

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

CRIPTOGRAFÍA POSCUÁNTICA

Trabajo de fin de grado presentado por

Juan Antonio Guitarte Fernández

Tutor: Dr. Nombre apellidos del tutor

Firma del alumno

Firma del tutor

Puerto Real, Cádiz, Julio de 2.020

Abstract

(por hacer)

(por hacer)

Resumen

(por hacer)

Agradecimientos

(por hacer)

Juan Antonio Guitarte Fernández

mayo 2020

Índice general

1	Introducción	1
2	Planteamiento y motivación	3
2.1	El problema de los ordenadores cuánticos	3
2.2	Criptosistemas	5
2.3	Sistemas de firma	6
3	Espacios de Hilbert	9
3.1	Definiciones básicas	9
3.2	El operador adjunto y operadores unitarios	12
4	El algoritmo de Shor	19
4.1	Introducción	19
4.2	Computación cuántica	22
4.2.1	Bits y qubits	22
4.2.2	Puertas cuánticas y circuitos cuánticos	25
4.2.3	El circuito para encontrar el orden	29
5	Algoritmos de criptografía poscuántica	35
5.1	Criptografía basada en funciones hash	35
5.2	Criptografía basada en códigos	35
6	Conclusiones	37
	Bibliografía	39

CAPITULO

1

Introducción

(por hacer)

Planteamiento y motivación

2.1 El problema de los ordenadores cuánticos

Hoy día, la criptografía está más presente que nunca en nuestro día a día: hacer compras por Internet, navegar por casi cualquier página web, chatear a través del teléfono móvil... Gracias a la criptografía, podemos mantener nuestras comunicaciones privadas y asegurarnos de que cualquier pago que realicemos o documento que publiquemos sólo podemos hacerlo nosotros, es decir, que nadie pueda falsificarlo.

El continuo desarrollo de los ordenadores cuánticos, que romperán los principales algoritmos de firma digital y criptosistemas de clave pública usados hoy en día (por ejemplo, *RSA*, *DSA* y *ECDSA*), puede hacer pensar que cuando la computación cuántica sea una realidad, la criptografía quedará obsoleta, que será imposible modificar información para que sea incomprensible o infalsificable por atacantes y personas no autorizadas; y que por tanto, la única forma de proteger nuestras comunicaciones y nuestros datos será aislarlos físicamente de ellos, por ejemplo, con dispositivos USB cerrados bajo llave en un maletín. Pero, ¿hasta qué punto es esto cierto?

Un estudio más detallado de los algoritmos criptográficos existentes muestra, sin embargo, que existen muchos otros criptosistemas más allá del *RSA*, *DSA* y *ECDSA*:

- **Criptografía basada en funciones hash.** El ejemplo más destacado dentro de este grupo es el sistema de firma con clave pública basado en árboles hash de Merkle

2. PLANTEAMIENTO Y MOTIVACIÓN

(en inglés, *Merkle's hash-tree public-key signature system*) de 1979, basado en un sistema de firma digital de un solo uso de Lamport y Diffie.

- **Criptografía basada en códigos.** El ejemplo clásico es el sistema de encriptación de clave pública con códigos Goppa ocultos de McEliece (1978).
- **Criptografía basada en retículos.** El ejemplo que más interés ha conseguido atraer, aunque no es el primero propuesto históricamente, es el sistema de encriptación de clave pública “NTRU” de Hoffstein-Pipher-Silverman (1998).
- **Criptografía de ecuaciones cuadráticas de varias variables.** Uno de los ejemplos más interesantes es el sistema de firma con clave pública “ HFE^v ” de Patarin (1996), que generaliza una propuesta de Matsumoto e Imai.
- **Criptografía de clave secreta.** El ejemplo más conocido (y usado actualmente) es el cifrado “Rijndael” de Daemen-Rijmen (1998), renombrado como “AES”, siglas que significan Estándar de Encriptación Avanzada (Advanced Encryption Standard).

Se cree que todos estos sistemas son resistentes a los ordenadores clásicos y cuánticos, es decir, que no existe un algoritmo eficiente que pueda ser implementado en un ordenador clásico o cuántico que rompa estos sistemas. El algoritmo de Shor (el cual analizaremos más adelante en este trabajo), que permite resolver de manera eficiente el problema de la factorización de números enteros en ordenadores cuánticos (y por tanto rompe los sistemas de criptografía clásica como el *RSA*), no ha podido ser aplicado a ninguno de estos sistemas. Aunque existen otros algoritmos cuánticos, como el algoritmo de Grover, que pueden ser aplicados a algunos de estos sistemas, no son tan eficientes como el algoritmo de Shor y los criptógrafos pueden compensarlo eligiendo claves un poco más grandes.

Hay que notar que esto no implica que estos sistemas sean totalmente seguros. Este es un problema muy común en criptografía: algunas veces se encuentran ataques a sistemas que son devastadores, demostrando que un sistema es inútil para la criptografía; otras veces, se encuentran ataques que no son tan devastadores pero que obligan a elegir claves más grandes para que sigan siendo seguros; y otras, se estudian criptosistemas durante años sin encontrar ningún ataque efectivo. En este punto, la comunidad puede ganar confianza en el sistema creyendo que el mejor ataque posible ya ha sido encontrado, o que existe muy poco margen de mejora.

2.2 Criptosistemas

El objetivo principal de la criptografía es permitir que dos personas, normalmente referidas como Alice y Bob, puedan comunicarse entre ellas a través de un canal inseguro de tal manera que una tercera persona, Oscar, no pueda entender qué están diciendo entre ellos, aun teniendo acceso a toda la conversación. La información que Alice quiere enviar a Bob la denominamos “texto plano”, aunque no tiene que ser necesariamente texto; puede tener la estructura que deseemos: datos numéricos, cadenas de bits, sonido... Alice encripta el texto plano usando una “clave” que solo conocen Alice y Bob, obteniendo así un “texto encriptado”. Oscar, al ver la información a través del canal inseguro, no puede determinar cuál era el texto plano original; pero Bob, que sí conoce la clave, puede desencriptar el texto cifrado y recuperar el texto plano.

Formalmente, un criptosistema se define de la siguiente manera:

Definición 2.1. Un *criptosistema* es una 5-tupla $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ que satisface las siguientes condiciones:

1. \mathcal{P} es un conjunto finito de *textos planos* posibles,
2. \mathcal{C} es un conjunto finito de *textos cifrados* posibles,
3. \mathcal{K} es el conjunto finito de todas las claves posibles,
4. Para cada $K \in \mathcal{K}$, existen dos aplicaciones $e_K : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ y $d_K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$, denominadas *regla de encriptación* y *regla de desencriptación* respectivamente, que verifican que $d_K(e_K(x)) = x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

La propiedad 4, que es la más importante, asegura que conociendo la clave $K \in \mathcal{K}$, se puede recuperar el texto sin cifrar original usando la función d_K . El proceso por el cual Alice y Bob utilizarían un criptosistema es el siguiente:

1. Alice y Bob seleccionan una misma clave $K \in \mathcal{K}$ de forma aleatoria.
2. Supongamos que Alice quiere enviar un mensaje $x = x_1x_2 \cdots x_n$, con $x_i \in \mathcal{P}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Alice calcula, para cada $1 \leq i \leq n$, $y_i = e_K(x_i)$, resultando en el mensaje cifrado

$$y = y_1y_2 \cdots y_n$$

2. PLANTEAMIENTO Y MOTIVACIÓN

que Alice envía a través del canal inseguro a Bob.

3. Bob, al recibir y , calcula usando la clave K que conoce $d_K(y_i)$, que coincidirán con los x_i originales por la propiedad 4 de la Definición 2.1, obteniendo así el texto original x .

Hay que notar que para que este método funcione, Alice y Bob deben escoger la misma clave K para encriptar y desencriptar los mensajes. En algunos criptosistemas (como el AES mencionado anteriormente), sabiendo e_K o d_K , es sencillo obtener la otra función porque se conoce la clave secreta K . Un criptosistema de este tipo se denomina *criptosistema de clave simétrica*, ya que si un atacante obtuviese la función e_K o d_K , podría romper el sistema desencriptando los mensajes cifrados, bien usando d_K directamente en el segundo caso o bien calculando d_K a partir de e_K a través de la clave en el primero.

Por tanto, es fundamental que Alice y Bob, antes de iniciar cualquier comunicación a través del canal inseguro, se pongan de acuerdo a través de un canal seguro en la clave que van a utilizar. En la práctica, esto es muy difícil de conseguir (por ejemplo, en el caso de Internet). Para resolver este problema, existen los *criptosistemas de clave pública*.

La idea tras estos criptosistemas es que dada una función de encriptación e_K , sea computacionalmente infactible calcular d_K . En este caso, el receptor del mensaje, Bob, publicaría una *clave pública* que permitiría a cualquier persona determinar una función de encriptación e_K . Así, Alice encriptaría el mensaje que quiere enviar usando esta función. El mensaje cifrado llegaría entonces a Bob, que es el único que conoce su *clave privada* con la cual puede calcular la función de desencriptación d_K correspondiente a e_K , desencriptando así el mensaje.

Estos criptosistemas son los que se ven principalmente afectados por la aparición de los ordenadores cuánticos: mientras que en un ordenador clásico puede ser muy difícil calcular la clave privada a partir de la clave pública, pueden existir algoritmos cuánticos que resuelvan el problema en un tiempo razonable. Es por ello que se necesitan nuevos sistemas en los que no existan algoritmos conocidos, ni clásicos ni cuánticos, que permitan calcular eficientemente d_K a partir de e_K .

2.3 Sistemas de firma

El otro gran objetivo de la criptografía es permitir la firma de documentos. En este caso, Alice publicaría el mensaje o documento con una *firma* que permite a cualquier persona

verificar que el mensaje sólo ha podido ser escrito por Alice. De esta manera, un atacante Oscar que quisiese publicar un documento haciéndose pasar por Alice, debe generar una firma con él para que pueda ser validado por el resto de personas. El proceso de firmar, por tanto, debe ser computacionalmente sencillo para Alice, pero infactible para Oscar, como sucede en los criptosistemas de clave pública.

Formalmente, un sistema de firma se define de la siguiente manera:

Definición 2.2. Un *sistema de firma* es una 5-tupla $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{K}, S, \mathcal{V})$ que verifica:

1. \mathcal{P} es un conjunto finito de posibles *mensajes*,
2. \mathcal{A} es un conjunto finito de *firmas* posibles,
3. \mathcal{K} es el conjunto de las claves posibles,
4. Para cada $K \in \mathcal{K}$, hay dos aplicaciones $sig_K \in S$ y $ver_K \in V$, denominadas algoritmos de *firma* y *verificación* respectivamente, siendo $sig_K : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$ y $ver_K : \mathcal{P} \times \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$, que verifican para cada mensaje $x \in \mathcal{P}$ y cada firma $y \in \mathcal{A}$:

$$ver_K(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = sig_K(x) \\ 0 & \text{si } y \neq sig_K(x) \end{cases}$$

A un par ordenado de la forma $(x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{A}$ se le denomina *mensaje firmado*.

Espacios de Hilbert

3.1 Definiciones básicas

Un concepto vital en el desarrollo de la teoría de ordenadores cuánticos es el concepto de espacio de Hilbert, que se apoya en los productos escalares. En este desarrollo, consideraremos en todo momento que el espacio vectorial subyacente X es de dimensión finita, es decir, $\dim X = n \in \mathbb{N}$; ya que no trabajaremos en los capítulos siguientes con espacios de Hilbert de dimensión infinita. Esto simplificará algunas demostraciones aquí presentadas; no obstante, con un poco más de esfuerzo, se pueden hacer para el caso general.

Definición 3.1. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} (consideraremos \mathbb{R} ó \mathbb{C}). Una aplicación $u : E \rightarrow F$ es una *aplicación semilineal* si para cada $x, y \in E$ y para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ verifica:

1. $u(x + y) = u(x) + u(y)$
2. $u(\alpha x) = \bar{\alpha}u(x)$

donde $\bar{\cdot}$ denota la conjugación compleja.

Esta noción generaliza el concepto de aplicación lineal en espacios vectoriales reales, puesto que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces el concepto de aplicación semilineal coincide con el de

3. ESPACIOS DE HILBERT

lineal (ya que $\overline{\alpha} = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$). El siguiente es una generalización del concepto de forma bilineal.

Definición 3.2. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} . Una aplicación $B : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una *forma sesquilineal* si es lineal respecto de la primera componente y semilineal respecto de la segunda; es decir, si para cada $x, x', y, y' \in E$ y para cada $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$ se verifica:

1. $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$
2. $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$
3. $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$
4. $B(x, \alpha y) = \overline{\alpha} B(x, y)$

Si además B verifica que $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$, entonces se dice que es *hermítica*.

Las *aplicaciones sesquilineales* entre dos espacios vectoriales se definen de forma análoga con las propiedades 1-4 de la definición anterior, cambiando el producto en \mathbb{K} por el producto exterior del espacio vectorial de llegada.

Definición 3.3. Sea E un espacio vectorial y sea B una forma sesquilineal y hermítica sobre E . Si para cada $x \in E$ se verifica $B(x, x) \geq 0$ entonces se dirá que B es *positiva*.

Si además se verifica que $x = 0$ cuando $B(x, x) = 0$ entonces se dice que B es *definida positiva*.

Ya estamos en condiciones de presentar lo que es un espacio de Hilbert.

Definición 3.4. Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Un *producto escalar* o *producto interior* en X es una forma sesquilineal hermítica definida positiva B sobre $X \times X$. Se suele denotar por $(x|y) = B(x, y)$ o bien por $\langle x, y \rangle = B(x, y)$.

Un espacio vectorial X que está dotado de un producto escalar diremos es un *espacio prehilbertiano*.

Un espacio prehilbertiano es un *espacio de Hilbert* si es completo.

Esta definición generaliza el concepto de producto escalar en espacios vectoriales reales.

Ejemplo 3.1. Sea $X = \mathbb{C}^2$. El producto escalar usual en este espacio se define como

$$\langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2}$$

En efecto, es un producto escalar, ya que:

1. $\langle (z_1, z_2) + (z_3, z_4), (z'_1, z'_2) \rangle = (z_1 + z_3) \overline{z'_1} + (z_2 + z_4) \overline{z'_2} = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2} + z_3 \overline{z'_1} + z_4 \overline{z'_2} = \langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle + \langle (z_3, z_4), (z'_1, z'_2) \rangle$.
2. $\langle \lambda(z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle = \lambda z_1 \overline{z'_1} + \lambda z_2 \overline{z'_2} = \lambda \langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle$
3. $\langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) + (z'_3, z'_4) \rangle = z_1 \overline{z'_1 + z'_3} + z_2 \overline{z'_2 + z'_4} = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2} + z_1 \overline{z'_3} + z_2 \overline{z'_4} = \langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle + \langle (z_1, z_2), (z'_3, z'_4) \rangle$.
4. $\langle (z_1, z_2), \alpha(z'_1, z'_2) \rangle = \lambda z_1 \overline{\alpha z'_1} + z_2 \overline{\alpha z'_2} = \overline{\alpha} \langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle$

Análogamente al caso real, dado $H \subseteq X$ un subespacio vectorial de un espacio de Hilbert X , podemos definir

$$H^\perp = \{x \in X : \langle x, h \rangle = 0 \text{ para todo } h \in H\}$$

Y es sencillo comprobar, por las propiedades del producto escalar, que es un subespacio vectorial y que $\dim H + \dim H^\perp = \dim X$.

También podemos definir el concepto de base ortonormal como una base $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ que verifica que $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker). Análogamente al caso real, todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal; pues siempre podemos construir una usando el método de Gram-Schmidt (ver [1], pág. 167).

Notemos que en un espacio de Hilbert X es posible definir una norma de la siguiente manera: para cada $x \in X$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Es fácil ver que esta norma está bien definida, por ser $\langle x, x \rangle \geq 0$ (es definida positiva), y que por las propiedades del producto escalar, es una norma. De esta manera, todo espacio de Hilbert es un espacio normado, y al ser completo, es un *espacio de Banach* (ver [1], pág. 27). Este hecho justifica el exigir la propiedad de completitud a un espacio de Hilbert, pues esta norma induce una métrica en X , y gracias a ello podemos hablar de sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes (un conjunto es completo si toda sucesión de Cauchy en él es convergente).

3. ESPACIOS DE HILBERT

Ejemplo 3.2. Sea $X = \mathbb{C}^2$. La *norma usual* inducida por el producto escalar usual es

$$\|(z_1, z_2)\| = \sqrt{\langle (z_1, z_2), (z_1, z_2) \rangle} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$

Una propiedad conocida es la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que se verifica en espacios prehilbertianos.

Teorema 3.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea E un espacio vectorial y $B(x, y)$ una forma sesquilineal hermítica y positiva sobre E . Se verifica, para cada $x, y \in E$, que

$$|B(x, y)| \leq B(x, x)^{1/2} B(y, y)^{1/2}$$

Una demostración clásica de este hecho puede consultarse en [1], pág. 154.

Como consecuencia inmediata de la definición de $\|\cdot\|$, tenemos el siguiente importante resultado.

Corolario 3.1. Sea X un espacio prehilbertiano. Entonces, para cada $x, y \in X$, se verifica que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

3.2 El operador adjunto y operadores unitarios

Ya que los espacios de Hilbert son espacios vectoriales, podemos hablar de aplicaciones lineales entre ellos y de formas lineales. De entre ellas, en el contexto de la computación cuántica nos interesarán aquellas que sean *unitarias*. Para poder definirlas correctamente, necesitamos un poco de teoría de espacios de Hilbert.

Lema 3.1. Sean X, Y espacios de Hilbert y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces, f es continua si y sólo si $f(S_X) = f(\{x \in X : \|x\| = 1\})$ es acotado.

Una demostración de este hecho puede consultarse en [1].

Lema 3.2. Sean X, Y, Z tres espacios normados y $u : X \times Y \rightarrow Z$ una aplicación sesquilineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) u es continua en $(0, 0)$.
- ii) Existe $M > 0$ tal que $\|u(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para cada $(x, y) \in X \times Y$
- iii) u es continua en $X \times Y$.

Demostración.

iii) \implies i) Es trivial.

i) \implies ii) Tomando $\epsilon = 1$, entonces por i) existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$, $\|y\| \leq \delta$, entonces $\|u(x, y)\| \leq \epsilon = 1$. Si fuese $x = 0$ ó $y = 0$, el resultado es claro puesto que

$$\|u(0, y)\| = \|u(x, 0)\| = \|0\| = 0 \leq M\|x\|\|0\| = M\|0\|\|y\| = 0$$

Si es $x \neq 0, y \neq 0$, entonces se verifica que $\left\| \frac{\delta x}{\|x\|} \right\| = \frac{\delta\|x\|}{\|x\|} = \delta$, $\left\| \frac{\delta y}{\|y\|} \right\| = \frac{\delta\|y\|}{\|y\|} = \delta$, y por tanto por el razonamiento anterior,

$$\left\| u \left(\frac{\delta x}{\|x\|}, \frac{\delta y}{\|y\|} \right) \right\| \leq 1$$

Aplicando finalmente sesquilinealidad, tenemos que

$$\frac{\delta^2}{\|x\|\|y\|} \|u(x, y)\| \leq 1$$

$$\|u(x, y)\| \leq \delta^2 \|x\| \|y\|$$

ii) \implies iii) Sea $(a, b) \in X \times Y$. Se verifican, para cada $(x, y) \in X \times Y$, usando la desigualdad triangular y la sesquilinealidad:

$$\|u(x, y) - u(a, b)\| = \|u(x, y) - u(a, y) + u(a, y) - u(a, b)\| \leq \|u(x - a, y)\| + \|u(a, y - b)\|$$

Y además, por hipótesis, se verifica que

$$\|u(x, y) - u(a, b)\| \leq \|u(x - a, y)\| + \|u(a, y - b)\| \leq M\|x - a\|\|y\| + M\|a\|\|y - b\|$$

Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta_2 > 0$ de modo que $\delta_2 < \frac{\epsilon}{2M\|a\|}$ si $a \neq 0$ y $\delta_2 < \frac{\epsilon}{2M(\|b\| + \delta_2)}$, tenemos que si $\|x - a\| < \delta_1$ y $\|y - b\| < \delta_2$, entonces $\|u(x, y) - u(a, b)\| < \epsilon$, lo que queríamos probar. Si fuese $a = 0$, entonces el resultado es trivial tomando $\delta_1 = \frac{\epsilon}{\|y\|}$. \square

3. ESPACIOS DE HILBERT

Teorema 3.2 (Fréchet-Riesz). Sea X un espacio de Hilbert y sea $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua. Existe un único $a \in X$ tal que $f = f_a$, donde $f_a : X \rightarrow \mathbb{K}$ es la aplicación definida por $f_a(x) = \langle x, a \rangle$.

Demostración. Sea $H = \ker f$. Observemos que se verifica, por ser f lineal:

$$\dim H + \dim \operatorname{Im} f = \dim X$$

Como $\dim \mathbb{K} = 1$ como \mathbb{K} -espacio vectorial, entonces $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$. Si fuese 0, entonces es $f = 0$ (la aplicación nula), y bastaría tomar $a = 0$.

Supongamos pues, que $\dim \operatorname{Im} f = 1$. Entonces, $\dim H = \dim X - 1$, y por ser $\dim H + \dim H^\perp = \dim X$, entonces $\dim H^\perp = 1$. Luego podemos tomar $b \in H^\perp$ con $b \neq 0$, y se cumple que $H^\perp = \mathcal{L}(b)$. De esta manera, como $X = H + H^\perp$, cada $x \in X$ se puede expresar de la forma $x = y + \alpha b$, $y \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Tomamos $a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b$. Veamos que a verifica las propiedades del enunciado: sea $x \in X$. Por un lado,

$$f(x) = f(y + \alpha b) = f(y) + \alpha f(b) = \alpha f(b)$$

por la linealidad de f y que $y \in \ker f$.

Por otro lado,

$$\langle x, a \rangle = \langle y + \alpha b, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b \rangle = \frac{f(b)}{\|b\|^2} \langle y, b \rangle + \alpha \frac{f(b)}{\|b\|^2} \langle b, b \rangle = \alpha f(b)$$

Ya que $\langle y, b \rangle = 0$ por ser $y \in H$, $b \in H^\perp$. Esto prueba que $f = f_a$.

Veamos la unicidad. Sea $a' \in X$ tal que $f = f_{a'}$. Entonces, para cada $x \in X$, se verifica que:

$$f(x) = \langle x, a \rangle = \langle x, a' \rangle$$

de donde deducimos que

$$0 = \langle x, a - a' \rangle$$

Lo que significa que $a - a' \in X^\perp = \{0\}$. De aquí, $a = a'$. □

El siguiente teorema finalmente nos termina de preparar el camino para definir los operadores unitarios.

Teorema 3.3. *Sea X un espacio de Hilbert y sea $B : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ una forma sesquilineal y continua. Entonces, existe una única aplicación lineal y continua $f : X \rightarrow X$ tal que $B(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$ para cada $(x, y) \in X \times X$.*

Demostración. Fijado $y \in X$, podemos definir $g_y : X \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $g_y(x) = B(x, y)$. Claramente g_y es lineal por serlo la primera componente de B , y además tenemos que, gracias al Lema 3.2, por ser B continua:

$$|g_y(x)| = |B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$$

Esto implica que, para $(x, y) \in S_X$, $|g_y(x)| \leq M$, y por tanto, g_y es continua. Usando ahora el Teorema 3.2, existe un único $z_y \in X$ tal que, para cada $x \in X$, se verifica que $g_y(x) = \langle x, z_y \rangle$. Esto permite definir una aplicación $f : X \rightarrow X$ como $f(y) = z_y$.

Por construcción, f verifica la igualdad del enunciado, ya que

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle x, z_y \rangle = g_y(x) = B(x, y)$$

Veamos que f es lineal: sean $y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces, aplicando la sesquilinealidad de B , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle x, f(\alpha y + \beta z) \rangle &= B(x, \alpha y + \beta z) = \\ &= \bar{\alpha}B(x, y) + \bar{\beta}B(x, z) = \bar{\alpha}\langle x, f(y) \rangle + \bar{\beta}\langle x, f(z) \rangle = \langle x, \alpha f(y) + \beta f(z) \rangle \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que, para cada $x \in X$,

$$0 = \langle x, f(\alpha y + \beta z) - (\alpha f(y) + \beta f(z)) \rangle$$

Y por tanto $f(\alpha y + \beta z) - (\alpha f(y) + \beta f(z)) \in X^\perp = \{0\}$.

Además, f es continua. Ya que para cada $x, y \in X$ es $|\langle x, f(y) \rangle| = |B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$ (por el Lema 3.2). En particular, para $x = f(y)$, tenemos que

$$\|f(y)\|^2 \leq M\|f(y)\|\|y\|$$

De aquí podemos deducir que

$$\|f(y)\| \leq M\|y\|$$

(desigualdad que también se verifica trivialmente si $f(y) = 0$). Si fijamos $y \in S_X$, $\|y\| = 1$, lo que significa que $\|f(y)\| \leq M$ y por tanto f es continua. \square

3. ESPACIOS DE HILBERT

Este teorema nos permite dar una definición importante. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A : X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua. La aplicación que envía $(x, y) \rightarrow \langle A(x), y \rangle$ es sesquilineal y continua¹. Por tanto, usando el teorema anterior, debe existir una aplicación lineal y continua $A' : X \rightarrow X$ de manera que

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A'(y) \rangle$$

Definición 3.5. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A : X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua. El *adjunto de A* , denotado A' , es la única aplicación lineal y continua $A' : X \rightarrow X$ que satisface para cada $x, y \in X$ que

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A'(y) \rangle$$

Supongamos ahora que $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ es una base ortonormal de X . Sea ahora $(k_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ la matriz asociada de A y $(k'_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ la de A' . Se verifica que, por ser la base ortonormal:

$$\langle A(u_j), u_i \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^n k_{lj} u_l, u_i \right\rangle = \sum_{l=1}^n k_{lj} \langle u_l, u_i \rangle = k_{ij}$$

Entonces, usando que el producto escalar es hermítico:

$$k_{ij} = \langle A(u_j), u_i \rangle = \langle u_j, A'(u_i) \rangle = \overline{\langle A'(u_i), u_j \rangle} = \overline{k'_{ji}}$$

Es decir, tomando conjugados e intercambiando los papeles de i y de j :

$$k'_{ij} = \overline{k_{ji}}$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$. Hemos probado:

Proposición 3.1. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A : X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua. Sea \mathcal{A}, \mathcal{B} las matrices asociadas a A y A' respectivamente fijando una base ortonormal en X . Entonces, se verifica que:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^\dagger$$

Donde \mathcal{A}^\dagger denota la matriz traspuesta conjugada de \mathcal{A} .

¹En efecto, $\langle A(x+x'), y \rangle = \langle A(x) + A(x'), y \rangle = \langle A(x), y \rangle + \langle A(x'), y \rangle$ y $\langle A(\alpha x), y \rangle = \langle \alpha A(x), y \rangle = \alpha \langle A(x), y \rangle$ y en la segunda componente es trivial por la sesquilinealidad del producto escalar. La continuidad se debe a que se trata de la composición de dos funciones continuas, A y el producto escalar.

3.2 El operador adjunto y operadores unitarios

Ejemplo 3.3. Tomemos $X = \mathbb{C}^2$ con la base ortonormal canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ y el producto escalar usual dado por $\langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2}$. Consideramos la aplicación $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (z_1 + (-1 + i)z_2, (1 + i)z_1 + z_2)$$

Es fácil ver que f es lineal, y que su matriz asociada es

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 + i \\ 1 + i & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz asociada del adjunto de f viene dada por

$$A' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - i \\ -1 - i & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, el adjunto de f viene dado por

$$f'(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (z_1 + (1 - i)z_2, (-1 - i)z_1 + z_2)$$

Definición 3.6. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A : X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua. Se dice que A es *unitaria* si $A' \circ A = A \circ A' = Id$, donde $Id : X \rightarrow X$ es la aplicación identidad en X .

Según lo visto antes, esta condición puede traducirse matricialmente a que $AA^\dagger = A^\dagger A = I$.

Ejemplo 3.4. El operador definido en el Ejemplo 3.3 es unitario, ya que

$$A'A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

La siguiente importante propiedad culmina nuestro estudio.

Proposición 3.2. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A : X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua. Si A es unitaria, entonces para todo $x, y \in X$, $\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. En particular, $\|A(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

3. ESPACIOS DE HILBERT

Demostración. Para todo $x, y \in X$, $\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, A'(A(y)) \rangle$ por definición de operador adjunto, y como es unitario, $A'A = Id$ y tenemos que $\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

El segundo resultado se desprende de la definición de norma: $\|A(x)\| = \sqrt{\langle A(x), A(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$. \square

Con un poco más de trabajo, es posible ver que el recíproco también es cierto. Por tanto, podemos decir que los únicos operadores que conservan la norma son los unitarios; por eso nos serán de interés en la computación cuántica (como veremos más adelante).

El algoritmo de Shor

4.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es describir el (principal) algoritmo que pone en peligro toda la criptografía clásica que se usa actualmente en gran medida: el algoritmo de Shor, que permite factorizar cualquier número natural en $O((\log N)^3)$ pasos ([2], pág. 233), donde N es el número a factorizar. El algoritmo contiene dos partes, una parte clásica que se ejecutaría en un ordenador clásico, y una parte cuántica que se ejecutaría en un ordenador cuántico. La idea clave del algoritmo subyace en el siguiente resultado.

Proposición 4.1. *Sea N un número compuesto de L bits, y sea $x \in \mathbb{Z}_N$ con $1 < x < N - 1$ una solución de la ecuación*

$$x^2 = 1 \pmod{N} \tag{4.1}$$

Entonces, o bien $\text{mcd}(x - 1, N)$ o bien $\text{mcd}(x + 1, N)$ es un factor no trivial de N y se puede calcular en $O(L^3)$ operaciones.

Demostración. Ya que $x^2 - 1 = 0 \pmod{N}$, entonces $N \mid (x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$. De aquí, N debe tener un factor común con $(x + 1)$ ó con $(x - 1)$, es decir, $\text{mcd}(x + 1, N) > 1$ ó $\text{mcd}(x - 1, N) > 1$. Además, ya que $1 < x < N - 1$, entonces $2 < x + 1 < N$ y $0 < x - 1 < N - 2$, en cualquier caso, $x - 1 < N$ y $x + 1 < N$ y por tanto $\text{mcd}(x - 1, N) < N$

4. EL ALGORITMO DE SHOR

y $\gcd(x+1, N) < N$. Esto prueba que ninguno puede ser un factor trivial de N . Mediante el algoritmo de Euclides, estos factores pueden calcularse en $O(L^3)$ operaciones (ver [2], pág. 629). \square

En general, encontrar una solución de (4.1) es difícil. Sin embargo, existe una estrategia para abordar este problema. Si $1 < y < N - 1$ es cualquier número coprimo con N y resulta que el orden r del elemento y dentro del grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ (es decir, el menor natural tal que $y^r = 1 \pmod{N}$) es par, entonces $y^{r/2}$ sería una solución de (4.1); y además cumpliría las hipótesis de la Proposición 4.1 si $y^{r/2} \not\equiv -1 \pmod{N}$ (observemos que no puede ser 1, ya que ello contradiría la definición de r). Resulta que si escogemos este número y aleatoriamente entre 2 y $N - 2$ (si no es coprimo con N , entonces habríamos encontrado un factor calculando $\gcd(y, N)$), entonces es muy probable que verifique las condiciones expuestas, lo cual nos permitiría calcular los factores como enuncia la Proposición 4.1. Este hecho se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ una factorización en números primos de un número impar. Sea x un elemento escogido aleatoriamente de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, y sea r el orden de x módulo N . Entonces,*

$$P[r \text{ es par y que } x^{r/2} \not\equiv -1 \pmod{N}] \geq 1 - \frac{1}{2^m}$$

Para demostrarlo, necesitamos primero un lema previo.

Lema 4.1. *Sea p un número primo diferente de 2 y sea $\alpha \in \mathbb{N}$. Sea 2^d la mayor potencia de 2 que divide a $\varphi(p^\alpha)$. Entonces, con probabilidad de un medio 2^d divide al orden de cualquier elemento de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$.*

Demostración. Por ser $p \neq 2$, entonces es impar, y por tanto $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ es par. Esto implica que $d \geq 1$. Ya que el grupo $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ es cíclico, cualquier elemento se escribirá de la forma g^k , con g el generador del grupo y $1 \leq k \leq \varphi(p^\alpha)$. Sea r el orden de dicho elemento.

- Si es k impar, ya que $(g^k)^r = g^{kr} = 1 \pmod{p^\alpha}$ entonces por el Teorema de Lagrange debe ser $\varphi(p^\alpha) | kr$. De aquí, 2^d divide a kr , y por ser k impar, necesariamente 2^d divide a r , el orden del elemento.

- Si es k par, entonces

$$g^{\frac{k}{2}\varphi(p^\alpha)} = \left(g^{\varphi(p^\alpha)}\right)^{k/2} = 1^{k/2} = 1 \pmod{p^\alpha}$$

Como r es el orden del elemento g^k , entonces necesariamente $r|\varphi(p^\alpha)/2$. Ya que 2^{d-1} es la mayor potencia de 2 que divide a $\varphi(p^\alpha)/2$, de aquí deducimos que 2^d no puede dividir a r .

Como exactamente la mitad de elementos de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ se expresan con k par y la mitad con k impar, esto concluye la demostración. \square

Ahora podemos demostrar el Teorema 4.1.

Demostración. Probaremos que

$$P[r \text{ es impar } \text{ ó } x^{r/2} = -1 \pmod{N}] \leq \frac{1}{2^m}$$

Por el Teorema Chino de los Restos, elegir un elemento x aleatoriamente de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ es equivalente a elegir x_j aleatoriamente de $(\mathbb{Z}/p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z})^*$, para $j = 1, \dots, m$ tales que $x = x_j \pmod{p_j^{\alpha_j}}$. Sea r_j el orden de x_j en $(\mathbb{Z}/p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z})^*$, r el orden de x en $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, 2^d la mayor potencia de 2 que divide a r y 2^{d_j} la mayor potencia de 2 que divide a r_j .

- Si es r impar, entonces ya que $r_j|r$ para cada j (porque $x_j^r = x^r \pmod{p_j^{\alpha_j}}$. Como $x^r = 1 \pmod{N}$, entonces $x^r = 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$. Entonces, $x_j^r = 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ y de aquí el orden $r_j|r$; si r es impar entonces r_j es impar, y de aquí, $d_j = 0$ para todo j .
- Si r es par y es $x^{r/2} = -1 \pmod{N}$, entonces $x^{r/2} = -1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, esto es, $x_j^{r/2} = -1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$. De aquí, $r_j \nmid (r/2)$. Ya que $r_j|r$, necesariamente $d = d_j$ para cada j (porque la mayor potencia de 2 que divide a r_j será exactamente 2^d , no puede ser menor porque $r_j \nmid (r/2)$).

En definitiva, hemos probado que si r es impar ó $x^{r/2} = -1 \pmod{N}$, entonces d_j toma el mismo valor para cada j . Esto implica que cada d_j debe dividir (o no dividir) a cada r_j simultáneamente. Por el Lema 4.1, la probabilidad de que esto ocurra es

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^m}$$

Por contención de sucesos, finalmente

$$P[r \text{ es impar } \text{ ó } x^{r/2} = -1 \pmod{N}] \leq P[d_j = k \text{ para cada } j] \leq P[d_j|r_j \text{ ó } d_j \nmid r_j \text{ para cada } j] = \frac{1}{2^m}$$

\square

4. EL ALGORITMO DE SHOR

Una consecuencia inmediata del Teorema 4.1 es que si el número que queremos factorizar N tiene 2 factores primos (como suele usarse en criptografía, como es el caso del algoritmo RSA), entonces tenemos la garantía de que usando el procedimiento descrito anteriormente, daremos al menos un 75 % de las veces con un elemento y que nos permita hallar los factores de N usando la Proposición 4.1. Un resumen de un algoritmo para factorizar sería el siguiente:

1. Si N es par, devolver el factor 2.
2. Elegir aleatoriamente y entre 2 y $N - 2$. Si $\text{mcd}(y, N) > 1$, devolver el factor $\text{mcd}(y, N)$.
3. Encontrar el orden r del elemento y módulo N .
4. Si r es par y $x^{r/2} \not\equiv -1 \pmod{N}$, entonces calcular $\text{mcd}(x^{r/2} - 1, N)$ y $\text{mcd}(x^{r/2} + 1, N)$, comprobar cuál de ellos es un factor no trivial y devolver dicho factor. En caso contrario, volver al paso 2.

Gracias al algoritmo de Euclides y la exponenciación modular, todos los pasos de este algoritmo se pueden ejecutar en tiempo polinomial excepto el paso 3. Este problema se conoce como el problema de encontrar el orden, y no existe ningún método eficiente para resolverlo en un ordenador clásico. Sin embargo, usando la computación cuántica, sí es posible resolver este problema eficientemente. En realidad, el algoritmo descrito es un esquema del algoritmo de Shor, con la salvedad de que el paso 3 se resuelve con un circuito cuántico, se obtienen los resultados y se prosigue en un ordenador clásico para culminar con la obtención del factor. Veremos cómo se construye este circuito en un ordenador cuántico y por qué funciona.

4.2 Computación cuántica

4.2.1 Bits y qubits

Ahora que hemos visto la motivación por la que necesitamos un ordenador cuántico, trataremos de describir cómo funciona. En el corazón de la computación clásica se encuentra el concepto de *bit*, la unidad mínima de información que describe un sistema clásico 2-dimensional. Matemáticamente, podemos modelar un bit como un elemento de $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, y n bits como un elemento de \mathbb{Z}_2^n , donde la coordenada i -ésima representa el valor

del bit i -ésimo. De este concepto surgen las *puertas lógicas*, mecanismos que convierten un conjunto de bits en otro. Matemáticamente, estas puertas lógicas se modelan como funciones $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m$.

Ejemplo 4.1. La puerta lógica AND implementa la operación lógica de conjunción (&) y se define de esta manera:

$$f : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$(0, 0) \mapsto 0$$

$$(0, 1) \mapsto 0$$

$$(1, 0) \mapsto 0$$

$$(1, 1) \mapsto 1$$

La computación cuántica surge como una generalización de estos conceptos. De igual manera que en la computación clásica, en la computación cuántica se encuentra el concepto de *qubit*.

Definición 4.1. Un *qubit* es la unidad mínima de información describiendo un sistema cuántico 2-dimensional.

Un qubit se modela como un elemento del espacio de Hilbert \mathbb{C}^2 . Como ya vimos, este es un espacio vectorial y posee una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ (por ejemplo, la canónica: $\{(0, 1), (1, 0)\}$). Así, todo qubit puede expresarse como una combinación \mathbb{C} -lineal de los elementos de la base. En el contexto de la computación cuántica, a estos elementos es usual denotarlos usando la notación de Dirac de esta manera:

$$|0\rangle = e_1$$

$$|1\rangle = e_2$$

y se denominan los *estados básicos*. Con lo que cualquier qubit puede expresarse de la forma $c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Una restricción importante que se impone sobre los qubits es que para todo qubit $x \in \mathbb{C}^2$, $\|x\|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ (lo cual ocurre si y sólo si $\|x\| = 1$, ver ejemplo 3.2). Así, cuando $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ se dice que el qubit está en el estado básico 0 y al contrario, en el estado básico 1. En cualquier otra situación, el qubit se

4. EL ALGORITMO DE SHOR

dice que está en estado de *superposición*.

Los qubits pueden ser, en cualquier momento, “observados”. Esto saca al qubit de su estado de superposición, y hace que se comporte como un bit clásico, tomando el valor 0 o el valor 1 de manera aleatoria. La probabilidad con la que toma cada valor viene dado por las coordenadas del qubit: así, un qubit $c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle$ tiene una probabilidad $|c_1|$ de valer 0 al ser observado, y $|c_2|$ de valer 1 (de aquí la imposición anterior de que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$).

Varios qubits se modelan matemáticamente usando el producto tensorial $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$, donde n es el número de qubits. Así, 2 qubits se expresan de la forma $x = c_{00} |0\rangle \otimes |0\rangle + c_{01} |0\rangle \otimes |1\rangle + c_{10} |1\rangle \otimes |0\rangle + c_{11} |1\rangle \otimes |1\rangle$, $c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11} \in \mathbb{C}$. En general, n qubits se expresan con 2^n coordenadas (pues la dimensión del producto tensorial de dos espacios vectoriales de dimensión m y n es mn). En la notación de Dirac es usual simplificar la notación del producto tensorial escribiendo simplemente $|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle |y\rangle = |xy\rangle$. En particular, cuando denotemos productos tensoriales de estados básicos, se escribirá $|i_1\rangle |i_2\rangle = |i_1 i_2\rangle$, $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$.

La observación de varios qubits es análoga a la situación anterior. Por ejemplo, para 2 qubits, tendríamos que hay una probabilidad $|c_{00}|$ de medir un 0 en el primer qubit y un 0 en el segundo, una probabilidad $|c_{10}|$ de medir un 1 en el primero y un 0 en el segundo, y así sucesivamente. Sin embargo, hay que justificar que estas probabilidades efectivamente suman 1.

Proposición 4.2. Sean $|x_1\rangle, \dots, |x_n\rangle$ n qubits, con $|x_i\rangle = x_0^{(i)} |0\rangle + x_1^{(i)} |1\rangle$. Entonces, $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle$ verifica que

$$\| |x_1 x_2 \dots x_n\rangle \|^2 = \left\| \sum_{i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}} \left(\left(\prod_{j=1}^n x_{i_j}^{(j)} \right) |i_1 i_2 \dots i_n\rangle \right) \right\|^2 = 1$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción. Para $n = 1$ el resultado se tiene por definición de qubit.

Supongamos el resultado cierto para $n = k$, y denotemos por simplicidad

$$|x_1 \dots x_k\rangle = \alpha_0 |00 \dots 0\rangle + \alpha_1 |00 \dots 1\rangle + \dots + \alpha_{2^k-1} |11 \dots 1\rangle$$

Entonces, si $|x_{k+1}\rangle = \beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle$,

$$\begin{aligned} |x_1 \dots x_k\rangle |x_{k+1}\rangle &= \beta_0(\alpha_0 |00 \dots 00\rangle + \alpha_1 |00 \dots 10\rangle + \dots + \alpha_{2^k-1} |11 \dots 10\rangle) + \\ &+ \beta_1(\alpha_0 |00 \dots 01\rangle + \alpha_1 |00 \dots 11\rangle + \dots + \alpha_{2^k-1} |11 \dots 11\rangle) \end{aligned}$$

Por tanto sacando factor común,

$$\| |x_1 \dots x_{k+1}\rangle \|^2 = |\beta_0|^2 \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\alpha_j|^2 \right) + |\beta_1|^2 \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\alpha_j|^2 \right)$$

Por hipótesis de inducción, $(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\alpha_j|^2) = 1$ y además $|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ por ser $|x_{k+1}\rangle$ qubit, así,

$$\| |x_1 \dots x_{k+1}\rangle \|^2 = |\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 = 1$$

□

4.2.2 Puertas cuánticas y circuitos cuánticos

Una vez que hemos definido el concepto de qubit y cómo se modelan matemáticamente, el siguiente paso es definir el concepto de puerta cuántica; que no es más que una función $f : \mathbb{C}^{\otimes 2n} \rightarrow \mathbb{C}^{\otimes 2n}$ (envía n qubits a n qubits). Ya que, como vimos, estos dos espacios son espacios vectoriales, podemos tratar f como una aplicación lineal. Además, ya que f debe enviar qubits a qubits, debe verificarse para todo $x \in \mathbb{C}^{\otimes 2n}$, que

$$\|f(x)\| = \|x\| = 1$$

Y según vimos en el capítulo anterior, esto se logra si y sólo si f es unitaria. Esta condición implica que el operador dado por A^\dagger es la inversa de A . Es decir, toda puerta cuántica debe ser reversible (biyectiva), y su inversa está dada por la matriz A^\dagger . Es por ello que toda puerta cuántica debe tener exactamente los mismos qubits de entrada y de salida.

Ejemplo 4.2. Las puertas cuánticas generalizan las puertas clásicas. Por ejemplo, la puerta $NOT : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ es aquella puerta cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. EL ALGORITMO DE SHOR

Este operador es unitario, puesto que

$$AA^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Además, verifica que

$$NOT |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$NOT |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

Ejemplo 4.3. Un ejemplo importante en la computación cuántica es el operador de Hadamard, aquel dado por la matriz

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

No es difícil ver que este operador es unitario y que verifica las siguientes identidades:

$$H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

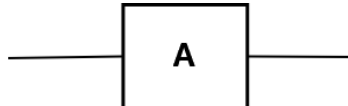
$$H |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$$H \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) = |0\rangle$$

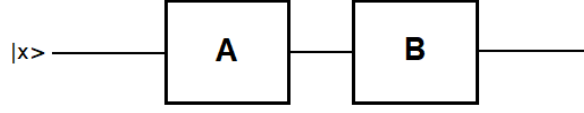
$$H \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) = |1\rangle$$

Este operador será sumamente útil, porque nos permite convertir qubits en estados básicos a qubits en estados de superposición equiprobables (50 % de medir 0, 50 % de medir 1) y viceversa.

Una sucesión de puertas cuánticas actuando sobre un conjunto de qubits forma un circuito. Para describir fácilmente circuitos que implementen algoritmos cuánticos, es común representarlos usando esquemas. Una puerta cuántica A actuando sobre un qubit se representa de esta manera:

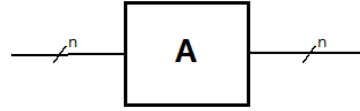


Normalmente, por convenio se supone que la computación ocurre de izquierda a derecha. De esta manera, el circuito



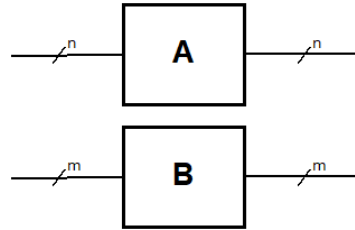
indica la operación de aplicar A y luego B sobre un qubit $|x\rangle$, es decir, $B(A(x))$. Estas dos operaciones se dice que son *secuenciales*, porque ocurre una después de la otra. Notemos que podríamos haber simplificado este circuito calculando el operador $C = B \circ A$, cuya matriz asociada viene dada de multiplicar BA , las matrices asociadas de B y de A , y reescribiendo el circuito con un solo operador actuando sobre $|x\rangle$, C .

Cuando tengamos un operador tenga más de un qubit de entrada o salida, en lugar de escribir muchas líneas, lo denotamos de esta manera:



En este caso, A sería un operador que trabaja sobre n qubits (observemos que hubiese sido equivalente haber dibujado n líneas entrando y saliendo de A).

En un circuito cuántico, también pueden ocurrir operaciones *en paralelo* sobre varios qubits. Por ejemplo:



Si $|x\rangle, |y\rangle$ son n y m qubits respectivamente, Entonces este circuito aplica, sobre la entrada $|x\rangle \otimes |y\rangle$, la operación $A|x\rangle \otimes B|y\rangle$. Este circuito podría simplificarse calculando el operador $C = A \otimes B$ (ver apéndice), cuya entrada son $n + m$ qubits, de manera que la acción del circuito podría escribirse como $C(|x\rangle \otimes |y\rangle) = (A \otimes B)(|x\rangle \otimes |y\rangle)$.

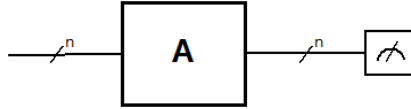
Ejemplo 4.4. El operador de Hadamard H aplicado sobre varios qubits se comporta como sigue. Dados n qubits $|x_1 \cdots x_n\rangle$ en estado básico 0, entonces el resultado de aplicar el operador H a cada uno de ellos en paralelo es:

$$H|x_1\rangle \otimes H|x_2\rangle \otimes \cdots \otimes H|x_n\rangle = H|0\rangle \otimes H|0\rangle \otimes \cdots \otimes H|x_n\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}} |i_1 \cdots i_n\rangle.$$

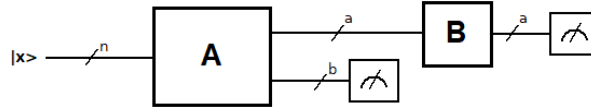
4. EL ALGORITMO DE SHOR

Por simplicidad, este operador se denota $H^{\otimes n}$, y su matriz asociada es $\frac{1}{\sqrt{2^n}} H_{2^n}$, donde H_{2^n} es la matriz de Hadamard de orden 2^n (**añadir referencia**).

Una puerta especial es la de *medición*. Cuando se coloca al final de uno o varios qubits, pasan de ser bits cuánticos a bits clásicos siguiendo la ley de probabilidad explicada anteriormente. En el siguiente ejemplo, se medirían simultáneamente n qubits tras aplicarles un operador A :



Un caso interesante es cuando se miden qubits parcialmente, por ejemplo, usando este circuito:



Donde, obviamente, $a + b = n$. En este caso, el estado de $|x\rangle$ justo después de aplicarse A es $A(|x\rangle)$. Sin embargo, después se observan los últimos b qubits de $A(|x\rangle)$; ¿cuál será entonces la entrada de B , que se aplica sobre los restantes a qubits, que no fueron observados?

Denotemos la salida de A como

$$|x_1\rangle = |y_1\rangle |z_1\rangle = \sum_{i=0}^{2^a-1} \sum_{j=0}^{2^b-1} \alpha_{ij} |ij\rangle$$

Si tras medir $|z_1\rangle$ observamos el estado $|k\rangle$, $k \in [0, 2^b - 1]$ (el cual ocurrirá con probabilidad $\sum_{i=0}^{2^a-1} |\alpha_{ik}|^2$), entonces parece lógico que el estado final del sistema tras medir los últimos b qubits sea

$$|y\rangle = \sum_{i=0}^{2^a-1} \alpha_{ik} |ik\rangle$$

Sin embargo, el módulo de este qubit no es necesariamente 1 (en general, $|y\rangle$ no es el producto tensorial de varios qubits). Por eso, es necesario *renormalizar* el qubit:

$$|y\rangle = \frac{\sum_{i=0}^{2^a-1} \alpha_{ik} |ik\rangle}{\sqrt{\sum_{i=0}^{2^a-1} |\alpha_{ik}|^2}}$$

Puesto que ahora los últimos b qubits son siempre constantes y valen k , podemos ignorarlos, ya que ahora se comportan como bits clásicos, y finalmente nos queda que la entrada de B es:

$$|y\rangle = \frac{\sum_{i=0}^{2^a-1} \alpha_{ik} |i\rangle}{\sqrt{\sum_{i=0}^{2^a-1} |\alpha_{ik}|^2}}$$

La justificación formal de estas ideas intuitivas se apoya en la teoría de operadores de medida (ver [2]).

Ejemplo 4.5. Con la notación anterior, si $\alpha_{ik} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ para n amplitudes y valen 0 en las demás, entonces

$$|y\rangle = \frac{\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_i |i\rangle}{\sqrt{\sum_i \left| \frac{1}{\sqrt{2^n}} \right|^2}} = \frac{\sum_i |i\rangle}{\sqrt{n}}$$

Es decir, el resultado de medir un subconjunto de un conjunto de qubits en estado de superposición equiprobable, es otro estado de superposición equiprobable, cuya expresión es la suma de todos los posibles estados de los qubits no medidos y con amplitudes el inverso de la raíz cuadrada del número de estados posibles.

4.2.3 El circuito para encontrar el orden

Con estas nociones básicas, finalmente podemos presentar el circuito para resolver el problema de encontrar el orden. Con tal de dar una visión general del algoritmo, supondremos que r es una potencia de 2. El caso general requiere usar un algoritmo de fracciones continuas (ver [2]) para poder hallar r en el caso general. El circuito, no obstante, no varía; solo se trata de un paso extra al final del proceso.

Necesitaremos dos puertas cuánticas principalmente, además de la puerta de Hadamard $H^{\otimes n}$ presentada anteriormente. Una de ellas es la *transformada cuántica de Fourier*. Esta transformación actúa sobre los estados básicos $|0\rangle, \dots, |N-1\rangle$ (por ejemplo, en 2 qubits, $N = 4$) de la siguiente forma: para cada $0 \leq j \leq N-1$

$$|j\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i j k / N} |k\rangle$$

4. EL ALGORITMO DE SHOR

La definición de la transformada cuántica de Fourier (abreviadamente, *QFT*, de *Quantum Fourier Transform*) sobre un qubit se extiende por linealidad. Para que sea una puerta cuántica, debe ser un operador unitario.

Proposición 4.3. *La transformada cuántica de Fourier es un operador unitario.*

Demostración. Denotemos $A = (a_{jk})$, $k, j \in \{0, \dots, N-1\}$ la matriz asociada de *QFT* respecto de la base común de los espacios de llegada y salida $\{|0\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$. Entonces, denotando π^j la proyección sobre $|j\rangle$:

$$a_{jk} = \pi^j(QFT(|k\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i j k / N}$$

Por otro lado, denotando $A^\dagger = (b_{jk})$, $k, j \in \{0, \dots, N-1\}$, entonces:

$$b_{jk} = \overline{a_{kj}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \overline{e^{2\pi i k j / N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i j k / N}$$

Veamos que $A^\dagger A = I$. Denotemos c_{kj} las entradas de la matriz $A^\dagger A$.

- Si $k = j$, entonces:

$$c_{kk} = \sum_{j=0}^{N-1} b_{kj} a_{jk} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i k j / N} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i j k / N} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} = N \frac{1}{N} = 1$$

- Si $k \neq j$, entonces $k - j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} c_{kl} &= \sum_{j=0}^{N-1} b_{lj} a_{jk} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i l j / N} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i j k / N} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i j}{N} (k-l)} = \frac{1}{N} \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i j}{N} (k-l)} \right)^N}{1 - e^{\frac{2\pi i j}{N} (k-l)}} \end{aligned}$$

Puesto que $k - l \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{\frac{2\pi i j}{N} (k-l)} \right)^N = e^{2\pi i j (k-l)} = 1$ y esto implica que $c_{kl} = 0$.

Así pues, como $c_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$ $A^\dagger A = I$, como queríamos demostrar.

□

La otra puerta cuántica clave en la construcción del circuito es la siguiente. Dada $f : \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ una función clásica, se define el operador U_f definido sobre $m+n$ qubits como:

$$|x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle$$

donde \oplus denota la suma en \mathbb{Z}^2 bit a bit. Es posible ver que este operador es unitario, y por tanto, es una puerta cuántica válida, para cualquier f ([2]). La gran utilidad de esta puerta viene cuando el primer conjunto de qubits, x , está en un estado de superposición equiprobable y el segundo, y , vale $|0\rangle$:

$$U_f \left(\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j, 0\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j, 0 \oplus f(j)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j, f(j)\rangle$$

Como podemos ver, la puerta cuántica U_f nos permite hacer 2^m evaluaciones simultáneas de f , con cada valor en un estado de superposición equiprobable junto con los valores de entrada. Es posible ver que U_f puede ser ejecutada en un tiempo eficiente. Esto no se puede conseguir en general en un ordenador clásico, y es por ello que este algoritmo sólo puede ser ejecutado en un ordenador cuántico.

La función que nos interesa en nuestro caso es, dado N el número a factorizar y a un número coprimo con N , la función definida para cada $x \in \mathbb{Z}$ por

$$f_{a,N}(x) = a^x \pmod{N}$$

Queremos, pues, encontrar el periodo de esta función, es decir, encontrar el menor $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{Z}$,

$$f_{a,N}(r+x) = f_{a,N}(x)$$

Esta función devuelve siempre un número menor que N , por tanto, necesita $n = \log_2 N$ bits de salida. Para encontrar el periodo con seguridad, es necesario evaluar $f_{a,N}$ para todo $0 \leq x \leq N^2$ (en el peor caso, el periodo es $r = N - 1$). Por tanto, necesitaremos $m = \log_2 N^2 = 2 \log_2 N = 2n$ qubits de entrada.

El circuito que nos permite hallar el orden es el siguiente.

4. EL ALGORITMO DE SHOR

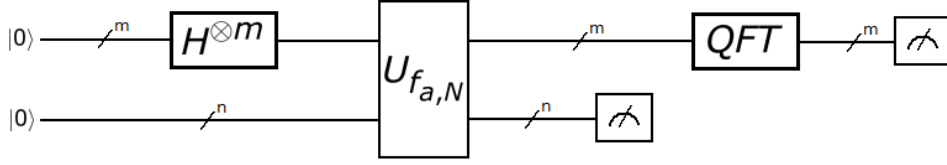


Figura 4.1: El circuito para encontrar el periodo de la función $f_{a,N}$.

Veamos cómo va evolucionando el sistema tras cada aplicación de cada puerta cuántica.

1. Comenzamos con los m y n qubits en estado $|0\rangle$, es decir, el estado del sistema es $|0, 0\rangle$.
2. Aplicamos una puerta Hadamard a los primeros m qubits, obteniendo el estado

$$(H^{\otimes m} |0\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j, 0\rangle$$

3. Aplicamos ahora el operador $U_{f_{a,N}}$, obteniendo:

$$U_{f_{a,N}} \left(\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j, 0\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j, f_{a,N}(j)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j, a^j \bmod N\rangle$$

4. Medimos los últimos n qubits del sistema. Por tanto, mediremos $\alpha = a^{\bar{x}} \bmod N$, para cierto $0 \leq \bar{x} \leq N - 1$. Sin embargo, como r es el orden del elemento a , entonces se verifica que $a^{\bar{x}+kr} = a^{\bar{x}} \bmod N$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En total, de los 2^m valores en los que hemos evaluado f , en total habrá

$$\left\lfloor \frac{2^m}{r} \right\rfloor$$

valores de x que son iguales a α , módulo N .

Tal y como habíamos anunciado, haremos la asunción que r divide a 2^m con el objetivo de simplificar los resultados de aquí en adelante. Por tanto, el número de valores es exactamente $\frac{2^m}{r}$. Siguiendo pues el razonamiento del Ejemplo 4.5, el estado del sistema será

$$\frac{\sum_{\{x: a^x = \alpha \bmod N\}} |x, \alpha\rangle}{\sqrt{\frac{2^m}{r}}}$$

Por la periodicidad de $f_{a,N}$, podemos reescribir el estado anterior observando que podemos expresar los $\frac{2^m}{r}$ valores como $t_0 + kr$ para cierto $t_0 \in \mathbb{Z}$ y $k = 0, \dots, \frac{2^m}{r} - 1$:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} |t_0 + kr, \alpha\rangle}{\sqrt{\frac{2^m}{r}}}$$

Los últimos n qubits ya pueden ser descartados puesto que ya han sido medidos, quedándonos los m qubits en el siguiente estado en superposición:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} |t_0 + kr\rangle}{\sqrt{\frac{2^m}{r}}}$$

5. Aplicamos QFT . Denotaremos $A = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^m}{r}}}$.

$$\begin{aligned} QFT \left(\frac{\sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} |t_0 + kr\rangle}{\sqrt{\frac{2^m}{r}}} \right) &= A \sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} e^{\frac{2\pi i(t_0+kr)j}{2^m}} |j\rangle = \\ &= A \sum_{j=0}^{2^m-1} \sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} e^{\frac{2\pi i(t_0+kr)j}{2^m}} |j\rangle = A \sum_{j=0}^{2^m-1} e^{\frac{2\pi i t_0 j}{2^m}} \left(\sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} e^{\frac{2\pi i k r j}{2^m}} \right) |j\rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

Veamos cuánto vale el sumatorio entre paréntesis de la expresión (4.2).

- Si j es un múltiplo de $\frac{2^m}{r}$, es decir, $j = \lambda \frac{2^m}{r}$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} e^{\frac{2\pi i k r j}{2^m}} = \sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} e^{\frac{2\pi i k r \lambda \frac{2^m}{r}}{2^m}} = \sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} e^{2\pi i k \lambda} = \sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} 1 = \frac{2^m}{r}$$

4. EL ALGORITMO DE SHOR

- En caso contrario, entonces como $e^{2\pi i \frac{r}{2^m} j} \neq 1$ al no cancelarse $\frac{r}{2^m} \notin \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{\frac{2^m}{r}-1} e^{\frac{2\pi i k r j}{2^m}} = \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i r j}{2^m}}\right)^{\frac{2^m}{r}}}{1 - e^{\frac{2\pi i r j}{2^m}}} = \frac{1 - e^{2\pi i j}}{1 - e^{\frac{2\pi i r j}{2^m}}} = 0$$

Por tanto, podemos reescribir (4.2) como

$$A \sum_{\lambda=0}^{\lfloor r/2^m-1 \rfloor} \frac{2^m}{r} e^{\frac{2\pi i t_0 \lambda 2^m}{2^m r}} \left| \lambda \frac{2^m}{r} \right\rangle = A \sum_{\lambda=0}^{\lfloor r/2^m-1 \rfloor} \frac{2^m}{r} e^{\frac{2\pi i t_0 \lambda}{r}} \left| \lambda \frac{2^m}{r} \right\rangle \quad (4.3)$$

6. Medimos los m qubits. A partir de la ecuación (4.3) es fácil ver que al medir, obtendremos

$$x = k \frac{2^m}{r}$$

Para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\frac{x}{2^m} = \frac{k}{r}$$

El miembro de la derecha de la igualdad es conocido, por tanto, basta reducir esta fracción a su forma irreducible para obtener el valor de r , terminando así el algoritmo.

Algoritmos de criptografía poscuántica

5.1 Criptografía basada en funciones hash

5.2 Criptografía basada en códigos

CAPITULO

6

Conclusiones

Bibliografía

- [1] A. Aizpuru Tomás. *Apuntes incompletos de Análisis Funcional*. Universidad de Cádiz, 2004. 11, 12
- [2] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000. 19, 20, 29, 31
- [3] Daniel J. Bernstein and Johannes Buchmann And Erik Dahmen, editors. *Post-Quantum Cryptography*. Springer, 2009.
- [4] Douglas R. Stinson. *Cryptography, Theory and Practice*. Discrete Mathematics And Its Applications. Chapman & Hall/CRC, 3 edition, 2006.
- [5] Noson S. Yanofsky and Mirco A. Mannucci. *Quantum computing for computer scientists*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] Paul R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Springer, 1916.