La difracción de distintas rendijas como transformada de Fourier de sus respectivas funciones pupila

Alfredo Ricci
Juan Andrés Urrea

August 27, 2015

1 La Transformada de Fourier

Cuando se trabaja con una función, aplicada sobre el dominio temporal, $f(t)$, se le puede aplicar un operador conocido como la **Transformada de Fourier**, que vendrá definido de distintas maneras dependiendo de la naturaleza de $f(t)$. Existen entonces cuatro casos de $f(t)$ donde se definen las correspondientes transformadas de Fourier de dicha función $f(t)$, ahora llamada $F(\omega)$, cuyo nuevo dominio será la frecuencia. A pesar de sus distintas definiciones, este operador sirve el propósito de enunciar el espectro de frecuencias que compone a $f(t)$. Es decir, genera como resultado una combinación lineal de las diferentes frecuencias incluidas en $f(t)$ para así determinar cuales componen a $f(t)$ y la proporción en la que lo hacen. A continuación se enuncia la definición de dicho operador para dos casos de $f(t)$[2]:

(a) $f(t)$: Función discreta de longitud finita N.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\dfrac{-2\pi ikn}{N}}$$
$$k = 0, 1, ..., N-1$$

Donde x_n denota el elemento enésimo de la función o arreglo original de longitud N, X_k denota el k-ésimo elemento del arreglo resultante después de realizar la transformada, siendo también de longitud N.

(b) $f(t)$: Fnunción continua de longitud finita.

$$F(\omega) = \int_a^b f(t) e^{-2\pi i\omega t} dt$$

Dada que la función $f(t)$ solo existe en un intervalo dado, los límites vendrán dados por los límites inferior y superior de dicho intervalo.

Estas transfromaciones generan funciones o arreglos en el dominio de la frecuencia que permiten determinar las frecuencias que componen $f(t)$.

2 La Transformada de Fourier como Diracción de Una Rejilla Determinada

La propuesta de experimento planteada tiene como propósito mostrar la correspondencia entre la tranformada de Fourier de una señal *pupila* y el patrón de difracción que se presenta en el campo lejano debido a dicha señal. La mayor parte de la explicación física y matemática se encuentra en [1], sin embargo a continuación se presenta la deducción que permite ver la validez de la correspondencia dicha anteriormente, procedimiento extraído de [1]. Para comenzar, se parte de la integral de difracción de Fresnel-Kirchoff [1]:

$$U(P) = -\frac{Ai}{\lambda}\frac{\cos\delta}{r\prime s\prime}\int\int_C \frac{e^{ik(r+s)}}{rs}[cos(n,r) - cos(n,s)]dS$$

Esta integral define la perturbación total en el punto P según la siguiente geometría:

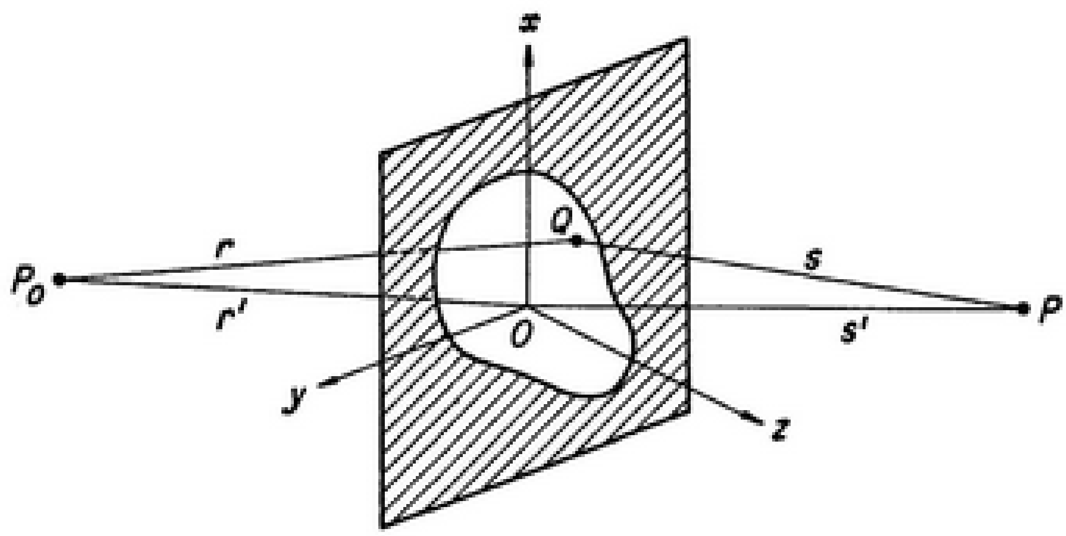

Figure 1: Geometría de los puntos analizados y la apertura.[1]

Donde:

- δ es el ángulo entre la recta normal a la pantalla y la recta PP_0.
- n es el vector unitario hacia adentro de la curva cerrada que define la apertura.
- A es una constante.

Ahora, dado que se analizará la difracción en campos lejanos, se puede asumir $s = s'$ y $r = r'$ como separación de los puntos a la rendija, de igual forma que se puede asumir que el término $[cos(n, r) - cos(n, s)]$ de la integral no varía mucho. Por esto, este término de aproxima a $2Cos(\delta)$. Gracias a esto, se puede simplificar la integral anterior a:

$$U(P) = -\frac{Ai}{\lambda}\frac{cos(\delta)}{r's'}\int\int_C e^{ik(r+s)}dS \tag{1}$$

Ahora, dado que se estudia cada punto Q dentro de la rendija, es posible expresar su posición bajo las ccordenadas ζ y η como equivalentes cartesianas de x y y, permaneciendo siempre sobre el plano XY. [1] ofrece las siguientes igualdades:

$$r^2 = (x_0 - \zeta)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2 \tag{2}$$
$$s^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + z_0^2 \tag{3}$$
$$r'^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \tag{4}$$
$$s'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{5}$$

Siendo (x, y, z) las coordenadas cartesianas que describen la al punto P y (x_0, y_0, z_0) las coordenadas que describen al punto P_0. Se presenta también la manera más conveniente de relacionar las variables r y s primadas y no primadas, mostrada a continuación, para luego aprovechar el hecho de que se están analizando campos lejanos, donde r' y s' tienden a ∞.

$$r^2 = r'^2 - 2(x_0\zeta + y_0\eta) + \zeta^2 + \eta^2 \tag{6}$$
$$s^2 = s'^2 - 2(x\zeta + y\eta) + \zeta^2 + \eta^2 \tag{7}$$

Estas expresiones sirven ahora para realizar una expansión lineal de r y s, de la forma siguiente:

$$r \to r' - \frac{x_0\zeta_0 + y_0\eta}{r'} + \frac{\zeta^2 + \eta^2}{2r'} + ... \tag{8}$$

$$s \to s' - \frac{x\zeta + y\eta}{s'} + \frac{\zeta^2 + \eta^2}{2s'} + ... \tag{9}$$

Interpretando las expresiones (8) y (9) como:

$$r \to r' + f(\zeta, \eta) \tag{10}$$
$$s \to s' + f(\zeta, \eta) \tag{11}$$

Las expresiones (10) y (11) se pueden reemplazar en la expresión (1) para obtener:

$$U(P) = -\frac{iAcos(\delta)}{\lambda}\frac{e^{ik(r\prime+s\prime)}}{r\prime s\prime}\int\int_C e^{ikf(\zeta,\eta)}d\zeta d\eta \tag{12}$$

Para continuar, [1] analiza la propia función $f(\zeta,\eta)$, expresada como:

$$f(\zeta,\eta) = \frac{x_0\zeta_0 + y_0\eta}{r\prime} + \frac{\zeta^2+\eta^2}{2r\prime} + ... \tag{13}$$

La cual se puede simplificar al nombrar la siguientes coordenadas direccionales:

$$l_0 = -\frac{x_0}{r\prime} \tag{14}$$

$$l = \frac{x}{s\prime} \tag{15}$$

$$m_0 = -\frac{y_0}{r\prime} \tag{16}$$

$$m = \frac{y}{s\prime} \tag{17}$$

(14),(15),(16) y (17) se reemplazan en (13) para obtener:

$$f(\zeta,\eta) = (l_0 - l)\zeta + (m_0 - m)\eta + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r\prime}+\frac{1}{s\prime}\right)(\zeta^2+\eta^2)\right\} + ... \tag{18}$$

Para el caso específico de la difracción de **Fraunhofer**, los términos que involucran los términos cuadráticos se ignoran, lo que da lugar a reescribir (18) como:

$$f(\zeta,\eta) = (l_0 - l)\zeta + (m_0 - m)\eta \tag{19}$$

Reemplazando (19) en (12) y estableciendo $p = l - l_0$ y $q = m -,_0$, se obtiene:

$$U(P) = D\int\int_C e^{-ik(p\zeta+q\eta)}d\zeta d\eta \tag{20}$$

Ahora, k se puede reemplazar por $\frac{2\pi}{\lambda}$, a la vez que la constante se transforma en la función *pupila*.

$$U(p,q) = \int\int_C G(\eta,\zeta)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(p\zeta+q\eta)}d\zeta d\eta \tag{21}$$

Se puede observar que $U(p,q)$ es ahora la tranformada de Fourier continua bidimensional de $G(\zeta,\eta)$. Esta función *pupila* será entonces una constante dentro de la rendija **C** y 0 fuera de ella.

3 Montaje Experimental

Para la realización de este experimento, se plantea inicialmente el siguiente montaje experimental para la visualización del patrón de difracción de la luz a través de distintos tipos de rendijas. Consiste entonces de una fuente de luz monocromática la cual pasa a través de una rendija de difracción y se puede observar en la pantalla lejana a la rendij el patrón de difracción de campos lejanos. Cada tipo de rendija utilizada representará entonces una diferente función *pupila*.

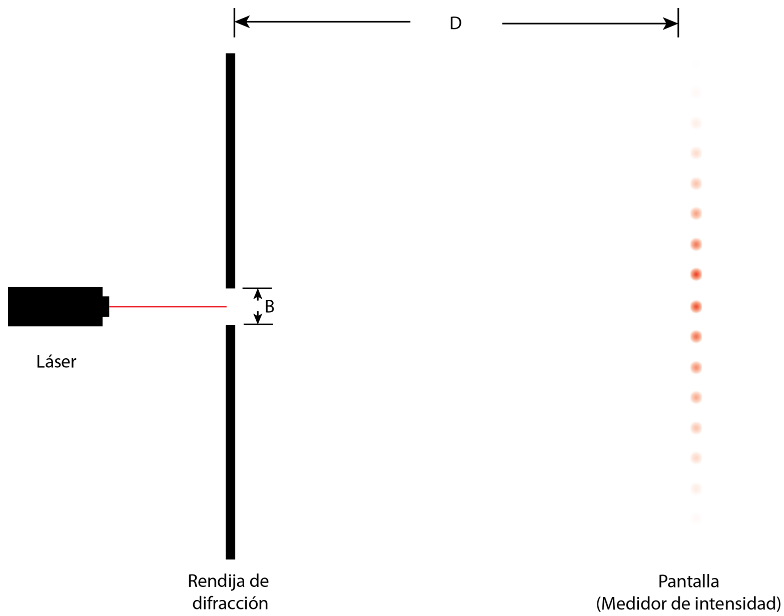

Figure 2: Montaje propuesto para el experimento

4 Simulaciones preliminares

Partiendo de lo establecido en el marco teórico y utilizando el lenguaje de programación científica **Python** es posible tomar algunos ejemplos de rendijas posibles y modelarlas como funciones *pupila* bidimensionales, matrices cuyos elelmentos son constantes en donde está la apertura y cero donde se bloquea el paso de la luz. Omitiendo el código utilizado por motivos de brevedad más conservándolo para futuras referencias más detalladas, se presentan a continuación algunos de los resultados obtenidos de las simulaciones.

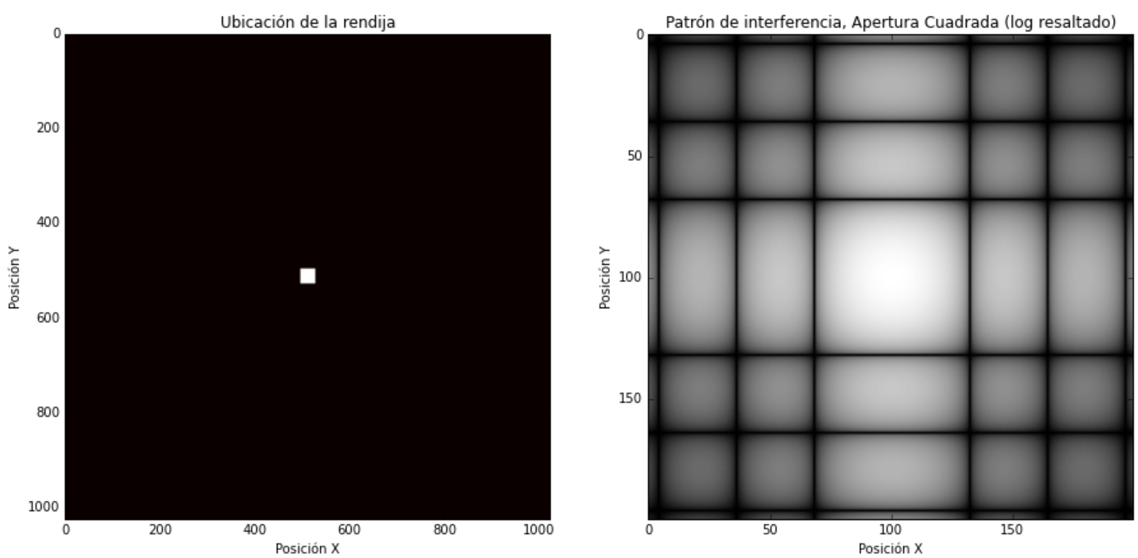

Figure 3: Difracción de una rendija cuadrada

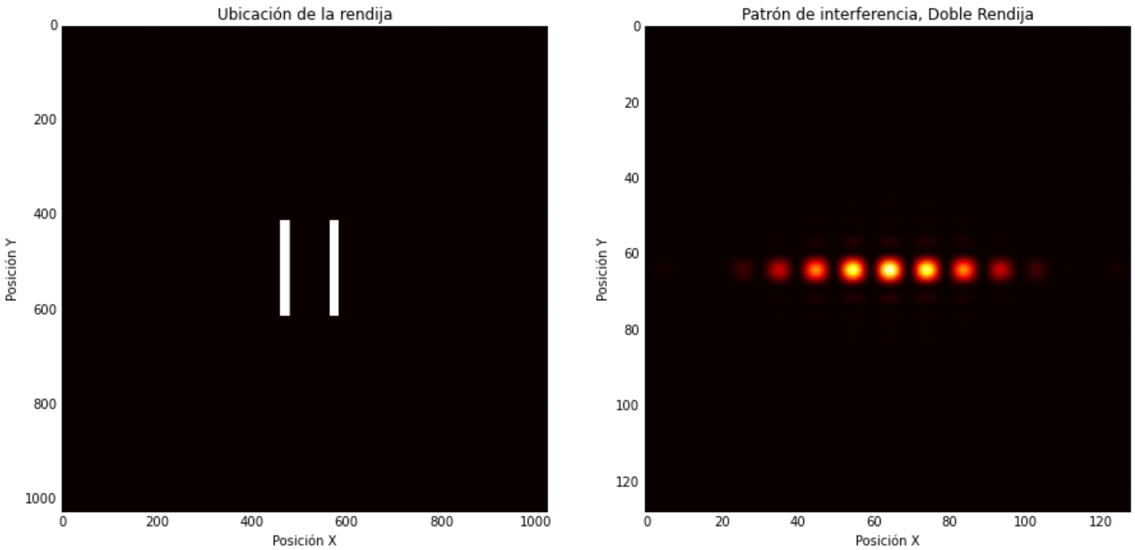

Figure 4: Difracción de una rendija rectangular doble

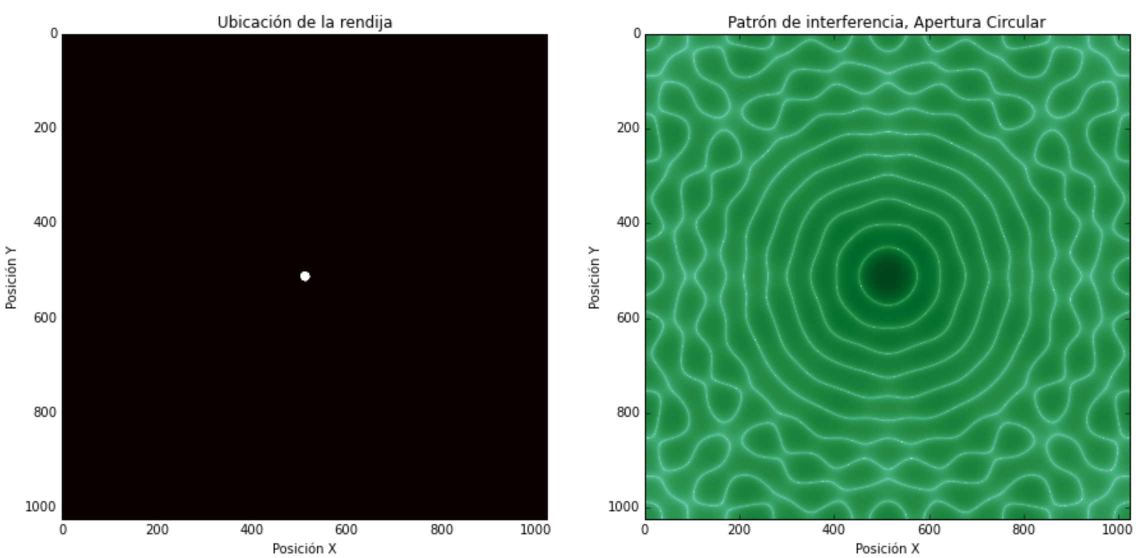

Figure 5: Difracción de una rendija circular

5 Bibliografía

1. **Principles of Optics** Born, M. Wolf, E. Fourth Edition. 1970.
2. Weisstein, Eric W. "Fourier Transform." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html