Clase 7 Caminos minimos

NO PARA GENTE QUE DICE QUE TrOLLFACE ES CRINGE 🚎

Costo: $Costo(t) = \sum_{e \in E} w(e)$

Topologias de problemas de camino mínimo:

1. Uno a uno (Incluido en BFS, no existen mejores soluciones en complejitud para uno a uno)
2. Uno a muchos (BFS para no pesado)
3. Muchos a Muchos

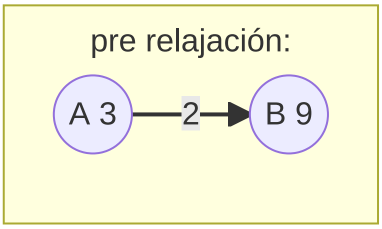
Relajación

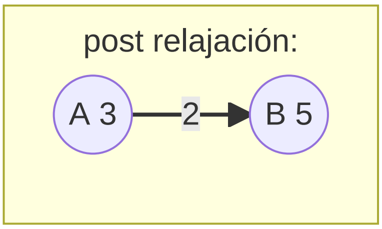
$d(u, v)$ distancia estimada entre u y v, $\delta(u, v,)$ distancia minima real entre u y v.

```
    RELAX( u, v, w):
        if(v.d > u.d + w(u,v)):
            v.d = u.d + w(u,v)
            v.pred = u
```

Propiedades de la relajación:

- **Desigualdad triangular:** Para toda arista $(u, v) \in E$, tenemos que $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$
- **Cota superior:** La distancia real es menor o igual a la estimada(.d) $v.d \geq \delta(s, v)$ para todo vertice, y cuando $v.d == \delta(s, v)$ no vuelve a cambiar
- **No hay camino:** Si no hay camino entre s y v entonces $v.d == \delta(s, v) == \infty$
- **Convergencia:** Si $s \rightarrow \ldots \rightarrow u \rightarrow v$ es un camino minimo en G para algun $u, v \in V$, y si $u.d = \delta(s, u)$ en algun momento antes de relajar el edge (u,v); entonces despues de relajar el edge $v.d = \delta(s, v)$ para siempre.
- **Relajación de camino mínimo:** si $p = \langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ es un camino minimo desde s a v_k y relajamos los edges de p en orden, entonces despues de todos las relajaciones $v_k.d = \delta(s, v_k)$. Esto pasa incluso si hay relajaciones en el medio que afecten a los nodos en p.
- **Subgrafo de predecesores:** una vez que $v.d = \delta(s, v) \; \forall \; v \in V$ el subgrafo predecesor es un árbol de caminos mínimos enraizados en s.





Inicialización para el proceso de Relajación:

```
INIT (Graph(G), source(s)):
    for each vertex v in G.V:
        v.d = inf
        v.parent = NIL
    s.d = 0
```

Shortest path in directed acyclic graphs:

```
DAG (Graph, source):
    TOPOLOGICAL-SORT(G)
    INIT(G,s)
    for u in V (en el orden de TOPO-SORT):
        for v in Adj[u]
            RELAX(u,v)
```

Dijkstra:

Solo sirve si no hay aristas con pesos no negativos

```
DIJKSTRA(G, w, s)
    INIT(G,s)
    S = {}
    Q = G.V // Queue
    while Q != {}
        u = EXTRACT-MIN(Q)
        S = S.append(u)
        for each v in G.adj(u)
            RELAX(u,v,w)
```

Complejidad:

Depende de la implementacion de la queue:

- Usando Fibonnacci heap tiene complejidad total $O(V + E * log(V))$
- Usando una lista desordenada: O(V^2) o

A ⭐

Un algoritmo basado en Dijkstra para calcular la distancia uno a uno.

Idea es usar Dijkstra pero la elección de próximas aristas usamos una heuristica de distancia al final proveniente del problema a modelar. (En caso de mapas podría ser la distancia lineal, de uno a otro).

No es necesario para el parcial

CLASE 8

Algoritmo de Bellman-Ford:

Para grafos con aristas de peso negativo

```
BELLMAN-Ford(G,s): //O(n + n*m + m)
    INIT(G,s) // O(n)
    // Hago la relajacion n-1 veces para todas las aristas = diametro maximo del grafo
    for i = 1 to n-1: //O(n-1 * m)
        for(u,v) in E: //O(m)
            RELAX(u,v) //O(1)

    // Si todavia puedo relajar alguna arista, significa que tengo ciclos negativos
    for (u,v) in E: //O(E) = O(m)
        if v.d < u.d + w(u,v):
            return False
    return True, v
```

Demostración:

Lema:

Si G no tiene ciclos negativos, luego de n-1 iteraciones $=> v.d = \delta(s, v)$ $\forall$ v alcanzable desde s.

Demostración:

Sea P = v_0, v_1, ..., v_{k-1}, v_k es un camino de s = v_0 a v_k, como es camino simple $=> k \leq n - 1$ en cada iteración se relajan todas las aristas, en particular las de P es decir que en algún nonoento de la primer iteración relajo (v_0, v_1) $=> d(s, v_k) = \delta(s, v_k)$ y no cambia más!
En la segunda iteración se relaja v_1,v_2 y no cambia más...
En la k-ésima iteración relajo (v_{k-1},v_k) y no cambia más. Como k es a lo sumo n, funciona ⬛.
Entonces, como para todo camino están todos relajados. Si existe un ciclo negativo voy a poder

hacer una "relajación" después de los n-1 ciclos. Trato de relajar todos los vértices y si puedo relajar alguno, significa que hay un ciclo negativo.

Programación lineal: Difference Constraints

En general, dados A una matriz de m x n , b un vector de tamaño m, y un vector c de tamaño n. Se quiere encontrar un vector x de tamaño n tq: maximize la función objetivo $\sum_{i=1}^{n} c_i * x_i$ teniendo en cuenta las constrains dadas por $A * x \leq b$

El algoritmo que vimos sirve para una matriz especifica, llamada sistema de diferencia, donde cada linea de A tiene exactamente un 1 y un -1, con el resto de las celdas son 0.

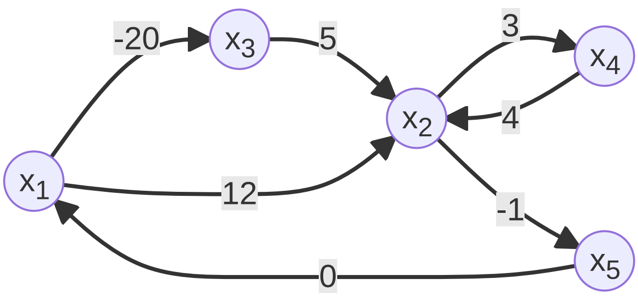
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \\ -20 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Que se traducen en estas ecuaciones:

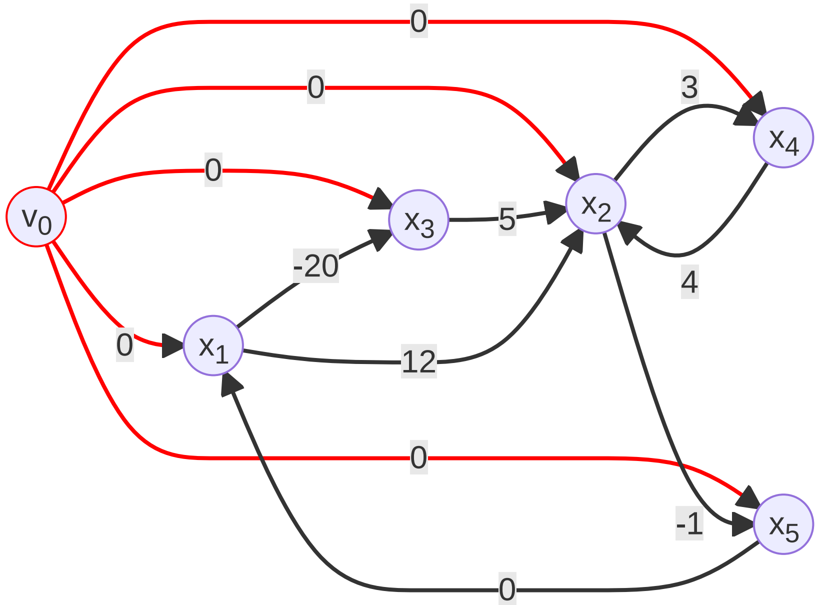
$$\begin{gathered} x_1 - x_5 \leq 0 \\ x_2 - x_3 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_3 \leq -20 \\ -x_2 + x_4 \leq 3 \\ x_2 - x_4 \leq 4 \\ -x_2 + x_5 \leq -1 \end{gathered} \tag{2}$$

Lo que hacemos es traducir estas ecuaciones en un digrafo pesado, donde cada nodo es una de las variables, y las aristas son las constrains.

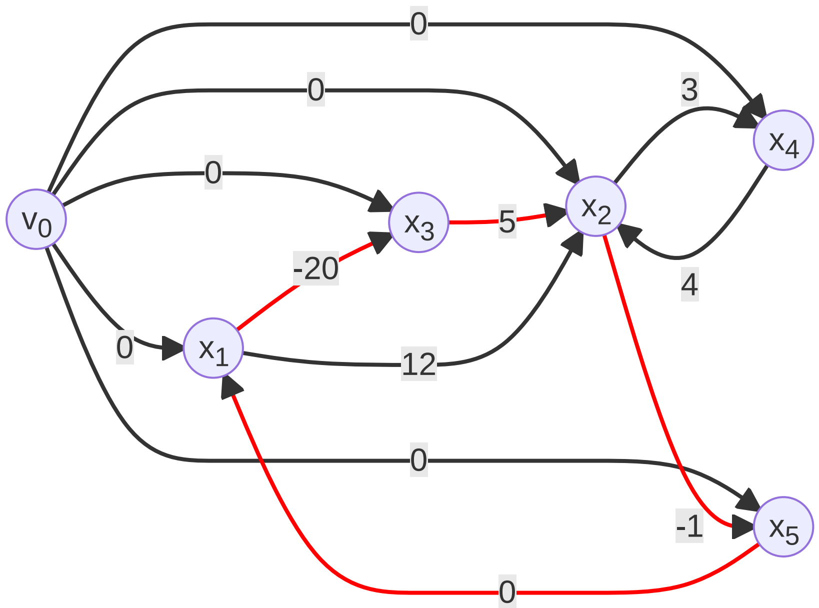
$G = (V, E)$ donde cada $v \in V$ representa una variable del sistema y la constraint $x_i - x_j \leq b_k$ se representa como la arista (v_j, v_i, b_k). Tambien se le agrega un v_0 que tiene aristas salientes a todos los vertices



A este grafo le agregamos un nodo v_0 que se conecta a todos los nodos saliente con peso 0.



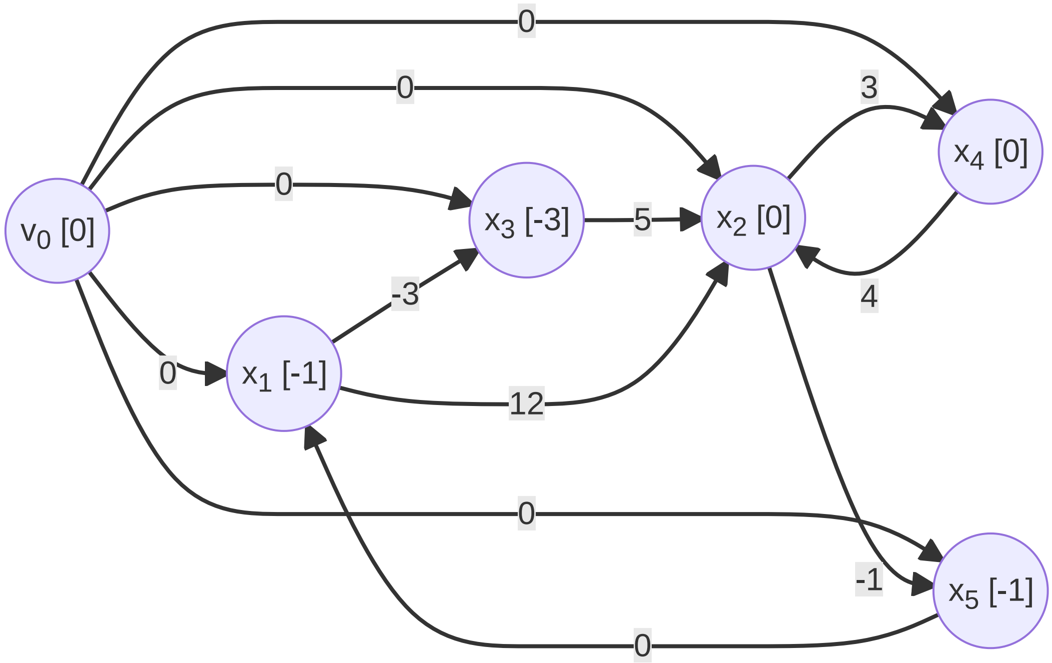
Usamos Bellman-Ford, desde v_0 . Si bellman-ford devuelve que False, es decir que existe un loop negativo dentro. Si devuelve true, las distancias devueltas son una posible solución. En nuestro ejemplo existe un loop negativo $\langle x_1, x_3, x_2, x_5 \rangle$ con peso $-20 + 5 - 1 + 0 = -16$



Cambiando la ecuacion $-x_1 + x_3 \leq -20$ a $-x_1 + x_3 \leq -3$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - x_5 &\leq 0 \\ x_2 - x_3 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + x_3 &\leq -3 \\ -x_2 + x_4 &\leq 3 \\ x_2 - x_4 &\leq 4 \\ -x_2 + x_5 &\leq -1 \end{aligned} \tag{3}$$

Y se convierte en el grafo:



Y si probamos con los valores que devuelve en la distancia:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -3,\ x_4 = 0,\ x_5 = -1$$

$$\begin{gathered}
x_1 - x_5 \leq 0 \implies -1-(-1) \leq 0 \checkmark \\
x_2 - x_3 \leq 5 \implies 0-(-3) \leq 5 \checkmark \\
-x_1 + x_2 \leq 12 \implies -(-1)+0 \leq 12 \checkmark \\
-x_1 + x_3 \leq -3 \implies -(-1)+(-3) \leq -3 \checkmark \\
-x_2 + x_4 \leq 3 \implies 0+0 \leq 3 \checkmark \\
x_2 - x_4 \leq 4 \implies 0-0 \leq 4 \checkmark \\
-x_2 + x_5 \leq -1 \implies 0+(-1) \leq -1 \checkmark
\end{gathered} \tag{4}$$

En otras palabras y segun Mr Cor👬 dado un sistema $Ax \leq b$ de difference constraints y su grafo correspondiente $G = (V, E)$. Si G no contiene ciclos negativos entonces $x = (\delta(v_0, v_1), \delta(v_0, v_2), \dots, \delta(v_0, v_n))$ es solución del sistema. Si G contiene un ciclo negativo, no existe solución.

¿Por que funciona?

No es necesario para el parcial saber porque funciona

Propiedad: Suma a solucion.

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ es solución factible para un sistema de ecuaciones $\implies x_1 + c, x_2 + c, \dots, x_n + c$ tambien es.

Complejidades Uno a Todos:

	Algoritmo	Complejidades
No pesados	DFS	$O(V+E)$
No negativos	Dijkstra	$O((E+V)*log(V))$ cola de prioridad / $O(n^2)$ vector
general	🔔man-Ford	$O(V*E)$
DAGs	Topo-sort + B-F	$O(V)$

Clase 9:

Programacion dinamica: Definir el valor de la solucion optima de forma recursiva

$l_{ij}^{(m)}$ es el peso <u>mínimo</u> de cualquier camino de i a j con como máximo m aristas. En el libro aparece con m en vez de p, pero prefiero p como en cuantos pasos llego.

$$\begin{cases} \text{si } p=0 \implies & l_{ij}^{(0)} = 0 \; si \; i=j \\ \text{si } p=0 \implies & l_{ij}^{(0)} = \infty \; si \; i \neq j \\ \text{si } p>0 \implies & min\left(l_{ij}^{(p-1)}, min_{1\le k\le n}(l_{ik}^{(p-1)} + w_{kj})\right) \end{cases} \tag{5}$$

w_{kj} devuelve el peso de la arista si existe, 0 si k = j y inf si no existe

Con esta funcion recursiva, podemos empezar a pensar en programacion dinamica pero con matrices.

Algoritmo de Floyd-Warshall (💸)

MUCHA PAJA VER LAS NOTAS DE JUAN

Algoritmo de Dantzig NO VISTO

No tan bueno

Algoritmo de Johnson NO VISTO

Idea: Repesar las aristas en O(V*E) usando 🔔man. Despues correr a 🍆strap desde todos los vertices.

Complejidades: Todos a todos

Algoritmo	Complejidad
Floyd-Warshall (	$O(V^3)$
Dantzig	$O(V^3)$ [1]
Johnson	$O(V^2 * \log(V) + V*E)$

---

1. supongo ↩