Sección 3.1.4.: Ejercicio 6

(a) Por construcción de una base recíproca (también dual y no necesariamente ortogonal) se tiene que $e^i e_j = \delta^i_j$. Por lo tanto, $\forall \{e_i\}$ se cumple:

$$e_i = \alpha (e^j \times e^k) \wedge e^i e_i = 1 \Rightarrow \alpha e^i \cdot (e^j \times e^k) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{e^i \cdot (e^j \times e^k)}$$

$$\Longrightarrow \alpha e_i = \frac{\alpha (e^j \times e^k)}{e^i \cdot (e^j \times e^k)} \Longrightarrow e_i = \frac{e^j \times e^k}{e^i \cdot (e^j \times e^k)} \rightleftharpoons e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_i (e_j \times e_k)}$$

(b) $e^1 = \dfrac{e_2 \times e_3}{V}$; $e^2 = \dfrac{e_3 \times e_1}{V}$; $e^3 = \dfrac{e_1 \times e_2}{V}$; $\tilde{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3) =$

$= \dfrac{1}{V^3} (e_2 \times e_3) \cdot [(e_3 \times e_1) \times (e_1 \times e_2)]$; $(e_2 \times e_3) \cdot [(e_3 \times e_1) \times (e_1 \times e_2)] = [e_1 \cdot (e_2 \times e_3)]^2$

; $\tilde{V} = \dfrac{1}{V^3} [e_1 \cdot (e_2 \times e_3)]^2 = \dfrac{V^2}{V^3} = \dfrac{1}{V} \Longrightarrow V \tilde{V} = 1$

(c) $a = e_i$ ya que $e^i \cdot e_j = \delta^i_j$ y no pueden haber elementos repetidos en una base y todos los demás vectores en el espacio son combinación de la base, por lo que e_i es solución única para $a \cdot e^i = 1$.