

Introducción al Proyecto de Ampliación Planta Ensambladora de Motocicletas

Curso de Cálculo Vectorial y Álgebra Lineal – 3^{er} Semestre

May 14, 2025

1 Introducción

El álgebra lineal es la arquitectura matemática sobre la que descansan las grandes innovaciones tecnológicas del siglo XXI y más allá. Sus conceptos fundamentales —espacios vectoriales, bases, dimensión y transformaciones lineales— permiten representar y manipular datos de forma óptima, tanto en los entornos de cálculo científico como en los sistemas de software distribuidos. La capacidad de describir fenómenos complejos mediante operaciones matriciales convierte a esta teoría en un lenguaje universal para ingenieros, científicos de datos y desarrolladores de alto rendimiento.

En visión por computador y gráficos 3D, las transformaciones afines y proyectivas se implementan en motores como OpenGL y DirectX, donde la multiplicación de matrices controla cada vértice y cada píxel en la pantalla. En aprendizaje automático, la descomposición en valores singulares (SVD) y el análisis de componentes principales (PCA) reducen miles de dimensiones a unas decenas de características reveladoras, acelerando desde la clasificación de imágenes hasta la predicción de series temporales en plataformas como TensorFlow o PyTorch. Las rutinas optimizadas de BLAS y LAPACK, presentes en bibliotecas como NumPy, SciPy y Eigen, aprovechan modernas arquitecturas CPU/GPU para resolver sistemas lineales con miles de millones de incógnitas en tiempo real.

Más allá de aplicaciones prácticas, el álgebra lineal exhibe una riqueza teórica fascinante: la teoría espectral de operadores, el comportamiento asintótico de valores propios en matrices aleatorias (teoría de matrices aleatorias) y las conexiones con la geometría diferencial en espacios de Hilbert. Los recientes avances en criptografía post-cuántica basados en retículos y en métodos de compresión de señal (compressed sensing) muestran que, incluso en la frontera de la investigación, las ideas de vectores propios y proyecciones ortogonales siguen siendo esenciales.

Para profundizar en estos temas, se recomienda explorar recursos como el curso de Álgebra Lineal del MIT OpenCourseWare (18.06), la serie “La Esencia del Álgebra Lineal” de 3Blue1Brown (3Blue1Brown) y la documentación de SciPy y NumPy. Con esta base, el lector podrá comprender y aplicar con rigor las metodologías de este trabajo, que integran teoría y práctica para el análisis de sistemas dinámicos y la resolución eficiente de problemas en ciencia de datos.

En el marco de la *Industria 4.0*, una planta ensambladora de motocicletas genera flujos constantes de datos: registros de ventas diarios, lecturas de sensores IoT que miden el ritmo de ensamblaje en cada estación y señales de los sistemas de planificación de recursos (ERP) sobre disponibilidad de proveedores. Para fusionar estas fuentes heterogéneas se construye, en cada instante de decisión, una *matriz de diseño* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ cuyas columnas codifican predictores como tendencia estacional, promociones, plazos de entrega y capacidad horaria de las células robotizadas; el vector $b \in \mathbb{R}^m$ recoge la demanda observada y los objetivos de nivel de servicio. El problema de *mínimos cuadrados*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

—resuelto mediante la pseudoinversa A^+ , factorizaciones QR bloqueadas o algoritmos *Recursive Least Squares* (RLS) que se actualizan muestra a muestra— convierte ese océano de datos ruidosos en un pronóstico refinado para las próximas horas y días. La matriz x resultante traduce, por ejemplo, el número óptimo de chasis, motores y sistemas electrónicos que deben liberarse del almacén hacia la línea o solicitarse al proveedor justo a tiempo, minimizando simultáneamente costes de almacenamiento y riesgos de desabastecimiento.

Para robustecer la estimación frente a picos de demanda y outliers, se incorporan términos de regularización $\lambda \|x\|_2^2$ (ridge) o restricciones elásticas que penalizan variaciones bruscas entre iteraciones sucesivas. Estas extensiones se implementan eficientemente sobre bibliotecas aceleradas por GPU —cuBLAS o rocBLAS— capaces de procesar millones de ecuaciones por segundo, habilitando esquemas de control predictivo en tiempo real. La solución de mínimos cuadrados se retroalimenta de inmediato al *gemelo digital* de la planta: un modelo simulable que replica cada cinta transportadora, brazo robótico y punto de inspección. Allí, el análisis de la sensibilidad de x a perturbaciones en A y b —obtenido vía *Jacobian sketching* o métodos basados en valores singulares— identifica rutas críticas y ofrece escenarios *what-if* para contingencias (fallo de un proveedor, aumento súbito de demanda, avería de una célula).

El impacto tangible es doble. Primero, la cadena de suministro gana agilidad: los intervalos de confianza reducidos por la regularización disminuyen el capital inmovilizado en inventarios, mientras que la rapidez de los algoritmos RLS evita paradas por falta de componentes. Segundo, la calidad y el mantenimiento se benefician de la misma base algebraica: las desviaciones residuales $\|Ax - b\|_2$ actúan como indicadores precoces de anomalías en la línea, disparando alarmas antes de que las tolerancias de ensamblaje se vean comprometidas. Así, la técnica clásica de mínimos cuadrados, reforzada con herramientas de cómputo moderno, se convierte en la brújula matemática que alinea la planta con la demanda real del mercado, garantizando eficiencia operativa y ventaja competitiva en un sector donde cada segundo y cada tornillo cuentan.

Radiografía de una planta típica

Todas dependen de cadenas de suministro asiáticas (80 % de subconjuntos electrónicos) y de niveles crecientes de robotización.

Tipo de planta	Capacidad	Ejemplo
Megafábrica automatizada	150–300 k u/a	MotoDrive, México
Planta mediana flexible	30–70 k u/a	Royal Enfield, Tailandia
Micro-planta urbana e-scooters	< 10 k u/a	Start-ups locales

Reto: Pronóstico de demanda y planificación de inventario mediante mínimos cuadrados

Trasfondo industrial MotoTec es un fabricante global con sede en Latinoamérica que ensambla cuatro familias de motocicletas—urbanas, turismo, off-road y eléctricas—para un mercado que hoy se mueve entre la movilidad sostenible y la presión por tiempos de entrega cada vez más breves.¹

- **Cadena de suministro.** El 70 % de los componentes proviene de Asia; el resto lo producen pymes locales bajo acuerdos *just-in-time*. Interrupciones recientes (pandemia, logística marítima, escasez de chips) han expuesto la fragilidad de este modelo.
- **Ecosistema digital.** La planta opera con un ERP que consolida inventarios, órdenes de compra y datos de producción, y con un MES capaz de generar 500 000 registros al día (sensores IoT, OEE, paradas no planificadas). MotoTec desea evolucionar hacia un *gemelo digital* que anticipe cuellos de botella y optimice el flujo de piezas en tiempo real.
- **Meta estratégica 2024-2025.** Reducir en 25 % el capital inmovilizado en inventarios sin sacrificar un solo porcentaje de disponibilidad en línea de ensamblaje. Para lograrlo, la gerencia implantará modelos de pronóstico que conviertan datos históricos en órdenes de compra precisas.

Datos disponibles Tienes acceso a:

- a) **Histórico anual de ventas** 2013–2022 para los cuatro modelos (Tabla ??).
- b) **Matriz de componentes** 10×4 que indica cuántas piezas de cada tipo requiere cada modelo.
- c) **Capacidad instalada** (horas-máquina) y **tiempo estándar de ensamblaje** por modelo, útiles para extender tu análisis en trabajos futuros.

Objetivo del reto (nivel primer semestre) Construir un *prototipo analítico mínimo* que, usando exclusivamente **mínimos cuadrados**, convierta el historial de ventas en un pronóstico para 2024 y 2025 y, a partir de él, determine las cantidades de cada componente que MotoTec debería ordenar hoy.

¹Los datos de ventas proporcionados son sintéticos y se emplean exclusivamente con fines académicos.

Table 1: Matriz de ventas históricas por tipo de moto (2013–2022)

Año	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
2013	172	89	18	28
2014	185	116	49	33
2015	202	155	98	49
2016	225	188	96	44
2017	252	200	148	59
2018	286	199	173	72
2019	316	240	204	70
2020	342	245	235	96
2021	371	280	266	140
2022	402	302	297	250

Table 2: Matriz de componentes (unidades por moto) para cada tipo

Componente	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
componente 1	1	1	1	0
componente 2	2	0	1	1
componente 3	0	0	0	1
componente 4	0	0	0	1
componente 5	0	0	1	0
componente 6	3	2	0	0
componente 7	1	4	0	0
componente 8	5	2	0	1
componente 9	1	1	2	0
componente 10	1	1	0	0

Pistas de apoyo

- Explora la función `LINEST` de Excel, `numpy.linalg.lstsq` de Python o `pinv` de MATLAB.
- Revisa los capítulos 4b–6b de La Esencia del Álgebra Lineal para visualizar proyecciones y pseudoinversas.
- Consulta los notebooks interactivos en JupyterLab Try para experimentar con código sin instalar nada en tu equipo.

Entregables

- **Informe técnico** (máx. 7 páginas, formato IEEE/CyT) que incluya:
 - Resumen ejecutivo del reto de pronóstico de demanda.

- Marco teórico de álgebra lineal: espacios vectoriales, transformaciones lineales, método de mínimos cuadrados y descomposición en valores singulares (SVD).
 - Metodología: formulación de la matriz de diseño, derivación de la solución de mínimos cuadrados, cálculo del error cuadrático medio (ECM).
 - Resultados: tablas y gráficos comparativos de ajuste y error, interpretación de parámetros.
 - Conclusiones y recomendaciones de optimización de inventarios.
 - Anexo de código (MATLAB y Python) con scripts comentados para replicar cálculos y visualizaciones.
- **Video explicativo** (11–12 min, MP4 1080p, 30 fps) que incluya:
 - Guion detallado, dividido en introducción, desarrollo y cierre.
 - Demostración práctica de la implementación en MATLAB y Python.
 - Visualización de resultados: gráficos de ventas, ajuste de mínimos cuadrados y análisis de error.

Glosario de símbolos y unidades

Símbolo	Significado / contexto	Unidades ()
1. Operadores y vectores básicos		
$\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times$	Gradiente, divergencia y rotacional (Gauss-Green-Stokes)	–
$d\mathbf{r}, dS, dA, dV$	Elementos de contorno, superficie, área y volumen	, \square ,
$\hat{n}, \hat{\theta}, \hat{r}$	Unitarios normal, tangencial y radial	–
$\mathbf{0}, \mathbf{I}$	Vector nulo, matriz identidad	–
2. Constantes físicas universales		
π, e	Constantes matemáticas ($\approx 3.14, 2.72$)	–
μ_0	Permeabilidad magnética del vacío	
ε_0	Permitividad eléctrica del vacío	
g	Gravedad terrestre (9.81)	
3. Dimensiones geométricas		
B, H	Anchura y altura de fachada / placa	
L, L_x, L_y	Longitud de nave, arista de cubo, lados del almacén	
R, ρ	Radio de circunferencia / coordenada radial	
a, b	Semiejes de elipse, dimensiones de chip	
d	Distancia entre placas de capacitor	
t	Espesor de placa o losa	
$S, \mathcal{A}, \mathcal{V}$	Superficie, área plana, volumen de integración	–
$C, \partial A$	Contorno cerrado / borde del dominio	–
4. Campos y parámetros materiales		
\mathbf{E}, \mathbf{B}	Campos eléctrico y magnético	,
\mathbf{J}, J_0	Densidad de corriente (conducción) y su valor uniforme	\square
$\mathbf{v}, (v_x, v_y)$	Campo de velocidad (AGV / tráfico de datos)	,
\mathbf{F}	Fuerza superficial debida a presión	\square
p, p_{ref}	Presión de viento / referencia	
V, V_0	Velocidad del viento / voltaje pico (capacitor)	,

Símbolo	Significado / contexto	Unidades ()
E	Módulo de Young (placa de hormigón)	
α	Coefficiente de dilatación lineal	
$\Delta T, T$	Variación / temperatura absoluta	
B_0	Amplitud de campo magnético sinusoidal	
ω	Pulsación angular ($2\pi f$)	
τ	Constante de decaimiento temporal	
k	Parámetro de giro de AGV	
k_s	Módulo de balasto vertical	
C_T	Coefficiente torsor aerodinámico	–
$\sigma, \sigma_{\text{adm}}$	Tensión real / admisible	
ε_r, μ_r	Permitividad / permeabilidad relativas	–
5. Corrientes, cargas y tasas		
I, I_D	Corriente de línea / corriente de desplazamiento (Maxwell)	
$\lambda(t), \lambda_0$	Tasa de llegada de datos / valor inicial	
$\rho(x, y, t)$	Densidad de carga en semiconductor	
Q	Carga total o puntual	
6. Resultantes e integrales		
F, M	Fuerza total / momento por presión	,
T_t, M_t	Fuerza / momento térmico	,
T	Momento torsor (vórtices)	
Φ_E, Φ_B	Flujo eléctrico / magnético	,
D	Volumen de datos acumulado	
E_{rms}	Valor eficaz de FEM	
q, q_{max}	Presión de contacto / máxima	
s	Asentamiento vertical	
7. Factores y coeficientes de diseño		
FS	Factor de seguridad en cimentaciones	–
CRF	Factor de compresión en <code>ffmpeg</code>	–
8. Símbolos y funciones varias		
$\delta(r)$	Delta de Dirac (modelo de hilo conductor)	
$\%$,	Porcentaje, decibel (definidos por <code>siunitx</code>)	,

Apéndice A. Derivaciones paso a paso (x, y, z)

Marco teórico

Marco Teórico: Matrices como Operadores Lineales

A. Definición y representación

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ debe concebirse ante todo como la regla de transformación lineal

$$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax.$$

Bajo la base canónica, cada columna $a^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ representa la imagen de ese eje unitario $(0, \dots, 1, \dots, 0)$. La escritura

$$A = [a^{(1)} \mid a^{(2)} \mid \dots \mid a^{(n)}]$$

muestra que toda transformación lineal se reduce a combinaciones de esas flechas fundamentales. Pensar en A como un simple arreglo de números es quedarse en la superficie: es una

máquina que desplaza, estira o aplasta cada vector de entrada hacia un vector de salida en un espacio de diferente dimensión.

Ejemplo

La figura 1 muestra lado a lado cómo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

modifica todo el plano \mathbb{R}^2 y cómo transforma concretamente los vectores de la base canónica \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y la combinación $v = (1, 2)$.

- **Panel izquierdo: Espacio original**

- *Rejilla canónica*: cuadrados de lado 1 que marcan las posiciones (k, ℓ) con $k, \ell \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
- $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ aparecen como flechas discontinuas negras sobre la rejilla.
- $v = (1, 2)$ es el vector púrpura sólido que nace en el origen y alcanza el punto $(1, 2)$ —exactamente un paso a la derecha y dos hacia arriba— ilustrando su descomposición $1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

- **Panel derecho: Espacio deformado**

- Cada línea de la rejilla original se envía mediante A a otra línea inclinada. El resultado es un entramado de paralelogramos que revela cómo A “estira” unas direcciones y “aplata” otras.
- Las imágenes de la base:

$$A\mathbf{e}_1 = (2, 1), \quad A\mathbf{e}_2 = (1, 3)$$

se dibujan como flechas negras sólidas. Estas dos flechas definen el nuevo sistema de “ejes” (el subespacio imagen).

- La imagen de v ,

$$Av = A(1, 2) = (4, 7),$$

aparece como flecha púrpura sólida. Se ve dentro del paralelogramo generado por $A\mathbf{e}_1$ y $A\mathbf{e}_2$, confirmando que

$$Av = 1 \cdot A\mathbf{e}_1 + 2 \cdot A\mathbf{e}_2.$$

Intuitivamente, la matriz A actúa como una “máquina geométrica”:

1. Toma los puntos del lienzo original (panel izquierdo).
2. Aplica un sesgado y estiramiento según sus columnas $(2, 1)$ y $(1, 3)$.

3. Devuelve un nuevo lienzo inclinado (panel derecho), donde cada vector corresponde a la combinación de esas dos direcciones fundamentales.

Así, la figura deja claro que *cada* punto (x, y) sufre exactamente la misma regla lineal:

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x + 3y),$$

y que la descomposición en la base canónica se traduce en la misma combinación en la base de llegada.

Comparación: Espacio original vs Espacio deformado bajo A con $v=(1,2)$

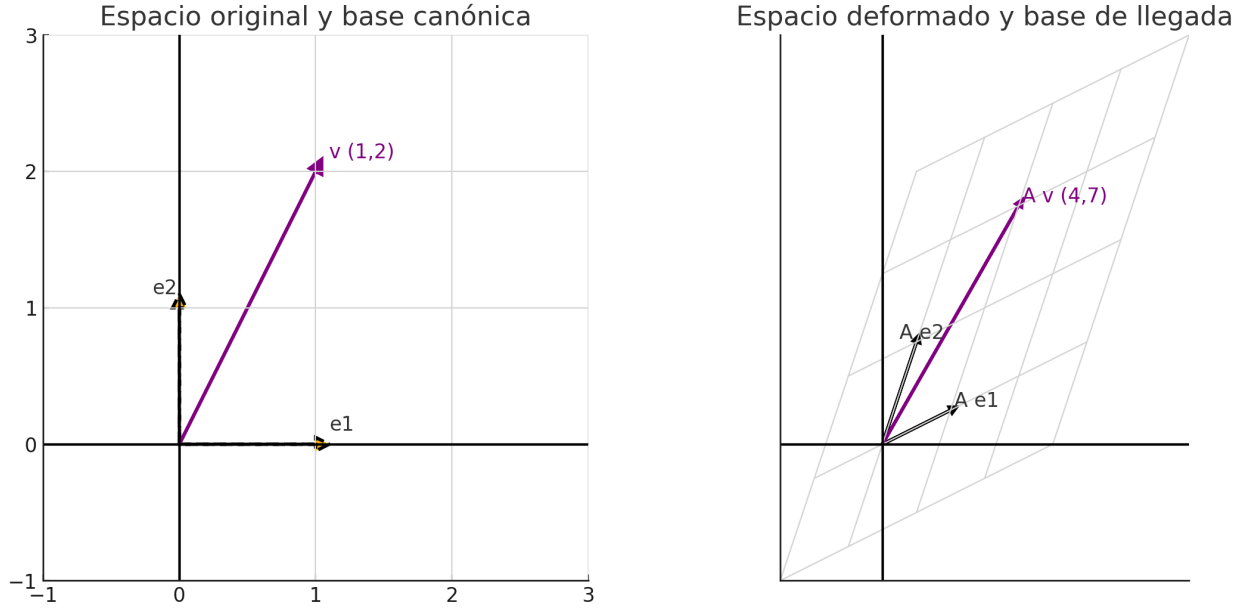


Figure 1: Visualización de la transformación lineal: cada vector de la base canónica de \mathbb{R}^2 (e_1 y e_2 , flechas en negro) se transforma dada a una nueva base o matriz de transformación en las bases Ae_1 y Ae_2 , al igual que todo vector v de su subespacio

La Figura 2 ilustra cómo las columnas de A actúan como vectores generadores del subespacio imagen, mostrando en colores la correspondencia de cada eje canónico con su imagen.

B. Columnas como generadoras de subespacios

Cuando aplicas A a un vector arbitrario $x = (x_1, \dots, x_n)$, el producto

$$Ax = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)}$$

revela que la imagen de cualquier punto recae en el subespacio generado por las columnas:

$$(A) = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

El número de columnas linealmente independientes —el rango (A) — determina la dimensión de este subespacio.

C. Visualización a través de la rejilla

Imagina una rejilla uniforme trazada en \mathbb{R}^2 . Al aplicar A , cada punto (i, j) de la cuadrícula se mueve a

$$A \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = i a^{(1)} + j a^{(2)},$$

convirtiendo cuadrados en paralelogramos.

La Figura 1 muestra cómo A estira o aplasta la rejilla original, haciendo evidente qué direcciones se amplifican o colapsan.

Descomposición paso a paso de la transformación $v \mapsto Av$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En la figura ?? vemos (a) el espacio original con \mathbf{e}_i y v , y (b) el espacio deformado con $A\mathbf{e}_i$ y Av . A continuación, el detalle:

1. Base canónica y sus imágenes.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sus imágenes por A son las columnas de A :

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En la figura (b) están dibujadas como flechas negras sólidas.

2. Cálculo de Av . Por definición de multiplicación matriz-vector,

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Esa flecha púrpura aparece en la figura (b) como $Av = (4, 8, 4)$.

3. Descomposición en la base transformada. Dado que $v = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$, por linealidad

$$Av = A(1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3) = 1(A\mathbf{e}_1) + 2(A\mathbf{e}_2) + 1(A\mathbf{e}_3).$$

Esto equivale a

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que geometriza la combinación de los ejes nuevos para reconstruir Av .

4. Interpretación geométrica.

- En el panel (a), v se dibuja en púrpura partiendo del origen y alcanzando $(1, 2, 1)$ sobre la rejilla original.
- En el panel (b), cada una de esas tres direcciones canónicas ha sido estirada o girada según la respectiva columna de A .
- El vector Av recorre en púrpura la combinación de las tres flechas negras sólidas, confirmando que la misma suma de coeficientes $(1,2,1)$ sirve para ambas bases.

Comparación en \mathbb{R}^3 : Original vs Deformado bajo A

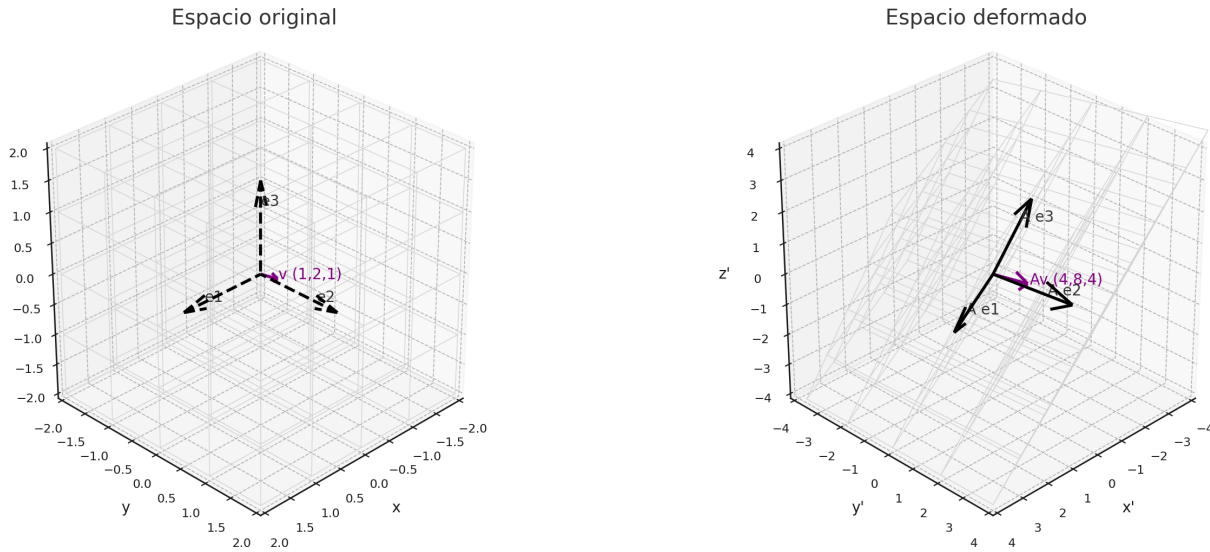


Figure 2: Visualización de la transformación lineal: cada vector de la base canónica de \mathbb{R}^3 (e_1 , e_2 , e_3 flechas en negro) se transforma dada a una nueva base o matriz de transformación en las bases Ae_1 y Ae_2 , Ae_3 al igual que todo vector v de su subespacio

Matriz inversa y transformación inversa

Definición y existencia

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Decimos que A es *invertible* si existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Equivalentemente,

$$A \text{ invertible} \iff \det(A) \neq 0 \iff (A) = n.$$

En tal caso, la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $T(x) = Ax$ admite la *transformación inversa*

$$T^{-1}(y) = A^{-1}y, \quad \text{pues } y = Ax \implies x = A^{-1}y.$$

Propiedades algebraicas

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$ (para matrices complejas).
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, en particular $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$.
- A^{-1} conmuta con funciones polinómicas de A : si $p(\lambda)$ es un polinomio, entonces $p(A)A^{-1} = A^{-1}p(A)$.

Cálculo de la inversa

1. Método de adjunta y cofactores

Para $A = (a_{ij})$, la matriz adjunta $\text{adj}(A)$ se forma con cofactores C_{ji} . Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A), \quad (\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}),$$

donde A_{ji} es la submatriz que elimina fila j y columna i .

2. Eliminación de Gauss–Jordan

Adjuntar a A la matriz identidad I_n y aplicar operaciones elementales

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{GE}} [I_n \mid A^{-1}].$$

Este procedimiento es $\mathcal{O}(n^3)$ en coste computacional.

3. Descomposición LU

Si $A = LU$ con L triangular inferior y U triangular superior (sin pivotes ceros), entonces

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1},$$

y L^{-1}, U^{-1} se obtienen resolviendo sistemas triangulares.

Ejemplo numérico en 3×3

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 2(3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 0 = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 8 \neq 0,$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} (3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) & -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) & (1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) \\ -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) & (2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) & -(2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \\ (1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) & -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) & (2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Interpretación geométrica

- A transforma la base canónica $\{\mathbf{e}_i\}$ en un nuevo conjunto de vectores $\{A\mathbf{e}_i\}$, que genera el subespacio imagen.
- A^{-1} deshace esa deformación: proyecta cada vector del espacio deformado de vuelta al lienzo original, recuperando coordenadas en la base canónica.
- En la figura ??, si $y = Av$ se localiza en el panel deformado, aplicar A^{-1} lleva y al punto v en el panel original.

Condición y sensibilidad

El *número de condición* $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ mide la *sensibilidad* de la solución de $Ax = b$ ante perturbaciones en A o b . Valores grandes de $\kappa(A)$ indican problemas numéricos al calcular A^{-1} .

Capítulo: La pseudoinversa de Moore–Penrose

Este capítulo explica de manera intuitiva qué es la *pseudoinversa*, para qué sirve y cómo entenderla geoméricamente, incluso cuando la matriz no sea cuadrada o no tenga inversa ordinaria.

1. ¿Por qué necesitamos una “inversa” generalizada?

En cursos iniciales aprendemos que una matriz cuadrada A invertible satisface

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Pero, ¿qué pasa si:

- A no es cuadrada (por ejemplo, tiene más filas que columnas)?
- A es cuadrada pero $\det(A) = 0$, es decir, “aplata” parte del espacio y no podemos deshacer completamente la transformación?

En esos casos no existe A^{-1} . Sin embargo, en problemas de *mínimos cuadrados* o de sistemas sobredeterminados/subdeterminados, queremos una solución que “se parezca” a una inversa. Ahí entra la **pseudoinversa**.

2. Definición simplificada

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La *pseudoinversa de Moore–Penrose*, denotada A^+ , es la matriz (de tamaño $n \times m$) que cumple cuatro propiedades clave:

1. $A A^+ A = A$,
2. $A^+ A A^+ = A^+$,
3. $(A A^+)^T = A A^+$,
4. $(A^+ A)^T = A^+ A$.

Estas condiciones garantizan que A^+ se comporte como inversa “en lo posible”, respetando la estructura de subespacios.

3. Conexión con mínimos cuadrados

Si queremos resolver el sistema $Ax = b$ y no existe solución exacta (por ejemplo, más ecuaciones que incógnitas), buscamos

$$\min_x \|Ax - b\|_2.$$

La respuesta óptima viene dada por

$$x = A^+ b.$$

De este modo A^+ produce la solución de *mínima norma* que mejor ajusta.

4. Cálculo práctico (SVD)

Una forma muy intuitiva de entender A^+ es usando la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U \Sigma V^T,$$

donde

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son ortogonales,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es diagonal (con valores $\sigma_i \geq 0$ ordenados).

Entonces definimos Σ^+ invirtiendo cada $\sigma_i \neq 0$ y dejando ceros donde $\sigma_i = 0$. La pseudoinversa es

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T.$$

5. Interpretación geométrica

- (A) : subespacio de m generado por las columnas de A .
- (A) : subespacio de n generado por las filas de A .

Para cualquier b , A^+b primero proyecta b ortogonalmente sobre (A) (usando U y Σ), luego aplica la “inversa” en ese subespacio (invierte los σ_i), y finalmente vuelve a la coordenada original. Así obtenemos el punto de (A) que minimiza el error.

6. Ejemplo sencillo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. No podemos resolver $Ax = b$ exactamente (3 ecuaciones, 2 incógnitas).
2. La pseudoinversa (vía SVD) resulta

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

3. La solución de mínimos cuadrados es

$$x = A^+ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geoméricamente, $(1, 1)$ es el punto de $(A) \subset^2$ que lleva a la proyección de b sobre $(A) \subset^3$.

section*Ejemplo detallado: Cálculo de la pseudoinversa mediante SVD

Partimos de la matriz rectangular y el vector

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in^{3 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in^3.$$

Nuestro objetivo es resolver $\min_x \|Ax - b\|$ obteniendo la pseudoinversa A^+ .

Paso 1: calcular $A^\top A$.

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Este es un operador simétrico en 2 ; sus valores propios y vectores propios nos darán Σ y V .

Paso 2: valores propios y singulares. Resolvemos $\det(A^\top A - \lambda I) = 0$:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Los *valores singulares* de A son

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad \sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1.$$

Estos forman la diagonal de $\Sigma \in^{3 \times 2}$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 3: vectores propios de $A^\top A$ para V . Para $\lambda_1 = 3$: $(2-3)x + y = -x + y = 0$ da $y = x$. Normalizando,

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 1$: $(2-1)x + y = x + y = 0$ da $y = -x$. Normalizando,

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Paso 4: columnas de U a partir de AV . La SVD exige $AV = U\Sigma$. Calculemos Av_i y dividamos por σ_i :

$$Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Completamos $U \in^{3 \times 3}$ con una tercera columna ortonormal a u_1, u_2 , por ejemplo $u_3 = (1, -1, 1)/\sqrt{3}$.

Paso 5: formar Σ^+ . Invertimos cada $\sigma_i \neq 0$,

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in^{2 \times 3}.$$

Paso 6: calcular $A^+ = V \Sigma^+ U^\top$. Sustituyendo,

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Paso 7: solución de mínimos cuadrados. Finalmente,

$$x = A^+ b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verificamos que $\|Ax - b\|$ es mínimo y que x tiene norma mínima entre las posibles soluciones de mínimos cuadrados.

Con este procedimiento hemos demostrado paso a paso cómo la SVD permite construir A^+ y resolver de forma óptima problemas de ajuste lineal.“

Cálculo de la pseudoinversa mediante ecuaciones normales

En el caso de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango completo por columnas ($\text{rank}(A) = n$), la pseudoinversa puede hallarse directamente usando las *ecuaciones normales*:

$$A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top.$$

Veremos paso a paso este procedimiento para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Formulación del problema de mínimos cuadrados.

Buscamos $x = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2^2$. Derivando y igualando a cero conduce a las *ecuaciones normales*:

$$A^\top A x = A^\top b.$$

2. Cálculo de $A^\top A$ y $A^\top b$.

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^\top b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Inversión de $A^\top A$.

Como $\det(A^\top A) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \neq 0$, invertimos:

$$(A^\top A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Fórmula de la pseudoinversa.

$$A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

5. Cálculo de la solución x .

Finalmente,

$$x = A^+ b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Interpretación.

- Las ecuaciones normales $A^\top A x = A^\top b$ equivalen a proyectar b sobre (A) .
- La fórmula $A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top$ produce la misma pseudoinversa que el método SVD, pero usando únicamente operaciones de producto y matriz inversa de $n \times n$.
- La solución $x = (1, 1)$ es la de *menor norma* que minimiza el error $\|Ax - b\|$.

Mínimos cuadrados

Los *mínimos cuadrados* constituyen la técnica estándar para aproximar la solución de un sistema lineal sobredeterminado o contaminado por ruido. A continuación presentamos un desarrollo exhaustivo, desde la idea básica hasta aspectos numéricos avanzados.

1. Motivación y contexto

En numerosas aplicaciones (ajuste de datos experimentales, regresión lineal, calibración de sensores) disponemos de un conjunto de observaciones

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$$

y postulamos un modelo lineal

$$y_i \approx \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_n x_{in}.$$

En notación matricial escribimos

$$A\beta \approx b, \quad A \in^{m \times n}, \quad b \in^m, \quad \beta \in^n,$$

donde m (observaciones) suele ser mayor que n (parámetros). Dado que en general no existe β que satisfaga exactamente $A\beta = b$, buscamos el que *mejor* lo aproxima.

2. Función de error y formulación del problema

Definimos el *error residual*

$$r(\beta) = A\beta - b \in \mathbb{R}^m,$$

y su *norma cuadrática*

$$\phi(\beta) = \|r(\beta)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (a_i^\top \beta - b_i)^2.$$

El problema de mínimos cuadrados es

$$\beta^* = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^n} \phi(\beta).$$

Intuitivamente, minimizamos la *suma de los cuadrados de las discrepancias* entre el modelo y los datos.

3. Geometría: proyección sobre el espacio de columnas

Sea $W = (A) \subset \mathbb{R}^m$ el subespacio generado por las columnas de A . Para $b \notin W$, podemos escribir

$$b = \hat{b} + e, \quad \hat{b} \in W, \quad e \in W^\perp.$$

La proyección ortogonal de b sobre W es $\hat{b} = Pb$, con P la matriz de proyección:

$$P = A(A^\top A)^{-1}A^\top, \quad P^2 = P, \quad \Im(P) = W, \quad \mathcal{K}(P) = W^\perp.$$

Entonces el residuo mínimo $\|b - A\beta\|$ se obtiene cuando $A\beta = \hat{b}$, es decir, β produce la proyección de b en W .

4. Derivación de las ecuaciones normales

Para hallar el mínimo derivamos ϕ :

$$\nabla_\beta \phi(\beta) = 2A^\top(A\beta - b) \stackrel{!}{=} 0 \implies A^\top A\beta = A^\top b.$$

Estas son las *ecuaciones normales*. Bajo la hipótesis de $(A) = n$, la matriz $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica definida positiva y, por tanto, invertible.

5. Solución explícita y pseudoinversa

Si $(A) = n$, la solución es única:

$$\beta^* = (A^\top A)^{-1}A^\top b.$$

En general, incluso si $(A) < n$, la *pseudoinversa* de Moore–Penrose

$$A^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (A^\top A + \epsilon I)^{-1}A^\top$$

garantiza la solución de *mínima norma*:

$$\beta^* = A^+b, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad AA^+A = A.$$

6. Propiedades fundamentales

- **Ortogonalidad del residuo:** $A^\top(b - A\beta^*) = 0$, i.e. $r \perp W$.
- **Idempotencia:** la proyección $P = A A^+$ satisface $P^2 = P$.
- **Unicidad:** si $(A) = n$, β^* es la única solución de $A^\top A \beta = A^\top b$.
- **Momento cuadrático medio:** el *error cuadrático medio* (ECM) $\text{ECM} = \frac{1}{m} \|A\beta^* - b\|_2^2$ mide la calidad del ajuste.

7. Aspectos numéricos y algoritmos

Resolver directamente $A^\top A \beta = A^\top b$ puede ser peligroso si $\kappa(A) = \|A\| \|A^+\|$ es grande, pues $\kappa(A^\top A) = \kappa(A)^2$. Para mayor estabilidad se recomienda:

- **Descomposición QR:** $A = Q R$, con $Q \in m \times n$ ortonormal y $R \in n \times n$ triangular invertible. Entonces $\beta^* = R^{-1} Q^\top b$.
- **SVD:** $A = U \Sigma V^\top$. La pseudoinversa es $A^+ = V \Sigma^+ U^\top$. Este método es robusto y revela directamente el rango numérico.
- **Regularización (ridge):** para mejorar la condición, se resuelve $\min \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2$, dando $\beta^* = (A^\top A + \lambda I)^{-1} A^\top b$.

8. Ejemplo numérico completo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular $A^\top A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$, $A^\top b = \begin{pmatrix} 13 \\ 36.5 \end{pmatrix}$.
2. Invertir $A^\top A$: $(A^\top A)^{-1} = \frac{1}{(4)(30)-(10)^2} \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & 0.1 \end{pmatrix}$.
3. Obtener β^* :

$$\beta^* = (A^\top A)^{-1} A^\top b = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 36.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

4. Interpretación: la recta ajustada es $\hat{y} = 0.5 + 1.1x$. El ECM resulta $\frac{1}{4} \|A\beta^* - b\|^2 \approx 0.0225$.

Ejemplo detallado de mínimos cuadrados: proyección de ventas y stock

Este ejemplo muestra, paso a paso y con detalle, cómo aplicar mínimos cuadrados para:

1. Ajustar una línea de tendencia a las ventas mensuales.
2. Predecir ventas futuras.
3. Modelar el stock en función de las ventas.
4. Predecir el stock futuro a partir de las ventas proyectadas.

1. Datos y contexto

Disponemos de las observaciones mensuales ($t = 1, \dots, 6$):

t	1	2	3	4	5	6
S_t (ventas)	100	120	130	150	165	180
L_t (stock)	120	130	140	160	175	185

- S_t son las ventas reales del mes t .
- L_t es el nivel de stock al cierre de mes t .

Nuestro objetivo inicial es hallar una función lineal

$$S_t \approx a + b t$$

que “mejor” ajuste los datos de ventas.

2. ¿Por qué definimos la matriz de diseño A así?

En regresión lineal, escribimos el modelo como

$$S = A\beta + \varepsilon,$$

donde:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_6 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \text{ es el vector de errores.}$$

Para incorporar el término independiente a (intercepto) y la pendiente b , construimos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- La primera columna de unos permite que $\beta_1 = a$ sea el valor de ventas cuando $t = 0$.
- La segunda columna lista los valores de t , de modo que $\beta_2 = b$ multiplica t .

3. Formulación de las ecuaciones normales

Buscamos $\beta^* = \arg \min_{\beta} \|A\beta - S\|_2^2$. La condición de óptimo se obtiene derivando:

$$\nabla_{\beta} \|A\beta - S\|^2 = 2A^{\top}(A\beta - S) = 0 \implies A^{\top}A\beta = A^{\top}S.$$

Calculemos cada término:

$$A^{\top}A = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^6 1 & \sum_{t=1}^6 t \\ \sum_{t=1}^6 t & \sum_{t=1}^6 t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{pmatrix}, \quad A^{\top}S = \begin{pmatrix} \sum S_t \\ \sum t S_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 845 \\ 3235 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 845 \\ 3235 \end{pmatrix}.$$

4. Resolución paso a paso

4.1 Aislamos b .

$$\begin{cases} 6a + 21b = 845, \\ 21a + 91b = 3235. \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 21 y la segunda por 6:

$$\begin{cases} 126a + 441b = 17745, \\ 126a + 546b = 19410. \end{cases}$$

Restamos la primera de la segunda para eliminar a :

$$(126a + 546b) - (126a + 441b) = 19410 - 17745 \implies 105b = 1665 \implies b = \frac{1665}{105} \approx 15.857.$$

4.2 Cálculo de a . Sustituimos b en $6a + 21b = 845$:

$$6a = 845 - 21 \cdot 15.857 = 845 - 333.0 = 512.0 \implies a = \frac{512.0}{6} \approx 85.333.$$

5. Interpretación del modelo de ventas

El modelo final es

$$\hat{S}(t) = 85.333 + 15.857t.$$

- $\hat{S}(0) = 85.333$ sería la venta “base” si $t = 0$.
- Cada mes adicional suma ≈ 15.857 unidades de venta.

6. Proyección de ventas futuras

Sustituimos $t = 7, 8, 9$:

$$\hat{S}(7) = 85.333 + 15.857 \cdot 7 \approx 196.33,$$

$$\hat{S}(8) = 85.333 + 15.857 \cdot 8 \approx 212.19,$$

$$\hat{S}(9) = 85.333 + 15.857 \cdot 9 \approx 228.05.$$

7. Ajuste de stock en función de ventas

Queremos un modelo

$$L_t \approx c + d S_t.$$

Construimos la matriz

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 130 \\ 1 & 150 \\ 1 & 165 \\ 1 & 180 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 120 \\ 130 \\ 140 \\ 160 \\ 175 \\ 185 \end{pmatrix}.$$

(La columna de 1 introduce el término independiente c .)

8. Ecuaciones normales para stock

$$A_L^\top A_L \gamma = A_L^\top L.$$

Calculemos sumas:

$$\sum S_t = 845, \quad \sum S_t^2 = 123425,$$

$$\sum L_t = 910, \quad \sum S_t L_t = 131975.$$

Por tanto,

$$A_L^\top A_L = \begin{pmatrix} 6 & 845 \\ 845 & 123425 \end{pmatrix}, \quad A_L^\top L = \begin{pmatrix} 910 \\ 131975 \end{pmatrix},$$

y el sistema

$$\begin{cases} 6c + 845d = 910, \\ 845c + 123425d = 131975. \end{cases}$$

9. Resolución paso a paso

9.1 Aislamos c de la primera:

$$c = \frac{910 - 845d}{6}.$$

9.2 Sustitución en la segunda:

$$845\left(\frac{910-845d}{6}\right) + 123425 d = 131975.$$

Multiplicamos por 6:

$$845 \cdot 910 - 845^2 d + 740550 d = 6 \cdot 131975 \implies (740550 - 714025) d = 791850 - 768950 \implies 26525 d = 22900 =$$

9.3 Cálculo de c :

$$c = \frac{910 - 845 \cdot 0.863}{6} \approx 30.127.$$

10. Interpretación del modelo de stock

$$\hat{L}(S) = 30.127 + 0.863 S.$$

- El *stock base* es ≈ 30.1 cuando las ventas son nulas.
- Por cada unidad adicional de venta, el stock aumenta en ≈ 0.863 .

11. Proyección de stock futuro

Usando $\hat{S}(7) = 196.33$, etc.:

$$\hat{L}_7 = 30.127 + 0.863 \cdot 196.33 \approx 199.6,$$

$$\hat{L}_8 = 30.127 + 0.863 \cdot 212.19 \approx 213.5,$$

$$\hat{L}_9 = 30.127 + 0.863 \cdot 228.05 \approx 226.6.$$

12. Conclusiones

- La construcción de A con una columna de unos y otra con la variable independiente permite estimar simultáneamente intercepto y pendiente.
- Las ecuaciones normales derivan de minimizar la suma de cuadrados del error y se resuelven mediante álgebra elemental.
- El mismo procedimiento se aplica en serie: primero modelamos ventas en función del tiempo, luego stock en función de las ventas.
- La cadena de modelos permite planificar tanto las ventas como el stock con fundamentos matemáticos sólidos.

10. Conclusión

El método de mínimos cuadrados ofrece un marco unificado para aproximar sistemas lineales inconsistentes mediante proyecciones ortogonales, garantiza soluciones óptimas en norma 2, y admite algorítmica estable (QR, SVD) y extensiones (regularización, pesos, no linealidad) que cubren la gran mayoría de aplicaciones prácticas.