Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Análisis de Algoritmos | 7083

Tarea 3 : | Programacion Dinamica

Sosa Romo Juan Mario | 320051926

25/09/24

1. **Dados dos árboles generadores T y R de una gráfica $G = (V, E)$, muestra cḿo encontrar la secuencia más corta de árboles generadores $T_0, T_1, \ldots, T_k$ tal que $T_0 = T$, $T_k = R$ y cada árbol T_i difiere del árbol anterior T_{i-1} agregando y borrando una arista.**

2. **Sea G una gráfica cuyas aristas tienen asignados pesos positivos. Sea T un árbol generador de peso mínimo de G. Pruebe que existen aristas $e \in T$ y $e' \notin T$ tales que $T - \{e \cup e'\}$ forman un árbol de peso mayor o igual que T, pero menor o igual a cualquier otro árbol generador de G, i.e. un segundo árbol generador de peso mínimo.**

3. **Una empresa está planeando una fiesta para sus empleados. Los organizadores de la fiesta quieren que sea una fiesta divertida, por lo que han asignado una calificación de "diversión" a cada empleado. Los empleados están organizados en una estricta jerarquía, es decir, un árbol enraizado en el presidente. Sin embargo, hay una restricción en la lista de invitados a la fiesta: tanto un empleado como su supervisor inmediato (padre en el árbol) no pueden asistir a la fiesta (porque eso no sería divertido). Diseñe un algoritmo de tiempo lineal que haga una lista de invitados para la fiesta y que maximice la suma de las calificaciones de "diversión" de los invitados.**

   Lo primero que hay que notar es que los valores de "diversión" pueden ser negativos

4. **Supongamos que usted quiere marcar un número de n dígitos $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ en un teléfono normal en el que los números están en un arreglo normal de 4×3 teclas utilizando sólo dos dedos. Supongamos que al comenzar a marcar, sus dedos están en las teclas "$*$" y "$\#$". Encuentre un algoritmo de tiempo lineal (programación dinámica) que minimiza la distancia Euclideana que tienen que recorrer sus dedos.**

5. **Sea S un conjunto de n puntos en el plano y en posición general, tales que $\forall (x_i, y_i) \in S$ se tiene que $x_i, y_i \in \mathbb{N}$ y $x_i, y_i \in [0, \ldots, n^2]$. Describe un algoritmo que encuentre el cierre convexo de S es tiempo $O(n)$.**

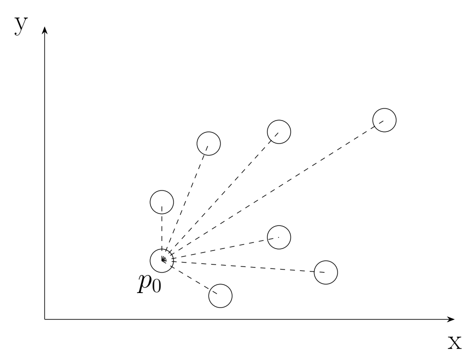
Lo primero a notar es que no podemos aplicar metodos como el de Graham o el de Jarvis, ya que estos tienen una complejidad de $O(n \log n)$ y en este caso se pide un algoritmo de complejidad $O(n)$.

Graham Scan + Radix Sort

Como bien dice el titulo, vamos a usar el algoritmo de Graham Scan para encontrar el cierre convexo de S. Ademas, vamos a usar el algoritmo de Radix Sort para ordenar los puntos de S en tiempo $O(n)$. A continuación se describe el algoritmo:

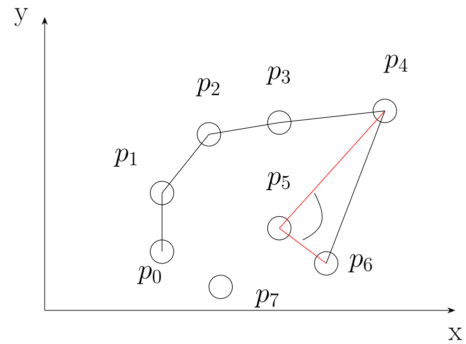
Primero, vamos a buscar el mas chico en la coordenada x, lo vamos a llamar p_0. Luego, vamos a ordenar los puntos de S en orden decreciente de angulo abarcado entre el segmento que une a p_0 con el punto y el eje x, se puede utilizar la cotangente para agilizar este proceso, ademas por la reestriccion de que los puntos estan en el rango $[0, \ldots, n^2]$ podemos usar Radix Sort para ordenar los puntos en tiempo $O(n)$.

Eso nos va a dar algo de este estilo:



Entonces buscar el mas chico en una coordenada nos tomo $O(n)$ y ordenar los puntos nos tomo $O(n)$, por lo que hasta ahora llevamos $O(n)$. Ahora, vamos a aplicar el algoritmo de Graham Scan para encontrar el cierre convexo de S.

Ahora Graham va a tomar una pila, meter a p_0 y a p_1, luego va a ir tomando los puntos de S de a uno y va a ir viendo si el giro que forma el punto actual con los dos ultimos puntos de la pila es a la izquierda o a la derecha. Si el movimiento es a la derecha entonces continua y mete a el siguiente punto en la pila, si el movimiento es a la izquierda entonces saca el ultimo punto de la pila y vuelve a hacer el giro con el nuevo ultimo punto de la pila. Algo asi:



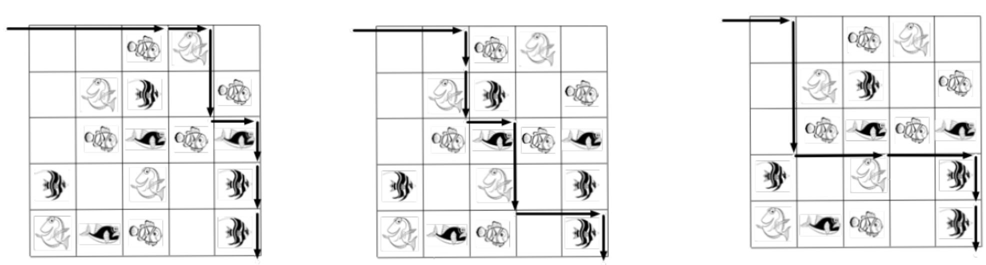
Para calcular si un giro es a la izquierda o a la derecha, se puede usar el producto vectorial, que tiene una complejidad de $O(1)$ ($((x2-x1)(y3-y1)-(y2-y1)(x3-x1)$ si es 0 entonces es colineal (este caso no pasa en posicion general), si es positivo es a la izquierda y si es negativo es a la derecha).

Acabamos cuando regresamos a p_0 y la pila tiene n elementos, por lo que la complejidad de Graham Scan es $O(n)$ (porque solo procesa en la pila el elemento una vez). Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo es $O(n)$.

□

6. **Considera que un río fluye de norte a sur con caudal constante. Suponga que hay n ciudades en ambos lados del río, es decir n ciudades a la izquierda del río y n ciudades a la derecha. Suponga también que dichas ciudades fueron numeradas de 1 a n, pero se desconoce el orden. Construye el mayor número de puentes entre ciudades con el mismo número, tal que dos puentes no se intersecten.**

7. **Un pescador está sobre un océano rectangular. El valor del pez en el punto (i, j) está dado por un arreglo A de dimensión 2 $n \times m$. Diseña un algoritmo que calcule el máximo valor de pescado que un pescador puede atrapar en un camino desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha. El pescador solo puede moverse hacia abajo o hacia la derecha, como se ilustra en la siguiente figura.**



8. **Sean tres cadenas de caracteres X, Y y Z, con $|X| = n$, $|Y| = m$ y $|Z| = n + m$. Diremos que Z es un *shuffle* de X y Y si Z puede ser formado por caracteres intercalados de X y Y manteniendo el orden de izquierda a derecha de cada cadena.**

(a) **Muestra que *cchocohilaptes* es un *shuffle* de *chocolate* y *chips*, pero *chocochilatspe* no lo es.**

(b) **Diseña un algoritmo de programación dinámica eficiente que determine si Z es un *shuffle* de X y Y. *Hint*: Los valores de la matriz de programación dinámica que construyas, podrían ser valores booleanos y no numéricos.**