Tarea 1 - Análisis Numérico

Juan Sebastian Santamaria Palomino
juansantamaria@javeriana.edu.co

Natalia Andrea Navas Calderón
natalianavas@javeriana.edu.co

Jorge Rodrigo Salgado Tello
salgadojorge@javeriana.edu.co

31 de julio de 2019

1. Introducción

Para resolver ecuaciones no lineales se requieren de ciertos métodos de aproximación que permitan determinar los ceros de una función. Para lograr esto, usualmente se utilizan métodos iterativos en los cuales se calculan aproximaciones sucesivas. A los ceros de un polinomio se les conoce también como raíces.

2. Métodos aplicados

2.1. Método de bisección

Este método está fundamentado en el Teorema de los Valores Intermedios, el cual establece que si una función f es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces puede alcanzar cada uno de los valores comprendidos entre f (a) y f (b). Esto significa, que para cualquier valor L que se encuentre entre f (a) y f (b) existe al menos un valor c en el intervalo [a,b] que cumple con la ecuación f(c)=L [1].

Para explicar el funcionamiento del método, se parte de suponer que en el intervalo [a,b] existe un cero de la función f . Se empieza por calcular m, que es el punto medio del intervalo [a,b], de esta forma $m = \frac{a+b}{2}$. Seguido a ello se calcula el valor que toma el punto m en la función f. En caso de que dicho valor sea exactamente igual a cero, m es una raíz de la función f. En caso de que no lo sea, se debe verificar el signo de los valores dados por los puntos a y m en la función f. En caso de que el signo de dichos valores sea igual, significa que la función está en el mismo cuadrante para todos los valores comprendidos entre a y m, por tanto, el intervalo [a,b] debe transformarse en el intervalo [m,b]. En caso de que el signo sea diferente, significa que hubo un cambio de cuadrante, por lo cual el intervalo [a,b] debe transformarse en el intervalo [a,m]. A este intervalo hallado se le aplica el mismo procedimiento y así, sucesivamente, se repite el proceso con el fin de delimitar la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la solución.

2.2. Método de punto fijo

El método del punto fijo, también conocido como método de la iteración funcional, es el fundamento matemático para construir métodos eficientes para el cálculo de raíces reales de ecuaciones no lineales.

Este método consiste en reescribir la ecuación f(x)=0 en la forma g(x). Esta nueva ecuación debe ser equivalente a la ecuación original en el sentido que debe satisfacerse con la misma raíz, es decir, la existencia de un punto fijo r de la ecuación x=g(x) es equivalente a encontrar una raíz real r de la ecuación f(x)=0: r=g(r) ⇨f(r)=0 como se muestra en la siguiente gráfica [2].

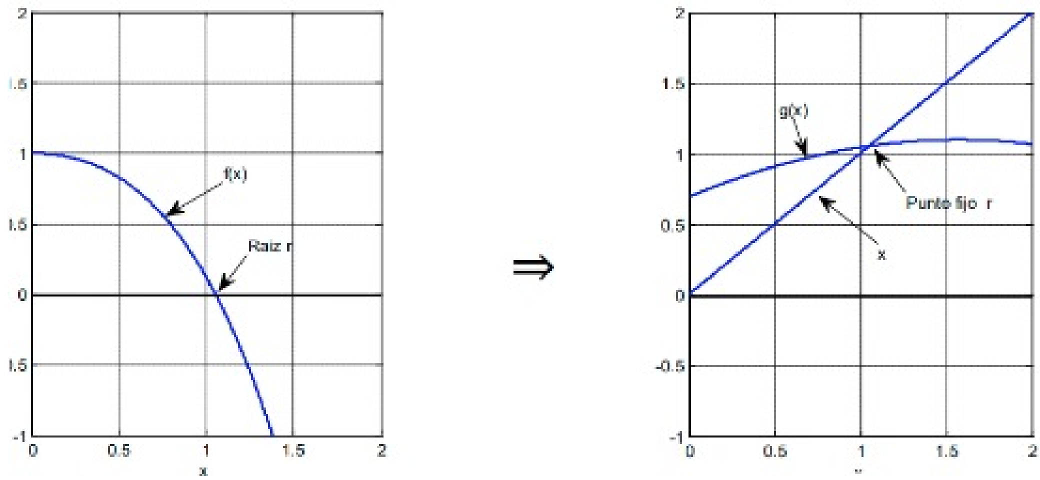

Figura 1: Ejemplo gráfico punto fijo.

3. Resultados

3.1. Método de bisección

Para este método se utilizaron los siguientes datos de entrada:

- Función $f(x) = x^3 + 5x - 1$
- Intervalo [0,1]
- Tolerancia 1×10^{-8}

Salida:

- Aproximación de la raíz.

El resultado de utilizar el algoritmo de bisección para calcular la raíz de la función f(x) es aproximadamente 0.1984372 con error 7.450581 $\times 10^{-8}$ (Tabla 1). Este resultado se obtuvo al realizarse un total de 26 iteraciones. La relación iteración-error se evidencia en la figura 2. Donde se puede observar que a medida que transcurren las iteraciones, el valor del error se va reduciendo cada vez más.

a	b	m	Error est.
0.0000000	0.5000000	0.5000000	0.2500000
0.0000000	0.2500000	0.2500000	0.1250000
0.1250000	0.2500000	0.1250000	0.0625000
0.1875000	0.2500000	0.1875000	0.0312500
0.1875000	0.2187500	0.2187500	0.0156250
0.1875000	0.2031250	0.2031250	0.0078125
0.1953125	0.2031250	0.1953125	0.0039062
0.1953125	0.1992188	0.1992188	0.0019531
0.1972656	0.1992188	0.1972656	0.0009766
0.1982422	0.1992188	0.1982422	0.0004883
0.1982422	0.1987305	0.1987305	0.0002441
0.1982422	0.1984863	0.1984863	0.0001221
0.1983643	0.1984863	0.1983643	0.0000610
0.1984253	0.1984863	0.1984253	0.0000305
0.1984253	0.1984558	0.1984558	0.0000153
0.1984253	0.1984406	0.1984406	0.0000076
0.1984329	0.1984406	0.1984329	0.0000038
0.1984367	0.1984406	0.1984367	0.0000019
0.1984367	0.1984386	0.1984386	0.0000010
0.1984367	0.1984377	0.1984377	0.0000005
0.1984372	0.1984377	0.1984372	0.0000002
0.1984372	0.1984375	0.1984375	0.0000001
0.1984372	0.1984373	0.1984373	0.0000001
0.1984372	0.1984373	0.1984373	0.0000000
0.1984372	0.1984372	0.1984372	0.0000000
0.1984372	0.1984372	0.1984372	0.0000000

Tabla 1: Valores de las variables en cada iteración.

Donde:

- a: límite inferior.
- b: límite superior.
- m: valor medio tomado en esa iteración.
- Error est: error relativo.

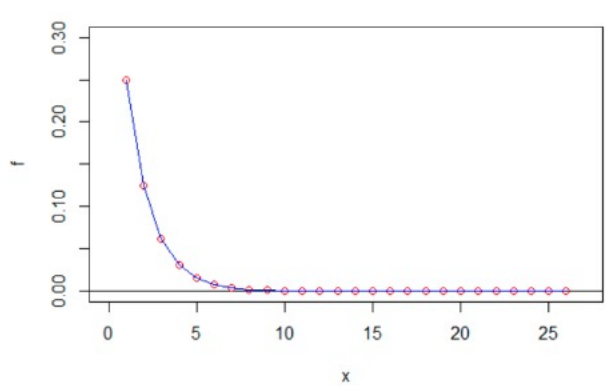

Figura 2: Gráfica de Error relativo en función de las iteraciones.

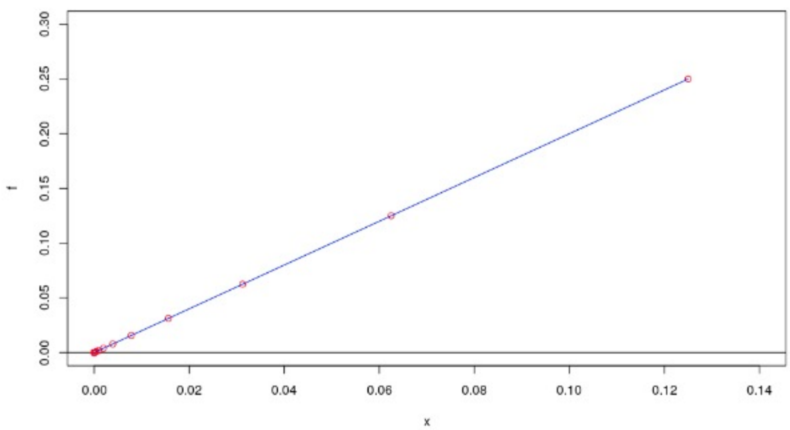

Figura 3: Gráfica de Error actual (eje x) vs Error anterior (eje y).

Tal como se observa en la gráfica, la relación entre los dos errores, es que, el error anterior es 2 veces el error actual. Esto significa que el error es cada vez menor, por lo tanto el resultado es cada vez una mejor aproximación al resultado real.

- Orden de convergencia en el algoritmo de bisección: $k \geq \frac{\ln\left(\frac{1\times10^{8}}{1}\right)}{\ln(2)} = 26.5$. Este resultado indica que deben realizarse al menos 26 iteraciones.

3.2. Método de punto fijo

Para este método se utilizaron los siguientes datos de entrada:

- Función $g(x) = \frac{(x^3-1)}{-5}$.
- Valores iniciales $x_0 = 0, x_0 = 1$.
- Tolerancia 1×10^{-8}
- Máximo de iteraciones 100.

Salida:

- Si hay convergencia, una aproximación x_n de un punto fijo.

En el método de punto fijo usado para encontrar una raíz real de una ecuación no lineal, tanto en el caso de $x_0 = 0$, como en el caso de $x_0 = 1$ dio un valor de 0.1984372 con un error aproximado de 2.531302×10^{-9}. En el caso de $x_0 = 1$ se necesitó una iteración adicional para obtener el valor buscado, posiblemente por la distancia entre los valores iniciales.

- Para el caso en que $x_0 = 0$:

Iteracion	xInicial	xActual	Error
0.0000000000	0.0000000000	0.2000000000	1.0000000000
1.0000000000	0.2000000000	0.1984000000	0.0080645161
2.0000000000	0.1984000000	0.1984380936	0.0001919673
3.0000000000	0.1984380936	0.1984371938	0.0000045347
4.0000000000	0.1984371938	0.1984372150	0.0000001071
5.0000000000	0.1984372150	0.1984372145	0.0000000025

Tabla 2: Valores de las variables en cada iteración con $x_0 = 0$.

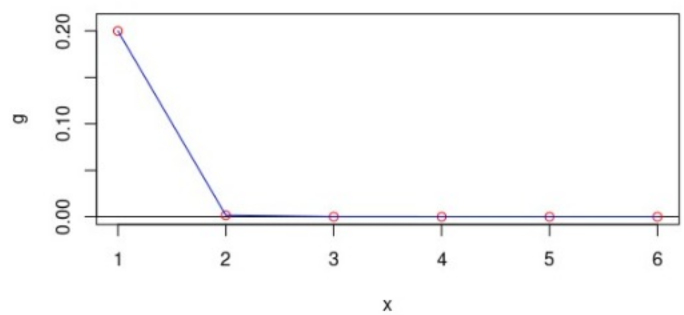

Figura 4: Gráfica de Error relativo en función de las iteraciones con $x_0 = 0$.

- Para el caso en que $x_0 = 1$:

Iteracion	xInicial	xActual	Error
0.0000000000	1.0000000000	0.0000000000	Inf
1.0000000000	0.0000000000	0.2000000000	1.0000000000
2.0000000000	0.2000000000	0.1984000000	0.0080645161
3.0000000000	0.1984000000	0.1984380936	0.0001919673
4.0000000000	0.1984380936	0.1984371938	0.0000045347
5.0000000000	0.1984371938	0.1984372150	0.0000001071
6.0000000000	0.1984372150	0.1984372145	0.0000000025

Tabla 3: Valores de las variables en cada iteración con $x_0 = 1$.

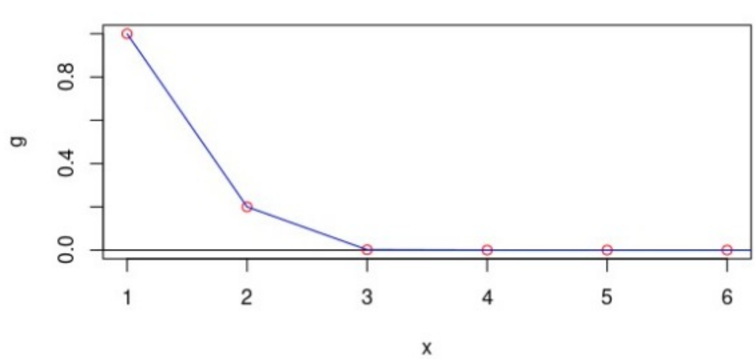

Figura 5: Gráfica de Error relativo en función de las iteraciones con $x_0 = 1$.

4. Referencias

[1]F. Walter, Introducción a los métodos numéricos, Implementaciones en R. Revista digital, 2013.

[2]L. Rodríguez, Análisis numérico básico, 3rd ed. Escuela Superior Politécnica del Litoral Phyton, 2014.