

TP2:diferenciación_numérica

April 30, 2025

1 TP de Diferenciación Numérica

1.1 Ejercicio especial Covid-19

Grupo 4:

- Costa Felipe
- Gutierrez Juan Santiago
- Indeau Federico
- Lucero Julieta

1.1.1 Código

Utilizando python 3.12

Se definieron las siguientes funciones, El código se aloja en [github](#)

```
[1]: import numpy as np
import math
import pandas as pd

def generar_indices(n: int, traslacion:int = 0) -> np.array:
    """Genera un array simétrico de n/2 enteros alrededor de cero incluyendo el 0
    ↪ y si n es par prefiere a la derecha. Traslada el array antes de
    ↪ devolverlo"""
    array = np.arange(-int(n/2), int(n/2)+1)
    if n%2 == 0: array = array[1:]
    return array + traslacion

def gen_matrix(derivada: int = 1, truncamiento: int = 2, traslacion: int = 0)
    ↪ -> np.ndarray:
    """Crea una matrix cuadrada para el calculo de una n-derivada usando
    ↪ expansiones de Taylor alrededor de un punto"""
    puntos = derivada + truncamiento
    indices = generar_indices(puntos, traslacion)

    # Definir una matrix cuadrada vacia
    A = np.ones((puntos,puntos))
```

```

# Los elementos de la matrix se calculan así
def coef(i:int ,j:int) -> float:
    return math.pow(j,i) / math.factorial(i)

# Recorrer la matrix y generar cada elemento
for i in range(puntos):
    for j in indices:
        k = j + sum(1 for i in indices if indices[i] < 0) # Ajusta el
↳ índice j, con el índice de la matrix de forma que indices[0] -> i, 0 de la
↳ matrix
        A[i][k] = round(coef(i=i,j=j), truncamiento + 2)

# Retornar la matrix
return A

def coef_derivada(matrix: np.ndarray[float], derivada:int =1) -> np.
↳ ndarray[float]:
    """gen_matrix() -> A\n
    Matrix A para derivadas, aplica las condiciones para la n-derivada\n
    devolviendo los coeficientes X \n
    X -> evaluar_derivada()"""
    # Define un vector vacio y aplica las condiciones
    v = np.zeros((len(matrix)))
    v[derivada] = 1
    # Resuelve el sistema y lo retorna
    return np.linalg.solve(a=matrix, b=v)

def evaluar_derivada(X:np.ndarray,f:np.ufunc ,x:float=0.0, dx: float = 0.1,
↳ traslacion:int = 0, derivada:int = 1) -> float:
    """coef_derivada() -> X \n
    Evalua la derivada en un punto en base a los coeficientes X y a cual
↳ derivada se dirige \n
    -> f'(x)"""
    df = 0
    # Usa los coeficientes de X y los índices de los puntos para calcular df,
↳ recorriendo ambos arrays en simultaneo.
    for i,j in zip(X, generar_indices(len(X), traslacion)):
        df += i * f(x + j * dx )
    return df / math.pow(dx,derivada)

def derivar(x:float,f:np.ufunc,dx:float = 1e-6,derivada: int =1, orden:int = 2,
↳ traslacion:int=0)-> float:
    """Deriva una funcion numericamente, usando expansiones de Taylor"""
    # Calcular la matrix, por defecto da la 1er derivada
    A = gen_matrix(derivada=derivada,truncamiento=orden,traslacion= traslacion)

```

```

# Calcular los coeficientes
X = coef_derivada(matrix=A,derivada=derivada)

# Evaluar la derivada
df = evaluar_derivada(X=X, f=f, x=x, dx=dx,traslacion=traslacion,
↳derivada=derivada)
return df

def extrapolacion_Richarson(D0:float, D1:float, dx0:float, dx1:float, n:int)->
↳tuple[float]:
    """Extrapolación de Richarson\n
    Junta el resultado de dos metodos numéricos para derivadas y así obtener un
↳resultado más exacto\n
    Ambas derivadas deben obtenerse con el mismo método y  $dx0 = dx1/2$ """
    df = np.round(D0 + ((D0 - D1)/(math.pow((dx1/dx0),n)-1)),5) # Mejor
↳aproximación
    err = abs(np.round((D0-D1)/(math.pow(dx1,n)-math.pow(dx0,n)),5)) # Error de
↳la aproximación
    return (df, err)

```

1.1.2 Datos y guía

Con las funciones anteriormente definidas se realizan los ejercicios en la guía de ejercicios: * *Ejercicio especial Derivacion 2021.pdf*

Con datos extraídos de <https://www.argentina.gob.ar/coronavirus/informe-diario> en uno de los reportes diarios. * En particular: “*Reporte diario COVID-19.csv*”

1.1.3 Resolución

- La resolución consta de el código realizado y la salida. Cada ejercicio está escrito como una funcion y luego se la ejecuta.
- Se presentan los 5 primeros datos.

```
[2]: DF = pd.read_csv("../Data/Reporte diario COVID-19.csv")
```

```
[3]: """1. Aproxime la derivada primera para cada día con un esquema de orden 2 y un
↳paso de 1 día."""
from time import time

def ejer1(DF):
    # Variables
    traslacion = 0
    derivada = 1
    orden = 2
    pasos = 1 #

```

```

def contagios(dia):
    return DF["acumulado"][dia-1]
L = []
for dia in DF["dia"]:
    traslacion = 0
    while True:
        try:
            df = derivar(x=dia, f=contagios, dx=pasos, derivada=derivada,
orden=orden, traslacion=traslacion)
            break
        except:
            if dia < len(DF)//2: traslacion+=1
            else: traslacion-=1
    L += [df]
DF = DF.assign(df_ejer1 = L)
print(DF.head())
return DF

```

```
DF = ejer1(DF)
```

	dia	nuevo	acumulado	df_ejer1
0	1	1	1	-3.5
1	2	1	2	5.5
2	3	3	12	7.5
3	4	5	17	3.5
4	5	2	19	2.0

[4]: *"""2. Aproxime la derivada primera para cada día con un esquema de orden 2 y un paso de 2 días"""*

```

def ejer2(DF):
    # Variables
    traslacion = 0
    derivada = 1
    orden = 2
    pasos = 2 #
    def contagios(dia):
        return DF["acumulado"][dia-1]
    L = []
    for dia in DF["dia"]:
        traslacion = 0
        while True:
            try:
                df = derivar(x=dia, f=contagios, dx=pasos, derivada=derivada,
orden=orden, traslacion=traslacion)
                break
            except:
                if dia < len(DF)//2: traslacion+=1

```

```

        else: traslacion-=1
    L += [df]
    DF = DF.assign(df_ejer2 = L)
    print(DF.head())
    return DF

```

```
DF = ejer2(DF)
```

	dia	nuevo	acumulado	df_ejer1	df_ejer2
0	1	1	1	-3.5	6.50
1	2	1	2	5.5	10.25
2	3	3	12	7.5	4.50
3	4	5	17	3.5	4.75
4	5	2	19	2.0	4.75

[5]: *"""3. Mejore la aproximación usando la extrapolación de Richardson $O(dx^4)$."""*

```

def ejer3(DF):
    def D1(dia):
        return DF["df_ejer1"][dia-1]
    def D0(dia):
        return DF["df_ejer2"][dia-1]
    L = []
    L1= []
    for dia in DF["dia"]:
        df = extrapolacion_Richarson(D0=D0(dia), D1=D1(dia), dx0=2, dx1=1, n=2)
        L += [df[0]]
        L1 += [df[1]]
    DF = DF.assign(df1_Richarson_4_0 = L)
    #DF = DF.assign(df1_Richarson_error = L1)
    print(DF.head())
    return DF
DF = ejer3(DF)

```

	dia	nuevo	acumulado	df_ejer1	df_ejer2	df1_Richarson_4_0
0	1	1	1	-3.5	6.50	-6.83333
1	2	1	2	5.5	10.25	3.91667
2	3	3	12	7.5	4.50	8.50000
3	4	5	17	3.5	4.75	3.08333
4	5	2	19	2.0	4.75	1.08333

[6]: *"""4. Determine una fórmula de derivación centrada que sea de orden $O(dx)$."""*

```

def ejer4(DF):
    derivada = 1
    traslacion = 0
    orden = 4
    A = gen_matrix(derivada=derivada, truncamiento=orden, traslacion=traslacion)
    X = coef_derivada(A, derivada=derivada)
    X = np.round(X,2)

```

```

    formula = f"({X[0]}*f-2 + {X[1]}*f-1+ {X[2]}*f0 + {X[3]}*f1+ {X[4]}*f2)/dx"
    return DF, formula
DF, formula = ejer4(DF)
print(formula)

```

(0.08*f-2 + -0.67*f-1+ -0.0*f0 + 0.67*f1+ -0.08*f2)/dx

[7]: *"""5. Aproxime la derivada primera para cada día con el esquema de orden 4 y un paso de 1 día."""*

```

def ejer5(DF):
    # Variables
    traslacion = 0
    derivada = 1
    orden = 4
    pasos = 1
    def contagios(dia):
        return DF["acumulado"][dia-1]
    L = []
    for dia in DF["dia"]:
        traslacion = 0
        while True:
            try:
                df = derivar(x=dia, f=contagios, dx=pasos, derivada=derivada,
orden=orden, traslacion=traslacion)
                break
            except:
                if dia < len(DF)//2: traslacion+=1
                else: traslacion-=1
        L += [df]
    DF = DF.assign(df_ejer5= L)
    print(DF.head(5))
    return DF
DF = ejer5(DF)

```

	dia	nuevo	acumulado	df_ejer1	df_ejer2	df1_Richarson_4_0	df_ejer5
0	1	1	1	-3.5	6.50	-6.83333	-12.166585
1	2	1	2	5.5	10.25	3.91667	9.166679
2	3	3	12	7.5	4.50	8.50000	8.500003
3	4	5	17	3.5	4.75	3.08333	3.083332
4	5	2	19	2.0	4.75	1.08333	1.083331

[8]: *"""6. Aproxime un polinomio de grado 3 usando los comandos "polyfit()", "polyout()", y derívelo con "polyder()"."""*

```

def ejer6(DF):
    x = DF["dia"]
    y = DF["acumulado"]
    coeffs = np.polyfit(x, y, 3)

```

```

dercoeffs = np.polyder(coeffs)
fx = np.polyval(coeffs, x)
dfx= np.polyval(dercoeffs,x)

return dfx ,fx
dpoly_x, poly_x = ejer6(DF)

```

7. Realice las siguientes 4 gráficas en una misma ventana utilizando el comando subplot() que comparen:

- Las derivadas centradas de orden 2 con los dos pasos,
- las derivadas obtenidas por Richardson (orden 4) y la fórmula de Orden 4,
- los datos y el polinomio de grado 3, y,
- las derivadas obtenidas por la fórmula de orden 4 y las derivadas obtenidas al derivar el polinomio

```

[9]: import matplotlib.pyplot as plt

x = DF["dia"] # Dominio

plt.figure(figsize= (10,10))
# Gráfica 1
plt.subplot(2,2,1)

dy2 = DF["df_ejer2"]

plt.scatter(x, dy2, marker = ".",label="der_2orden_2pasos")

plt.title("Gráfica 1")
plt.ylabel("Nuevos")
plt.xlabel("dia")
plt.legend()

# Gráfica 2
plt.subplot(2,2,2)

dy1 = DF["df1_Richarson_4_0"]

plt.scatter(x, dy1,marker = ".",label="extrapolación_4grado")
plt.text(0, 164, formula, size = "8")

plt.title("Gráfica 2")
plt.ylabel("Nuevos")
plt.xlabel("dia")
plt.legend()

# Gráfica 3
plt.subplot(2,2,3)

```

```

y3 = DF["acumulado"]

plt.plot(x, poly_x, label = "poly_3", color="red")
plt.scatter(x, y3,marker=".",label="acumulacion")

plt.title("Gráfica 3")
plt.ylabel("Total")
plt.xlabel("dia")
plt.legend()

# Gráfica 4
plt.subplot(2,2,4)

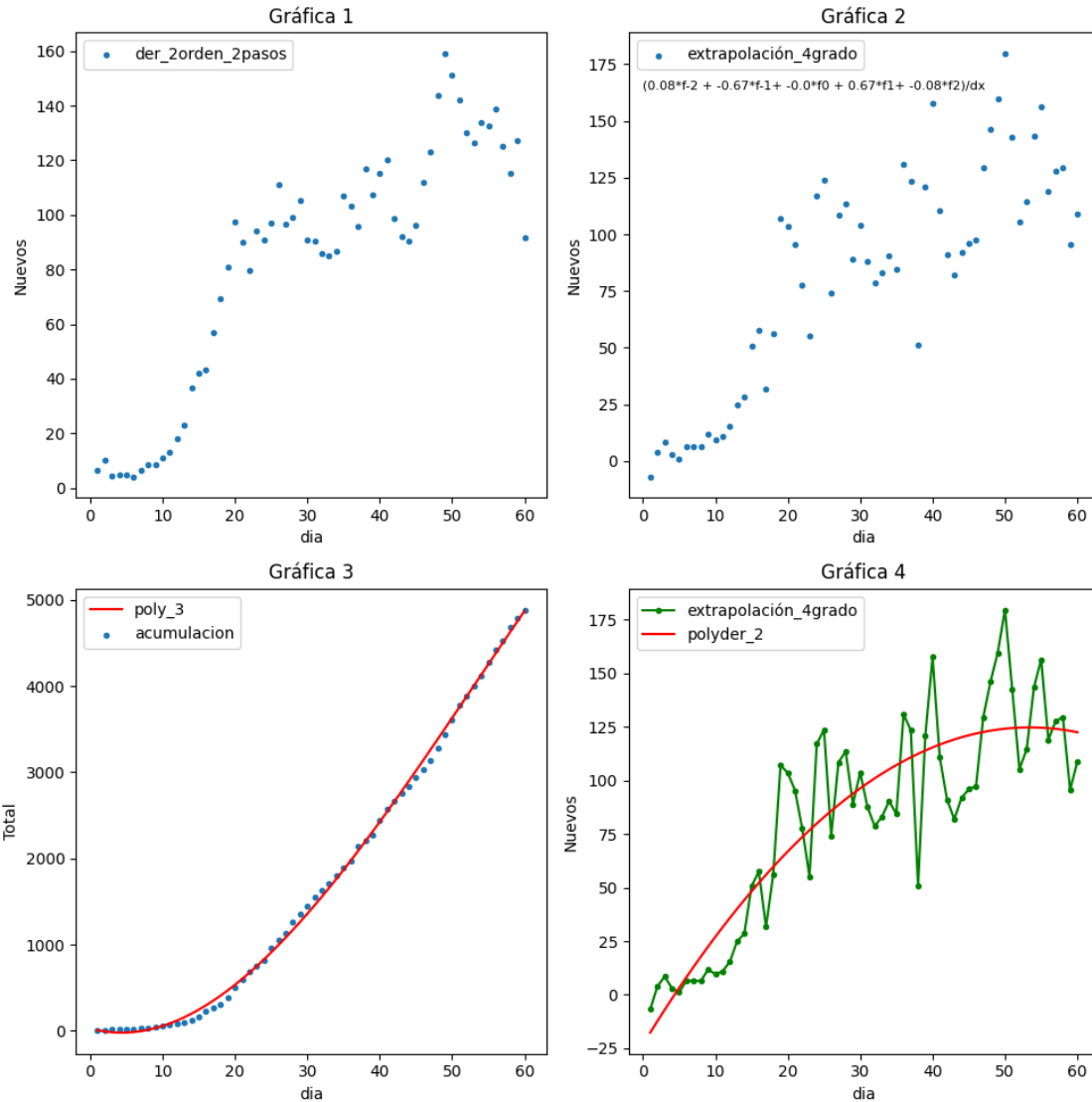
dy1 = DF["df1_Richarson_4_0"]

plt.plot(x, dy1,"-",marker=".",label="extrapolación_4grado", color ="green")
plt.plot(x, dpoly_x,"-", label = "polyder_2", color="red")

plt.title("Gráfica 4")
plt.ylabel("Nuevos")
plt.xlabel("dia")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

```

- Reporte sus observaciones respecto a los diferentes métodos utilizados. ¿Cuál le parece mejor? y ¿por qué? Compare con los datos de contagios nuevos.

1. Observaciones

- Al aumentar la cantidad de puntos evaluados en Taylor puro, la gráfica se suaviza. La gráfica de derivadas se aproxima más al polyder que a los datos “nuevo”, perdiendo mucha exactitud. A su vez, los extremos deben resolverse trasladando los puntos evaluados hacia el centro, perdiendo más precisión en los extremos.
- Calcular Richarson o Taylor puro, en cuanto a tiempo de procesamiento no encuentre diferencia apreciable.
- Aumentar el grado en Taylor puro mejoro notablemente la aproximación a los valores de “nuevo”.

2. Opinión

- El método general de Taylor puro para derivar numéricamente es muy exacto y programarlo fue muy enriquecedor.
- Para los primeros ejercicios 1,2 y 3 notamos en la gráfica que Richarson_4 es equivalente a aplicar un 1 paso y 4 grado de Taylor puro. Sin embargo, si por lo que fuera no se pudiera obtener más allá de Taylor grado 2, Richarson lo resuelve, ya que evaluando con más puntos obtendríamos el grado 4, lo que es 100 veces más preciso.
- Nos parece que Richarson es excelente cuando cuesta realizar expansiones de Taylor y a su vez es más estable, ya que no necesita evaluar delta x muy pequeños y debido a que no necesita de datos muy proximos para ser confiable.