Sección 2.3.6 : Ejercicio 5.

(a) Se tienen las matrices de Pauli: $P = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ donde,

$$\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y se tiene el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas que se va a denotar como H y se puede representar con la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a & z \\ z^* & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+b_0 i \\ c+c_0 i & d \end{pmatrix} = A^\dagger = \overline{A^T} = \begin{pmatrix} a & z^{**} \\ z^* & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & z \\ z^* & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & c+c_0 i \\ b+b_0 i & d \end{pmatrix}.$$ Para probar que el conjunto P es base de H basta con probar que P es un conjunto L.I. y $P \in H$.

□ Independencia lineal:

* Que se cumpla $\alpha_0\sigma_0 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3 = 0_{2\times2}$ si y solo si $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ para que P sea L.I

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ \alpha_0 + \alpha_3 = 0 \\ ② \ \alpha_1 - i\alpha_2 = 0 \\ ③ \ \alpha_1 + i\alpha_2 = 0 \\ ④ \ \alpha_0 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

① + ④ $= 2\alpha_0 = 0 \to \alpha_0 = 0 \to \alpha_3 = 0$; ② + ③ $= 2\alpha_1 = 0 \to \alpha_1 = 0 \to \alpha_2 = 0$

Así con $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ se tiene que P es un conjunto L.I

□ Pertenencia

Se tiene que todo elemento σ_α se puede reescribir usando A, por lo que $P \in H$ y P es base de H.

Sección 2.3.6. : Ejercicio 5.

(b)

La base $P = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es ortogonal si y solo si su matriz de Gram es diagonal.

Esto es: $G_p = \begin{bmatrix} \langle\sigma_0|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_0|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_0|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_0|\sigma_3\rangle \\ \langle\sigma_1|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_1|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_1|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_1|\sigma_3\rangle \\ \langle\sigma_2|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_2|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_2|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_2|\sigma_3\rangle \\ \langle\sigma_3|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_3|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_3|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_3|\sigma_3\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

donde $a = \langle\sigma_0|\sigma_0\rangle$, $b = \langle\sigma_1|\sigma_1\rangle$, $c = \langle\sigma_2|\sigma_2\rangle$, $d = \langle\sigma_3|\sigma_3\rangle$ para la def. de producto interno: $\langle a|b\rangle = Tr\langle A^\dagger B\rangle$.

Dado que este trabajo es en extremo arduo a mano, se usa un código para realizarlo, ejecutado en computadora.

Sección 2.3.6. : Ejercicio 5

(c) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b + b_0 i \\ c + c_0 i & d \end{pmatrix}$, entonces $A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b_0 = c_0 = 0$

y se tiene que $A_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ es la forma estándar

de las $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ por lo que cumple con las propiedades de subespacio, y considerando la condición de matrices hermíticas $(A_{\mathbb{R}} = A_{\mathbb{R}}^T \Leftrightarrow b = c)$ se tiene que el conjunto de matrices reales de la forma $A_{\mathbb{R}}$ es subespacio de H.

Sección 2.3.6.: Ejercicio 5.

(c) Sea $A_i = \begin{pmatrix} 0 & b_0 i \\ -c_0 i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_0 i \\ -b_0 i & 0 \end{pmatrix} = A_i^T$, el conjunto de matrices A_i denotado I pertenece a H. y se forma de la matriz A que representa a H. Este conjunto tiene la forma de una de las matrices de Pauli multiplicada por un escalar real $b_0 = c_0$, se tiene que un conjunto formado por una de las matrices de Pauli y un campo escalar real cumple con las propiedades de subespacio. Por lo tanto, $I \leq H$, al estar contenido y cumplir las propiedades.