Sección 2.1.5. : Ejercicio 10

Sea

$$P_{n-1} = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} : a_i \in \mathbb{R} \}$$

Se tomaron los polinomios

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, \quad \text{y escalares } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si $\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = 0 \longleftrightarrow$ todos $c_i = 0$. Así, para probar igualdades de polinomios basta probar coeficientes.

(a) Probar que P_{n-1} es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Axiomas de espacio vectorial

1. Cierre suma. $(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$, $a_i + b_i \in \mathbb{R}$ entonces $p+q \in P_{n-1}$.

2. Cierre por escalares. $(\lambda p)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda a_i) x^i \in P_{n-1}$

3. Asociatividad de la suma ($r \in P_{n-1}$ y c_i son sus coeficientes reales).

$$((p+q)+r)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} ((a_i + b_i) + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + (b_i + c_i)) x^i = (p+(q+r))(x)$$

donde $r \in P_{n-1}$. Se prueba asociatividad así ya que se usan coeficiente reales y se tiene que en $\mathbb{R}$: $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$

4. Conmutatividad de la suma

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i) x^i = (q+p)(x)$$

5. Neutro aditivo.

$$\text{Si } h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (0) x^i = 0 \rightarrow (p+h)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + 0)(x^i) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i) x^i = p(x)$$

6. Inverso.

$$(-p)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i) x^i \Rightarrow (p-p)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (0) x^i = 0$$

Sección 2.1.5.: Ejercicio 10

7. Distributividad escalar

$$\lambda(p+q)(x)=\sum_i \lambda(a_i+b_i)x^i=\sum_i(\lambda a_i+\lambda b_i)x^i=(\lambda p+\lambda q)(x)$$

8. Distributividad polinomial.

$$(\lambda+\mu)p(x)=\sum(\lambda+\mu)(a_i)x^i=\sum(\lambda a_i+\mu a_i)x^i=(\lambda p+\mu p)(x)=$$

$$=\lambda p(x)+\mu p(x)$$

9. Asociatividad del producto

$$\lambda(\mu p)(x)=\sum\lambda(\mu a_i)x^i=\sum(\lambda\mu)a_i x^i=(\lambda\mu)p(x)$$

10. Identidad escalar

$$1\cdot p(x)=\sum(1\cdot a_i)x^i=\sum a_i x^i=p(x)$$

los axiomas.

(b) No, P_n no sería espacio vectorial para coeficientes a_i enteros. Esto se debe a que un espacio vectorial está definido para elementos V del espacio y elementos K de un campo o cuerpo, y para definir un campo se debe tener un grupo abeliano pero los enteros $\mathbb{Z}$ no forman si quiera un grupo ya que no cumplen con la existencia de un inverso: $g \square g^{-1} = \hat{g}$.

(c)

I. Es subespacio de grado n.

① Cerradura polinomial: sea $q \in P_{n-1}$ y $p \in P_{n-1} \Rightarrow q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i \in P_{n-1}$ ya que a_i y b_i son escalares reales y su suma es real.

② Cerradura escalar: sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha(p(x)) = \sum \alpha(a_i) x^i = \sum (\alpha a_i) x^i$; $\alpha a_i \in \mathbb{R}$;

③ El vector neutro es igual tanto en el espacio como en el subespacio, el polinomio nulo.

Sección 2.1.5.: Ejercicio 10

(c)

II Sea $f(x)=\sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Y V el espacio más W_{II} el objeto a probar subespacio.

① El vector neutro de V está en W_{II}, siendo el polinomio cero ($p(x)=0$).

② Cerradura vectorial.

$$f(x)+g(x)=(f+g)(x)=\sum_{i=0}^{2n}(a_i+b_i)x^i, \quad a_i+b_i \in \mathbb{R} \rightarrow (f(x)+g(x)) \in P_{2n}$$

③ Cerradura por escalar

$$\alpha f(x)=\sum_{i=0}^{2n}\alpha(a_i)x^i=\sum_{i=0}^{2n}(\alpha a_i)x^i, \quad \alpha a_i \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha f(x) \in P_{2n}$$

W_{II} es subespacio de V.

III Sea $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, $g(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i x^i$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Y W_{III} el objeto a probar subespacio, donde $n \geq 1$.

① Vector neutro Sea $p(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x^i$ donde todos los $p_i=0 \rightarrow p(x)=0$

② Cerradura vectorial

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)x^i, \quad (a_i+b_i) \in \mathbb{R} \rightarrow (f(x)+g(x)) \in P_n$$

③ Cerradura escalar.

$$(\alpha)(f(x))=\sum_{i=1}^{n}\alpha(a_i)x^i=\sum(\alpha a_i)x^i \rightarrow \alpha a_i \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha f(x) \in P_n$$

W_{III} es subespacio de V.

Sección 2.1.5.: Ejercicio 10.

(c)

IV Sea $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x^i - 1)$ y $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x^i - 1)$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Y W_{IV} el objeto a probar subespacio.

① Vector nulo.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i (x^i - 1) \quad \text{donde todos los } p_i = 0 \Rightarrow p(x) = 0$$

② Cerradura vectorial.

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)(x^i - 1), \; a_i + b_i \in \mathbb{R} \Rightarrow (f(x) + g(x)) \in W_{IV}$$

③ Cerradura escalar.

$$\alpha f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha (a_i)(x^i - 1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i (x^i - 1), \; \alpha a_i \in \mathbb{R}, \; \alpha f(x) \in W_{IV}$$

W_{IV} es subespacio de V. ∎

Sección 2.2.4.: Ejercicio 6.

(a) 4. Asociatividad: $(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$

$(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = [(a^\alpha + b^\alpha)|g_\alpha\rangle] + c^\alpha|g_\alpha\rangle = [a^\alpha + (b^\alpha + c^\alpha)]|g_\alpha\rangle =$

$= a^\alpha|g_\alpha\rangle + (b^\alpha + c^\alpha)|g_\alpha\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$

5. Existencia de un neutro aditivo.

$|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle : |a\rangle + |0\rangle = (a^\alpha + 0^\alpha)|g_\alpha\rangle = a^\alpha|g_\alpha\rangle = |a\rangle$

6. Existencia de un inverso aditivo

$|a\rangle + |-a\rangle = |0\rangle : |a\rangle + |-a\rangle = (a^\alpha - a^\alpha)|g_\alpha\rangle = (0)|g_\alpha\rangle = |0\rangle$

7. Asociatividad con escalares: Sea $K, c \in \mathbb{R}$

$(|a\rangle c)\cdot K = |a\rangle(c\cdot K) : (|a\rangle c)\cdot K = (a^\alpha|g_\alpha\rangle c)K = (a^\alpha|g_\alpha\rangle)cK =$

$= (a^\alpha|g_\alpha\rangle)(cK) = |a\rangle(cK)$

8. Elemento neutro escalar.

$|a\rangle\cdot 1 = |a\rangle : |a\rangle\cdot 1 = a^\alpha|g_\alpha\rangle\cdot 1 = (1\cdot a^\alpha)|g_\alpha\rangle = a^\alpha|g_\alpha\rangle = |a\rangle$

9. Distrivutividad escalar.

$K(|a\rangle + |b\rangle) = K|a\rangle + K|b\rangle : K(|a\rangle + |b\rangle) = K[(a^\alpha + b^\alpha)|g_\alpha\rangle] =$

$= [K(a^\alpha + b^\alpha)|g_\alpha\rangle] = (Ka^\alpha + Kb^\alpha)|g_\alpha\rangle = Ka^\alpha|g_\alpha\rangle + Kb^\alpha|g_\alpha\rangle = K|a\rangle + K|b\rangle$

10. Distrivutividad vectorial

$(K + c)|a\rangle = K|a\rangle + c|a\rangle : (K + c)|a\rangle = (K + c)a^\alpha|g_\alpha\rangle = (Ka^\alpha + ca^\alpha)|g_\alpha\rangle =$

$= Ka^\alpha|g_\alpha\rangle + ca^\alpha|g_\alpha\rangle = K|a\rangle + c|a\rangle$

$$(b^\circ + \vec{b})(r^\circ + \vec{r}) = b^\circ r^\circ + b^\circ \vec{r} + r^\circ b + b \odot r \, , \quad b \odot r = b \times r - b \cdot r$$

Sección 2.2.4.: Ejercicio 6

(b) Probar: $|b\rangle \odot |r\rangle = |d\rangle = (d^\circ, \vec{d}) = (b^\circ r^\circ - \vec{b} \cdot \vec{r}, \; r^\circ \vec{b} + b^\circ \vec{r} + \vec{b} \times \vec{r})$

$$|b\rangle = b^\circ + \vec{b} \, , \quad |r\rangle = r^\circ + \vec{r} \, , \quad (b^\circ + \vec{b})(r^\circ + \vec{r}) = b^\circ r^\circ + b^\circ \vec{r} + r^\circ \vec{b} + \vec{b} \odot \vec{r} =$$

$$= b^\circ r^\circ + b^\circ \vec{r} + r^\circ \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{r} - \vec{b} \cdot \vec{r}) = \underbrace{b^\circ r^\circ - \vec{b} \cdot \vec{r}}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{b^\circ \vec{r} + r^\circ \vec{b} + \vec{b} \times \vec{r}}_{\text{parte vectorial imagina}}$$

Se deduce $\vec{b} \odot \vec{r} = \vec{b} \times \vec{r} - \vec{b} \cdot \vec{r}$ a partir del producto entre vectores definido en la tabla de multiplicación.

Sección 2.2.4.: Ejercicio 6

(c) Completar:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = a|g_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |g_j\rangle + A^{(jk)i} b_j r_k |g_i\rangle$$

De (b) se tiene: $|b\rangle \odot |r\rangle = b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r} + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + \vec{b}\times\vec{r} =$

$$= (b^0 r^0 - b^i r_i)|g_0\rangle + b^0 r^i |g_i\rangle + r^0 b^i |g_i\rangle + \epsilon^{jki} b_j r_k |g_i\rangle =$$

$$= a|g_0\rangle + (b^0 r^i + r^0 b^i)|g_i\rangle + \epsilon^{ijk} b_j r_k |g_i\rangle =$$

$$= a|g_0\rangle + S^{0j}|g_j\rangle + \epsilon^{jki} b_j r_k |g_i\rangle = \underbrace{a|g_0\rangle}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{S^{\alpha j}\delta^0_\alpha |g_j\rangle}_{\text{parte escalar producto vectorial}} + \underbrace{\epsilon^{jki} b_j r_k |g_i\rangle}_{\text{producto vectorial}}$$

(d) $a = b^0 r^0 - b^i r_i$; $S^{(ij)} = b^0 r^i |g_i\rangle + r^0 b^i |g_i\rangle$; $A^{(jk)i} = \vec{b}\times\vec{r} = \epsilon^{jki} b_j r_k$

$|d\rangle$ no es vector ni pseudovector al tener componentes vectoriales y escalares.

(e)

... de vector ni pseudovector al tener componentes vectoriales y escalares.

(e)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobar que $(\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = (\sigma_3)^2 = -I$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Se puede hallar un K donde $(K\sigma_i)^2 = -I$

$K^2 = -1 \rightarrow K = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Ya que se debe cumplir para todas la operaciones entre elementos $K\,i$, basta con comprobar si se cumple o No para una sola, siendo que es el mismo K siempre: $\langle q_1 | q_2 \rangle = |q_3\rangle \rightarrow (K\sigma_1)(K\sigma_2) = K\sigma_3$

$$K^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow K\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de $a_{11} \rightarrow K\,i = 1$; Si $K = -i \rightarrow -i^2 = 1$ ✓. $\underline{K = -i}$

(C)

Comprobar si matrices $\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ se pueden considerar cuaterniones.

Para $|a\rangle \in \mathbb{H}$. $|a\rangle = a^0|g_0\rangle + a^i|g_i\rangle = a^0 I - i a^i \sigma_i =$

$$= \begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & a^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ia^1 \\ -ia^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ia^3 & 0 \\ 0 & ia^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^0 - ia^3 & -a^2 - ia^1 \\ a^2 - ia^1 & a^0 + ia^3 \end{pmatrix}$$. Si $z = a^0 - ia^3$, y $w = -a^2 - ia^1$ se comprueba.

(F) Mostrar que una posible representación para elementos de $\mathbb{H}$ son:

$$|g_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |g_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |g_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$|g_0\rangle$ = identidad $= I_4$; Sea para cada $|g_i\rangle$ una matriz A_i con $i = \{1, 2, 3\}$

Si se comprueba que las matrices A_i cumplen con las reglas de multiplicación de los cuaterniones, estas serán representación matricial.

I	I_4	A_1	A_2	A_3
I_4	I_4	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	$-I_4$	A_3	$-A_2$
A_2	A_2	$-A_3$	$-I_4$	A_1
A_3	A_3	A_2	$-A_1$	$-I_4$

: Esta tabla es análoga a la de los cuaterniones por lo que A_i es representación análoga a los cuaterniones.

(g) Comprobar que $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^* \odot |b\rangle$ es buena definición de producto interno.

$|a\rangle^* \odot |b\rangle = (a_0 |q_0\rangle - a^i |q_i\rangle) \odot (b_0 |q_0\rangle + b^i |q_i\rangle) = a_0 |q_0\rangle b_0 |q_0\rangle + a_0 |q_0\rangle b^i |q_i\rangle -$
$- a^i |q_i\rangle b_0 |q_0\rangle - a^i |q_i\rangle b^i |q_i\rangle$. Se tiene que dentro de la definición de producto interno hay una componente cuaterniana vectorial y dado que los cuaternianos NO son cuerpo al carecer de conmutatividad multiplicativa (no son grupo abeliano) este producto interno NO está bien definido.

Sección 2.2.4. Ejercicio 6.

(i) Se tiene $n(|a\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$\| |a\rangle \| \rightarrow$ norma euclidiana. Componentes de $|a\rangle$: $|a\rangle = a_0 + a^i |q_i\rangle =$
$= a_0 + a_x i + a_y j + a_z k$. Al sacar la norma euclidiana $\| |a\rangle \|$ se toman solo los coeficientes a_0, a_x, a_y, a_z.

$\| |a\rangle \| = \sqrt{a_0^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Esta norma cumple con todas las propiedades de norma definidas.

Se propone $\sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle} = \| |a\rangle \|$, hay que probarlo.

$|a\rangle^* \odot |a\rangle = (a_0 - a^i |q_i\rangle) \odot (a_0 + a^i |q_i\rangle) = (a_0^2 + \cancel{(a_0) a^i |q_i\rangle} - \cancel{(a_0) a^i |q_i\rangle}) -$
$- (a^i |q_i\rangle)^2 = a_0^2 - a^{i2} |q_i\rangle^2 = a_0^2 - (a_x^2 i^2 + a_y^2 j^2 + a_z^2 k^2)$;
; $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $|a\rangle^* \odot |a\rangle = a_0^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \| |a\rangle \|^2$.

Así, se demuestra que esta definición de norma es análoga a la euclidiana, por lo que cumple con todos los requisitos de norma y es completamente válida.

(j) $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\|a\|^2}$; Probar que $|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = |g_0\rangle = 1$

$$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} \odot |a\rangle = \frac{\langle a|a\rangle}{\|a\|^2} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|^2} = 1.$$

(K) Comprobar si los cuaterniones forman grupo respecto $\odot$.

Cerradura: $|a\rangle \odot |b\rangle = (a_0 + a^i|q_i\rangle) \odot (b_0 + b^i|q_i\rangle) = a_0 b_0 + a_0 b^i |q_i\rangle +$
$+ b_0 a^i |q_i\rangle + a^i b^i |q_i\rangle^2$. Recordando que los cuaterniones contienen a $\mathbb{R} \wedge \mathbb{C}$.

$\rightarrow |a\rangle \odot |b\rangle = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{real}} + \underbrace{(a_0 b^i + b_0 a^i + a^i b_i |q_i\rangle)|q_i\rangle}_{\text{parte compleja/imaginaria}} \rightarrow$ es un cuaternion.

Asociatividad: De (c) se tiene que un cuaternion se puede representar de la forma matricial por lo que este hereda la propiedad asociativa de las matrices para su producto. (✓)

Elemento neutro (identidad): de la "tabla de multiplicación":

$|a\rangle|q_0\rangle = |a\rangle$; $|q_0\rangle = 1 =$ identidad

Elemento inverso: De (j): hay un $|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\| a \|^2}$ tal que $\langle \bar{a}| \odot |a\rangle = |q_0\rangle = 1$

$\| |a\rangle \|^2$

Sección 2.2.4. : Ejercicio 6.

(L) Comprobar si para $|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$, se tiene $\| |v'\rangle \|^2 = \| |v\rangle \|^2$

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle = |\bar{a}\rangle \odot (|v\rangle \odot |a\rangle) = |\bar{a}\rangle \odot [(v^i |q_i\rangle) \odot (a_0 + a^i |q_i\rangle)] =$$

$$= \overline{|a\rangle} \odot (a_0 v^i |q_i\rangle + a^i v^i |q_i\rangle^2) = \overline{|a\rangle} \odot (a_0 + a^i |q_i\rangle)(v^i |q_i\rangle) =$$

$$= (|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle)(v^i |q_i\rangle) = |q_0\rangle v^i |q_i\rangle = |v\rangle$$

Se tiene que $|v'\rangle = |v\rangle \Longrightarrow \| |v'\rangle \|^2 = \| |v\rangle \|^2$