

# UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

## FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Estadística



Anchura media craneal

**Juan Peñas Utrilla**

Máster big data, data science & inteligencia artificial

Curso académico 2025-26

Se ha analizado la anchura de cráneos (mm) de dos periodos históricos diferentes, estos se corresponden al predinástico temprano (egipcios) y al tardío (romanos).

## Ejercicio 1

Primero se han obtenido las diferentes medidas de centralización, además de la dispersión, asimetría y curtosis separando previamente los datos en los dos periodos.

Para el periodo predinástico temprano se han obtenido los siguientes resultados:

```
===== Predinástico temprano =====  
n = 30  
Media = 131.53  
Mediana = 131.50  
Moda = 131.00  
Varianza = 0.67  
Desv. típica = 0.82  
Mínimo = 130.00  
Máximo = 134.00  
Q1 (25%) = 131.00  
Q3 (75%) = 132.00  
IQR (Q3 - Q1) = 1.00  
Asimetría (skew) = 0.692  
Curtosis (Fisher) = 1.781
```

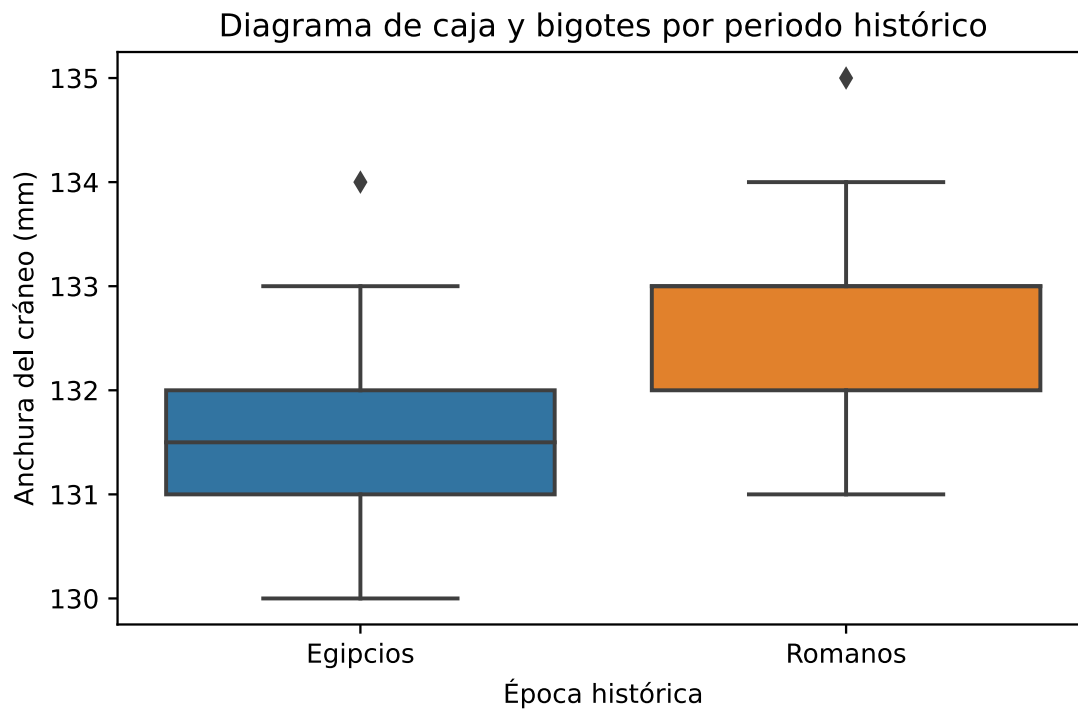
*Figura 1: Estadísticos predinástico temprano*

Para el predinástico tardío se han obtenido los siguientes:

```
===== Predinástico tardío =====  
n = 30  
Media = 132.47  
Mediana = 133.00  
Moda = 133.00  
Varianza = 1.02  
Desv. típica = 1.01  
Mínimo = 131.00  
Máximo = 135.00  
Q1 (25%) = 132.00  
Q3 (75%) = 133.00  
IQR (Q3 - Q1) = 1.00  
Asimetría (skew) = 0.206  
Curtosis (Fisher) = 0.009
```

*Figura 2: Estadísticos predinástico tardío*

A continuación, se muestra el gráfico de caja y bigotes:



*Figura 3: diagrama de caja y bigotes*

En el periodo predinástico temprano se observa una anchura media de 131.53 mm, con una desviación típica de 0.82 mm. Además, la media y la mediana son prácticamente iguales indicando una población homogénea. La asimetría positiva muestra que existen valores más elevados hacia la derecha de la distribución, la mayoría de los valores están a la izquierda de la media. La curtosis de 1.781 indica una distribución leptocúrtica, los valores están concentrados alrededor de la media.

En el periodo predinástico tardío la anchura media aumenta hasta 132.47 mm. La dispersión es mayor que en el temprano, mostrando una mayor variabilidad en las anchuras, además la mediana coincide con el tercer cuartil. La asimetría próxima a cero sugiere una distribución simétrica, y la curtosis (0.009) indica una distribución muy próxima a la normal.

Los diagramas de caja y bigotes confirman estas observaciones: el periodo temprano presenta una distribución más concentrada y asimétrica, mientras que el periodo tardío muestra una mayor dispersión y una mediana desplazada hacia valores superiores. En conjunto, los resultados descriptivos indican que la anchura de los cráneos es mayor en el predinástico tardío y que, además, existe una mayor variabilidad en este periodo.

Para comprobar la normalidad de cada submuestra se aplicó la prueba de Kolmogórov-Smirnov.

Periodo	p-Valor
Predinástico temprano	0,04886
Predinástico tardío	0,06114

*Tabla 1: p-valor de la prueba KS para las dos muestras*

En el periodo predinástico tardío se obtuvo un p-valor de 0.0611, ligeramente superior a 0.05, por lo que se mantiene la hipótesis nula, siendo compatible con una distribución normal.

Aunque la muestra predinástica temprana tenga un p-valor de 0.0489, ligeramente inferior al nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , al contar con  $n = 30$  observaciones se puede invocar el Teorema Central del Límite, asumiéndose una aproximación normal para la media muestral.

## **Ejercicio 2**

Se han calculado los intervalos de confianza para la diferencia entre las medias de la anchura del cráneo ( $\mu_1 - \mu_2$ ), siendo  $\mu_1$  la media del periodo predinástico temprano y  $\mu_2$  la media del periodo predinástico tardío. Los intervalos obtenidos han sido:

- IC 90%: [-1.330, -0.537]
- IC 95%: [-1.408, -0.459]
- IC 99%: [-1.565, -0.302]

La diferencia media estimada es  $\mu_1 - \mu_2 = -0.933\text{mm}$  para los tres niveles de confianza considerados. Además, al ir aumentando el nivel de confianza el intervalo se va haciendo cada vez mayor, pero ni aun así incluye el 0, por tanto, existe la evidencia estadística clara de que las medias poblacionales no son iguales.

El signo negativo de la diferencia indica que  $\mu_1 < \mu_2$ , es decir, la anchura media del cráneo es mayor en el periodo predinástico tardío. Este resultado se mantiene incluso con un nivel de confianza del 99%, lo que indica una diferencia robusta.

En relación con la prueba de normalidad del ejercicio anterior, se obtuvo que la submuestra del periodo predinástico temprano no sigue una distribución normal, mientras que la del periodo tardío sí es compatible con la normalidad. Dado que uno de los grupos no cumple estrictamente el supuesto de normalidad, los intervalos de confianza basados en la t de Student deben interpretarse con cautela. No obstante, el tamaño muestral (30 observaciones por grupo) y, sobre todo, la coherencia de los resultados en los tres niveles de confianza, refuerzan la validez de la conclusión.

Desde el punto de vista de la variable estudiada, los resultados indican que en el periodo predinástico tardío los cráneos eran, en promedio, aproximadamente 1 mm más anchos que en el periodo predinástico temprano.

Para contrastar la hipótesis de igualdad de medias se ha aplicado la prueba t de Student para muestras independientes. Las hipótesis planteadas han sido:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ (las medias son iguales)}$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \text{ (las medias son distintas)}$$

Las condiciones necesarias para la aplicación de la prueba t son:

- Independencia de las muestras
- Normalidad de las poblaciones
- Varianzas poblacionales iguales

La independencia se asume cumplida según el enunciado. La igualdad de varianzas se ha comprobado mediante la prueba de Levene, obteniéndose un p-valor de 0.434, por lo que no se rechaza la hipótesis de varianzas iguales. Con la prueba KS se observó que la muestra del periodo predinástico temprano no cumple estrictamente el supuesto de normalidad, mientras que la del periodo tardío es compatible con una distribución normal. No obstante, dado el tamaño muestral, el Teorema Central del Límite permite aproximar la distribución de la media muestral a una normal, justificando el uso del contraste t.

Aunque no se cumpliera la condición de normalidad, el enunciado exige realizar el contraste, por lo que se ha aplicado la prueba t. El resultado obtenido ha sido:

- Estadístico  $t = -3.935$
- p-valor = 0.00023

Dado que el p-valor es muy inferior a 0.05, se rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias, concluyéndose que existe una diferencia estadísticamente significativa entre ambos periodos. El signo negativo del estadístico t indica que  $\mu_1 < \mu_2$ , es decir, que la media de la anchura craneal es mayor en el periodo predinástico tardío.

Aunque uno de los grupos no siguiera una distribución normal, la diferencia observada es suficientemente grande, las varianzas son homogéneas y los resultados son coherentes con los intervalos de confianza calculados en el apartado anterior. Por ello, el contraste puede considerarse estadísticamente fiable, con la debida cautela metodológica.

Finalmente, las conclusiones no se apoyan en la interpretación aislada de un único estadístico, sino en la coherencia del análisis en su conjunto. A pesar de que los p-valores de las pruebas de normalidad son limítrofes, los resultados obtenidos mediante los intervalos de confianza y el contraste  $t$  conducen de forma consistente a la misma conclusión. En consecuencia, puede afirmarse que la anchura media del cráneo es significativamente mayor en el periodo predinástico tardío.