Taller 1 Problemas - Análisis Numérico

Juan Sebastian Santamaria Palomino
juansantamaria@javeriana.edu.co

Natalia Andrea Navas Calderón
natalianavas@javeriana.edu.co

Jorge Rodrigo Salgado Tello
salgadojorge@javeriana.edu.co

4 de agosto de 2019

1. Problema 1

1.1. Enunciado

Suponga que un dispositivo solo puede almacenar únicamente los cuatro primeros dígitos decimales de cada número real, y trunca los restantes (esto es redondeo inferior). Calcule el error de redondeo si se quiere almacenar el número 536.78.

1.2. Contextualización

Error de redondeo: los métodos numéricos operan con datos que pueden ser inexactos para representar a los números reales. El error de redondeo se atribuye a la imposibilidad de almacenar todas las cifras de estos números y a la imprecisión de los instrumentos de medición con los cuales se obtienen los datos. Para el presente problema, se contempla el escenario de un dispositivo que solo puede almacenar los cuatro primeros dígitos decimales de cada número real, y trunca los restantes.

1.3. Resultados obtenidos

Entradas:

- 536.78. Número a truncar.

Salidas:

- 0.08. Error de truncamiento.

1.4. Análisis

Si se normaliza la entrada a 0.53678×10^3 esto da 5 cifras decimales. Para satisfacer el problema del dispositivo, se descompone el número de la siguiente forma: $0.5367 \times 10^3 + 0.00008 \times 10^3$ y 0.00008×10^3

equivale a 0.08.

2. Problema 2

2.1. Enunciado

Implemente en cualquier lenguaje el siguiente algoritmo que sirve para calcular la raíz cuadrada. Aplíquelo para evaluar la raíz cuadrada de 7, analice su precisión, cómo podría evaluar la convergencia y validez del algoritmo.

2.2. Contextualización

En el campo de la matemática, la raíz cuadrada se identifica como el número que, al ser multiplicado una vez por si mismo, da como resultado un primer número.Para calcular la raíz en el ámbito de la programación se utiliza un método iterativo que produce un valor más cercano a la respuesta.

2.3. Resultados obtenidos

Entradas:

- n = 7. Dato (número que va a ser evaluado).
- e = 1×10^{-8}. Valor de tolerancia, es decir, el error permitido.
- x = 100. Valor inicial.

Salidas:

- Valor redondeado = 2.645751.

2.4. Análisis

Error Actual	Error Anterior
24.9475490	49.9650000
12.4042135	24.9475490
6.0656640	12.4042135
2.7798920	6.0656640
1.0068318	2.7798920
0.1790470	1.0068318
0.0060445	0.1790470
0.0000069	0.0060445
0.0000000	0.0000069

Tabla 1: Valores del error actual y anterior en cada iteración.

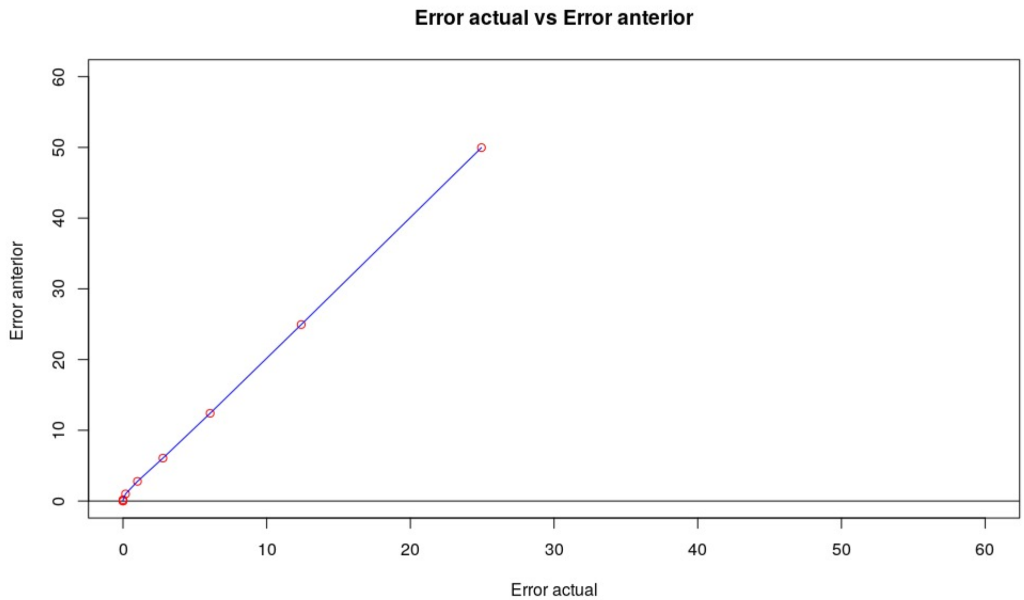

Figura 1: Gráfica de Error actual vs Error anterior.

- Análisis de precisión: la fórmula converge pero el resultado final no es la raíz cuadrada de 7, pues la precisión es insuficiente. El valor resultante es 2.645751, pero como bien se sabe es una aproximación deficiente pues el resultado es un número no exacto, lo que implica un sin fin de números decimales que lo conforman.
- Evaluación de la convergencia: como se puede apreciar en la figura 2, el algoritmo iterativo utilizado tiene una convergencia lineal. Los métodos iterativos tienen la propiedad de producir resultados cada vez más cercanos a la respuesta esperada.
- Validez del algoritmo: La poca cantidad de cifras obtenidas hace que el método sea deficiente, pero válido. Eso quiere decir que se acerca a los dígitos más significativos del valor real. La precisión insuficiente plantea la importancia de verificar la formulación del método numérico y la validación de la respuesta obtenida.

3. Problema 3

3.1. Enunciado

Utilizando el teorema de Taylor hallar la aproximación de $e^0.5$ con cinco cifras significativas.

3.2. Contextualización

A lo largo de la historia, se ha usado el teorema de Taylor con el fin de realizar aproximaciones de diferentes tipos de funciones alrededor de un punto, en el cual, dicha función es diferenciable. Este teorema genera un resultado bastante aproximado al resultado real, y entre mayor es el orden del polinomio, más aproximado es el resultado.

3.3. Resultados obtenidos

Entradas:

- $f = e^x$. Función a la cual se le realizará la aproximación.
- $x_0 = 0.5$. Punto en el que se evalúa la función.
- a = 1. Valor alrededor de x.
- n = 6. Orden del polinomio.

Salidas:

- Resultado = 1.6487.

4. Problema 4

4.1. Enunciado

Calcule el tamaño del error dado por las operaciones aritméticas, para la solución del siguiente problema.

La velocidad de una partícula es constante e igual a 4 m/s, medida con un error de 0.1 m/s durante un tiempo recorrido de 5 seg. medido con error de 0.1 seg. Determine el error absoluto y el error relativo en el valor de la distancia recorrida.

- $v = 4m/s$.
- $E_v = 0.1m/s$.
- $t = 5s$.
- $E_t = 0.1s$.
- $d = vt$.

4.2. Contextualización

En los métodos directos debe considerarse el error que se propaga en las operaciones aritméticas, el cual puede ser significativo cuando la cantidad de cálculos requeridos es grande. Para este problema en particular, se desarrolló un problema de dinámica elemental en el cual posee las siguientes características.

4.3. Resultados obtenidos

Entradas:

- $v = 4m/s$. Velocidad.
- $E_v = 0.1m/s$. Error de medición de la velocidad.

- $t = 5s$. Tiempo de recorrido.
- $E_t = 0.1s$. Error de medición del tiempo.

Salidas:

- $d = 20m$. Distancia recorrida.
- $e_a = 0.9$. Tamaño del error dado por las operaciones aritméticas. El intervalo resultante es [19.1 , 20.9].
- $e_r = 4.5\,\%$. Porcentaje de error.

5. Problema 5

5.1. Enunciado

Evaluar el valor de un polinomio es una tarea que involucra para la máquina realizar un número de operaciones la cual debe ser mínimas. Como se puede evaluar el siguiente polinomio con el número mínimo de multiplicaciones.

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4, \qquad x_0 = -2 \tag{1}$$

5.2. Contextualización

Para este problema en particular se usó el método de Horner, este consiste en aplicar un algoritmo que permita calcular el resultado de un polinomio evaluado en un valor específico de x. Además de ello, el algoritmo consigue hacer su labor con la cantidad mínima de operaciones posible, lo cual lo convierte en un método muy eficiente.

5.3. Resultados obtenidos

Entradas:

- coeficiente = 2, 0, -3, 3, -4. Vector que contiene los coeficientes del polinomio.
- $x_0 = -2$. Valor a ser evaluado en el polinomio.

Salidas:

- Resultado = 10. El número mínimo de operaciones es 8, y se compone de 4 sumas y 4 multiplicaciones.