Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Análisis de Algoritmos | 7083
Tarea 4 : | Greedy y flujos
Sosa Romo Juan Mario | 320051926
21/10/24

1. **Un algoritmo glotón para regresar el cambio de n unidades usando el mínimo número de monedas es el siguiente: Dar al cliente una moneda de mayor denominación, digamos d. Repite lo anterior para regresar el cambio de n-d unidades.**

   Para cada una de las siguientes denominaciónes, determina si el algoritmo greedy antes mecionado mínimiza el número de monedas para dar el cambio. Si es así pruébalo, y si no lo es muestra un contraejemplo.

   (a) **Monedas de Estados Unidos , 50, 25, 10, 5 y 1 centavos**

   (b) **Monedas Inglesas 30, 24, 12, 6, 3, 1, 1/2 y 1/4 peniques**

   (c) **Monedas Portuguesas 1, 2.5, 5, 10, 20, 25, 50 escudos**

   (d) **Monedas marcianas, 1, p, p^2, ..., p^k, con $p > 1$ y $k \geq 0$**

2. **Construya el árbol de Huffman para codificar el siguiente texto:**

   "El azote, hijo mío, se inventó para castigar afrontando al racional y para avivar la pereza del bruto que carece de razón; pero no para el niño decente y de verguenza que sabe lo que le importa hacer y lo que nunca debe ejecutar, no amedrentado por el rigor del castigo, sino obligado por la persuasión de la doctrina y el convencimiento de su propio interés"

3. ***Mei Hua Zhuang*** **es una técnica de enfrentamiento de Kung Fu, que consiste en n postes grandes parcialmente hundidos en el suelo, con cada poste p_i en la posición (x_i, y_i). Los estudiantes practican técnicas de artes marciales pasando de la parte superior de un poste a la parte superior de otro poste. Pero para mantener el equilibrio, cada paso debe tener más de d metros pero menos de $2d$ metros. Diseñe un algoritmo eficiente para encontrar si es que existe una ruta segura desde el poste p_s al poste p_t.**

4. **El juego "sube y baja" tiene un tablero de n celdas, donde se busca viajar de la celda 1 a la celda n. Para moverse, un jugador lanza un dado de seis caras para determinar cuántas celdas debe avanzar. Este tablero también contiene rampas y escaleras que conectan ciertos pares de celdas. Un jugador que cae en una rampa cae inmediatamente a la celda en el otro extremo. Un jugador que cae en una escalera viaja inmediatamente hasta la celda en la parte superior de la escalera. Suponga que ha manipulado el dado para que tenga el control total del número de cada lanzamiento. Proporciona un algoritmo eficiente para encontrar el mínimo número de lanzamientos de dados para ganar.**

5. **Supongamos que tenemos un conjunto de n ciudades $c_1, \ldots, c_n$ y una tabla $D[1, \ldots n, 1, \ldots n]$ tal que $D[i, j]$ es la longitud de una carretera que une a la ciudad c_i con la ciudad c_j. (este valor puede ser ∞ si no hay carretera entre las ciudades). Encuentre un algoritmo eficiente que encuentre la ruta más corta entre las ciudades c_1 y c_n tal que dicha ruta no pasa por mas de k ciudades distintas (a c_1 y a c_n). Justique su respuesta.**

6. **El profesor López tiene 2 hijos los cuales no se llevan nada bien. Los chiquillos se odian tanto que no sólo se niegan a caminar juntos a la escuela, si no que además se niegan a caminar en cualquier acera en la que el otro hermano haya puesto pie ese día. Los chiquillos no tienen problemas con que sus caminos coincidan en algunas esquinas. Afortunadamente, tanto la casa del profesor como la escuela están en una esquina, fuera de eso el profesor no está seguro si será posible meter a los 2 hijos en la misma escuela. Muestre cómo modelar el problema de decidir si es posible enviar a los 2 hijos a la misma escuela como un problema de flujos.**

7. **Supongamos que tenemos un flujo óptimo en una red N con n vértices, (con capacidades enteras) de un nodo fuente s a un nodo destino t.**

   (a) **Supongamos que la capacidad de una sola arista e se incrementa en una unidad. De un algoritmo de tiempo $O(n + E)$ para actualizar nuestro flujo. E es el número de aristas de N.**

   (b) **Supongamos que la capacidad de una sola arista e se decrementa en una unidad. De un algoritmo de tiempo $O(n + E)$ donde E es el número de aristas de N.**

8. **(El problema del escape) Una malla de nxn es una gráfica compuesta por n filas y n columnas de vértices cómo se muestra en la figura 1. Denotamos el vértice en la i-ésima fila y j-ésima columna como (i, j). Todos los vértices en una malla tienen exactamente cuatro vecinos, excepto aquellos en la frontera, que son los vertices (i, j), donde $i = 1, n$ o $j = 1, n$.**

   Dados $m \leq n^2$ vértices de arranque $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ en la malla, el problema del escape es decidir si existen m trayectorias ajenas por vértices que conecten a cada vértice de arranque con algún vértice en la frontera (distintos).

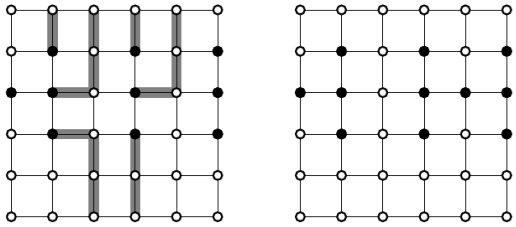

Figure 1: Izquierda malla con escapatoria. Derecha: una sin escapatoria

(a) **Considere una red de flujos cuyos vértices, así como las aristas, tengan capacidades. Esto es, el flujo positivo que entra a cualquier vértice está sujeto a una restricción de capacidad. Muestre que determinar el flujo máximo con capacidades tanto en los vértices como aristas puede ser reducido a un problema de flujo máximo ordinario en una red de flujo con tamaño similar.**

Transformacion agregando aristas

Como ya sabemos, el problema de flujo maximo ordinario solo considera restricciones en las aristas, por lo que vamos a pasar las restricciones de los vertices a una nueva arista, de tal forma que si un vertice tiene una restriccion de capacidad c, entonces vamos a agregar una arista de tal forma que la capacidad de esta sea c, ahora explico con mas detalle como se haria esto.

Lo primero que vamos a hacer es dividir a nuestros nodos en 2, digamos si tenemos el nodo v, entonces vamos a tener 2 nodos v_{in} y v_{out}, ahora vamos a agregar una arista de v_{in} a v_{out} con capacidad c, donde c es la capacidad del nodo v, despues vamos a considerar todas las aristas que salian de v a v' y las vamos a agregar a v_{out} dirigidas a los v'_{in} de tal forma que la capacidad de estas aristas sea la misma que la de las aristas originales (se ve que las aristas que llegan a un vertice se consideran cuando hacemos este proceso para el vertice de salida, osea las aristas que llegan a v_{in} de v''_{out} se van a considerar cuando agregemos las de salida de v'').

Después de aplicar la transformación anterior, la nueva red de flujo solo tiene restricciones en las aristas (incluyendo las aristas que conectan los nodos v_{in} y v_{out}), por lo que podemos aplicar el algoritmo de flujo maximo ordinario para encontrar el flujo maximo de la red original.

Esta red tiene 2 veces el numero de nodos que la red original, y +n aristas, donde n es el numero de nodos de la red original, pero en general la complejidad de este algoritmo es la misma que la del algoritmo de flujo maximo ordinario.

(b) **Describe un algoritmo eficiente que de solución al problema del escape y analice su tiempo de ejecución.**

Usando inciso anterior mas Ford Fulkerson

De entrada si $m > ((n-2)*4)$ entonces no hay escapatoria, ya que hay mas nodos de arranque que nodos de la frontera, por lo que no se puede conectar a todos los nodos de arranque con la frontera.

Comenzamos usando el inciso anterior de esta pregunta para transformar el problema del escape a un problema de flujo maximo ordinario, para posteriormente usar Ford Fulkerson para encontrar el flujo maximo de la red de flujo resultante.

Entonces, para cada vertice (i,j) lo vamos a descomponer en 2 nodos $(i,j)_{in}$ y $(i,j)_{out}$, y vamos a agregar una arista de $(i,j)_{in}$ a $(i,j)_{out}$ con capacidad 1, igualmente vamos a considerar todas las aristas que salian de (i,j) a (i',j') y las vamos a agregar a $(i,j)_{out}$ dirigidas a $(i',j')_{in}$ de tal forma que la capacidad de estas aristas sea 1, ahora vamos a considerar las aristas que llegaban a (i,j) de (i',j') y las vamos a agregar a $(i',j')_{out}$ dirigidas a $(i,j)_{in}$ de tal forma que la capacidad de estas aristas sea 1, esta parte escencialmente es aplicar a para transformar la malla a una grafica dirigida con capacidades en las aristas.

Sin embargo aun nos falta agregar fuentes y sumideros, para esto vamos a agregar un nodo fuente S (de source) y lo vamos a conectar a todos los nodos de arranque $(i,j)_{out}$ con una arista de capacidad 1, y vamos a agregar un nodo sumidero T (de target) y lo vamos a conectar a todos los nodos de la frontera $(i,j)_{out}$ con una arista de capacidad 1 (los de la frontera ya se dijeron cuales son en la pregunta).

Ahora vamos a aplicar Ford Fulkerson a la red de flujo resultante, y si el flujo maximo es igual a m entonces si hay una escapatoria, de lo contrario no la hay.

El algoritmo FF ya se vio en clase pero sus pasos son los siguientes:

- Encontramos un camino de S a T en la red residual. (Usando BFS toma $O(|V|+|E|)$)
- Seelccionar al min de las capacidades de las aristas del camino encontrado. (Toma $O(|V|)$)
- Actualizar las capacidades de las aristas del camino encontrado, es decir decrementamos el flujo de aristas de camino y actualizamos el reflujo. (Toma $O(|V|)$)
- Repetimos los pasos anteriores hasta que no haya camino de S a T en la red residual.

La complejidad de Ford Fulkerson es $O(f^*(|E|+|V|))$ donde f^* es el flujo maximo, en el peor caso $f^* = m = ((n-2)*4)$ (porque hay 4 fronteras cada una con n-2 salidas, ya que las esquinas no nos sirven) y $|E| \approx n^2$ (porque hay nxn en la malla por 4 aristas originales mas unas pocas de la transformación) ademas $|V| \approx 2n^2+2$ (porque hay 2 nodos por cada vertice de la malla mas 2 nodos de la fuente y el sumidero), por lo que la complejidad del algoritmo maso menos es $O(((n-2)*4)(n^2+2n^2+2)) = O(n(n^2)) = O(n^3)$

9. **Sea G una gráfica con n vértices. Un subconjunto S de los vértices de G es independiente si cualesquiera 2 elementos de S no son adyacentes. En general el problema de encontrar el conjunto independiente de una gráfica, es un problema NP-Completo. En algunos otros casos, este problema puede resolverse eficientemente.**
Sea G un camino, i.e. los vértices de G son $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y v_i es adyacente a v_{i+1} para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Supongamos además que cada vértice tiene asignado un peso un peso p_i. Encuentre un algoritmo que resuelva el problema de encontrar el conjunto indpendiente en un camino G. Por ejemplo, si G tiene 5 vertices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y sus pesos son 1,8,6,3,6, el conjunto independiente de peso máximo es v_2, v_5 y tiene peso 14.

La verdad no se si entendi este problema pero voy a reutilizar el algoritmo que usamos en la tarea pasada para encontrar al conjunto de personas que invitar a una fiesta. La idea es usar PD para guardar el valor de incluir vs no incluir al nodo.

Usando PD

Primero que nada vamos a usar un arreglo de tamaño n en donde en cada punto tendremos un par (incluir, no incluir) comenzamos por el primer nodo, y en este caso como no hemos procesado ningun otro vamos a llenarlo con (p_i,0).

Ahora para cada nodo siguiente del camino vamos a usar la siguiente funcion de recurrencia:

$$\text{PD}[i] = \{(p_i + \text{PD}[i-1].\text{noIncluir}, max(\text{PD}[i-1].\text{noIncluir}, \text{PD}[i-1].\text{Incluir}))\}$$

Escencialmente lo que estamos haciendo es conseguir para cada nodo su valor hasta ese punto de agregarlo o no agregarlo. Al final de todo vamos para conseguir el conjunto independiente, checamos para el ultimo nodo si es mejor incluirlo o no, si lo incluimos, le restamos el valor de su peso al valor total y lo agregamos al conjunto, y nos movemos al nodo anterior, sabiendo que el valor que nos queda despues de restarle tiene que ser igual al valor que teniamos en algun nodo anterior, asi podemos ir consiguiendo el conjunto independiente.

Ejemplo:

Usando G tiene 5 vertices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y sus pesos son 1,8,6,3,6.

$$\begin{aligned} DP &= [(1,0),(,),(,),(,),(,)] \\ &= [(1,0),(8,1),(,),(,),(,)] \\ &= [(1,0),(8,1),(7,8),(,),(,)] \\ &= [(1,0),(8,1),(7,8),(11,8),(,)] \\ &= [(1,0),(8,1),(7,8),(11,8),(14,11)] \end{aligned}$$

En este caso el conjunto independiente es v_2, v_5 y tiene peso 14. Se puede recuperar como dijimos viendo que 14 es mayor que 11 entonces se incluye, se resta el peso de 5 (14-6=8), pasamos al nodo anterior, buscamos 8 y vemos que no lo incuimos, en el tercer nodo tampoco lo incluimos, en el segundo nodo como el 8 esta en incluirlo lo incluimos, restamos el peso de 2 (8-8=0) y podemos no incuir al resto de los nodos.

Como podemos ver en cada paso se hace una operacion constante pues solo es consultar a su vecino anterior y esto lo hace para cada nodo, por lo que el tiempo de ejecucion es $O(n)$.

10. **Diseña un algoritmo de tiempo $O(|V|+|E|)$ determine si una gráfica dirigida $G = (V, E)$ contiene o no un ciclo.**

DFS Modificado

Para determinar si una gráfica dirigida $G = (V, E)$ contiene un ciclo, se puede utilizar una modificación del algoritmo de búsqueda en profundidad (DFS).

El algoritmo de DFS primero que nada consiste en recorrer todos los nodos utilizando una pila. Empezando por un nodo, lo agregamos a la pila, lo sacamos marcamos como visitado (podemos usar un arreglo booleano o mas facil agregarle informacion a los vertices, tipo (valor, visitado, listaAdyacencias)) y agregamos su lista de adyacencias a la pila. Despues vamos sacando del tope, si el nodo no ha sido visitado, lo marcamos como visitado y

repetimos con su lista de adyacencias, escencialmente visitando a lo mas profundo que podemos antes de visitar a sus vecinos, este algoritmo tiene complejidad de $O(|V| + |E|)$ cada vertice se visita solo una vez pues se marca como visitado y todas las aristas se visitan pues cuando checamos un nodo tenemos que ver a todos sus vecinos para saber si ya estan o no checados.

Para determinar si una gráfica dirigida $G = (V, E)$ contiene un ciclo, se puede utilizar una modificación del algoritmo de DFS. La modificación consiste en agregar un arreglo de booleanos que nos indique si un nodo ha sido visitado en el recorrido actual (podemos buscar a un nodo por su indice), la idea es la misma, ir marcando vertices pero esta vez solo vamos a ir marcando el recorrido actual y cuando hagamos backtrack tambien quitamos esos nodos de la lista de visitados. Si en algun momento encontramos un nodo que ya ha sido visitado en el recorrido actual, entonces hemos encontrado un ciclo.

Como el algoritmo de DFS tiene complejidad $O(|V| + |E|)$, la modificación, solo tiene que agregar un arreglo de booleanos que tiene complejidad $O(|V|)$, por lo que la complejidad del algoritmo modificado se queda en $O(|V| + |E|)$.

Se puede justificar que funciona pues si existe un camino que contenga un ciclo entonces en algun momento vamos a visitar un nodo que ya habiamos visitado en el recorrido actual, ademas, el no revisitar nodos que ya han sido visitados en el recorrido actual podria parecer que podria no dejarnos ver ciclos pero como estamos usando DFS si el ciclo existe por debajo de un nodo ya visitado entonces lo habriamos cachado en ese otro recorrido y no hay necesidad de volver a visitarlo.