Sistemas de ecuaciones no lineales - Análisis Numérico

Juan Sebastian Santamaria Palomino
juansantamaria@javeriana.edu.co

Natalia Andrea Navas Calderón
natalianavas@javeriana.edu.co

Jorge Rodrigo Salgado Tello
salgadojorge@javeriana.edu.co

20 de agosto de 2019

1. Introducción

Los métodos numéricos se utilizan para aproximar soluciones de ecuaciones cuando las soluciones exactas no se pueden determinar mediante métodos algebraicos. Construyen aproximaciones sucesivas que convergen a la solución exacta de una ecuación o sistema de ecuaciones. Dicha convergencia puede tener diferentes tipos de comportamiento, y dependiendo de ello se dice que un método es más óptimo que otro en determinado factor de análisis. Los tipos de convergencia más conocidos son convergencia lineal y convergencia cuadrática, de los cuales, como ya se sabe, el tipo más óptimo es el de convergencia cuadrática, por ello al implementar un método se desea obtener este tipo de convergencia.

Un sistema de ecuaciones no lineales consiste en igualdades que tienen una o más variables elevadas a la segunda o mayor potencia potencia, resolverlas significa encontrar los valores de las variables con los que se cumple la igualdad para cada ecuación del sistema. Para que un sistema de ecuaciones sea no lineal, no es necesario que todas las ecuaciones del sistema sean no lineales, basta con que haya al menos una ecuación no lineal en el sistema.

En general para resolver un problema con ecuaciones no lineales, el objetivo es hallar uno o varios puntos en los cuales las ecuaciones no lineales se intersectan. En el contexto gráfico, lo que se busca es determinar si las ecuaciones se intersectan en un único, ninguno o infinitos puntos, lo cual da a entender que el sistema tiene única, ninguna o infinitas soluciones respectivamente.

Un ejemplo gráfico es el siguiente:

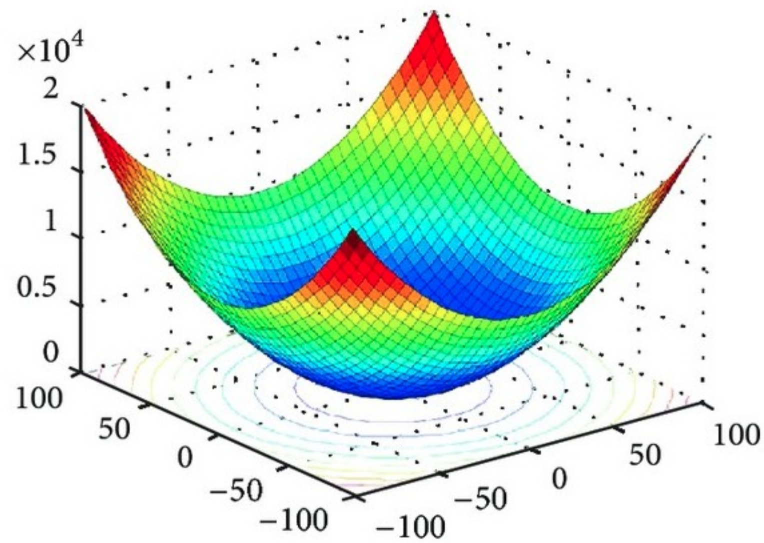


Figura 1: Ejemplo gráfico.

2. Problema

Para el desarrollo de este documento y del algoritmo, se tomó como problema el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x + 2y - 2 \\ f_2(x,y) &= x^2 + 4y^2 - 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Como propuesta de solución al problema planteado, se escogió el método de Broyden el cual se explica en la siguiente sección.

3. Método de Broyden

El método de Broyden, que es a veces llamado un método Cuasi-Newton, es un método numérico que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones no lineales con más de una variable. Se denomina 'Cuasi-newton' a los métodos derivados de newton en los que se aproxima a la matriz jacobiana mediante recurrencia de tal forma que la relacionen con el valor que toma en iteraciones anteriores. A diferencia del método de newton, este no calcula J(x) ni su inversa en cada una de las iteraciones, lo que hace que sea más óptimo. Sin embargo al realizar estos cambios la convergencia deja de ser cuadrática y pasa a ser superlineal.

3.1. Pasos del método de Broyden

- Paso 1:
  Sea $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ un vector inicial dado.
- Paso 2:
  Calcular $F(x^{(0)})$.

- Paso 3:

  En este paso se calcula A_0^{-1}. Debido a que no se tiene suficiente información para calcular A_0 directamente, el método de Broyden permite obtener que $A_0 = J(x^{(0)})$, lo cual implica que $A_0^{-1} = J(x^{(0)})^{-1}$.

- Paso 4:

  Calcular $x^{(1)} = x^{(0)} - A_0^{-1}F(x^{(0)})$.

- Paso 5:

  Calcular $F(x^{(1)})$.

- Paso 6:

  Tomar $F(x^{(0)})$ y $F(x^{(1)})$ y calcular $y_1 = F(x^{(1)}) - F(x^{(0)})$. Seguido a ello, tomar las primeras dos iteraciones de $x^{(i)}$ y calcular $s_1 = x^{(1)} - x^{(0)}$.

- Paso 7:

  Calcular $s_1^t A_0^{-1} y_1$.

- Paso 8:

  Calcular $A_1^{-1} = A_0^{-1} + \left(\frac{1}{s_1^t A_0^{-1} y_1}\right)\left[(s_1 - A_0^{-1}y_1)s_1^t A_0^{-1}\right]$

- Paso 9:

  Tomar A_1^{-1} encontrado en el paso 8, y calcular $x^{(2)} = x^{(1)} - A_1^{-1}F(x^{(1)})$.

- Paso 10:

  Repetir el proceso hasta que converja a $\bar{x}$, es decir, cuando $x^{(i)} = x^{(i+1)} = \bar{x}$. Esto indicará que se ha alcanzado la solución del sistema.

3.2. Lógica del algoritmo de Broyden

- Iterar:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k^{-1}F(x^{(k)}) \tag{2}$$

- Siendo:

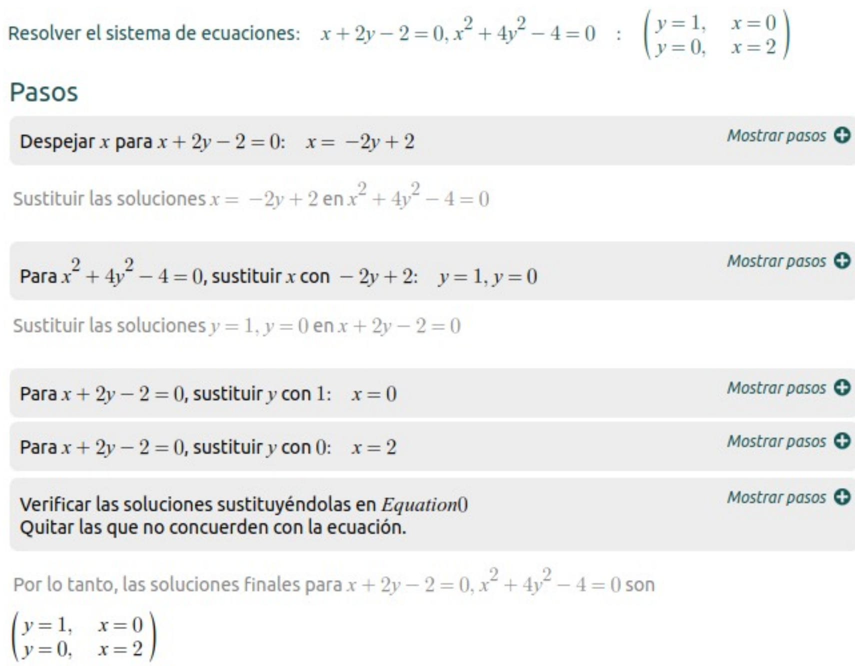
$$A_k = A_{k-1} + \frac{(Y_k - A_{k-1}S_k)}{\|S_k\|^2}S_kT \tag{3}$$

$$Y_k = F(x^{(k)}) - F(x^{(k-1)}) \tag{4}$$

$$S_k = x^{(k)} - x^{(k-1)} \tag{5}$$

4. Resultados obtenidos

Primeramente se dio solución al sistema en la herramienta Symbolab, en la cual se evidenció que el sistema tenía dos soluciones, tal como se ilustra en la figura 2:



Resolver el sistema de ecuaciones: $x+2y-2=0, x^2+4y^2-4=0$: $\begin{pmatrix} y=1, & x=0 \\ y=0, & x=2 \end{pmatrix}$

Pasos

Despejar x para $x+2y-2=0$: $x=-2y+2$ Mostrar pasos

Sustituir las soluciones $x=-2y+2$ en $x^2+4y^2-4=0$

Para $x^2+4y^2-4=0$, sustituir x con $-2y+2$: $y=1, y=0$ Mostrar pasos

Sustituir las soluciones $y=1, y=0$ en $x+2y-2=0$

Para $x+2y-2=0$, sustituir y con 1: $x=0$ Mostrar pasos

Para $x+2y-2=0$, sustituir y con 0: $x=2$ Mostrar pasos

Verificar las soluciones sustituyéndolas en $Equation0$
Quitar las que no concuerden con la ecuación. Mostrar pasos

Por lo tanto, las soluciones finales para $x+2y-2=0, x^2+4y^2-4=0$ son

$\begin{pmatrix} y=1, & x=0 \\ y=0, & x=2 \end{pmatrix}$

Figura 2: Solución proporcionada por Symbolab.

Luego se realizó la correspondiente gráfica del sistema en Geogebra (figura 3).

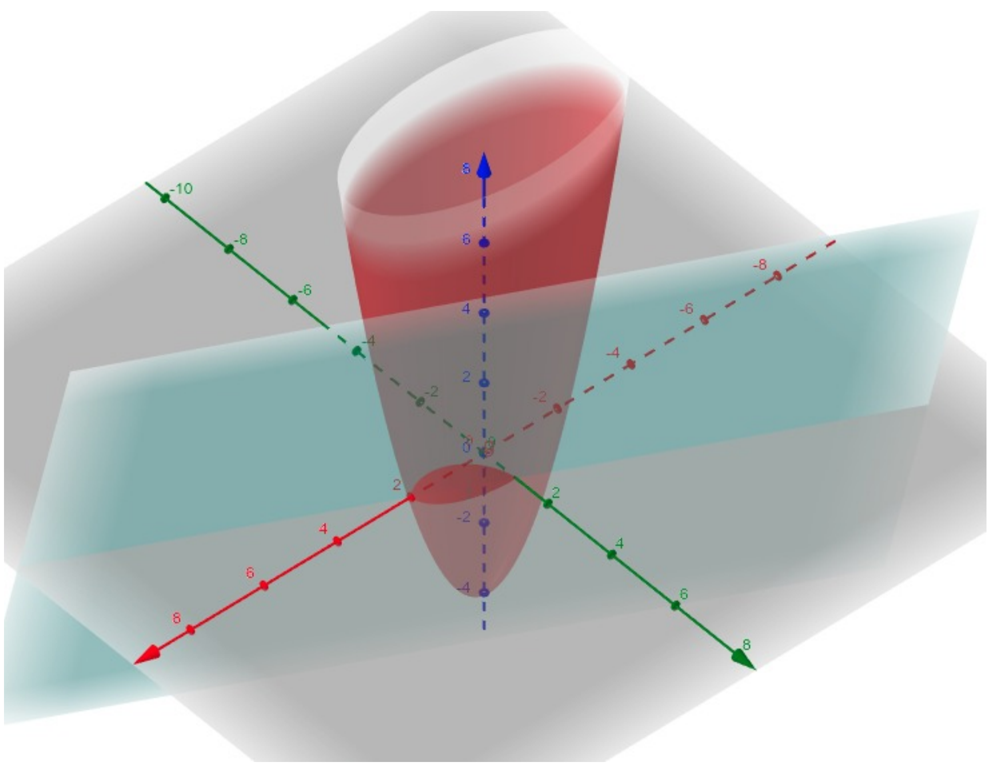


Figura 3: Sistema de ecuaciones no lineales en Geogebra.

Con esto en mente se realizaron dos pruebas en el algoritmo de Broyden desarrollado para obtener las dos soluciones, en dichas pruebas solo se cambió la entrada de la posición (2,2) de la matriz Jacobiana. Para el caso en el que la entrada fue 16, se obtuvo la solución 1 (figura 4), por otra parte, para el caso en el que la entrada fue 8, se obtuvo la solución 2 (figura 5).

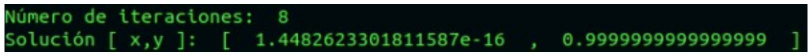


Figura 4: Resultado 1 del programa.

Figura 5: Resultado 2 del programa.

5. Referencias

[1]F. Walter, Introducción a los métodos numéricos, Implementaciones en R. Revista digital, 2013.

[2]L. Rodríguez, Análisis numérico básico, 3rd ed. Escuela Superior Politécnica del Litoral Phyton, 2014.

[3]https://disi.unal.edu.co/ lctorress/MetNum/LiMetNu2.pdf

[4]http://www.dma.uvigo.es/ lino/Tema3.pdf

[5]http://personales.upv.es/dginesta/docencia/posgrado/prac_no_lineal.pdf

[5]https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16373/3/Microsoft %20Word %20- %203.SISTEMAS %20 ECUACIONES %20NO %20LINEALES.pdf