20/03/2018

**PRIMER PROYECTO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN GESTIÓN FINANCIERA**

*Vale por un 25% de la Nota de la Materia*

*Su contenido le ayudará a preparar el primer examen parcial que haremos la 2da semana de marzo como está en el programa.*

Las preguntas listadas a continuación vienen clasificadas en dos tipos: preguntas teóricas (PT) que usted debe desarrollar con una clara argumentación matemática, y preguntas prácticas (PP) que usted debe abordar a partir de un conjunto de datos y resolver con un programa de computador apropiado, a continuación explicamos la fuente de sus datos. Sin embargo en muchas preguntas usted deberá integrar conocimiento fundamental y teórico, así como cálculos prácticos para culminarlas bien. Aproveche toda oportunidad de plasmar en forma gráfica sus ideas, argumentos y resultados, esto incrementará su aprendizaje de forma sustancial. Para afrontar estas preguntas usted debe revisar sus notas de clase, leer la lectura asignada y revisar el ejercicio práctico expuesto en: *https://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/financieras/?Op=95*.

**0) Búsqueda y Procesamiento de los Datos (PP)**

Requerimos algunos datos de prueba: específicamente debemos elegir 5 activos con una serie de 25 precios, para calcular 24 observaciones de sus rendimientos en 24 periodos (se sugiere en 24 meses). Elija activos sustancialmente diferentes para que haya una dispersión y variabilidad entre ellos que hagan los cálculos y los resultados más resaltados para el aprendizaje de los conceptos.

Con estos datos usted debe construir un vector $\bar{\boldsymbol{r}}$ con 5 entradas, cada una correspondiente a las rentabilidades promedio y una matriz **S** de 5 x 5, con las covarianzas cruzadas entre los rendimientos de los activos analizados. El vector $\bar{\boldsymbol{r}}$ y la matriz **S** serán nuestros elementos prácticos para constatar y ejemplificar la teoría que estamos estudiando. El manejo de los datos y los cálculos algebraicos con este vector y esta matriz pueden implementarse en una variedad de sistemas como son hojas de cálculo, calculadoras financieras, paquetes para manejo de estadística y matemáticas a completa libertad del estudiante.

**1) Formas Cuadráticas**

Es importante para el seguimiento de esta parte del curso que usted esté familiarizado con el concepto de formas cuadráticas. Para ello suponga que A es una matriz cuadrada de dimensiones n x n. En esas condiciones:

a. Con sus conocimientos de álgebra lineal muestre que se cumple la expresión:

$$x^t A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Donde $a_{ij}$ son las entradas de la matriz A y $x_i$ son las componentes del vector x.

b. Una forma cuadrática es una función $f(x) = x^t A x$ definida en el espacio euclideano $R^n$, desde este punto de vista calcule los siguientes operadores diferenciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}, \vec{\nabla} f, Hf$$

los cuales son *derivada parcial* de la forma cuadrática f, *derivada parcial de segundo* orden de la forma cuadrática f, *gradiente* de la forma cuadrática f, y la *matriz Hessiana* de la forma cuadrática f.

c. Repita los cálculos de b. bajo el supuesto que la matriz A es una matriz simétrica.

d. Explique cuál es el concepto de convexidad y concavidad de la función forma cuadrática f con relación a la definición positiva de la matriz A.

**2) La Matriz de Covarianzas (PT/PP)**

a. Demuestre que cualquier matriz de covarianzas S con dimensiones *m x m* es una matriz simétrica. (PT)

b. Demuestre que cualquier matriz de covarianzas S con dimensiones *m x m* es una matriz semidefinida positiva. (PT)

c. Demuestre que cuando una matriz de covarianzas S es invertible, entonces es una matriz definida positiva. (PT)

*d.* Demuestre que si S es una matriz de covarianzas S con dimensiones *m x m, entonces la forma cuadrática* $x^t S x$ es una función convexa en m variables. (*Aquí usted debe recordar qué es una función convexa en varias variables.) (PT)*

e. Ahora tome su propia matriz de covarianzas **S** construida con sus datos y verifique que ella es semidefinida positiva, para ello basta estimar sus valores propios usando un software para álgebra matricial. *No recomiendo hacerlo a mano. (PP)*

f. Verifique si su matriz de datos **S** es invertible o no y explique por qué. (PP)

**3) El Plano Riesgo Retorno y la Frontera Eficiente (PP)**

a. Para cada uno de los 5 activos estudiados separe las 5 parejas de datos $\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{2}}, \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}\right)$ con *i=1,2,3,4,5,* que corresponden a la varianza y la rentabilidad de cada activo, márquelas en un plano cartesiano donde el eje horizontal representa la varianza $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{2}}$ de cada activo y el eje vertical el rendimiento medio $\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$ de cada activo. (PP)

b. Utilizando una hoja de cálculo o software para matemáticas, calcule las siguientes formas cuadráticas:

$$A = \hat{\boldsymbol{u}}^t \boldsymbol{S}^{-1} \hat{\boldsymbol{u}}, \qquad B = \hat{\boldsymbol{u}}^t \boldsymbol{S}^{-1} \bar{\boldsymbol{r}}, \qquad C = \bar{\boldsymbol{r}}^t \boldsymbol{S}^{-1} \bar{\boldsymbol{r}}$$

donde $\hat{\boldsymbol{u}}$ es un vector en el cual todas sus entradas son unos. Observe que **S** tiene que ser invertible para poder hacer estas operaciones. *Observe por ejemplo que el número A es la suma de todas las entradas de la matriz inversa* $\boldsymbol{S}^{-1}$. (PP)

c. Con los valores obtenidos en –b- trace la parábola $\sigma^2(r) = \frac{Ar^2 - 2Br + C}{D}$ como una curva en el plano cartesiano riesgo retorno $(\sigma^2(r), r)$. Esta parábola se denomina *frontera eficiente* y debe englobar todos los puntos marcados en –a- a su derecha. Aquí $D = AC - B^2$. (PP)

d. Encuentre el vértice de esta parábola como $\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}}, \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}\right)$, explicando su sentido como la posición de aquel portafolio que pudiéramos obtener con los activos disponibles, que cumple con la condición de tener el menor riesgo entre todos los portafolios factibles que pudiéramos construir. Puede pasar que dependiendo de los valores precisos de la matriz **S** y el vector $\bar{\boldsymbol{r}}$, el vértice esté fuera del primer cuadrante del plano cartesiano riesgo retorno, porque B puede llegar a ser negativo en algunas situaciones, en ese caso el portafolio con menor riesgo es donde la curva $\sigma^2(r)$ corta al eje de riesgo $\sigma^2$. (PP).

e. Rearmando los argumentos de optimización que hemos utilizado, encuentre el vector $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^{\mathbf{5}}$, que corresponde al portafolio que se ubica en el vértice de la frontera eficiente. Nota: en algunos datos de activos con muy mal comportamiento, el vértice de la frontera eficiente no está en el primer cuadrante del plano riesgo retorno, es decir la cantidad B puede ser negativa. Si esto ocurre revise usar otros datos de activos con desempeños un poco mejores. (PP)

f. Repita la parte –a- y la parte –c- de esta pregunta, pero ahora utilice un plano cartesiano riesgo retorno donde en el eje de riesgo horizontal usamos como medida de riesgo la desviación estándar, es decir hay que graficar los puntos $(\sigma_i, \bar{r}_i)$ y la curva: $\sigma(r) = \sqrt{\frac{Ar^2-2Br+C}{D}}$ . Nuevamente obtenemos una curva convexa en *r, que envuelve los puntos de cada activo a su derecha, la cual tiene un vértice que debemos encontrar. ¿Cuál?.* (PP)

g. Encuentre la ecuación de la recta superior que resulta ser una asíntota para la curva:

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{Ar^2 - 2Br + C}{D}}.$$

El corte de esta asíntota con el eje de rentabilidad, determina un límite máximo para las tasas de interés sin riesgo compatibles con el mercado que usted escogió formado por 5 activos de su interés. Encuentre este punto y explique su importancia teórica. (PP)

*h.* Usualmente las decisiones de inversión incluyen una inversión sin riesgo, asociada con las tasas de interés del banco central o con los bonos del tesoro de cada país, que en el modelo se ubican como un punto $(0, r_p)$ sobre el eje de rendimiento en el nivel de cero riesgo. Por otra parte, este punto define de forma univoca un punto de tangencia $(\sigma_M, r_M)$ sobre la curva $(\sigma(r), r)$ de la frontera eficiente, este punto de tangencia se denomina *portafolio de mercado*, correspondiente al mercado en estudio. En este proyecto el conjunto elegido por usted está formado por 5 activos de interés. La pregunta es: encuentre las fórmulas precisas para determinar el punto $(\sigma_M, r_M)$ dado el valor de la inversión sin riesgo $r_p$ y recíprocamente, encuentre la inversión sin riesgo $r_p$, dado el portafolio de mercado $(\sigma_M, r_M)$. Tenga en cuenta que usted dispone de la curva fija de la frontera eficiente dada por $\sigma(r) =$

$\sqrt{\frac{Ar^2-2Br+C}{D}}$. (PT) *Nota: al final de la parte 3 de este proyecto usted tendrá unas fórmulas más apropiadas para resolver esta pregunta.*

*i.* Usando sus datos escoja 3 valores posibles para la tasa libre de riesgo $r_p$ y calcule sus correspondientes portafolios de mercado $(\sigma_M, r_M)$, verifique que se ubican de forma precisa sobre la frontera eficiente que corresponde a la curva $(\sigma(r), r)$. De igual forma escoja 3 puntos $(\sigma_M, r_M)$, sobre la frontera eficiente, que corresponden a portafolios de mercado y con ellos calcule para cada uno su tasa libre de riesgo correspondiente $r_p$, verifique que estas tasas cumplen con el límite teórico establecido en –g-. (PP) *Nota: cabe esperar que esta pregunta se haga con las fórmulas que usted encontró en la pregunta anterior –h-.*

*j.* La línea de tangencia a la curva $\sigma(r) = \sqrt{\frac{Ar^2-2Br+C}{D}}$ que une los puntos $(\sigma_M, r_M)\ con\ \left(0, r_p\right)$ se denomina línea de *mercado de capital,* muestre que su ecuación es: $r(\sigma) = r_p + \left(\frac{r_M - r_P}{\sigma_M}\right)\sigma$ y explique la forma metódica para utilizarla y constituir portafolios que combinen eficiente y óptimamente los activos bajo riesgo disponibles con ***la*** única inversión sin riesgo disponible. Calcule la línea de mercado de capital para cada uno de los 6 ejemplos de la pregunta anterior –i-. (PP)

**4) Optimización Cuadrática y Portafolios de Mínima Varianza (PT)**

Como método general para determinar un portafolio óptimo utilizamos un criterio de mínima varianza, partiendo de los datos recopilados en el vector de rendimientos medios $\bar{r} \in R^m$ y la matriz de covarianzas S con dimensiones m x m, donde m es el número de activos disponibles para diseñar y componer los portafolios factibles. Por lo tanto hay que desarrollar el problema de optimización:

$$min\ \frac{x^t S x}{2} \quad s.a. \quad \hat{u}\cdot x = 1,\ \bar{r}\cdot x = \mu$$

donde $\mu$ es un parámetro que corresponde al nivel de rentabilidad deseado y las restricciones son la suma de las variables igual a la unidad y la exigencia de este nivel de rentabilidad.

a. Muestre que cuando componemos un portafolio con m activos, donde las proporciones de la inversión de cada activo están dadas por un vector $x \in R^m$, la forma cuadrática:

$$\sigma_\pi^2(x) = x^t S x$$

representa la varianza en el portafolio definido por el vector $x$ como: $\boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i$. (PT)

b. Explique por qué este problema es un problema de optimización cuadrática convexo. Describa su función objetivo y su región factible. (PT)

c. A partir de la función Lagrangiana:

$$L(x, y_1, y_2) = \frac{x^t S x}{2} + y_1(1 - \hat{u} \cdot x) + y_2(\mu - \bar{r} \cdot x)$$

derive las condiciones de primer orden que se van a constituir como un sistema lineal de la siguiente manera:

$$Sx = y_1\hat{u} + y_2\bar{r}, \quad \hat{u} \cdot x = 1, \qquad \bar{r} \cdot x = \mu.$$

y explique por qué son condiciones necesarias y suficientes para conseguir un vector óptimo en el problema de optimización (PT).

d. Bajo el supuesto de que la matriz de covarianzas S es invertible, alcance la solución general como:

$$x^* = y_1 S^{-1}\hat{u} + y_2 S^{-1}\bar{r}.$$

y explique por qué esta es una solución del problema de optimización de mínima varianza. (PT)

e. Muestre en detalle que los multiplicadores de Lagrange para alcanzar la solución explícita del problema se encuentran como:

$$y_1 = \frac{C - \mu B}{D}, \qquad\qquad y_2 = \frac{A\mu - B}{D}$$

Donde $\mu$ es el parámetro de la rentabilidad exigida y los valores *A, B, C* son las formas cuadráticas dadas en la pregunta -2b)- . (PT)

f. Uniendo –d- y –e- muestre que el vector de soluciones óptimo se calcula como:

$$x^* = \left(\frac{C - \mu B}{D}\right) S^{-1}\hat{u} + \left(\frac{A\mu - B}{D}\right) S^{-1}\bar{r}.$$

(PT).

g. Teniendo en cuenta que $\mu$ es un parámetro del problema. Encuentre la fórmula general que define la frontera eficiente en la pregunta: 2c) como: $\sigma^2(\mu) = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{D}$, que es el valor óptimo del problema de optimización parametrizado:

$$min\ \frac{x^t S x}{2} \quad s.a. \quad \hat{u} \cdot x = 1, \quad \bar{r} \cdot x = \mu\,.$$

(PT).

h. Usando esta misma metodología plantee y resuelva de forma general el problema de optimización:

$$min\ \frac{x^t S x}{2} \quad s.a. \quad \hat{u} \cdot x = 1.$$

y explique cómo encontramos, en forma general, el vector de inversiones $x^* \in R^m$ que corresponde al portafolio con el menor nivel de riesgo entre todos los portafolios factibles, específicamente el que corresponde al vértice de la frontera eficiente. (PT)

i. Para determinar portafolios de mercado, suele ser útil resolver el siguiente problema de optimización:

$$max\ \frac{\bar{\boldsymbol{r}}\cdot x - r_p}{\sqrt{x^t S x}} = \frac{\overline{r_x} - r_p}{\sigma_x} \quad s.a.\ \hat{u}\cdot x = 1$$

el cual tiene un sentido financiero bastante preciso y es encontrar el portafolio que dentro de todos los portafolios factibles, puede proporcionar el mayor cociente de eficiencia en la relación rendimiento incremental en exceso sobre la tasa libre de riesgo dividido por el nivel de riesgo asumido en dicho portafolio, dado éste como la desviación estándar de su rentabilidad: $\sigma_x = \sqrt{x^t S x}$. Demuestre que una condición necesaria para este problema de optimización es:

$$\left(\frac{\overline{r_x} - r_p}{\sigma_x^2}\right)\boldsymbol{S}x = \bar{\boldsymbol{r}} - \mathrm{y}\sigma_x\hat{u} = \vec{0}.$$

Donde *y* es un multiplicador de Lagrange para el ejercicio de optimización. (PT).

j. Si identificamos el producto $\mathrm{y}\sigma_x$ con la tasa libre de riesgo: $r_p$, muestre que podemos reescribir la solución óptima del problema de optimización anterior como:
$$x^* = \frac{\sigma_M^2}{r_M - r_p}\boldsymbol{S^{-1}}(\bar{\boldsymbol{r}} - r_p\hat{\boldsymbol{u}}) = -\frac{r_p\sigma_M^2}{r_M - r_p}\boldsymbol{S^{-1}}\hat{\boldsymbol{u}} + \frac{\sigma_M^2}{r_M - r_p}\boldsymbol{S^{-1}}\bar{\boldsymbol{r}}.$$
Donde utilizamos el índice M propio de los portafolios de mercado porque justamente en este ejercicio de maximización, el portafolio óptimo tiene que ser un portafolio de mercado $(\sigma_M, r_M)$ acoplado con la tasa libre de riesgo $r_p$. (PT).

k. Utilizando el resultado de la pregunta –j- y los valores A, B y C del problema de optimización de mínima varianza, demuestre que podemos determinar fórmulas precisas para encontrar el portafolio de mercado $(\sigma_M, r_M)$ a partir de la tasa libre de riesgo $r_p$. Específicamente, demuestre las siguientes relaciones:

$$1 = \frac{\sigma_M^2}{r_M - r_p}(-r_P A + B), \qquad r_M = \frac{\sigma_M^2}{r_M - r_p}(-r_P B + C)$$

y con ellas alcance las siguientes identidades:

$$r_M = \frac{C - r_p B}{B - r_p A}$$

$$\sigma_M^2 = \frac{r_M - r_p}{B - r_p A}.$$

Análogamente, justifique la fórmula

$$r_p = \frac{r_M B - C}{r_M A - B}.$$

(PT). *Nota: esta pregunta tiene un impacto práctico enorme porque nos da la fórmula precisa para ir del punto* $(\sigma_M, r_M)$ *hasta el valor* $r_p$ *y viceversa, como habíamos pedido más arriba. Observe la presencia de los parámetros A, B y C que definen la frontera eficiente original y resultan de los datos históricos de rentabilidad de los activos escogidos para el análisis.*

## 5) Índices Beta de Portafolios Factibles

Supongamos que $y \in R^m$ representa un portafolio factible, por lo tanto cumple la condición $\hat{u} \cdot y = 1$ cuya rentabilidad promedio es $\overline{r_y} = \bar{r} \cdot y$, para un histórico de observaciones de la rentabilidad $r_y$ nos gustaría encontrar un modelo lineal que la explique como función de la rentabilidad del portafolio de mercado $r_M$, este modelo debería estar dado como:

$$r_y = \alpha_y + \beta_y r_M + error$$

donde la pendiente $\beta_y$ del modelo lineal se llama generalmente índice beta del portafolio y en relación al portafolio de mercado $r_M$. Observe que el índice beta de un activo o portafolio es una medida de la tendencia de dicha inversión a seguir la rentabilidad del portafolio de mercado.

a. Muestre que en términos de la aproximación de mejor ajuste bajo el criterio de mínimos cuadrados, el índice beta admite la definición:

$$\beta_y = \frac{cov(r_y, r_M)}{\sigma_M^2}.$$

(PT)

b. *Utilizando esta definición pero dentro de los parámetros de la teoría vista, muestre que el índice beta también admite la definición equivalente:*

$$\beta_y = \frac{r_y - r_p}{r_M - r_p}.$$

Esta definición admite otra interpretación y es identificar cada índice beta como una relación comparativa entre la eficiencia de la inversión *y* en relación a la tasa sin riesgo $r_p$ y la eficiencia del portafolio de mercado respecto al mismo referente sin riesgo. (PT)

c. Fije un valor para la tasa libre de riesgo $r_p$ y determine el portafolio de mercado correspondiente $(\sigma_M, r_M)$, para este portafolio de mercado calcule los 5 índices beta de sus activos elegidos para el análisis. (PP)

d. Encuentre el índice beta de un portafolio $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^5$ definido como: $y = \begin{bmatrix} 20\% \\ 20\% \\ 20\% \\ 20\% \\ 20\% \end{bmatrix}$ con los 5 activos escogidos para su análisis. (PP)

e. Bajo este enfoque la rentabilidad de un portafolio siempre es una función lineal de su índice beta, muestre que:

$$r_y = r_p + \left(r_M - r_p\right)\beta_y$$

y grafique los puntos de cada uno de sus activos en un plano beta v.s. rentabilidad. Observe que cualquier inversión o portafolio que usted diseñe con estos activos estará sobre la recta que une los puntos, así que su pendiente fija $r_M - r_p$ nos habla de la eficiencia teórica del mercado disponible en relación a la tasa libre de riesgo. (PP)

**6) Papel de la Covarianza en la Gestión del Riesgo**

Entre su familia de activos escoja dos de ellos, a los cuales representaremos por un índice i al primero y por un índice j al segundo, de manera que sus posiciones en el plano riesgo retorno las representamos como: $(\sigma_i, \overline{r_i}), \left(\sigma_j, \overline{r_j}\right)$.

a. Utilizando la covarianza entre sus rendimientos:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

encuentre el valor $\lambda^* \in [0,1]$ para el cual el portafolio $\pi = \lambda^* A_i + (1 - \lambda^*) A_j$ tiene la mínima varianza posible. (PP)

b. Dibuje sobre el diagrama riesgo retorno los puntos $(\sigma_i, \overline{r_i}), \left(\sigma_j, \overline{r_j}\right)$, la curva definida por el parámetro $\lambda \in [0,1]$, cuando ubicamos la posición del punto $(\sigma_\pi, \overline{r_\pi})$ que representa el riesgo y la rentabilidad media del portafolio $\pi = \lambda A_i + (1 - \lambda) A_j$. (PP)

c. Repita las preguntas –a- y –b- bajo el escenario hipotético en que el coeficiente de correlación $\rho_{ij}$ es +1. (PT)

d. Repita las preguntas –a- y –b- bajo el escenario hipotético en que el coeficiente de correlación $\rho_{ij}$ es -1. (PT)

e. Explique por qué el coeficiente de correlación siempre cumple: $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$. Utilice para ello la desigualdad de Cauchy-Schwarz. (PT).

f. Muestre que si definimos un portafolio como $\pi = \lambda A_i + (1 - \lambda) A_j$ su rendimiento promedio es: $\overline{r_\pi} = \lambda \overline{r_i} + (1 - \lambda) \overline{r_j}$ y la varianza de su rentabilidad es:

$$\sigma_\pi^2 = \lambda^2 \sigma_i^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\sigma_{i,j} + (1 - \lambda)^2 \sigma_j^2.$$