Primer Entregable C3C

Estudiante
Juan Diego Sarmiento Villarreal

Afiliación institucional
Universidad Industrial de Santander

Curso
Métodos matemáticos para físicos

Profesor
Luis Nuñez

Fecha
13/02/2026

Sección 1.5.7

2.

(a) Demostrar: $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$$[\nabla(\phi\psi)]_i = \partial_i(\phi\psi) \xrightarrow{\text{regla de la cadena}} \partial_i(\phi\psi) = (\partial_i\phi)\psi + (\partial_i\psi)\phi$$

$$= \phi(\partial_i\psi) + \psi(\partial_i\phi)$$

Así, $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(d) $\nabla\cdot(\nabla\times a)$, ¿Qué puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

Sea $\vec{b} = \nabla\times\vec{a}$, entonces $b_k = \epsilon_{kmn}\partial_m a_n$

La divergencia es $\partial_k b_k$:

$$\nabla\cdot(\nabla\times a) = \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j a_k) = \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k$$

Se tiene que ϵ_{ijk} es antisimétrico en ij: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jik}$

$\partial_i\partial_j$ es simétrico en i,j.

La contracción de un tensor antisimétrico con uno simétrico es 0.

Sección 1.6.5

2)

(a) Fórmula de Moivre: $\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) = (\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))^n$

$\rightarrow \cos(3\theta) + i\,\text{sen}(3\theta) = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta + i(3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta)$

Parte real: $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}\,\theta$

(b) Parte imaginaria: $\text{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta$

Ejercicios 5

(a) $\sqrt{2i}$

Se tiene que $Z_K = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi K}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\theta+2\pi K}{n}\right)\right]$. Para este caso: $n=2$; $K=0,1$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $Arg = \frac{\pi/2 + 2\pi K}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi K$; Si $K=0 \Rightarrow Arg = \frac{\pi}{4}$ $\wedge$ si $K=1 \Rightarrow Arg = \frac{5}{4}\pi$. Y $r = \|Z\| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Así, $z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$. Luego, $z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\,sen\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1-i$. Recapitulando los resultados se tiene que $z_0 = 1+i$ $\wedge$ $z_1 = -(1+i)$

(b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$. Es de la forma $z = (a+bi)^{\frac{1}{n}}$ con $n=2$; $K=0,1$; $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$ $\wedge$ $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+3} = 2$. Además, para $K=0 \Rightarrow Arg = -\frac{\pi}{6}$ $\wedge$ para $K=1 \Rightarrow Arg = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Entonces, $Z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$ $\wedge$ $Z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$.

Recapitulando resultados: $Z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$ $\wedge$ $Z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$

6.

Se define $Log(z) = \ln[\|z\|] + i(Arg(z) + 2\pi n) = \ln[\|z\|] + i\theta$

(a) ¿$Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$? ; $\|z\| = \sqrt{(-e)^2} = e$; $Arg(z) = \frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2}$. Así, $Log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

(b) ¿$Log(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}i$? $\|z\| = \sqrt{2} \to \ln[\sqrt{2}] = \frac{1}{2}\ln(2)$; $\theta = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Así, $Log(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}i$