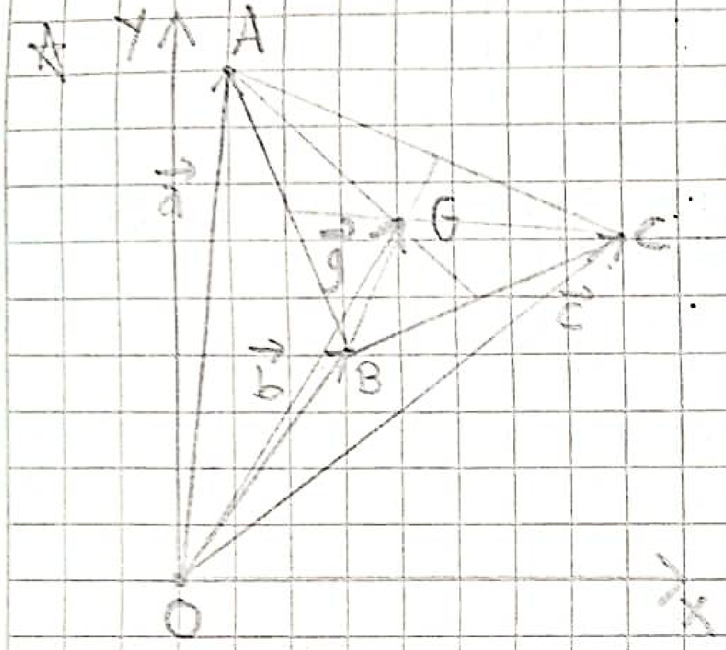
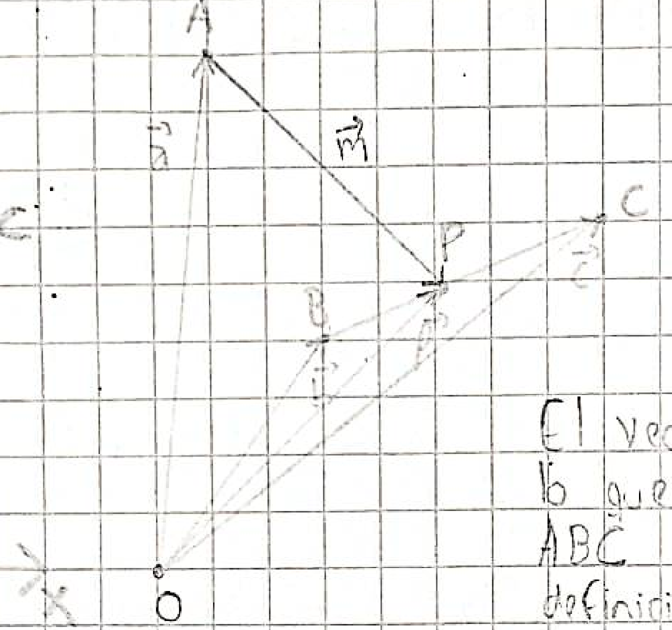
Ejercicio 1: Clase 1.

Nombre: Joan Diego Sarmiento. Codigo: 2240676

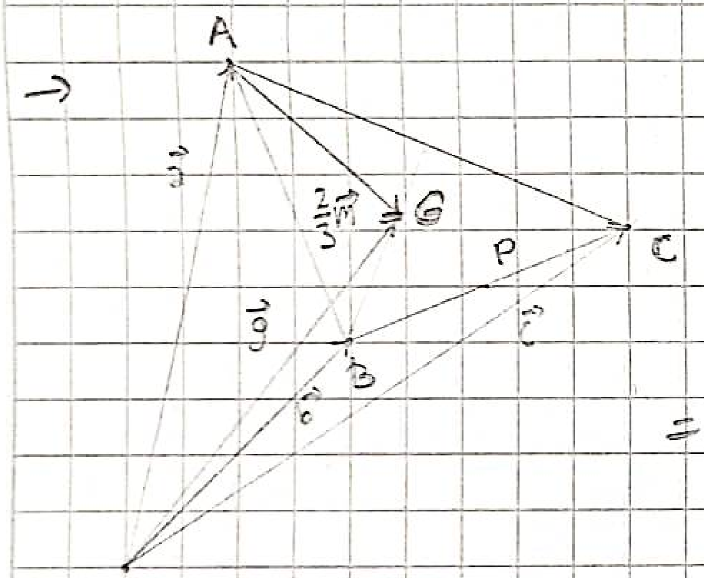




El punto P es el punto medio entre B y C. El vector $\vec p$ que va desde O hasta P se define como: $\vec p = (\vec b + \vec c)\frac{1}{2}$

El vector $\vec m$ va desde A hasta P por lo que pasa por el centroide del triángulo ABC y es una de sus medianas. Por definición, $\frac{2}{3}$ de $\vec m$ será un vector con cabeza en el centroide. Así →

→



El vector $\vec g$ es entonces: $\vec g = \vec a + \frac{2}{3}\vec m$. donde $\vec m = \vec p - \vec a =$

$= \frac{1}{2}(\vec b + \vec c) - \vec a$. $\vec g = \vec a + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec b + \vec c) - \vec a\right) = \vec a + \frac{1}{3}(\vec b + \vec c) - \frac{2}{3}\vec a =$

$= \frac{1}{3}(\vec a + \vec b + \vec c)$. Así, $\vec g = \frac{1}{3}(\vec a + \vec b + \vec c)$

Ejercicio 3: Clase 1.

3. Demostrar $A^{i'}_{k}\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}$

Se interpreta $A^{i'}_{k}$ como una matriz que permite pasar de coor. "viejas" (k) a "nuevas" (i'). Y se interpreta $\tilde{A}^{j}_{i'}$ como una matriz que permite pasar de coor. "nuevas" (i') a coordenadas "viejas" (j).

Así, con esta interpretación se puede ver a $\tilde{A}^{j}_{i'}$ como el inverso de la matriz $A^{i'}_{k}$, por lo que su producto da como resultado la identidad, que se representa como la delta de Kronecker (δ^{j}_{k}).

$\delta^{i'}_{j}$

Demostración Formal:

Por definición: $A^{i'}_{j} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}}$, y $\tilde{A}^{j}_{i'} = \dfrac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}$

Se tiene también que: $\dfrac{\partial x^{j}}{\partial x^{k}} = \dfrac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} \cdot \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}} \xrightarrow[\text{notación}]{} \delta^{j}_{k} = A^{j}_{i'}\tilde{A}^{i'}_{k}$

Ejercicio 2: Clase 2.

Nombre: Juan Diego Sarmiento. Código: 2240676.

2)

(a) Demostrar $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha)$

Recordar: $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cos b + \cos a \operatorname{sen} b$

$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha$. Se tiene $\cos 2a = \cos a^2 - \operatorname{sen} a^2$

y $\operatorname{sen}2a = 2\operatorname{sen}a\cos a$. Sustituyendo: $\cos(3\alpha) = \cos\alpha(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}\alpha(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) =$

$= \cos^3\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$.

Usando la identidad De Moivre: $(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha)$

$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) \rightarrow (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha -$

$- 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha - i\operatorname{sen}^3\alpha = \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha)$.

$\cos 3\alpha + i\operatorname{sen}3\alpha = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha) + i(-\operatorname{sen}^3\alpha + 3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha)$

Así, $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$ y $\operatorname{sen}3\alpha = -\operatorname{sen}^3\alpha + 3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha$.

(b) Se demuestra en el anterior enunciado por De Moivre.

5)

(a) $\sqrt{2i}$: $n = 2$, $K = 0, 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, Ángulo $= \frac{\theta + 2\pi K}{n} = \frac{(\pi/2) + 2\pi K}{2} =$

$= \frac{\pi}{4} + \pi K$. Para $K = 0 \rightarrow$ Ángulo $= \frac{\pi}{4}$, Para $K = 1 \rightarrow$ Ángulo $= \frac{5\pi}{4}$

Fórmula para raíces: $z_K = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi K}{2}\right)\right]$

Modulo $= r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{2}(1 + i) = 1 + i$

$\boxed{z_0 = 1 + i}$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2}{2}(1 + i) = -(1 + i)$

$\boxed{z_1 = -(1 + i)}$.

(b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$: $Z_K = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi K}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi K}{n}\right)\right]$

$r = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$, $\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \to \theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \to \theta = -\frac{\pi}{3}$

$n = 2$, $K = 0, 1$; Para $K=0 \to \frac{(-\pi/3)}{2} = -\frac{\pi}{6}$, Para $K=1 \to \frac{(-\pi/3)+2\pi}{2} =$

$= \frac{-\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

$Z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$

$Z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$; $Z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$

$Z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$

(c) $(-1)^{1/3}$: $r = \sqrt{1^2+0} = 1$; $n = 3$; $K = 0, 1, 2$; $\theta = \pi$:

Para $K=0 \to \frac{\pi}{3}$; Para $K=1 \to \pi$; Para $K=2 \to \frac{5\pi}{3}$

$Z_0 = 1^{1/3}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Z_1 = 1^{1/3}\left[\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi\right] = -1$

$Z_2 = 1^{1/3}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $8^{1/6}$: $r = \sqrt{8^2+0^2} = 8$; $n = 6$; $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $\theta = 0$

Para $K=0 \to 0$; Para $K=1 \to \frac{\pi}{3}$; Para $K=2 \to \frac{2\pi}{3}$; Para $K=3 \to \pi$;

Para $K=4 \to \frac{4\pi}{3}$; Para $K=5 \to \frac{5\pi}{3}$

$Z_0 = 8^{1/6}\left[\cos(0) + i\,\text{sen}(0)\right] = 8^{1/6}$

$Z_1 = 8^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{8^{1/6}}{2}(1+i\sqrt{3})$

$Z_2 = 8^{1/6}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 8^{1/6}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$Z_3 = 8^{1/6}\left[\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)\right] = -8^{1/6}$

$Z_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{8^{1/6}}{2}(1+i\sqrt{3})$

$Z_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{8^{1/6}}{2}(1+i\sqrt{3})$

5.
(e) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$; $r=\sqrt{8^2+(8\sqrt{3})^2}=16$; $n=4$; $K=0,1,2,3$

$\tan\theta=\frac{-8\sqrt{3}}{-8}=\sqrt{3} \rightarrow \theta=\tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3} \rightarrow$ se toma $\frac{4\pi}{3}$ ya que estamos en el 4° cuadrante.

Ángulos:

Para $K=0 \rightarrow \frac{(4\pi/3)}{4}=\frac{\pi}{3}$; Para $K=1 \rightarrow \frac{(10\pi/3)}{4}=\frac{5\pi}{2}$

Para $K=2 \rightarrow \frac{(16\pi/3)}{4}=\frac{4\pi}{3}$; Para $K=3 \rightarrow \frac{(22\pi/3)}{4}=\frac{11\pi}{6}$;

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= 16\left[\cos(4\pi/3)+i\,sen(4\pi/3)\right] = 1+i\sqrt{3} \\ z_1 &= 16\left[\cos(5\pi/2)+i\,sen(5\pi/2)\right] = -\sqrt{3}+i \\ z_2 &= 16\left[\cos(4\pi/3)+i\,sen(4\pi/3)\right] = -1-i\sqrt{3} \\ z_3 &= 16\left[\cos(11\pi/6)+i\,sen(11\pi/6)\right] = \sqrt{3}-i \end{aligned}\right\} \text{Raíces}$$

6.
Definición de logaritmo complejo: $Log(z)=\ln|z|+i(Arg(z)+2\pi n)$

(a) $Log(-ie)=1-\frac{\pi}{2}i$; $z=-ie=e\cdot(-i)$; $|z|=\sqrt{(e(-1)i)^2}=e$

Así, $\ln|z|=\ln e=1$. $Arg(z) \rightarrow Arg(-i)=-\frac{\pi}{2} \rightarrow$ solo hay componente Im. y es negativo.

Usando la definición del log. complejo: $Log(-ie)=\ln|-ie|+i\,Arg(-ie)=$

$=1-\frac{\pi}{2}i$

(b) $Log(1-i)=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{\pi}{4}i$; $z=1-i=1+(-1)i$; $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$Arg(z)=Arg(1-i)$; $\tan\theta=\frac{-1}{1}=-1 \rightarrow \theta=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

Así, $Log(1-i)=\ln|1-i|+i\,Arg(1-i)=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}i=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}i$

c) $Log(e)=1+2n\pi i$; $|z|=e$; $Arg(z)=0$. Rama principal: $Log(e)=\ln e+i\cdot 0=1$

Pero, el log. complejo es multivariado, se puede agregar $2\pi n$ al argumento.

$\log(e)=\ln e+i(0+2\pi n)=1+i2\pi n=1+2n\pi i$

(d) $\text{Log}(i) = (2n+\frac{1}{2})\pi i$; $|z| = \sqrt{i^2} = 1$; $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$

Rama principal: $\text{Log}(i) = \ln|i| + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i$

Multivariable: $\text{Log}(i) = \cancel{\ln|i|} + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = (\frac{1}{2} + 2n)\pi i$