

Estudio experimental del enfriamiento por convección

L. Ardila^{1, a)} and J. Florez^{1, b)}*Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia*

Abstract

En este trabajo se presenta el estudio del enfriamiento de cinco cilindros de hierro con diferentes dimensiones, con la temperatura de estos oscilando entre 89°C y 23°C. Se comprueba el rango de validez de la ley de enfriamiento de Newton, encontrando desviaciones para $\Delta T > 40K^\circ$, luego, se propone la aplicación de otro modelo que considera las pérdidas de energía por radiación (Ley de Steffan-Boltzman), y se verifican las predicciones de este modelo para $\Delta T < 40K^\circ$ encontrando que incluso a pequeñas diferencias de temperaturas la pérdida de calor por radiación es un factor importante para los objetos utilizados. Se encuentra que el coeficiente de conductancia termica depende del largo del cilindro utilizado.

Keywords: Convección, radiación, conductancia termica, ley de enfriamiento de Newton, Ley de Steffan-Boltzman

I. INTRODUCCIÓN

A. Ley de enfriamiento de Newton

La convección es una forma de transferencia de calor que se genera a partir de la transferencia de energía por medio de un líquido o un gas que transfiere el calor entre zonas con diferentes temperaturas. El proceso de transferencia de energía de una partícula a otra podría considerarse un proceso de transferencia por conducción, pero a nivel macroscópico la energía se transporta por el espacio por el desplazamiento del fluido. La transferencia de calor por convección se expresa a partir de la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dQ}{dt} = hA_S (T_S - T_A) \quad (A.1)$$

Donde q es el calor transferido, h es el coeficiente de transmisión o intercambio de calor por convección o conductancia térmica unitaria, A_S es el área superficial del cuerpo en contacto con el fluido, T_S es la temperatura en la superficie del cuerpo y T_A es la temperatura del ambiente.

A partir de los postulados de la termodinámica, si el cuerpo está más caliente que el fluido que lo rodea entonces la transferencia de calor del cuerpo al fluido está dada por:

$$dQ = -mcdT \quad (A.2)$$

Donde m es la masa del cuerpo, c es el calor específico y dT es el cambio de la temperatura, reemplazando en la ecuación de Newton se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{mc} (T - T_A) \quad (A.3a)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa (T - T_A) \quad (A.3b)$$

Si se tiene en cuenta que en $t=0$ el cuerpo está a una temperatura T_i y que en un tiempo $t \gg 1$ la temperatura tiene un valor T_f , y adicional a ello $T_f = T_A$ y $\tau = \kappa^{-1}$, la solución para la ecuación diferencial es:

$$T(t) - T_f = (T_i - T_f) \exp(-t/\tau) \quad (A.4)$$

Se tiene que $\tau = mc/hA = \kappa^{-1}$, como se utilizaron cilindros de hierro entonces $m = V\rho_{Fe} = \pi(D/2)^2 L\rho_{Fe}$, $A_{cilindro} = 2\pi(D/2)^2 + \pi DL$, luego, se tiene que;

$$\tau = \frac{c_{Fe}\rho_{Fe}}{h} \left[\frac{2}{L} + \frac{4}{D} \right]^{-1} \quad (A.5)$$

Se tiene que $\rho_{Fe} = 7874 \text{ Kg/m}^3$, $c_{Fe} = 440 \text{ J/kgK}$. Se puede ver que la teoría predice que el tiempo de decaimiento aumenta con las dimensiones del cilindro, lo cual es de esperarse, ya que la cantidad de calor que puede acumular un sólido depende de su volumen, y su capacidad para intercambiar ese calor depende de su área; el volumen crece más rápido que el área al aumentar las dimensiones de un sólido.

B. Modelo de convección-radiación

La ley de enfriamiento de Newton da cuenta del cambio de temperatura de un cuerpo teniendo únicamente en cuenta las diferencias de temperatura con el fluido. Este modelo es válido para ciertos rangos de temperatura pero existen intervalos en los que los efectos producidos por la emisión de radiación no pueden obviarse, ya que contribuyen de manera notable al enfriamiento.

La radiación es un tipo de transferencia de calor que se produce debido a la emisión de ondas electromagnéticas. La transferencia de calor por radiación térmica de un objeto a temperatura T_{obj} que está rodeado

^{a)}lfardilap@unal.edu.co.

^{b)}jsflorezj@unal.edu.co.

por un fluido a temperatura T_{surr} depende de la emisividad ϵ del material y de la constante de Stefan-Boltzmann σ y el área A del objeto.

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon \sigma A (T_{obj}^4 - T_{surr}^4) \quad (B.1)$$

Esta ecuación se reescribe en forma lineal para pequeñas diferencias de temperatura ($\Delta T \ll T_{surr}, T_{obj}$)

$$(T_{obj}^4 - T_{surr}^4) = k_{appr} (T_{obj} - T_{surr}) \quad (B.2)$$

Donde $k_{appr} = 4T_{surr}^3$ y usando $\alpha_{rad} = \epsilon \sigma k_{appr}$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha_{rad} A (T_{obj} - T_{surr}) \quad (B.3)$$

Al considerar los efectos de la pérdida de energía por emisión de radiación, la ecuación diferencial para la evolución temporal de la temperatura queda expresada de la siguiente forma

$$mc \frac{dT_{obj}}{dt} = -\alpha_{con} A (T_{obj} - T_{surr}) - \epsilon \sigma A (T_{obj}^4 - T_{surr}^4) \quad (B.4)$$

Esta ecuación no posee soluciones analíticas, aunque si se reescribe remplazando la aproximación lineal para el término de la radiación, es posible determinar una solución dada por una combinación lineal de funciones exponenciales.

II. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para comprobar experimentalmente el modelo se estudia el decaimiento de la temperatura en el tiempo para cinco cilindros de hierro con diferentes áreas superficiales. Inicialmente se mide la altura y el diámetro de los cilindros, luego a los cilindros se les ata un cordel por uno de los agujeros de los que disponen, luego en el otro agujero se introduce una termocupla y esta se asegura con parte del cordel de tal manera que existe un buen contacto entre la termocupla y el cilindro, luego el sistema se introduce en agua hirviendo y se deja unos minutos hasta que se alcanza el equilibrio termodinámico. Finalmente el cilindro se extrae del agua y se amarra en un soporte universal de tal manera que quede suspendido en el aire, tan pronto como es sacado del agua se registran los valores de la temperatura cada 10 segundos hasta alcanzar los diez minutos, este procedimiento se repite para los 5 cilindros.

III. RESULTADO Y ANÁLISIS

A partir de las medidas realizadas se grafica la diferencia de temperatura (temperatura menos temperatura ambiente) como función del tiempo usando una escala logarítmica para el eje y y una escala lineal para el eje x. Se hace

una regresión a partir del modelo de Newton y como resultado se obtiene para los cinco cilindros un modelo exponencial para el decaimiento de la temperatura. La temperatura ambiente es $T_{amb} = 23^\circ\text{C}$.

A. Rango de validez del enfriamiento lineal

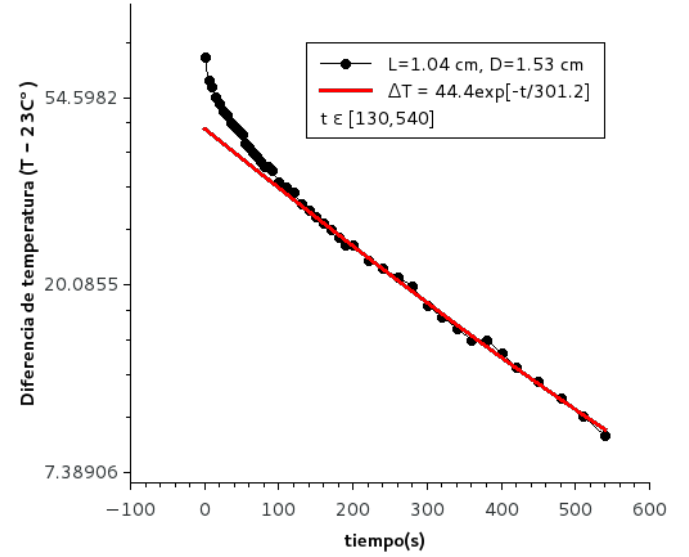


Figure 1. Temperatura vs tiempo; se usa una escala logarítmica para la temperatura

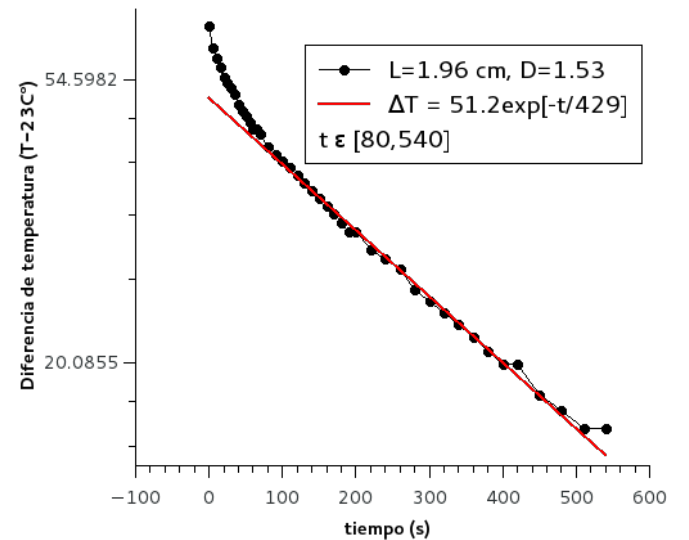


Figure 2. Temperatura vs tiempo; se usa una escala logarítmica para la temperatura

A partir de un análisis gráfico se dedujo el rango de aplicabilidad del modelo de enfriamiento lineal i.e. desde qué

momento tiene un comportamiento exponencial la grafica de la temperatura vs el tiempo. Se grafica la temperatura sobre un eje logaritmico, para comprobar visualmente el rango de aplicabilidad del modelo de enfriamiento lineal. En cada gráfica se muestra el rango utilizado para ajustar una exponencial a los datos obtenidos, y esta exponencial se grafica desde $t = 0$ para mostrar la desviación de los datos respecto del modelo lineal para el enfriamiento.

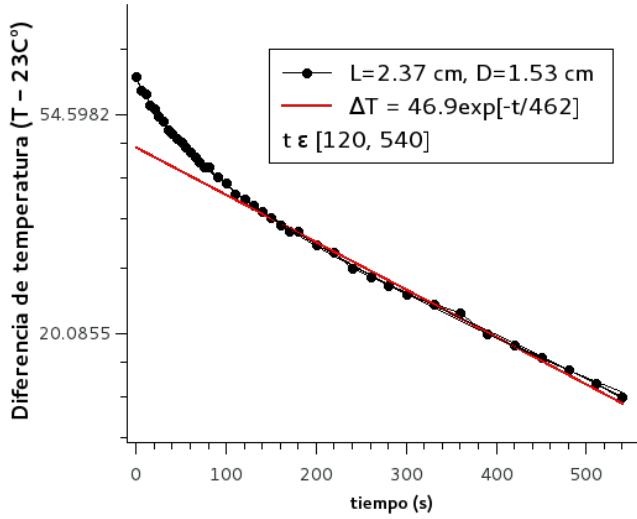


Figure 3. Temperatura vs tiempo; se usa una escala logaritmica para la temperatura

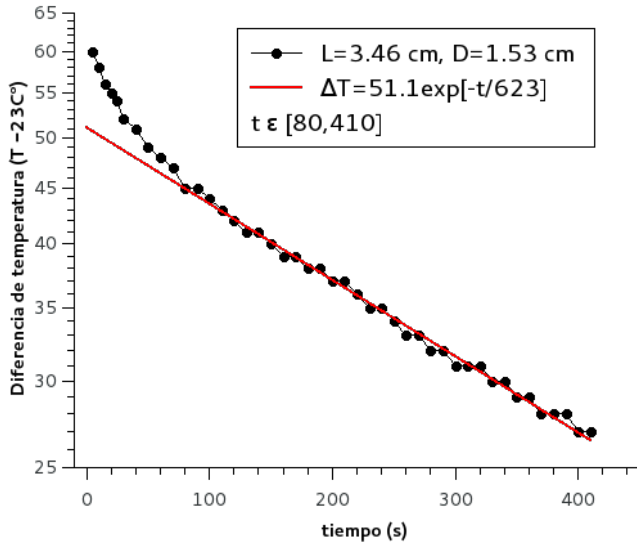


Figure 4. Temperatura vs tiempo; se usa una escala logaritmica para la temperatura

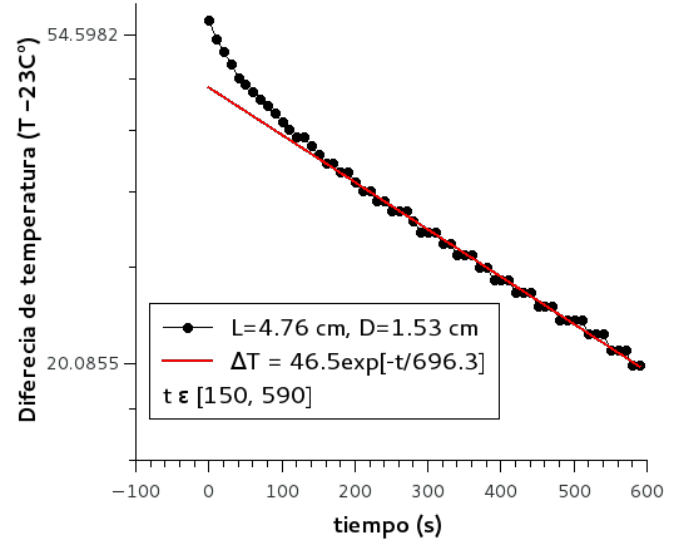


Figure 5. Temperatura vs tiempo; se usa una escala logaritmica para la temperatura

B. Análisis a partir del modelo de convección-radiación

De las gráficas anteriores se evidencia que el modelo de enfriamiento de Newton es incompleto pues este obvia el hecho de que la temperatura decrece también debido a la emisión de radiación. En la introducción se ha mencionado que basta con agregar el término que da cuenta de la ley de Stefan-Boltzmann a la ecuación diferencial para obtener un modelo de mayor aplicabilidad, sin embargo, la ecuación diferencial resultante no tiene solución analítica conocida, por lo cual el procedimiento estandar es integrar numericamente la ecuación¹.

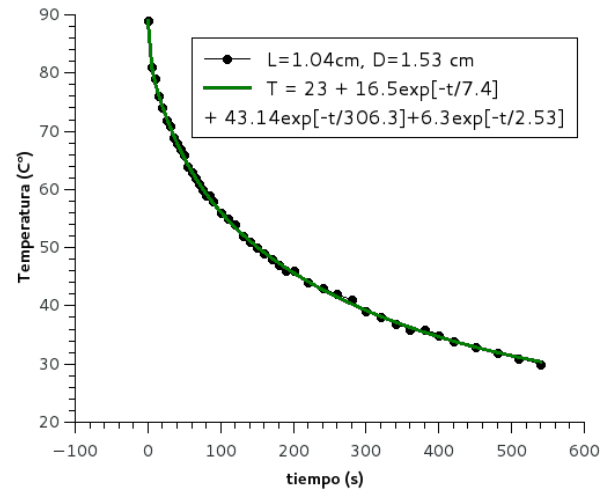


Figure 6. Temperatura vs tiempo; Se realiza un ajuste exponencial de tercer orden, fijando $T_{\infty} = 23$

Siguiendo la sugerencia dada en¹ se utiliza una expansión exponencial de tercer o segundo orden para ajustar los resultados obtenidos, de tal forma que uno de los terminos de la expansión da cuenta de la solución trascendente (solución para $\Delta T < 40K$), y los otros terminos dan cuenta de la perdida calor debido a la radiación. Cabe mencionar que este modelo es solamente un anzats que ha sido utilizado varias veces con resultados satisfactorios (^{1,2}), mas no corresponde a una solución exacta de la ecuación diferencial. Además, en el anzats utilizado se fija $T_{\infty} = 23C^{\circ}$.

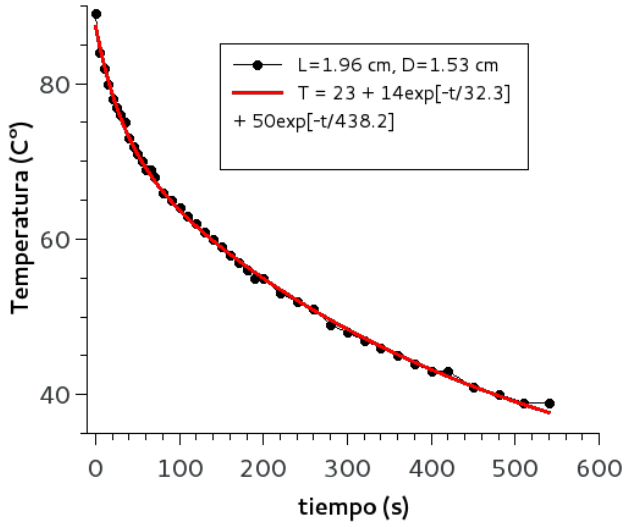


Figure 7. Temperatura vs tiempo; Se realiza un ajuste exponencial de segundo orden, fijando $T_{\infty} = 23$

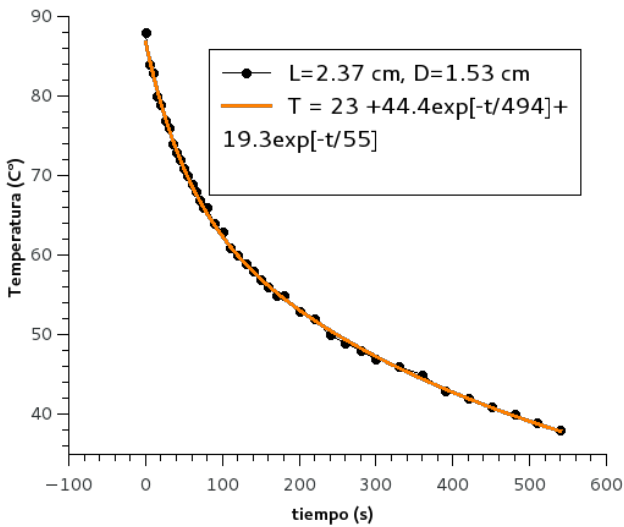


Figure 8. Temperatura vs tiempo; Se realiza un ajuste exponencial de segundo orden, fijando $T_{\infty} = 23$

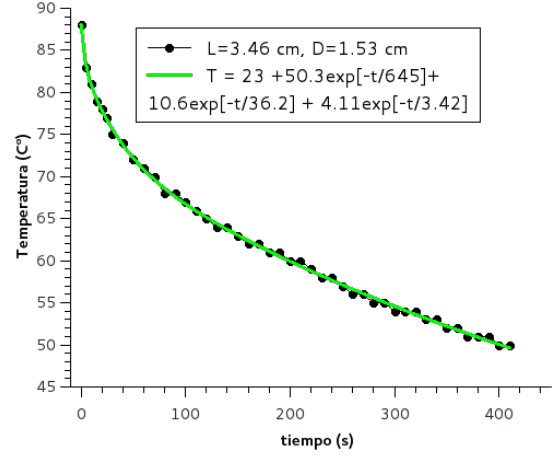


Figure 9. Temperatura vs tiempo; Se realiza un ajuste exponencial de tercer orden, fijando $T_{\infty} = 23$

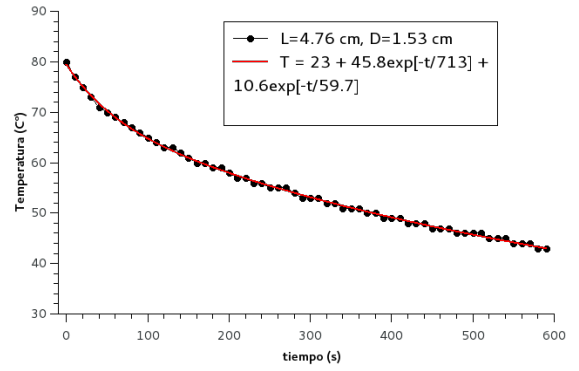


Figure 10. Temperatura vs tiempo; Se realiza un ajuste exponencial de segundo orden, fijando $T_{\infty} = 23$

Al comparar los resultados obtenidos con el ajuste a partir de la expansión exponencial de tercer orden, y el ajuste exponencial de los últimos datos de cada toma, se observa que uno de los terminos de la expansión corresponde a la solución para $\Delta T < 40K$, y los otros términos decaen rápidamente, tal que su contribución es despreciable cuando $t > 100s$ (aproximadamente).

Se puede observar que la constante h tiene diferentes valores para cada cilindro, y disminuye al aumentar las dimensiones del cilindro. Las anteriores constantes fueron obtenidas utilizando el modelo lineal de enfriamiento. Suponiendo que $\Delta T \ll T, T_{amb}$ entonces se puede aproximar linealmente la perdida de calor por radiación, esto permite encontrar un coeficiente encontrar un coeficiente de conductancia térmica equivalente que debe ser restado del encontrado anteriormente para encontrar el coeficiente de conductancia térmica del proceso de convección. Como se demostró en la introducción, el coeficiente de conductancia térmica equivalente a la linealización de la radiación es $h_{rad} = \epsilon_0 \sigma 4T_{amb}^3$, para el hi-

erro $\epsilon_0 = 0.9$, $\sigma = 5.67 * 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ $T_{amb} = 296.3 K$,
luego $h_{rad} = 5.5 W m^{-2} K^{-1}$; $h_{conveccion} = h - h_{rad}$.

Modelo	solución trascendente de la expansión exponencial	solución para $\Delta T < 40 K$
L 1.04 cm	$43.1e^{-t/306.3}$	$44.4e^{-t/301.2}$, $t > 130s$
L 1.96 cm	$50e^{-t/438.2}$	$51.2e^{-t/429}$, $t > 80s$
L 2.37 cm	$44.4e^{-t/494}$	$46.9e^{-t/462}$, $t > 120s$
L 3.46 cm	$50.3e^{-t/645}$	$51.1e^{-t/623}$, $t > 80s$
L 1.04 cm	$45.8e^{-t/713}$	$46.5e^{-t/696.3}$, $t > 150s$

TABLA I. Comparción de los ajustes realizados

Largo	Area	τ	masa	h
1.04 cm	$8.67 cm^2$	301.2s	15.1 gr	$25.3 W K^{-1} m^{-2}$
1.96 cm	$13.1 cm^2$	429s	28.3 gr	$22.2 W K^{-1} m^{-2}$
2.37 cm	$15.1 cm^2$	462s	34.2 gr	$21.5 W K^{-1} m^{-2}$
3.46 cm	$20.3 cm^2$	623s	50.1 gr	$17.4 W K^{-1} m^{-2}$
4.72 cm	$26.4 cm^2$	696s	68.3 gr	$16.3 W K^{-1} m^{-2}$

TABLA II. Datos obtenidos a partir del modelo lineal de enfriamiento

Largo	$h_{conveccion}$	h_{rad}/h
1.04 cm	$19.8 W m^{-2} K^{-1}$	0.21
1.96 cm	$16.5 W m^{-2} K^{-1}$	0.25
2.37 cm	$16 W m^{-2} K^{-1}$	0.26
3.46 cm	$11.9 W m^{-2} K^{-1}$	0.32
4.72 cm	$10.8 W m^{-2} K^{-1}$	0.38

TABLA III. Comparación de la conductancia termica

Ya que $h_{rad}/h > 0.1$ el enfriamiento por radiación es factor considerable en el proceso estudiado. La teoría predice que la conductancia térmica es independiente de las dimensiones del objeto observado, siempre que las condiciones del baño térmico se mantengan constantes al igual que el material del objeto utilizado. La variación de la conductancia térmica puede deberse a irregularidades en la superficie de los cilindros utilizados, como lo puede ser la presencia de oxido debido a la corrosión del metal, o residuos de pintura sobre el metal.

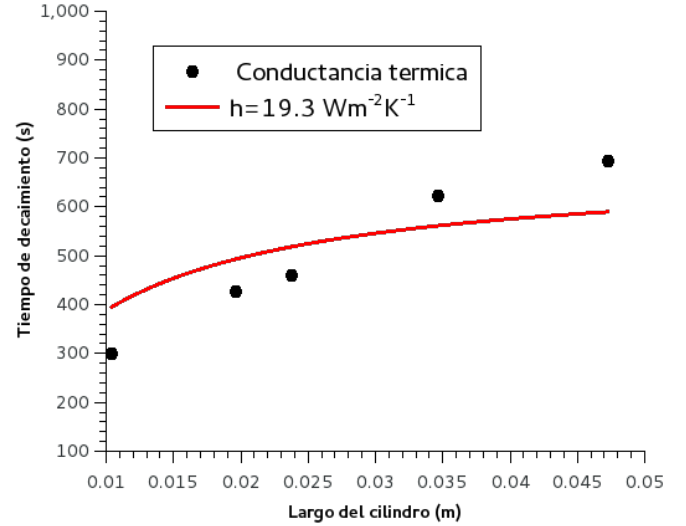


Figure 11. Tiempo de decaimiento en función del largo del cilindro

Ya que se encontraron diferentes coeficientes de conductancia termica para los cilindros, se realizó un ajuste con la ecuación A.5, fijando los parámetros c_{Fe} , ρ_{Fe} , D con los valores conocidos. No se pudo obtener un buen ajuste, como se muestra en la grafica 11.

IV. CONCLUSIONES

A partir de los resultados experimentales obtenidos se pudo concluir que:

- El rango de validéz de la ley de enfriamiento de Newton para los cilindros de hierro utilizados es $\Delta T < 40 K^\circ$
- Los datos muestran desviaciones respecto del modelo de enfriamiento lineal cuando $\Delta T > 40 K^\circ$, luego, se debe recurrir a la contribución de la radiación para explicar el enfriamiento de los cilindros.
- El tiempo de decaimiento aumenta al aumentar las dimensiones del objeto utilizado, ya que la cantidad de calor que puede contener el cuerpo aumenta más rápido que el área superficial con la que cuenta para intercambiar ese calor con el medio.
- Una expansión exponencial de tercer orden permite predecir con gran exactitud el comportamiento de la temperatura respecto del tiempo. Además, uno de los terminos de esta expansión corresponde a la solución trascendente que describe el comportamiento de la temperatura para $\Delta T < 40 K^\circ$ (régimen lineal).

REFERENCES

¹M Vollmer, *Newton's law of cooling revisited*
(Eur. J. Phys. 30 (2009) 1063–1084)
doi:10.1088/0143-0807/30/5/014

²Colm O'Sullivan, *A simple experiment to study cooling by convection and radiation*
Department of Physics, National University of Ireland Cork, Cork (IE)
14. 10. 2006

³GEORGE W. MOLNAR
NEWTON'S THERMOMETER: A MODEL FOR TESTING
NEWTON'S LAW OF COOLING
THE PHYSIOLOGIST

V. APÉNDICES

1) ¿ Se podría conocer la temperatura del cuerpo que se enfría midiendo su temperatura en función del tiempo, solamente durante un intervalo de tiempo ?

Como se puede ver en las gráficas del análisis experimental si se analiza la información a partir de intervalos temporales no se podrá predecir en buena aproximación los resultados posteriores ya que se obvian las contribuciones por ejemplo de la radiación que son muy notables en las primeras medidas.

2) Dos amigos van a tomar un café, el primero le agrega leche justo cuando se lo sirven y el otro 10 minutos después cuando toman el primer sorbo. ¿ Cual de los dos toma el café más caliente, si los dos agregan la misma cantidad de leche y a la misma temperatura ?

Después de 10 min habrán transcurrido 36000 segundos, la temperatura del café a la que inmediatamente se le agrega leche después de los 10 min está dada por:

$$T = T_A + \frac{P}{hA} \left[1 - e^{-\frac{hA}{mc}t} \right]$$

Después de 10 min el término de la exponencial se hace casi nulo y entonces la temperatura final será:

$$T = T_A + \frac{P}{hA}$$

la temperatura del café de la persona que no le adiciona leche inmediatamente a partir de la ley de newton y de un razonamiento tiene un valor de:

$$T = T_A$$

Se concluye que si la temperatura de la leche es menor que la del café, la persona que le agregó inicialmente leche, se lo tomará mas frío ya que la potencia en este sistema será negativa.

En el caso en el que la temperatura de la leche sea mayor que la del café, la persona que le añadió leche inicialmente se lo tomará más caliente pues la potencia suministrada será positiva.