción con respecto a v (note que para el caso $n = 1$ se obtiene la conocida *Función de Disipación de Rayleigh*). Luego, en el contexto de nuestro sistema, para cada una de las fuerzas $F_{f,c} = \mu Mg$, y $F_{f,p} = b\dot{\theta}$ obtenemos sus respectivas funciones de disipación

$$(n = 0) \Rightarrow \mathcal{D}_r = \mu Mg \dot{x}_c$$

$$(n = 1) \Rightarrow \mathcal{D}_p = \frac{1}{2} b \dot{\theta}^2$$

y, con esto, podemos obtener las ecuaciones de movimiento para cada coordenada

$$\ddot{x}_c = \frac{ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - \mu Mg}{M + m_p} \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{ml\ddot{x}_c \cos \theta - mgl \sin \theta - b\dot{\theta}}{ml^2 + I} \quad (7)$$

En efecto, se encuentra que estas ecuaciones están ligadas, como se esperaba.

Ahora, durante el desarrollo del experimento se hará uso de todos estos resultados para estimar los coeficientes de rozamiento para cada subsistema, con dos péndulos de distinto peso y momento de inercia, y a diferentes alturas desde dónde se lanzará la pelota. Con esto se hará un intento de evaluar el comportamiento de este sistema acoplado bajo diversas condiciones.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

Para cumplir con los objetivos de estudio del experimento, se utilizó una pelota de tenis, cuña circular de madera, superficie de rodamiento (carro) y dos tipos de péndulos físicos fabricados, igualmente, en madera. La figura 2 muestra el montaje que se utilizó para la toma de datos.

La toma de datos se realizó usando el software *Tracker: Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education*. Para ello, se dejó caer la pelota de tenis desde el

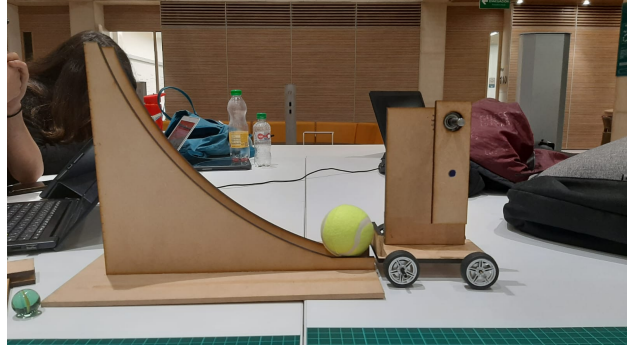


Figura 2. Montaje experimental. A la izquierda se observa la cuña circular sobre la cual rueda la pelota de tenis. Esta estructura inicial se compone de dos rieles con curvatura hechos en madera. Justo en la base, se encuentra el carro que será empujado por la pelota. Sobre este, está colocado el péndulo físico acoplado al mismo mediante un soporte.

punto más alto de los rieles permitiendo que empujara la superficie de rodamiento la cual, por acople, mueve el péndulo físico que se encuentra sobre esta. Este mismo procedimiento se realizó para diferentes alturas cada 5cm, y con otro tipo de péndulo físico con el fin de analizar lo que sucede al cambiar el momento de inercia del cuerpo en movimiento. Para cada montaje se realizó un video, el cual fue insertado en la plataforma de análisis mencionada anteriormente, tomando como punto de referencia el centro de masa de cada péndulo. De estos sistemas fueron obtenidos los datos de posición del centro de masa en función del tiempo.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A través del software Tracker, se registran las coordenadas del centro de masa y el eje de oscilación de cada péndulo físico y se utiliza como punto de referencia el lugar donde la pelota choca con la superficie de rodamiento. Las coordenadas del centro de masa junto a las del eje de oscilación permiten determinar el ángulo que forma el péndulo respecto al eje de oscilación. A lo largo del análisis, se toma el eje de oscilación como marco de referencia con el fin de visualizar el efecto del rodamiento únicamente sobre el péndulo. En ese sentido, se observa que el ángulo en función del tiempo para ambos péndulos, a distintas alturas, se comporta como un oscilador armónico amortiguado.

Para verificar esta relación, se realizan ajustes con la solución de un oscilador amortiguado (ecuación 8) para cada una de las curvas obtenidas a través del software Logger Pro. En la Figura 3, se muestra uno de los ajustes de los datos para el péndulo liviano, donde la pelota cayó desde una altura de 27,5 cm.

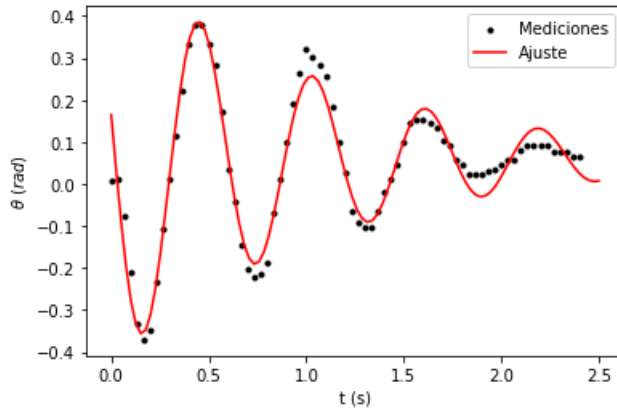


Figura 3. Ángulo formado por el péndulo liviano en función del tiempo. En la gráfica se muestran los datos ajustados a la solución de un oscilador amortiguado. La curva tiene un coeficiente de correlación de 0.9759.

Para cada conjunto de datos, se obtuvo un coeficiente de correlación entre 0.8690 y 0.9833; lo que sugiere que el comportamiento del péndulo físico es equivalente al de un oscilador amortiguado, a pesar de analizarlo respecto a un marco de referencia no inercial. Este resultado indica que las fuerzas no conservativas que actúan sobre el péndulo son proporcionales a su velocidad angular; específicamente, la viscosidad del aire. En el Cuadro III, se presentan las constantes de amortiguamiento obtenidas para cada péndulo a distintas alturas a partir del ajuste realizado.

h (cm)	$\gamma_{\text{pesado}} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$	$\gamma_{\text{liviano}} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$
5	$1,06 \pm 0,09$	$1,8 \pm 0,4$
10	$0,66 \pm 0,04$	$1,6 \pm 0,1$
15	$0,70 \pm 0,04$	$1,29 \pm 0,08$
20	$0,56 \pm 0,03$	$1,10 \pm 0,08$
27,5	$0,60 \pm 0,03$	$0,87 \pm 0,06$

Cuadro I.

Para validar teóricamente este resultado, se encuentra que las ecuaciones de movimiento del sistema pueden reescribirse tal que se obtienen dos ecuaciones diferenciales, cada una en términos de una coordenada generalizada. La ecuación que describe el comportamiento del ángulo formado por el péndulo respecto al eje de oscilación para ángulos pequeños es:

Esta ecuación corresponde a un oscilador amortiguado; lo que confirma los resultados obtenidos. Por otro lado, con base en esta ecuación, se espera que la constante de amortiguamiento sea una constante independientemente de la altura desde la cual se lanzó la pelota; es decir, el impulso inicial del péndulo. Sin embargo, las constantes de amortiguamiento cambian con respecto a este impulso. Debido a que este coeficiente es equivalente a un factor constante del coeficiente de viscosidad b , entonces este coeficiente cambia y no es una constante que depende del medio como se espera.

IV. CONCLUSIONES

V. APÉNDICE DE CALCULO DE ERRORES

$$Ae^{-Bt} \sin(Ct + D) + E \quad (8)$$