Apéndice A
Coordenadas

A.1 Coordenadas en el Plano $\mathbf{R}^2$

A.1.1 Cartesianas (x, y)

Dotar al plano bidimensional $\mathbf{R}^2$ de *coordenadas cartesianas 2D* es establecer una biyección entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto de parejas (x, y), donde

$$x \in \mathbf{R}, \quad y \in \mathbf{R}$$

Según estas coordenadas dividiremos al plano en cuatro cuadrantes a saber:

Cuadrantes

Notación	Nombre	Primera coordenada	Segunda coordenada
I	Primer cuadrante	$x > 0$	$y > 0$
II	Segundo cuadrante	$x < 0$	$y > 0$
III	Tercer cuadrante	$x < 0$	$y < 0$
IV	Cuarto cuadrante	$x > 0$	$y < 0$

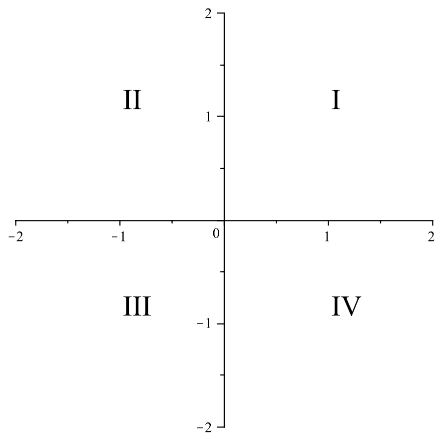

Figura A.1 Coordenadas cartesianas 2D

A.1.2 Polares (r,θ)

Dotar al plano bidimensional $\mathbf{R}^2$ de *coordenadas polares* es establecer una biyección entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto de parejas (r,θ), donde

$$\begin{aligned} r \in \mathbf{R}, &\quad \text{tal que} \quad r > 0 \\ \theta \in \mathbf{R}, &\quad \text{tal que} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

Por definición establecemos como coordenadas polares del origen del sistema de coordenadas, la pareja $(0,0)$.

Según estas coordenadas los cuadrantes definidos anteriormente se definen como:

Notación	Nombre	Primera coordenada	Segunda coordenada
I	Primer cuadrante	$r > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
II	Segundo cuadrante	$r > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
III	Tercer cuadrante	$r > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
IV	Cuarto cuadrante	$r > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

Nota A.1. Para representar un punto en el plano $2D$ dotado de coordenadas polares tendremos en cuenta las siguientes observaciones:

1. Primero establecemos un sistema de coordenadas cartesianas.
2. El origen del sistema en coordenadas cartesianas le daremos coordenadas polares $(0,0)$ y le llamaremos *polo*.
3. Al semieje positivo del eje x le llamaremos *eje polar*.

4. Para representar un punto $P(r,\theta)$ en coordenadas polares cuyas coordenadas satisfagan nuestra definición (A.1), trazaremos un rayo que parta del polo y que forme un ángulo θ con el eje polar. Luego a partir del polo mediremos sobre este rayo la cantidad r y haremos la señal del punto sobre este rayo.
5. Si nos dan un punto P en el plano y nos dicen que sus coordenadas polares son $P(r,\theta$, donde r es negativo, y θ es un número real en el intervalo $(0,\pi)$, lo que haremos es representar el punto $(-r,\theta+\pi)$. Por ejemplo, el punto $P\left(-2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ lo representaremos con el punto $\left(2,\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

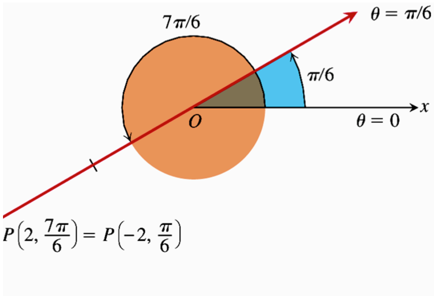

Figura A.2 Coordenadas polares

6. Si nos dan un punto P en el plano y nos dicen que sus coordenadas polares son $P(r,\theta$, donde r es negativo, y θ es un número real en el intervalo $(\pi,2\pi)$, lo que haremos es representar el punto $(-r,\theta-\pi)$. Por ejemplo, el punto $P\left(-3,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ lo representaremos con el punto $\left(3,\dfrac{\pi}{4}\right)$.
7. Si nos dan un punto P en el plano y nos dicen que sus coordenadas polares son $P(r,\theta$, donde r es positivo, pero θ es un número real definido en un intervalo diferente de $(0,2\pi)$, lo que haremos es sumar o restar múltiplos de π de hasta obtener un ángulo en el intervalo $(0,2\pi)$. Representaremos entonces $(r),\theta)$, donde ambos tanto r como θ satisfagan nuestra definición (A.1)

A.2 Coordenadas en el Espacio $\mathbf{R}^3$

A.2.1 Cartesianas (x,y,z)

Dotar al espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ de *coordenadas cartesianas* es establecer una biyección entre el conjunto de puntos de espacio tridimensional y el conjunto de ternas (x,y,z), donde

$$x \in \mathbf{R}, \quad y \in \mathbf{R}, \quad z \in \mathbf{R}$$

Octantes

Notación	Nombre	Primera coordenada	Segunda coordenada	Tercera coordenada
I	Primer octante	$x > 0$	$y > 0$	$z > 0$
II	Segundo octante	$x < 0$	$y > 0$	$z > 0$
III	Tercer octante	$x < 0$	$y < 0$	$z > 0$
IV	Cuarto octante	$x > 0$	$y < 0$	$z > 0$
V	Quinto octante	$x > 0$	$y > 0$	$z < 0$
VI	Sexto octante	$x < 0$	$y > 0$	$z < 0$
VII	Séptimo octante	$x < 0$	$y < 0$	$z < 0$
VIII	Octavo octante	$x > 0$	$y < 0$	$z < 0$

Superficies elementales

Si $a, b, c \in \mathbf{R}$ constantes diferentes de cero, entonces

Ecuación	Descripción cartesiana
$x = 0$	Plano coordenado yz
$y = 0$	Plano coordenado xz
$z = 0$	Plano coordenado xy
$x = a$	Plano paralelo al plano yz
$y = b$	Plano paralelo al plano xz
$z = c$	Plano paralelo al plano xy

A.2.2 *Cilíndricas* (r, θ, z)

Dotar al espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ de *coordenadas cilíndricas* es establecer una biyección entre el conjunto de puntos de espacio tridimensional y el conjunto de ternas (r, θ, z), donde

$$\begin{aligned} &r \in \mathbf{R}, \quad \text{tal que} \quad r > 0 \\ &\theta \in \mathbf{R}, \quad \text{tal que} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ &z \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

En otras palabras la terna que representa un punto P en el espacio $3D$ con coordenadas cilíndricas está formada por las coordenadas polares del punto Q, que es la proyección de P sobre el plano xy, y una tercera coordenada que es la misma tercera coordenada del punto en coordenadas cartesianas.

Por definición establecemos como coordenadas cilíndricas:

1. Al origen del sistema de coordenadas, la terna $(0,0,0)$,
2. A cualquier punto sobre el eje z, la terna $0,0,z$, donde $z \in \mathbf{R}$.

Las COORDENADAS CILÍNDRICAS están relacionadas con las coordenadas cartesianas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

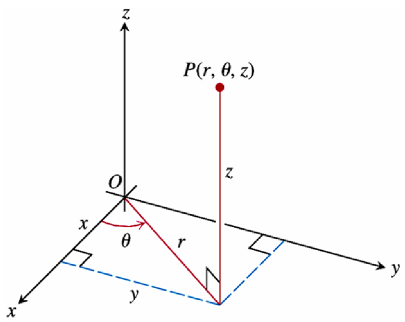

Figura A.3 Coordenadas cilíndricas

Octantes

Notación	Nombre	Primera coordenada	Segunda coordenada	Tercera coordenada
I	Primer octante	$r > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$z > 0$
II	Segundo octante	$r > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$z > 0$
III	Tercer octante	$r > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$z > 0$
IV	Cuarto octante	$r > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	$z > 0$
V	Quinto octante	$r > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$z < 0$
VI	Sexto octante	$r > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$z < 0$
VII	Séptimo octante	$r > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$z < 0$
VIII	Octavo octante	$r > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	$z < 0$

Superficies elementales

Si $a, b, c \in \mathbf{R}$ constantes diferentes de cero, entonces

Ecuación	Descripción cartesiana
$r = 0$	Origen de coordenadas
$\theta = 0$	Semiplano xz, con $x > 0$
$\theta = \pi$	Semiplano xz, con $x < 0$
$z = 0$	Plano coordenado xy
$r = a$	Cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
$\theta = b$	Semiplano perpendicular al plano xy y lo intercepta en el rayo $\theta = b$
$z = c$	Plano paralelo al plano xy

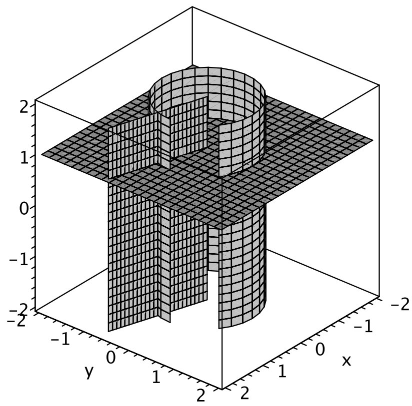

Figura A.4 Coordenadas cilíndricas 3D (r, θ, z): $r =$ const. (Cilindro), $\theta =$ const. (Semiplano vertical), $z =$ const. (Plano horizontal)

A.2.3 Esféricas (ρ, θ, ϕ)

Dotar al espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ de *coordenadas esféricas* es establecer una biyección entre el conjunto de puntos de espacio tridimensional y el conjunto de ternas (ρ, θ, ϕ), donde

$$\begin{aligned} \rho &\in \mathbf{R}, \quad \text{tal que} \quad \rho > 0 \\ \theta &\in \mathbf{R}, \quad \text{tal que} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ \phi &\in \mathbf{R}, \quad \text{tal que} \quad 0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

Por definición establecemos como coordenadas esféricas del origen la terna $(0, 0, 0)$, Las COORDENADAS ESFÉRICAS están relacionadas con las coordenadas cartesianas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

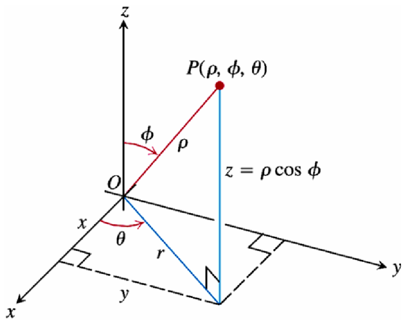

Figura A.5 Coordenadas esféricas

Octantes

Notación	Nombre	Primera coordenada	Segunda coordenada	Tercera coordenada
I	Primer octante	$\rho > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$
II	Segundo octante	$\rho > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$
III	Tercer octante	$\rho > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$
IV	Cuarto octante	$\rho > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$
V	Quinto octante	$\rho > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$
VI	Sexto octante	$\rho > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$
VII	Séptimo octante	$\rho > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$
VIII	Octavo octante	$\rho > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

Superficies elementales

Si $a, b, c \in \mathbf{R}$ constantes diferentes de cero, entonces

Ecuación	Descripción cartesiana
$\rho = 0$	Origen de coordenadas
$\theta = 0$	Semiplano xz, con $x > 0$
$\theta = \pi$	Semiplano xz, con $x < 0$
$\phi = 0$	Semieje z siendo $z > 0$
$\phi = \dfrac{\pi}{2}$	Plano coordenado xy
$\phi = \pi$	Semieje z siendo $z < 0$
$\rho = a$	Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
$\theta = b$	Semiplano perpendicular al plano xy y lo intercepta en el rayo $\theta = b$
$\phi = c \neq \dfrac{\pi}{2}$	Semicono recto de revolución $x^2 + y^2 - d^2 z^2 = 0$, con $d = \tan c$

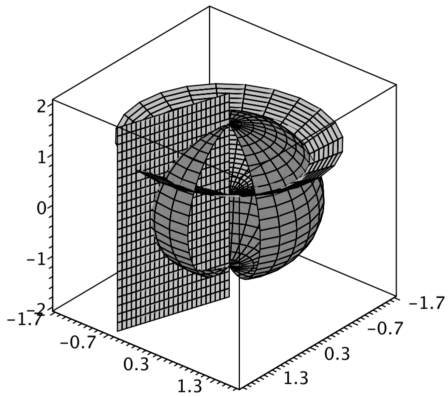

Figura A.6 Coordenadas esféricas 3D (ρ, θ, ϕ): $\rho =$ const. (Esfera), $\theta =$ const. (Semiplano vertical), $\phi =$ const. (Semicono)

A.3 Ejercicios

A.1. Encontrar las coordenadas polares (r, θ) del punto $P(x, y)$ del plano dado en coordenadas cartesianas. Use el argumento principal y la medida en radianes para el ángulo θ.

(a) $P(2,3)$
(b) $P(-1,2)$
(c) $P(3,-4)$
(d) $P(-1,-1)$
(e) $P(2.34,-1.78)$
(f) $P(-4.54,\pi)$
(g) $P(\pi/2,-\pi/2)$

A.2. Encontrar las coordenadas cartesianas (x, y) del punto $P(r, \theta)$ del plano dado en coordenadas polares. El ángulo θ está medido en radianes.

(a) $P(1,\pi/4)$
(b) $P(-1,\pi/3)$
(c) $P(3,-\pi/8)$
(d) $P(-1,-\pi/3)$
(e) $P(-1,-3)$
(e) $P(2,5.25)$

A.3. Encontrar la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos $A(1,4)$ y $B(7,-2)$.

A.4. Encontrar la ecuación en coordenadas cartesianas de la elipse con centro en el origen y que pasa por $P(1,-10\sqrt{2}/3)$ y $Q(-2,5\sqrt{5}/3)$. Escribir esta ecuación en coordenadas polares.

A.5. Encontrar las coordenadas cilíndricas (r,θ,z) del punto $P(x,y,z)$ dado en coordenadas cartesianas. Identifique el octante en el cual se encuentra.

(a) $P(1,1,1)$
(b) $P(-1,1,1)$
(c) $P(1,-1,1)$
(d) $P(1,1,-1)$
(e) $P(-1,-1,1)$
(f) $P(1,-1,-1)$
(g) $P(-1,1,-1)$
(h) $P(-1,-1,-1)$

A.6. Encontrar las coordenadas esféricas (ρ,ϕ,θ) del punto $P(x,y,z)$ dado en coordenadas cartesianas.

(a) $P(1,1,1)$
(b) $P(-1,1,1)$
(c) $P(1,-1,1)$
(d) $P(1,1,-1)$
(e) $P(-1,-1,1)$
(f) $P(1,-1,-1)$
(g) $P(-1,1,-1)$
(h) $P(-1,-1,-1)$

A.7. Considere el punto P que en coordenadas cartesianas tiene coordenadas $P(3,-5,2)$. Halle las coordenadas del punto Q según la condición exigida. Identifique los octantes en los cuales se encuentran P y Q.

(a) Simétrico respecto del eje x.
(b) Simétrico respecto del eje y.
(c) Simétrico respecto del eje z.
(a) Simétrico respecto del plano coordenado xy.
(a) Simétrico respecto del plano coordenado xz.
(a) Simétrico respecto del plano coordenado yz.
(a) Simétrico respecto del origen de coordenadas.

A.8. Escribir en coordenadas cilíndricas de las siguientes ecuaciones. Exprese su resultado en la forma $z=f(r,\theta)$.

(a) $x^2+y^2+z^2=9$
(b) $x^2+y^2-4z^2=16$
(c) $-x^2-y^2+36z^2=9$
(d) $3z=x^2+y^2$
(e) $z=xy$

A.9. Escribir en coordenadas esféricas de las siguientes ecuaciones. Simplifique su resultado.

(a) $x^2+y^2+z^2=25$
(b) $x^2+y^2-4z^2=16$
(c) $-x^2-y^2+36z^2=9$
(d) $x+y^2=1-z$
(e) $x+y+z=1$

A.10. Escribir en coordenadas cartesianas las siguientes ecuaciones las cuales se encuentran en coordenadas cilíndricas. Exprese su resultado en la forma de una ecuación de segundo orden.

(a) $z=r^2$
(b) $z=e^r$
(c) $z=\sin r$
(d) $z=2-r^2$
(e) $z=r^2\cos 2\theta$

A.11. Escribir en coordenadas cartesianas las siguientes ecuaciones las cuales se encuentran en coordenadas esféricas. Exprese su resultado en la forma de una ecuación de segundo orden.

(a) $\rho = 2$
(b) $\phi = \dfrac{\pi}{3}$
(c) $\cos\phi = \rho \sin^2\phi \cos 2\theta$
(d) $\rho \sin\phi \cos\theta = 3$
(e) $\rho \sin^2\phi = \cos\phi$

A.12. (a) Existen puntos en el plano 2D tales que su representación cartesiana y polar numéricamente sean la misma?. En caso afirmativo encontrar todos esos puntos.

(b) Existen puntos en el espacio 3D tales que su representación cartesiana y cilíndrica numéricamente sean la misma?. En caso afirmativo encontrar todos esos puntos.

(c) Existen puntos en el espacio 3D tales que su representación cartesiana y esférica numéricamente sean la misma?. En caso afirmativo encontrar todos esos puntos.

(d) Existen puntos en el espacio 3D tales que su representación cilíndrica y esférica numéricamente sean la misma?. En caso afirmativo encontrar todos esos puntos.

Apéndice B
Vectores

B.4 Vectores en $\mathbf{R}^n$ ($n = 2, 3$)

Nos basaremos en el siguiente hecho visto en el curso de álgebra lineal: El plano de coordenadas $\mathbf{R}^2$ (o el espacio de coordenadas $\mathbf{R}^3$) es un *espacio afín* y el conjunto de todos los vectores asociados a cada punto en $\mathbf{R}^2$ (o $\mathbf{R}^3$ en el caso 3D) es un *espacio vectorial* de dimensión 2 con la base canónica los vectores **i** y **j** (o en el caso 3D los vectores **i**, **j** y **k**).

Definición B.1. Un *vector* en el espacio cartesiano $\mathbf{R}^n$ es un objeto geométrico que tiene:

1. *Magnitud*, la cual es un número real no negativo.
2. *Dirección*, la cual está determinada por una recta que lo contiene.
3. *Sentido*, el cual está determinado por uno de las dos orientaciones que determina un punto sobre la recta que lo contiene.

Dos vectores son iguales si tiene igual magnitud, dirección y sentido.

Dos puntos A y B en $\mathbf{R}^n$ determinan dos vectores a saber:

1. El vector **AB**, que tiene origen en el punto A y extremo en el punto B,
2. El vector **BA**, que tiene origen en el punto B y extremo en el punto A.
3. Si los puntos A y B tienen coordenadas cartesianas $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ (o en el caso 3D $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$), las *componentes* del vector **AB**, el cual denotaremos por **u** se definen como:

$$
\begin{array}{ll}
u^1 = b_1 - a_1 & \text{Primera componente} \\
u^2 = b_2 - a_2 & \text{Segunda componente} \\
u^3 = b_3 - a_3 & \text{Tercera componente para el caso 3D}
\end{array}
$$

y el vector $\mathbf{u}$ lo denotaremos como

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{AB} = (b_1 - a_1)\,\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\,\mathbf{j}\\ \mathbf{u} &= \mathbf{AB} = (b_1 - a_1)\,\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\,\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\,\mathbf{j} \quad \text{para el caso 3D}\end{aligned}$$

o simplemente

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)\\ \mathbf{u} &= \mathbf{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \quad \text{para el caso 3D}\end{aligned}$$

A veces decimos que un vector es un segmento de recta dirigido.

4. La *magnitud* la definiremos como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\\ \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \quad \text{para el caso 3D}\end{aligned}$$

5. La dirección está determinada por la recta AB.
6. El sentido del vector $\mathbf{u}$ es de A hacia B.

B.5 Producto escalar

Definición B.2. Sea V el conjunto de vectores de $\mathbf{R}^n$, donde $n = 2,3$. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces el *escalar* es la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida así

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u^1, u^2), \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2)\\ \mathbf{u} &= (u^1, u^2, u^3), \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3) \quad \text{para el caso 3D}\\ &\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}\\ &\qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{R}\\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= u^1 v^1 + u^2 v^2\\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \quad \text{para el caso 3D}\end{aligned}$$

Denotaremos frecuentemente el producto escalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y lo llamaremos *producto punto*.

Nota B.1. Las propiedades fundamentales que satisface el producto escalar y que fueron demostradas en el curso de álgebra lineal son:

1. Conmutatividad.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

2. Coseno del ángulo entre los vectores.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \quad \text{donde}\,\theta\,\text{es el ángulo entre} \quad \mathbf{u}\,\text{y}\,\mathbf{v}$$

3. Proyección.

$$proy_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad \text{Esta es la proyección escalar.}$$

4. Ortogonlidad.

$$\text{Si} \quad \mathbf{u}\perp\mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{B.1}$$

El recíproco de esta afirmación es válida solo si ambos vectores no son el vector nulo **O**.

B.6 Producto vectorial

Definición B.3. Sea V el conjunto de vectores de $\mathbf{R}^3$. Si $\mathbf{u}\in V$ y $\mathbf{v}\in V$, entonces el *producto vectorial* es aplicación $\cdot\times\cdot$ definida así

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = (u^1,u^2,u^3), \quad \mathbf{v} = (v^1,v^2,v^3) \\ &V\times V \longrightarrow V \\ &(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}\times\mathbf{v}\in V \end{aligned}$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(u^2v^3 - u^3v^2\right)\mathbf{i} + \left(u^3v^1 - u^1v^3\right)\mathbf{j} + \left(u^1v^2 - u^2v^1\right)\mathbf{k}$$

A veces llamaremos al producto vectorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *producto cruz*.

Nota B.2. Las propiedades fundamentales que satisface el producto vectorial y que fueron demostradas en el curso de álgebra lineal son:

1. Anticonmutatividad.

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$$

2. Ortogonalidad.
   Si **u** y **v** no son colineales, entonces

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{v}$$

3. Seno del ángulo entre los vectores.

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = |\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta| \quad \text{donde}\,\theta\,\text{es el ángulo entre} \quad \mathbf{u}\,\text{y}\,\mathbf{v}$$

De esta propiedad podemos deducir que si **u** y **v** son ambos no nulos y son no colineales, entonces

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{O}, \mathbf{v} \neq \mathbf{O}, \mathbf{v} \neq \lambda \mathbf{u}, (\lambda \in \mathbf{R}) \Longleftrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{O}$$

4. Area.
   De la propiedad anterior se deduce que el área del paralelogramo formado por los vectores **u** y **v** es

$$\text{Area paralelogramo} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

B.7 Producto mixto

Definición B.4. Sea V el conjunto de vectores de $\mathbf{R}^3$. Si $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{w} \in V$, entonces el *producto mixto* es aplicación definida así

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3), \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3), \quad \mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$$

$$V \times V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \in \mathbf{R}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$

A veces llamaremos al producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *triple producto mixto*.

Una propiedad importante demostrada en el curso de Algebra Lineal es que con el producto mixto podemos calcular el volumen del paralelepípedo formado por los vectores **u**, **v**, y **w** de la siguiente manera:

$$\text{Volumen paralelepípedo} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}|$$

B.8 Ejercicios

B.1. Trazar los vectores **v** y **w** . En la misma figura (plano cartesiano) trazar $-\mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

(a) Para $\mathbf{v} = (2, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2)$.

(b) Para $\mathbf{v} = (2, 3, -6)$, $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$.

B.2. Una fuerza constante con representación vectorial $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, mueve un objeto a lo largo de la línea recta desde el punto $A(2,3,6)$ hasta el punto $B(4,9,15)$. Encontrar el trabajo realizado si la distancia está medida en metros y la magnitud de la fuerza en newtons.

B.3. El producto $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ es llamado el triple producto vectorial. Probar que,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

B.4. Calcular el volumen del paralelepípedo con lados: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}-3\mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

B.5. Considere en el plano 2D el triángulo $\triangle ABC$ cuyos vértices están en $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ y $C(c_1,c_2)$, donde A, B y C no son colineales. Una *mediana* de un triángulo es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Sean M_1, M_2 y M_3 los puntos medios de los lados AB, BC y CA respectivamente.

(a) Dado que **AB** y **AC** forman una base $\mathscr{B}$ del plano (porqué?) escriba $\mathbf{AM_2}$, $\mathbf{BM_3}$ y $\mathbf{CM_1}$ en términos de esta base.

(b) Sea $I = \overline{AM_2}\cap\overline{BM_3}$. Escriba los vectores **AI** y **BI** en términos de la base $\mathscr{B}$.

(c) Use el hecho que $\mathbf{AB} = \mathbf{AI}+\mathbf{IB}$ y también $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}+\mathbf{CB}$ para mostrar que

$$\frac{AI}{AM_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{BI}{BM_3} = \frac{2}{3}$$

(d) Use adecuadamente el resultado anterior para mostrar que las tres medianas se interceptan en el mismo punto I.

B.6. Considere el paralelogramo en 3D $\square ABCD$ cuyos vértices están en los puntos $A(1,-1,-1)$, $B(-1,-3,1)$, $C(3,-2,-1)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$.

(a) Hallar las coordenadas de D. Use el hecho que $\mathbf{AD} = \mathbf{BC}$. Compruebe que $\mathbf{AB} = \mathbf{DC}$.

(b) Hallar el área del paralelogramo $\square ABCD$.

(c) Hallar el área del paralelogramo $\square A'B'C'D'$ el cual es la proyección ortogonal de $\square ABCD$ sobre el plano coordenado xy.

Apéndice C
Comandos de Maple

C.9 Gráficos

C.9.1 Librerías

En la redacción de este libro se usó Maple, versión 11, pero muchos de los comandos son válidos en versiones anteriores. Las librerías más usadas son: plottools, plots, linalg.
Estas se pueden cargar en la primera línea, antes con el siguiente comando:

```
  > restart: with(plottools): with(plots): with(linalg):
interface(plotoptions=color):
```

C.9.2 Función escalar

La función es: $z = x^2 - y^2$,

```
> plot3d(x∧2 - y∧2, x=-4..4, y=-4..4);
```

C.9.3 Función escalar parametrizada

$$\begin{cases} x = \sin v \cos u \\ y = \sin v \sin u \\ z = \cos v \end{cases} \tag{C.2}$$

```
> plot3d([sin(v)*cos(u), sin(v)*sin(u), cos(v)], u=0..2*Pi,
v=0..Pi/2, grid = [30,30], axes = BOXED, orientation = [45,60],
scaling=constrained);
```

C.9.4 Curvas de nivel

```
> contourplot( x∧2 - y∧2, x = -4..4, y=-4..4, grid=[30,30],
coloring = [blue,red]);
```

C.9.5 Superficie implícita

La función está definida implícitamente, por ejemplo $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$,

```
> implicitplot3d( x∧2 + y∧2 - z∧2 + 1 = 0, x=-3..3, y=-3..3,
z=-3..3);
```

C.9.6 Curva en 2D

La función es una trayectoria en $\mathbf{R}^2$, por ejemplo $x^2 - y^2 = 1$,

```
> implicitplot(x∧2 - y∧2 = 1, x=-5..5, y=-5..5):
```

C.9.7 Curva en 3D

Si la función es una trayectoria en $\mathbf{R}^3$, por ejemplo $\omega(t) = (\cos t, \sin t, t)$, entonces,

```
> spacecurve([ cos(t), sin(t), t], t=0..4*Pi);
```

C.9.8 Campo vectorial

```
> fieldplot([-y,x], x=-4..4, y=-4..4, grid=[5,5], arrows=SLIM,
color=RED);
```

C.9.9 Campo vectorial

```
> fieldplot3d([2*x,2*y,1], x = -1..1, y = -1..1, z = -1..1,
grid=[5,5,5], axes=BOXED, arrows=SLIM, color=BLACK, orientation=[35,70]);
```