Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Análisis de Algoritmos | 7083
Tarea 5 : | Tarea final
Sosa Romo Juan Mario | 320051926
13/11/2024

1. **Pruebe que el segundo elemento más chico de una lista de n elementos puede encontrarse con $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ comparaciones.**

   Usando arbol de torneo

   Lo primero que nos va a resultar muy útil es conseguir el arbol de torneo de la lista, este arbol es un arbol binario balanceado donde cada nodo interno es el ganador de sus dos hijos, es decir, el nodo con el valor mas chico de sus dos hijos.

   Entonces, comenzamos metiendo cada valor de la lista en una hoja del arbol, luego, en cada nivel del arbol, vamos a comparar los nodos de izquierda a derecha y vamos a ir subiendo el nodo mas chico, al final, el nodo raíz será el elemento mas chico de la lista. Como en el primer nivel tenemos n nodos hacemos $n/2$ comparaciones, en el siguiente haremos $n/4$ comparaciones, y así sucesivamente, entonces la cantidad de comparaciones que hacemos es $n - 1$ (cuando $n/2^k = 1$ no hay comparación).

   Ahora tenemos una EDD con el mas chico en su raiz y como ya notamos en la tarea 1 (o 2 xd) es que para encontrar el segundo elemento mas chico basta con checar alguno que haya perdido directamente contra el mas chico, esto es porque si un nodo perdió contra el mas chico, entonces no puede ser el mas chico, y a su vez si es el segundo mas chico le gano a los que se comprararon con el.

   Sabemos que el mas chico subio de ser hoja a ser la raiz y nuestro árbol tiene altura $\lceil \log_2\ n \rceil + 1$, (la altura es approx $\log_2\ 2n = \log_2\ n + 1$ por ser balanceado con base n pero como debe ser un número entero entonces se usa la función techo), por lo que por los 2 puntos anteriores sabemos que el segundo mas chico esta en un conjunto de a lo mas $(\lceil \log_2\ n \rceil + 1) - 1$ nodos (sabemos que la raiz no es el segundo mas chico).

   Finalmente solo es buscar en este conjunto bajando y comparando o usando la logica de arriba, podemos usar otro árbol con los elementos que queremos comparar para encontrar el segundo mas chico, teniendo como base los $\lceil \log_2\ n \rceil$ nodos que sabemos que pueden ser el segundo mas chico, encontramos el segundo mas chico en a lo mas $\lceil \log_2\ n \rceil - 1$ comparaciones.

   Finalmente nuestro algoritmo tiene una complejidad de $(n - 1) + (\lceil \log_2\ n \rceil - 1) = n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ comparaciones.

2. **Give an $O(n\ log\ k)$-time algorithm which merges k sorted lists with a total of n elements into one sorted list. (Hint: use a heap to speed up the elementary $O(kn)$-time algorithm).**

   Voy a asumir que el problema quiere juntar "k" listas ya ordenadas por separado en una lista ordenada y no se refiere a que las listas estan k-ordenadas y se quieren juntar en una sola lista ordenada.

Usando un monticulo minimo

La idea es utilizar un min heap para que, en cada paso siempre extraemos el elemento mas chico lo que evidentemente resultara en una lista ordenada de n elementos.

Lo primero es crear el heap, como las listas ya estan ordenadas y buscamos solo el mas chico, es suficiente con tener el primer elemento de cada lista en nuestro heap, esto se puede hacer en $O(k\ log\ k)$ tiempo (insertar k nodos con cada inserción tomando a lo mas log k pues el monticulo tiene k nodos).

No creo que sea necesario explicar como funciona un min heap porque eso es mas de EDD pero tiene como propiedad que ira acomodando los nodos de forma ascendente basandose en sus valores.

Ahora para la creación de la lista, tomamos el primer elemento del heap, lo agregamos a la lista y lo eliminamos del heap, si el nodo que agregamos a la lista tenía un nodo siguiente en su lista de origen, habrá que agregarlo al heap, podremos acabar cuando el heap este vacío.

Ahora, como ya mencionamos el heap en cualquier momento sera de tamaño a lo mas k (el elemento mas pequeño que estamos procesando de cada lista) por lo que la complejidad en espacio será de $O(k)$, ademas, insertar en este heap toma $O(log\ k)$ tiempo y vamos a insertar en total n nodos por lo que la complejidad en tiempo sera de $O(n\ log\ k)$ (notese que $n \geq k$ si una lista es vacia ni la consideramos).

3. **Consider an $n \times n$ board of checkerboard B of alternating black and white squares. Assume that n is even. We seek to cover this checkerboard with rectangular dominos of size 2×1.**

   (a) **Show how to cover the board with $\frac{n \times n}{2}$ dominos.**

   (b) **Remove the upper left and lower right corners from B. Show that you cannot cover the remaining board with $\frac{n \times n}{2} - 1$ dominos.**

   (c) **Remove one arbitrary black square and one arbitrary white square from B. Show that the rest of the board can be covered with $\frac{n \times n}{2} - 1$ dominos.**

4. **Suppose we are given the minimum spanning tree T of a given graph G (with n vertices and m edges) and a new edge $e = (u - v)$ of weight w that we will add to G. Give an efficient algorithm to find the minimum spanning tree of the graph $G+e$. Your algorithm should run in $O(n)$ time.**

5. **Usted tiene que ordenar una serie Σ_n de n números, tales que todos son 0 ó 1. La única operación que puede hacer es comparar dos números cualesquiera x y y, y cada que los compara recibe la respuesta $x < y$, $x = y$, or $x > y$.**

   (a) **De un algoritmo que con a lo más $n-1$ comparaciones ordena Σ_n. Pruebe que su algoritmo es óptimo.**

   Tomando un representante

   La idea de este algoritmo es simple, primero tomas uno al azar, por ejemplo el primero, y lo pones en una lista L. Comparas con el segundo el que sea menor lo pones al principio de L (este es 0 y el mayor es un 1), podemos seguir con el mayor que sabemos que es un 1, lo comparamos con el tercero y si es menor lo ponemos atras del que tenemos y si es mayor adelante (en este caso el 1 va al final de L). Así sucesivamente hasta que termines de comparar todos los elementos.

   Como el algoritmo compara cada elemento con los que ya están en la lista, el número de comparaciones es a lo más $n-1$ (el primero ocupa al segundo para compararse).

   Notamos que como no contamos con información adicional, no podemos ignorar a ningún elemento; por lo que el algoritmo es óptimo. Un caso muy feo por ejemplo es si tenemos puros 1's, de cualquier forma que los compares solo tendras iguales y no puedes saber si es porque son grupitos de iguales o porque todos son iguales hasta que los compares todos o con alguno que sea de su mismo tipo (con un arbol por ejemplo).

   (b) **Encuentre un algoritmo que utilizando en promedio $\frac{2n}{3}$ comparaciones ordena Σ_n (esto bajo la suposición que los elementos de Σ_n tienen la misma probabilidad de ser 0 ó 1). Demuestre que su algoritmo es óptimo.**

   Algo vital para resaltar en este caso es que si tenemos información extra por lo que no significa que el algoritmo anterior no sea optimo.

   Usando arboles

   La idea de este algoritmo va a ser agrupar por tipos cuando sean iguales y cuando no, ya tenemos un orden sobre esos grupos que sean diferentes; es importante destacar que en el caso que fueran todos de un solo tipo la complejidad sería $n-1$ comparaciones.

   Vamos a comenzar por dividir nuestra serie de elementos en hojas de un arbol, adicionalmente a el valor que tengan (que desconocemos) vamos a agregarle un valor a estos nodos que indiquen de que tamaño es su grupo; ahora comparamos por pares (si nos sobra uno podemos compararlo en el siguiente nivel). Tenemos 4 casos posibles:

   i. $x = y$ Ambos son iguales (dos 1), en este caso creamos un nodo padre con el valor de uno de los 2 y el tamaño de su grupo es la suma del tamaño de ambos grupos (en este caso 2).

   ii. $x < y$ En este caso ya sabemos quienes son 1's y quienes son 0's, por lo que los contamos dependiendo del tamaño de su grupo y estos ya no juegan (sabemos que hay un 1 y un 0).

   iii. $x > y$ En este caso ya sabemos quienes son 1's y quienes son 0's, por lo que los contamos dependiendo del tamaño de su grupo y estos ya no juegan (sabemos que hay un 1 y un 0).

iv. $x = y$ Ambos son iguales (dos 0), este caso es analogo al caso 1.

Esto nos tomo $\mathbf{n/2}$ comparaciones, pero lo interesante aqui es que si todos los casos tienen la misma probabilidad (por la suposición del problema) entonces la mitad de los elementos ya estan ordenados y no los volvemos a comparar esto significa que en el siguiente nivel solo hay $(n/2)/2 = n/4$ nodos (normalmente serían $n/2$ pero la mitad no sobrevive).

Podemos repetir un procedimiento similar en el siguiente nivel, este tiene $n/4$ nodos por lo que comparando por parejas nos toma $(n/4)/2 = \mathbf{n/8}$ comparaciones. Seguimos haciendo esto y por ejemplo el siguiente nivel tendra $(n/8)/2 = n/16$ nodos y usara $(n/16)/2 = \mathbf{n/32}$ comparaciones.

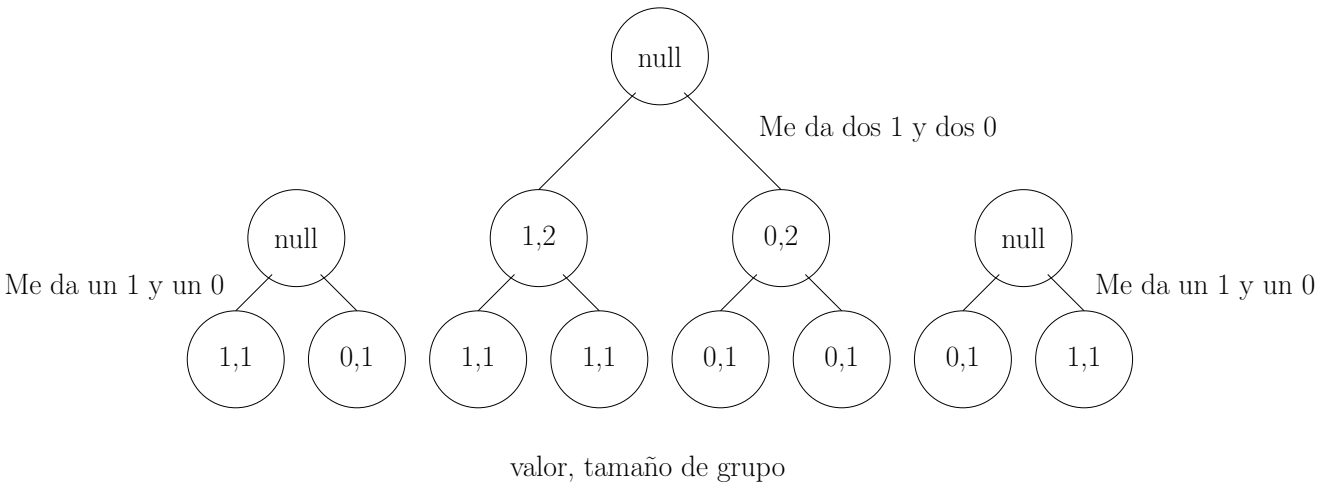
Se sigue de este razonamiento que la cantidad de comparaciones se ve algo como esto:

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots + 1$$

Esta es una progresión geométrica con razón de $\frac{1}{4}$ empezando por $\frac{n}{2}$, ademas en este caso cuando llegamos a la raiz mas bien no sabemos de que tipo es solo sabemos que todos sus elementos son del mismo tipo pero podrían ser 1's o 0's, por lo que ocupamos una comparación mas con alguno ya ordenado (si solo hay un tipo entonces ocupa $n-1$ comparaciones y esta trivialmente ordenado).

$$\frac{n/2}{1 - 1/4} = \frac{n/2}{3/4} = \frac{2n}{3}$$

Hagamos un ejemplo grafico chico para ver como se ve esto:



En este caso tenemos 8 elementos, hacemos 4 comparaciones y ordenamos a 4; nos quedan 2 nodos vivos con lo que hacemos 1 comparación y tenemos 0 nodos vivos con lo que ya sabemos cuantos 1's y 0's hay.

Notemos que no hay un caso terrible, en cuanto no sean iguales podemos quitar a todos los elementos de ambos arboles y como ya mencionamos el peor caso seria si todos fueran iguales.

6. **Consider the numerical game "20 questions". In this game, player 1 thinks of a number in the range 1 to n. Player 2 has to figure out this number by asking the fewest number of true/false questions. Assume that nobody cheats.**

   (a) **What is an optimal strategy if n in known?**

   Asumimos que se pueden hacer mas de 20 pregutnas porque si no es posible que el jugador 1 escoja un numero demasiado grande donde lo siguiente no funcionara.

   Usando Busqueda Binaria

   Como ya sabemos si conocemos el rango de valores sobre los cuales tenemos que buscar podemos usar busqueda binaria. La estrategia es ir diviendo el rango en mitades y ver de que lado esta el numero. Empezando con el rango $[1, n]$ y preguntando si el numero es mayor o menor a $n/2$. Si es mayor entonces el rango se convierte en $[n/2, n]$ y si es menor el rango se convierte en $[1, n/2]$. Repitiendo este proceso hasta que el rango sea de tamaño 1, esto se logra en $\log_2(n)$ tiempo en el peor caso.

   (b) **What is a good strategy is n is not known?**

   Usando Busqueda Exponencial

   La idea de la busqueda exponencial es primero encontrar un rango donde el numero se encuentre y luego hacer busqueda binaria en ese rango. Primero necesitamos encontrar un numero k tal que $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Luego hacemos busqueda binaria en el rango $[2^{k-1}, 2^k]$ para encontrar el número.

   Para ser mas especificos, comenzamos con $i = 1$ y checamos si es o no mas grande que nuestro numero si no lo es entonces $i = 2i$ y repetimos el proceso hasta encontrar el que cumpla la desigualdad anterior o lleguemos a uno mas grande que n. Vemos que el rango se esta duplicando en cada paso lo que significa que estamos considerando exponencialmente mas valores en cada paso lo que nos garantiza encontrar el rango en $O(\log(n))$ tiempo.

   Una vez que tengamos el rango, hacemos BB para encontrar el numero en $O(\log(n))$ tiempo.

7. **Sea T un árbol con raíz con n vértices. Cada nodo v tiene asociado un peso $w(v)$. Utilizando programación dinámica, encuentre un algoritmo de tiempo lineal para encontrar el conjunto independiente de T de peso máximo.**

   Este problema se asemeja bastante al problema 3 de la tarea 3 asi que lo vamos a abordar de manera similar. (reutilice algunos de los diagramas que hice porque me quedaron bonitos)

   Aclaraciones:

   - Solo vamos a considerar pesos positivos.
   - El arból puede o no ser binario.
   - Solo vamos a considerar arrboles con mas de 2 nodos pues si no el problema es trivial. (aunque el algoritmo que vamos a presentar funciona para arboles para todo n)

   La idea es utilizar el arbol que ya existe, agregarle informacion y recorerlo de manear eficiente.

   Usando DP en el arból

Lo que vamos a intentar es considerar a un nodo y sus hijos para ver si nos conviene tomarlo o no. Comenzamos por los nodos mas faciles de analizar, las hojas. Si un nodo es hoja, entonces el conjunto independiente de peso maximo que lo contiene es el mismo nodo.

Vamos a utilizar un recorrido postorden paa recorrer el arbol. De manera que procesamos primero a los hijos de un nodo antes de procesar al nodo en si, este recorrido tiene complejidad $O(n)$.

Ahora, en cada nodo vamos a agregarle información, para ello vamos a usar 2 funciones que se pueden describir asi:

- **Incluir:** Si incluimos al nodo en el conjunto, entonces sus hijos no pueden ir. Esto se ve asi:

$$\text{Incluir}(nodo) = peso(nodo) + \sum_{h \in hijos} \text{excluir}(h)$$

- **Excluir:** Si excluimos al nodo del conjunto, entonces podemos o no incluir a sus hijos. Esto se ve asi:

$$\text{Excluir}(nodo) = \sum_{h \in hijos} \max\{\text{incluir}(h), \text{excluir}(h)\}$$

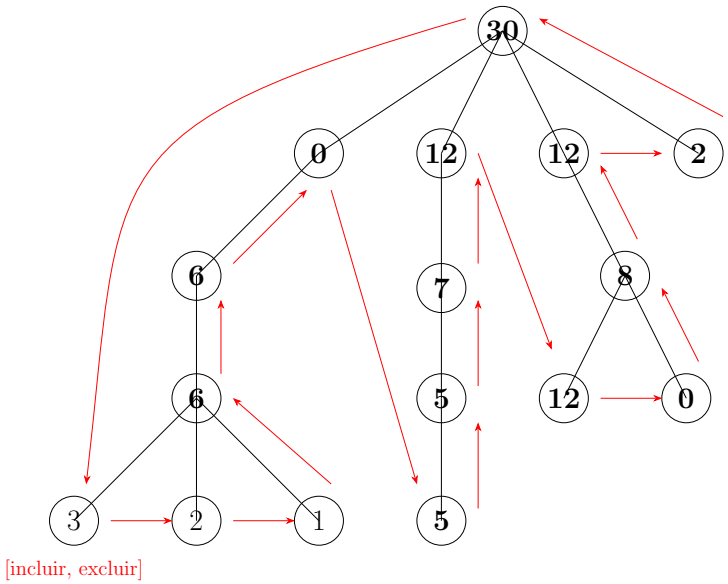
Ademas de estas funciones, vamos a agregar la base de la recurrencia, como ya dijimos cuando un nodo es hoja no tiene restricciones, por lo que podemos definir las funciones asi:

$$\begin{aligned} \text{incluir}(nodo) &= peso(nodo) \\ \text{excluir}(nodo) &= 0 \end{aligned}$$

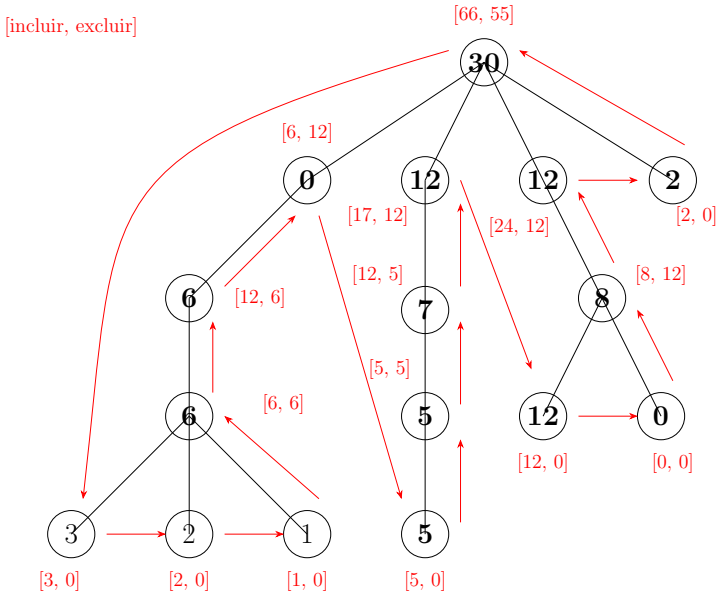
Adicionalmente, si queremos considerar negativos (aunque ya lo resuelve) podemos decir que si un valor es negativo simplemente no lo agregamos.

Entonces para cada nodo, empezando por las hojas agregamos esta información y recuperamos la información de sus hijos para poder calcular la información del nodo padre.

Entonces el arbol se va a ir llenando algo asi en el recorrido:

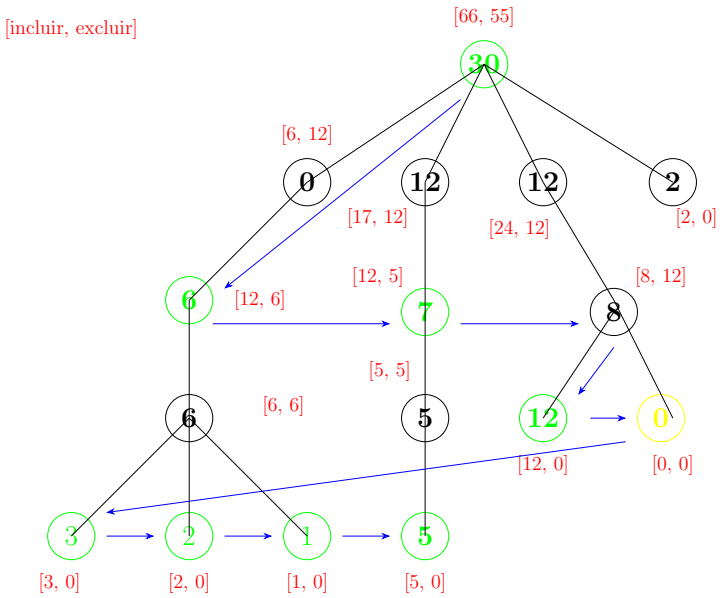


Seguimos el camino rojo y para cada nodo vamos calculando sus 2 valores, esto sucede en a lo mas O(n) pues cada nodo puede tener a lo mas n-1 hijos. (las funciones de incluir y excluir tienen que checar a todos sus hijos) pero en el caso de las hojas y en general cuando tienen una cantidad razonable de hijos (hijos "constantes" relativo a n) se hace en O(1).



De aqui ya podremos decir cual sera el peso maximo, pero el problema nos pide el conjunto independiente, asi que vamos a crearlo, para ello vamos a hacer un recorrido bfs para checar por nivel si un nodo es incluido o no, si es incluido no tenemos que cehcar a sus hijos, solo habria que checar a sus nietos, si un valor da igual podemos decidir si incluirlo o no.

Esto nos puede quedar algo asi:



El camino azul nos dice cuales tenemos que verificar pero hay que recalcar que todos los nodos entran a la fila en algun momento aunque sea para meter a sus hijos, por lo que la complejidad de este paso es O(n) (bfs usualmente es la suma de aristas y vertices pero en arboles tenemos n-1 aristas).

Los nodos que agregamos los pinte de verde pero podemos agregarlos a una lista y los que excluyo son o hijos de incluidos o nodos cuyo valor de excluir es mayor que el de incluir y no quedan coloreados (o incluidos).

En total entonces el algoritmo tiene complejidad de recorrer el arbol con un recorrido postorden, agregar informacion por cada nodo mas el recorrerlo con bfs, o lo que es lo mismo O(n)*O(1) + O(n) = O(n) y el espacio adicional es O(n) para guardar la lista de nodos que vamos a incluir. (notemos que en el caso de que un nodo tiene muchos hijos estos a su vez ya no pueden tener muchos hijos).

8. **Dado un arreglo A con n enteros positivos y negativos.**

Comenzamos por notar que la multiplicacion en enteros multiplica valores absolutos y el signo del resultado depende de si tienen signos distintos. Por lo tanto para encontrar el par de numeros que maximizan el producto, debemos encontrar el par de numeros con los valores absolutos mas grandes que tengan signos iguales (los 2 mas grandes o los 2 mas chicos).

(a) **Diseña un algoritmo de tiempo cuadrático que encuentre la pareja de números que maximizan el producto.**

Fuerza bruta

Una respuesta inocente sería recorrer todos los pares de números y calcular su producto. Esto es, toma el primer numero y recorre el resto del arreglo multiplicandolo uno por uno, si el producto es mayor que el maximo lo guardamos. Luego toma el segundo numero y repite el proceso, hacemos esto para todos los numeros del arreglo. La complejidad de este algoritmo es $O(n^2)$.

(b) **Diseña un algoritmo de tiempo $O(n \log n)$ que encuentre la pareja de números que maximizan el producto.**

Ordenación

Podemos, por el corolario del principio, tomar y ordenar nuestro arreglo usando algun algoritmo de ordenación $O(n \log n)$, como puede ser merge sort. Luego, el producto de los dos extremos del arreglo será el mayor posible, los 2 mas negativos o los 2 mas positivos.

(c) **¿Se puede mejorar el inciso anterior? Si es el caso, muestre el algoritmo, sino explique por qué.**

Si se puede mejorar, como ya notamos, para maximizar el producto es suficiente con considerar los dos extremos del arreglo ordenado. Lo que es lo mismo, encontrar los 2 maximos y 2 minimos, que ya mostramos se puede hacer en tiempo lineal en otra tarea.

Minimos y maximos

En otra tarea nos pedian minimizar la cantidad de comparaciones para encontrar el minimo y maximo de un arreglo. La solución a ese problema se hacia con heaps y se lograba en algo asi como $3n/2 + k$ o algo asi pero aqui no importa la cantidad de comparaciones si no el tiempo de ejecucion del algoritmo.

Entonces la idea es bastante mas sencilla, vamos a recorrer el arreglo y para cada elemento vamos a comprarlo con los 2 maximos y 2 minimos (en el peor caso) que ya tenemos guardados. Algo asi como ver si es mayor que el maximo maximo si lo es ahora guardamos ahi el nuevo maximo maximo y el antiguo maximo maximo pasa a ser el nuevo maximo. En otro caso comparamos con el segundo maximo y si lo es lo guardamos, si no lo descartamos. Hacemos lo mismo con los minimos. Esto toma algo asi como $4n$ comparaciones y por lo tanto es $O(n)$.

Finalmente el producto de los dos maximos o el producto de los 2 minimos sera el mayor posible solo hay que compararlos.

9. **Suppose that we are given a sequence of n values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and seek to quickly answer repeated queries of the form: given i and j, find the smallest value in $x_i, \ldots, x_j$.**

Como nota importante para este problema es que no nos sirve ordenar el arreglo puesto que esto cambia la posición de los elementos y no podemos acceder al rango especifico.

(a) **Design a data structure that uses $O(n^2)$ space and answers queries in $O(1)$ time.**

DP con matriz

Primero que nada vamos a crear una matriz usando $dp[i][j] = \min\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$, es obvio que esta matriz tiene un tamaño de $n \times n$ para considerar todos los rangos posibles. Si se llena mal puede subir mucho la complejidad aunque no afecta a lo que nos estan pidiendo pero, para llenarla eficientemente vamos a usar DP. Empezamos llenando la diagonal con los valores de x_i (el minimo de un solo elemento) y usamos la siguiente funcion de recurrencia para llenar la matriz:

$$dp[i][j] = \min\{dp[i][j-1], x_j\}; \quad i < j$$

Ahora, para responder a las queries simplemente devolvemos $dp[i][j]$ que es constante y no depende de n aunque el precomputo tarda $O(n^2)$.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos el arreglo $x = [3, 1, 4, 1, 5]$ y queremos llenar la matriz dp:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	3	1	1	1	1
2		1	1	1	1
3			4	1	1
4				1	1
5					5

Notemos que la matriz solo se llena en la diagonal principal y por encima de ella, el resto de las celdas no se llenan puesto que no tiene sentido el rango x_3, x_2 por ejemplo.

(b) **Design a data structure that uses $O(n)$ space and answers queries in $O(log\ n)$ time.**

Segment Tree

La idea es usar un segment tree para guardar los minimos de los rangos. Comenzamos por dividir el arrreglo en subarrerglos, cada nodo en el segment tree representa el minimo de un intervalo en el arreglo original. (vamos a guardar 2 indices tambien para saber que intervalo cubre)

La raiz del arbol representa el rango completo $[1, n]$ y por tanto el minimo de todo el arreglo. Cada nodo tiene dos hijos que representan la mitad del rango del padre y tienen el minimo de ese rango.

El razonamiento del porque este arbol usa $O(n)$ espacio es que el rango se va partiendo a la mitad y por tanto el arbol tiene a lo mucho $2n$ nodos donde cada nodo solo guarda 3 numeros. (serie geometica con termino inicial n y razon 1/2).

Para construir el arbol, tomamos el arreglo y lo dividimos en 2 partes, si no es de tamaño 1, llamamos recursivamente a la funcion para cada parte y guardamos el minimo de cada parte en el nodo actual la altura de este arbol sera de $O(\log\ n)$ y construirlo toma O(n).

Para responder a las queries, si el rango del nodo actual esta contenido en el rango de la query, devolvemos el minimo de ese rango. Si el rango del nodo actual esta fuera del rango de la query, lo ingoramos. Si el rango del nodo actual intersecta con el rango de la query, llamamos recursivamente a los hijos y devolvemos el minimo de los minimos de los hijos, esto toma $O(\log\ n)$ pues en cada nivel procesamos a lo mas 2 nodos (un rango es continuo) y la altura del arbol es $O(\log\ n)$.

10. **El intervalo común más largo de dos sucesiones X y Y , es un conjunto de elementos consecutivos de X y Y más largo que aparece en ambas sucesiones (ojo, no estamos hablando de la subsucesión común más larga). Por ejemplo, el intervalo común más largo de las sucesiones *fotografía* y *tomografía* es *ografía*. Sean $n = |X|$ y $m = |Y|$. Encuentre un algoritmo que en $\Theta(nm)$ encuentre el intervalo común más largo de X y Y.**

DP con matriz

Vamos a crear una matriz dp de dimensiones $(n+1)\times(m+1)$, donde $dp[i][j]$ va a representar el tamaño del intervalo común más largo de $X[0..i-1]$ y $Y[0..j-1]$. Inicializamos la matriz

con ceros. Luego, recorremos la matriz llenandola de la siguiente manera:

$$dp[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0, \\ dp[i-1][j-1] + 1 & \text{si } X[i-1] = Y[j-1], \\ 0 & \text{si } X[i-1] \neq Y[j-1]. \end{cases}$$

Podemos ademas utilizar una variable para almacenar la posicion final del intervalo común más largo, y así poder reconstruirlo, ademas de otra para almacenar el tamaño del intervalo común más largo. La complejidad de este algoritmo es $\Theta(nm)$ ya que recorremos la matriz una sola vez. Funciona porque si encontramos que los caracteres de X y Y en la posición i y j son iguales, entonces el intervalo común más largo se extiende en uno, y si no son iguales, entonces el intervalo común más largo se rompe; la matriz garantiza que se busca en todas las posibles combinaciones de intervalos comunes.

Ejemplo:

		t	o	m	o	g	r	a	f	i	a
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
o	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
t	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
o	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
r	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0
a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	7

Table 1: Matriz de programación dinámica para las secuencias "fotografía" y "tomografía".

Si tenemos la variable *max* que almacena el tamaño del intervalo común más largo, y la variable *end* que tiene la posición final del intervalo, entonces en este ejemplo $max = 7$ y $end = 9$ (si contamos desde 0 en la palabra fotografía), entonces el intervalo común más largo es "ografía" construyendo desde la posición $end - max + 1$ hasta *end* en la palabra fotografía (se usa el +1 porque las palabras empiezan por la posición 0 pero la subcadena la contamos por cantidad osea desde 1). Aunque tambien se puede construir la subcadena buscando el indice mas grande en la matriz *dp* y luego retrocediendo por la diagonal hasta encontrar un 0, y asi construir la subcadena.

11. **Let $G = (V, E)$ be a bipartite graph with vertex partition $V = L \cup R$, and let G' be its corresponding flow network. Give a good upper bound on the length of any augmenting path found in G' during the execution of FORD-FULKERSON.**

12. **Professor Adams has two children who, unfortunately, dislike each other. The problem is so severe that not only do they refuse to walk to school together, but in fact each one refuses to walk on any block that the other child has stepped on that day. The children have no problem with their paths crossing at a corner. Fortunately both the professor's house and the school are on corners, but beyond that he is not sure if it is going to be possible to send both of his children to the same school. The professor has a map of his town. Show how to formulate the problem of determining if both his children can go to the same school as a maximum-flow problem.**

13. **Mientras caminas por la playa encuentras un cofre de tesoros. El cofre contiene n tesoros con pesos $w_1, \ldots, w_n$ y valores $v_1, \ldots, v_n$. Desafortunadamente sólo tienes una mochila que solo tiene capacidad de carga M. Afortunadamente los tesoros se pueden romper si es necesario. Por ejemplo, la tercera parte de un tesoro i tiene peso $\frac{w_i}{3}$ y valor $\frac{v_i}{3}$.**

    (a) **Describe un algoritmo voraz de tiempo $\Theta(nlogn)$ que resuelve este problema.**

    (b) **Prueba que tu algoritmo obtiene la solución correcta.**

    (c) **Mejora el tiempo de ejecución de tu algoritmo a $\Theta(n)$**

14. **Encuentre la parentización óptima para multiplicar seis matrices de dimensiones 4×9, 9×4, 4×10, 10×2, 2×5, 5×6.**

    Primero que nada voy a ponerle nombres a las matrices con las que estoy trabajando para que sea más fácil referirse a ellas. Así que las matrices serán:

    $$A1 : 4 \times 9$$
    $$A2 : 9 \times 4$$
    $$A3 : 4 \times 10$$
    $$A4 : 10 \times 2$$
    $$A5 : 2 \times 5$$
    $$A6 : 5 \times 6$$

    Usando DP

Voy a crear una matriz dp de tamaño 6×6 donde $dp[i][j]$ va a ser el costo mínimo de multiplicar las matrices $A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j$.

Además, voy a crear una matriz s de tamaño 6×6 donde $s[i][j]$ va a ser el índice de la matriz que se va a multiplicar en la última multiplicación de la cadena $A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j$.

15. **Sea P_n una familia de n puntos en el plano, en posición general. Encuentre un algoritmo que encuentre el triángulo de mayor área cuyos vértices estén en P_n. Su algoritmo tiene que trabajar en menos de $O(n^3)$. Hint: Pruebe primero que los vértices de dicho triángulo están en el cierre convexo de P_n, esto reduce el problema al caso en que los elementos de P_n son los vértices de un polígono convexo.**

16. **Supongamos que usted es el dueño de la compañía Anuncios Espectaculares y que recibe un contrato para colocar anuncios espectaculares en la autopista México Querétaro . Los lugares donde puede colocar sus anuncios están localizados en los kilómetros $x_1, \ldots, x_n$ de dicha autopista. Si usted coloca un anuncio en el lugar localizado en el kilómetro x_i, recibirá una ganancia r_i. Por razones de seguridad, los anuncios no pueden estar muy cerca uno del otro, y la distancia entre dos anuncios consecutivos tiene que ser al menos 10 kilómetros. Observe que la distancia entre dos sitios cualquiera donde puede localizar sus anuncios no es necesariamente mayor que 10 kilómetros.**

    Encuentre un algoritmo que resuelva el problema de colocar anuncios de tal forma que las ganancias de su compañía se maximicen. Por ejemplo si:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{12, 14, 23, 28\}$$

    y

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \{5, 6, 5, 1\}$$

    la solución óptima sería colocar anuncios en los kilómetros 12 y 24 para una ganancia de 10.

17. **Consider the following data compression technique. We have a table of m text strings, each at most k in length. We want to encode a data string D of length n using as few text strings as possible. For example, if our table contains $(a, ba, abab, b)$ and the data string is $bababbaababa$, the best way to encode it is $(b, abab, ba, abab, a)$ a total of five code words. Give an $O(nmk)$ algorithm to find the length of the best encoding. You may assume that every string has at least one encoding in terms of the table.**

18. **La compañía *Monsters, Inc* preparó para el día de hoy una fila de $n \geq 2$ puertas para abrir y recolectar los gritos de los niños con el fin de abastecer de energía a la Monstropolis. Con el propósito de salir temprano los monstruos determinaron abrir todas las puertas de jalón y así terminar lo más rápido posible, por lo que asignaron a Sullivan a recorrer toda la fila y abrir todas las puertas. Al ver el desastre que esto causaría, Mike Wazowski recorrió la fila y cerró todas las puertas de manera alternada iniciando en la puerta 2. Sin embargo, ¡Quedaron $\frac{n}{2}$ puertas abiertas!. Por lo que el resto de los monstruos decidieron ayudar de la siguiente manera: el monstruo con el recorrido i-ésimo, cambiaría el estado de cada i-ésima puerta iniciando desde la puerta**

i. Después de hacer este proceso n veces, ¿Quedan puertas abiertas? ¿Cuántas y cuáles son si es el caso?