Mecánica clásica

Curso 2004-2005

Segunda parte

Mecánica de la partícula

Cinemática

Juan Coll Soler

Índice

Cinemática

1. Introducción

La Cinemática es el estudio del movimiento sin considerar sus causas. Se entiende como la manera de recorrer el espacio en función del tiempo. Se puede considerar como un estudio matemático de curvas paramétricas (parámetro tiempo). Los conceptos que utilizaremos para explicar la trayectoria de un objeto en función del tiempo serán espacio (posición del objeto), velocidad y aceleración. El concepto de tiempo esta definido anteriormente en la primera parte de los apuntes, sección (conceptos complementarios). Primero explicaremos como una curva parametrica define una trayectoria en el espacio y como influye el parámetro en la manera de recorrer esta trayectoria. Veremos que estos conceptos nos permitirán en el ámbito del multimedia desplazarnos a través de una pantalla o espacio de tres dimensiones. Luego nos centraremos en los vectores posición, velocidad y aceleración estudiando la relación que existe entre ellos. Finalmente aplicaremos estos conceptos en el movimiento de un objeto empezando desde movimientos en una dimensión hasta movimiento tridimensionales. Veremos que para cada uno de ellos existen varias maneras de representar la posición (sistema de coordenadas) y de encontrar las diferentes variables (posición, velocidad, aceleración) en función de las otras utilizando las relaciones que existen entre ellas.

En Internet existe mucha información, cursos y hasta libros enteros de física general. He seleccionado estas dos direcciones de interés para nuestro curso. La primera es un curso general de física donde se pueden encontrar ejercicios sobre cinemática, dinámica, etc. La segunda es un libro entero de física general que puede ser útil para consultar.

http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/teoria/A_Franco/default.htm
http://bellota.ele.uva.es/~imartin/libro/node1.html

¿Cuando utilizar cinemática o dinámica en la programación para la simulación?

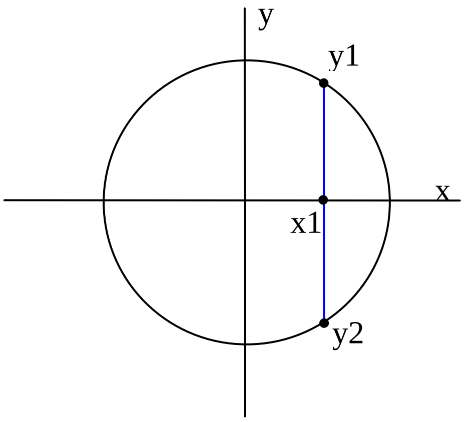
Si nuestro sistema es:

- **Predecibles**: Conocemos la trayectoria de los objetos. Por ejemplo, la caída de un cuerpo (juego Pang), un muelle (menú desplegable), el disparo de un proyectil. Utilizaremos cinemática.

- **No predecibles**: En cada instante t las fuerzas de nuestro sistema varían de manera aleatoria. No sabemos si existirán colisiones, o interacciones varias entre los diferentes objetos de la simulación. Utilizaremos en este caso la dinámica como en los juegos de última generación.

2. Trayectoria de un objeto

La trayectoria de un objeto es la línea que sigue durante su desplazamiento. Necesitamos para poder reproducirla y analizarla, representarla mediante un objeto matemático. Utilizaremos para este fin funciones paramétricas para cada uno de los ejes del sistema de referencia. El parámetro utilizado será el tiempo ya que un objeto se desplaza a medida que pasa el tiempo. Esta condición explica porque esta disciplina aparece con Galileo, en un momento de la historia donde se empieza a poder contar el tiempo de manera precisa.
Recordaremos la diferencia entre una función parametrica es decir una función que depende de un parámetro independiente de los ejes de coordenadas (ejemplo: $x(t)$, $y(t)$) y una función que relaciona estos ejes (ejemplo: $y = f(x)$).



En la figura siguiente la trayectoria seguida por el objeto es un círculo. Mediante una función que relaciona un eje del espacio con el otro, del estilo $y = f(x)$, no se puede describir ya que para un valor x1 tenemos dos valores y1 e y2.
Sin embargo con una función parametrica para cada eje la trayectoria se describe de la manera siguiente:

$$x(t) = \cos(t)$$

$$y(t) = \sin(t)$$

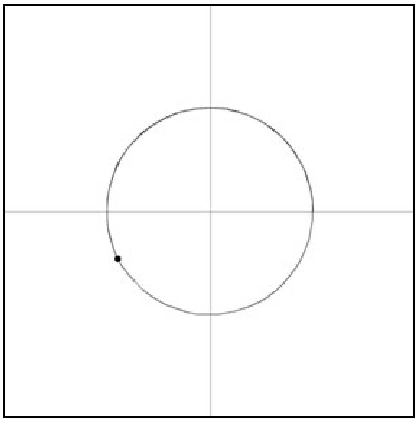
A continuación estudiaremos las curvas paramétricas analizando que elementos y de que manera influyen en la trayectoria.

2.1. *Curvas paramétricas*

Definiremos como curvas paramétricas una curva descrita por funciones paramétricas para cada uno de los ejes del referencial utilizado. Por ejemplo si trabajamos en un espacio de dos dimensiones la curva se definirá por dos funciones x(t) e y(t). A continuación veremos como influye cada uno de los elementos de las funciones sobre la trayectoria. Separaremos dos elementos. El primero es la función en si y el segundo el parámetro. Por ejemplo para la curva anterior (trayectoria circular) tenemos como elementos las funciones sin y cos, y el parámetro t. El primer elemento define la trayectoria es decir la línea que sigue, mientras el segundo nos indica de qué manera nos movemos sobre ella. Por ejemplo si el parámetro t lo remplazamos por 2t, recorremos la trayectoria el doble rápido. Ahora simplemente veremos la influencia a nivel intuitivo de cada uno de estos elementos. Mas adelante estudiaremos los conceptos de velocidad y aceleración, que nos definirán mas precisamente la trayectoria y como nos desplazamos en ella.

2.1.1. La trayectoria

El elemento que define la trayectoria son las funciones en si. A continuación vamos a ver varios ejemplos de trayectorias. Analizaremos como extraer el parámetro de la función. Los ejemplos siguientes se realizan en referenciales de dos dimensiones.

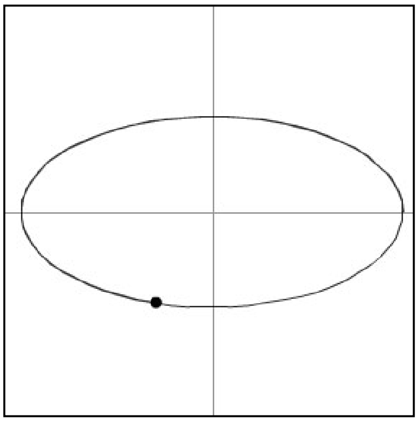


Para una **circunferencia** la curva parametrica se define por:

$$x(t) = A\cos(t)$$
$$y(t) = A\sin(t)$$

donde A es una constante.

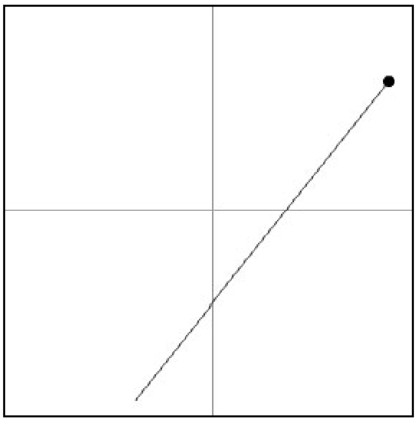
La velocidad a la que se recorre esta circunferencia es constante. Mas adelante entenderemos el porque cuando se vea los conceptos de velocidad y de aceleración. En este ejemplo el parámetro es t.



Una **elipse** se define de la misma manera que la circunferencia salvo que las constantes en cada eje son diferentes.

$$x(t) = A\cos(t)$$
$$y(t) = B\sin(t)$$

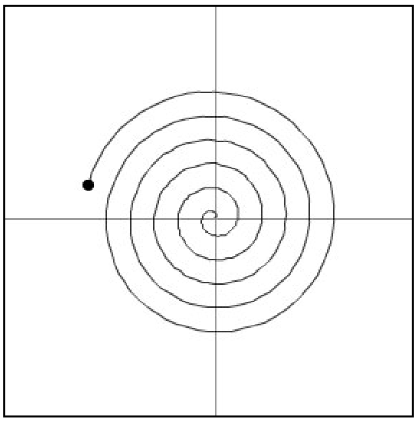
El parámetro es t.



De forma parametrica una **recta** se define por:

$$x(t) = at + b$$
$$y(t) = ct + d$$

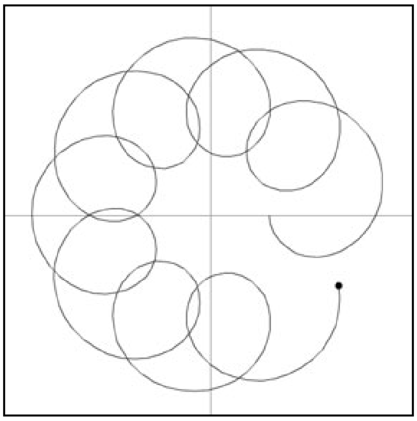
donde a, b, c, d son constantes.
El parámetro es t. En el apartado “El parámetro” estudiaremos como por ejemplo recorrer una recta no solamente hacia delante sino por ejemplo de alante para atrás repetidamente.



La **espiral** se define por

$$x(t) = t\cos(t)$$
$$y(t) = t\sin(t)$$

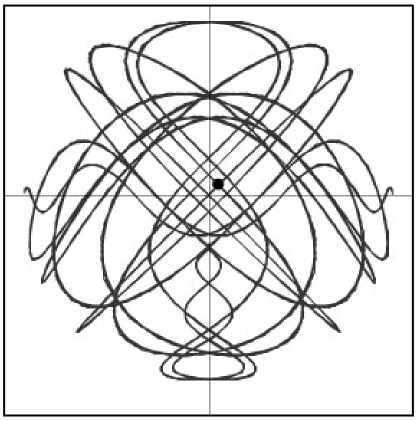
El parámetro sigue siendo t.



Cicloides:

$$x(t) = A\cos(ct) - B\cos(dt)$$
$$y(t) = A\sin(ct) - B\sin(dt)$$

Los cicloides aparecen al observar la trayectoria de las estrella contiendo como referencia la tierra. Durante muchos siglos las trayectorias de los planetas se consideraban y se calculaban como cicloides y no como elipses.



Trayectoria compleja creada a partir de la espiral modificando el parámetro en cada uno de sus ejes.

$$x(t) = 50\cos(t)\cos(50\cos(t))$$
$$y(t) = 50\sin(t)\sin(50\sin(t))$$

2.1.2. El parámetro

El parámetro de la función es la parte común en todas las funciones de cada uno de los ejes que comporte la variable del parámetro. En nuestro caso es la *t*.
Por ejemplo

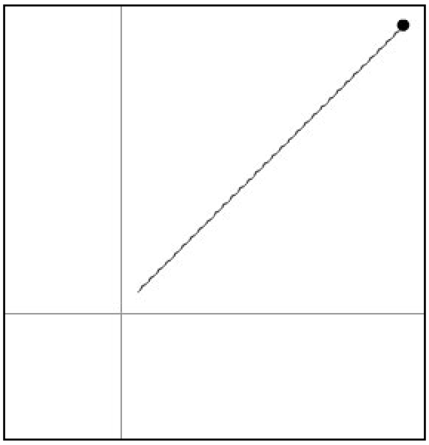
$$x(t) = 50\cos(t) + 3$$
$$y(t) = 50\cos(t) + 4$$

el parámetro es $50 * \cos(t)$. Si lo cambiamos por T obtenemos:

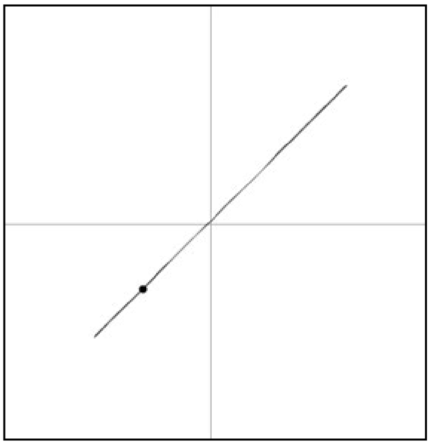
$$x(T) = T + 3$$
$$y(T) = T + 4$$

que es la trayectoria de una recta. Por lo tanto realmente la curva parametrica anterior dibuja una recta pero esta se recorre de manera distinta a la curva parametrica del capitulo anterior.

A continuación mostramos el recorrido de las recta definida por $x(t) = t + 3, y(t) = t + 4$ con el parámetro $t = t$ y $t = 50\cos(t)$.



$$x(t) = t + 3$$
$$y(t) = t + 4$$



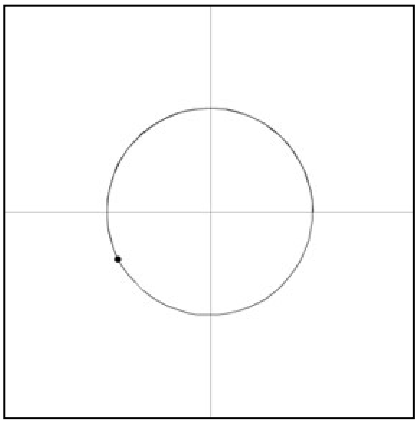
$$x(t) = 50\cos(t) + 3$$
$$y(t) = 50\cos(t) + 4$$

En el primer caso a medida que el parámetro t aumenta la recta se va dibujando hacia el infinito mientras que el segundo caso se recorre la recta con una oscilación. La trayectoria es la misma en los dos casos pero cambia la manera de recorrer-la.

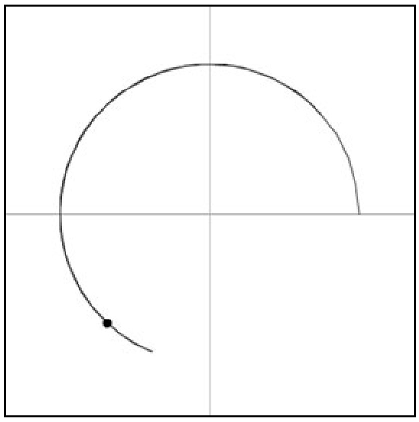
Pondremos otro ejemplo de cómo recorrer una trayectoria circular. La trayectoria de un círculo se define con las funciones paramétricas siguientes:

$$x(t) = A\cos(t)$$
$$y(t) = A\sin(t)$$

Siendo A el radio del círculo. En el primer caso el parámetro no modificamos el parámetro, $t = t$, en el segundo $t = \ln(t) + \sin(t)$.



$$x(t) = A\cos(t)$$
$$y(t) = A\sin(t)$$



$$x(t) = A\cos(\ln(t) + \sin(t))$$
$$y(t) = A\sin(\ln(t) + \sin(t))$$

En el primer caso la trayectoria se recorre a la misma velocidad. El concepto de velocidad y porque esta es constante en el caso de estas funciones paramétricas se vera posteriormente. En el segundo caso la trayectoria se recorre con una oscilación pero va avanzando.

2.2. Trayectorias rectilíneas, planas o tridimensionales

Antes de introducir los conceptos básicos de la cinemática, como la velocidad y la aceleración, simplemente recordar como se define una trayectoria en una o varias dimensiones.

En una dimensión (movimiento rectilíneo) tendremos una sola función parametrica $x(t)$. En dos dimensiones (movimiento curvilíneo plano) tendremos dos funciones paramétricas $x(t), y(t)$, una para cada eje de coordenada. En tres dimensiones tendremos $x(t), y(t), z(t)$.

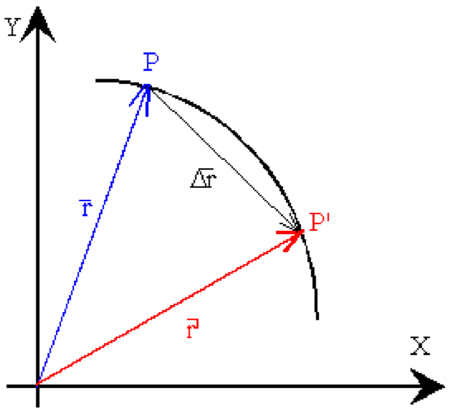
La posición de un objeto sobre una trayectoria se define entonces como un vector, teniendo como coordenadas las funciones paramétricas anteriores.

3. Vectores característicos

En este apartado detallaremos los conceptos que permiten definir y comprender mejor como un objeto se mueve sobre una trayectoria. Estos conceptos son la posición, la velocidad y la aceleración de un objeto. Dado que nos movemos en el espacio, estos elementos se definen como vectores. Este vector podrá ser de una, dos o tres dimensiones según nuestras necesidades.

3.1. Vector posición

El vector posición nos permite definir el lugar donde se encuentra un objeto en el espacio. Definiremos el incremento de posición como la diferencia entre un vector posición y otro. Por lo tanto el incremento es un vector.



Posición P , vector posición $\vec{r}$ en el tiempo t
Posición P', vector posición $\vec{r}\,'$ en el tiempo t'
Incremento de posición $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ en el incremento de tiempo $\Delta t = t' - t$

La posición de un punto se definirá mediante la funciones paramétricas en cada una de sus coordenadas. Por ejemplo tendremos el vector $\vec{r}\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ en un referencial $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

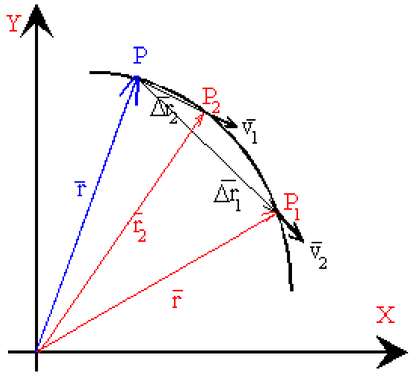
$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}.$$

3.2. Vector velocidad

La velocidad es la variación de la posición en función del tiempo. Definiremos el vector velocidad media como el incremento de posición dividido por el incremento de tiempo. La velocidad se convierte de esta forma en un vector proporcionando no solamente información sobre la magnitud de la velocidad sino también sobre sus sentido i dirección.

Vector velocidad media

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

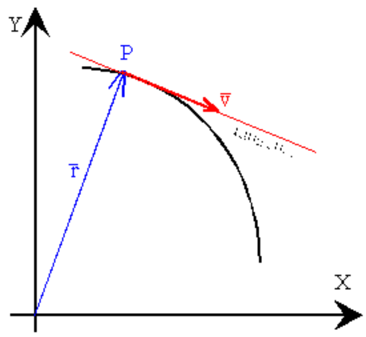


La velocidad media tiene el mismo sentido y dirección que el incremento de posición.

Definiremos la velocidad instantánea como el límite de la velocidad media cuando el incremento de tiempo tiende a cero. Por lo tanto es la derivada de la posición respecto al tiempo. El vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria.

Velocidad instantánea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Siendo $\vec{r}\left[x(t), y(t), z(t)\right]$ en un referencial $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_k(t)\,\vec{k}$$

Encontramos en muchas ocasiones una notación especial para definir la derivación respecto al tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

3.3. Vector aceleración

El vector aceleración nos informa de la variación del vector velocidad en función del tiempo. Es decir de cómo varia esta velocidad, por ejemplo si esta aumenta o disminuye en modulo, o si cambia de dirección. De la misma manera que para el vector velocidad podemos definir la aceleración media y la instantánea o en un punto.

Aceleración media

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Siendo $\vec{v}\lfloor v_x(t), v_y(t), v_z(t) \rfloor$ en un referencial $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k}$$

En notación especial

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x\,\vec{i} + \dot{v}_y\,\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

4. Relación entre las diferentes variables

En este parágrafo analizaremos la relación que existe entre las variables o vectores antes estudiados. Sabemos que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y la aceleración la derivada de la velocidad respecto al tiempo igualmente. Veremos como utilizamos esta relación responder y solucionar nuestros problemas.

Para entender esta relación es suficiente trabajar en una sola dimensión ya que si analizamos lo la derivada en un vector, esta se reduce a la derivada coordenada a coordenada. Por lo tanto es repetir 2 o 3 veces (según la dimensión del referencial) la misma operación. Trabajaremos entonces con valores escalares y no vectoriales. Para pasar al mundo vectorial no bastara con repetir lo que aplicamos para una dimensión en cada uno de los ejes de nuestro espacio.

4.1. Relación entre la posición, velocidad y aceleración

Resumiendo lo visto anteriormente a los vectores característicos obtenemos, partiendo de la posición del objeto la relación siguiente.

$$x(t) \xrightarrow{derivacion} v(t) \xrightarrow{derivacion} a(t)$$

Supongamos que conocemos la aceleración, para llegar a la posición necesitamos seguir el camino inverso por lo tanto aplicar la operación inversa a la derivación que es la integración respeto al tiempo.

$$a(t) \xrightarrow{\text{int}\,egracion} v(t) \xrightarrow{\text{int}\,egracion} x(t)$$

Posición y velocidad

- Conociendo la posición, la velocidad se deduce como $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, simplificando $v = \frac{dx}{dt}$.
- Conociendo a la velocidad, la posición se deduce integrando esta velocidad. Obtendremos la integral a partir de la ecuación anterior. $v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = vdt$ que llamaremos ecuación diferencial ya que trabaja con elementos diferenciales o infinitesimales. Como que tenemos una igualdad podemos aplicar de cada lado la operación de integración.

$$dx = vdt \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int vdt$$

Tenemos dos tipos de integrales, las indefinidas y las definidas o con intervalos.
Integrales indefinidas: $\int dx = \int vdt \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int v(t)dt + Cte$

Integrales definidas: $\int dx = \int vdt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_o}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = [V(t)]_{t_0}^{t}$

Se utiliza la letra mayúscula para la función integral: $\frac{dV(t)}{dt} = v(t)$.

Velocidad y aceleración

- Conociendo a la velocidad, la aceleración se deduce como $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, simplificando $a = \frac{dv}{dt}$.
- Conociendo a la aceleración, la velocidad se deduce como la integración de esta aceleración. Utilizando el mismo método que el anterior, obtenemos:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = adt$$

Integrales indefinidas: $\int dv = \int adt \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int a(t)dt + Cte$

Integrales definidas: $\int dv = \int adt \quad \Rightarrow \quad \int_{v_o}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \quad \Rightarrow \quad v - v_0 = [A(t)]_{t_0}^{t}$

Hemos visto los mecanismos para poder pasar de posiciones a aceleración y viceversa mientras estas sean funciones del tiempo ya que las operaciones de derivación e integración siempre se realizan respecto al tiempo. ¿Pero que pasa si nos dan la aceleración en función de la posición? Es el caso por ejemplo de los muelles en los cuales conocemos la aceleración que producen en un extremo en función del alongamiento de este. Para esto estudiaremos más en profundidad las ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente.

4.2. Ecuaciones diferenciales

Del punto anterior hemos obtenido las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$dx = vdt$$

$$dv = adt$$

Podemos encontrar otra ecuación a partir de estas dos que nos relacione las variables posición, velocidad y aceleración sin tener en cuenta el tiempo.

$$dt = \frac{dx}{v} \ y \ dt = \frac{dv}{a} \quad \Rightarrow \quad vdv = adx$$

Las ecuaciones con las que podremos resolver todos nuestros problemas son entonces las siguientes:

$$\begin{gathered} dx = vdt \\ dv = adt \\ vdv = adx \end{gathered}$$

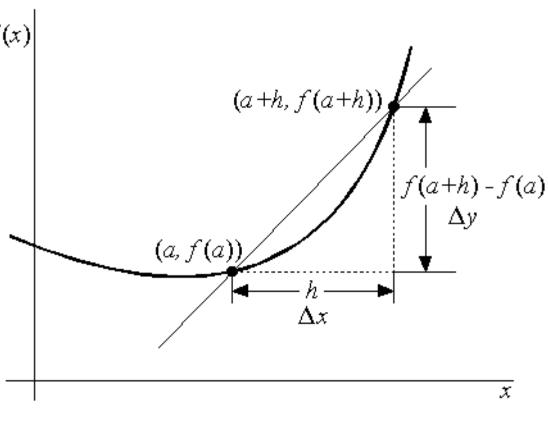
Estas resumen todas las relaciones posibles entre las variables posición, velocidad, aceleración y tiempo. Por lo tanto sabiendo utilizarlas podremos encontrar la solución a todos los problemas de cinemática. A continuación repasaremos las operaciones de integración y derivación ya que son la base de las relaciones entre variables.

4.3. Repaso Integración e derivación

4.3.1. Derivación

La derivación es la variación de una función respecto de una variable. ¿Si esta variable varia ligeramente como varia la función, aumenta rápidamente, lentamente, crece, decrece?
La derivada de una función en un punto se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Geométricamente corresponde a la pendiente de la recta tangente en el punto observado.
Por ejemplo, ¿cual es la derivada de x^2?
Aplicando la formula obtenemos

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

Propiedades de las derivadas:

Sean *f* y *g* funciones derivables en un dominio común, entonces:

1. *[kf(x)]'=kf'(x)* para cualquier constante *k* (la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función)
2. *[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)* (la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones).
3. *[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)* (la derivada de una diferencia de funciones es igual a la diferencia de las derivadas de las funciones).
4. *[f(x)·g(x)]'=f'(x)·g(x)+f(x)·g'(x)* (la derivada de un producto de funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda)
5. $[f(x)/g(x)]' = f'(x) \cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)/[g(x)]^2$ (la derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo sobre el cuadrado del denominador).
6. $[(f(x))^n]'=n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$, para *n* un número real.

Notación:

Dado una función *y(x).* Su derivada se escribe como

$$y'=\frac{dy}{dx} \quad \to \quad dy=y'dx$$

Aplicaciones en física:

- La velocidad es la variación de la posición respecto al tiempo.
- La aceleración es la variación de la velocidad respecto al tiempo
- Teoremas de Conservación: Si una derivada es nula la función asociada es constante.

Integración

La integración es la operación inversa a la derivada, responde a la pregunta siguiente. Si conozco como varia una función respecto a una variable, ¿cuál es la función inicial? La idea es ir sumando estas variaciones hasta encontrar la función original.

La integral $F(x)$ de una función $f(x)$ se define por $F'(x)=f(x)$.

Para una derivada en concreto existe toda una familia de funciones. Todas las funciones paralelas tiene la misma derivada, por lo tanto si queremos conocer a una función en concreto sabiendo su derivada, tendremos que tener una información mas. Es la razón por la que aparece siempre una constante en la operación de integración.

Cuadro de integrales inmediatas

$\int dx = x + c$	$\int u'\,dx = u + c$
$\int u'\,u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \dfrac{u'}{u} dx = Lu + c$
$\int u'\,e^u dx = e^u + c$	$\int u'\,a^n dx = \dfrac{a^n}{La} + c$
$\int u'\ \mathrm{sen}(u) dx = -\cos(u) + c$	$\int u'\ \cos(u) dx = \mathrm{sen}(u) + c$
$\int \dfrac{u'dx}{\cos^2 u} = \int u'(1 + \mathrm{tg}^2(u))dx = \mathrm{tg}(u) + c$	$\int \dfrac{u'\,dx}{\sqrt{1-u^2}} = \mathrm{arcsen}(u) + c$
$\int \dfrac{u'dx}{\mathrm{sen}^2 u} = \int u'(1 + \cot g^2(u))dx = -\cot g(u) + c$	$\int \dfrac{u'\,dx}{1+u^2} = \mathrm{arctg}(u) + c$
$\int u'sh(u) = ch(u) + c$	$\int u'ch(u) = sh(u) + c$
$\int \dfrac{u'\,dx}{\sqrt{1+u^2}} = \arg sh(u) + c$	$\int \dfrac{u'\,dx}{\sqrt{u^2-1}} = \arg ch(u) + c$
$\int \dfrac{u'\,dx}{1-u^2} = \arg th(u) + c$	

En muchos caso en los ejercicios de física se trabajara de dos maneras, con integrales definidas, o indefinidas. La diferencia básica reside en la forma en que la constante aparece.

Indefinidas:

Si $F'(x) = f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + Cte$$

Definidas:

<u>Limites cerrados</u>

Si $F'(x) = f(x)$ y *a, b* dos constantes

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

El resultado es un número.

Limite abierto

Si $F'(x) = f(x)$ y a dos constantes

$$\int_a^X f(x)dx = F(x) - F(a)$$

El resultado es una función.

4.3.2. Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial consiste en una ecuación donde una función se relaciona con sus derivadas. Por ejemplo a la función $y + 2y' + x = 3$ relacione la función y y su derivada primera.

Estén muchos métodos para solucionar este tipo de ecuaciones según su grado de complejidad. Nosotros trabajaremos con ecuaciones sencillas, transformándolas en integrales.

Ejemplo $y + 2y' = 0$

Sabemos que y' es la derivada de y respecto a x. Por lo tanto $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$y + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

Reordenando obtenemos

$$2\frac{dy}{dx} = -y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{2} \quad \rightarrow \quad \ln y = -\frac{x}{2} + Cte$$

$$e^{\ln y} = e^{-\frac{x}{2}+Cte} \quad \rightarrow \quad y = e^{-\frac{x}{2}+Cte} \quad \rightarrow \quad y = e^{-\frac{x}{2}} e^{Cte} \quad \rightarrow \quad y = Ae^{-\frac{x}{2}} \quad donde \quad A = e^{Cte}$$

Ejemplo - movimiento sinusoidal

Dado un movimiento sinusoidal $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ donde ω y φ son constantes.
¿Encontrar la ecuación diferencial característica de este tipo de movimiento?

Calculamos primero la velocidad (primera derivada) y la aceleración (segunda derivada).

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \dot{x}$$

$$a(t) = \ddot{x}$$

Buscando una relación entre la posición x(t) y sus derivadas encontramos,

$$a(t) + \omega^2 x(t) = 0$$
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La ecuación diferencial característica de un movimiento sinusoidal es $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.
Por ejemplo encontramos esta ecuación al estudiar la fuerza que ejerce un muelle. La aceleración debida al este tiene la forma siguiente $a_{muelle} = -kx$ donde *k* es una constante que depende de las características físicas del muelle.

Como a_{muelle} es la derivada segunda de la posición respecto al tiempo, podemos escribir que $a_{muelle} = \ddot{x}$.
Por lo tanto $\ddot{x} = -kx \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + kx = 0$, ecuación diferencial característica de un movimiento sinusoidal. Por lo tanto el movimiento debido a un muelle es sinusoidal.

4.4. Solución de las ecuaciones diferenciales

Conociendo la aceleración aprenderemos los mecanismos para encontrar la posición es decir la trayectoria de nuestro objeto. Esta aceleración como mencionado al final del apartado 4.1 puede ser función de cualquier otra variable, es decir del tiempo (caso que ya sabemos resolver), de la posición o de la velocidad. Por lo tanto estudiaremos para cada uno de estos 3 casos como llegar a la trayectoria a partir de la aceleración. En un principio veremos el caso particular de una aceleración nula o constante.

Aceleración nula

Si $a(t) = 0$,

Por integrales indefinidas

$$dv = adt \quad \rightarrow \quad \int dv = \int adt = 0 + Cte \quad \rightarrow \quad v = Cte = v_0$$
$$dx = vdt \quad \rightarrow \quad \int dx = \int vdt = v_0 t + Cte \quad \rightarrow \quad v = v_0 t + x_0$$

Por integrales definidas (limite abierto)

Suponemos que a $t = t_0 = 0$, $v = v_0$, $x = x_0$

$$dv = adt \quad \rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt \quad \rightarrow \quad [v]_{v_0}^{v} = [0]_{t_0}^{t} \quad \rightarrow \quad v - v_0 = 0 \quad \rightarrow \quad v = v_0$$
$$dx = vdt \quad \rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt \quad \rightarrow \quad [x]_{x_0}^{x} = [v_0 t]_{t_0}^{t} \quad \rightarrow \quad x - x_0 = v_0 t - v_0 t_0 \quad \rightarrow$$
$$x = v_0 t + x_0$$

$$a = 0, \quad v = v_0, \quad x = v_0 t + x_0$$

Aceleración Constante

Si $a(t) = a_0$, donde a_0 es una constante

Por integrales indefinidas

$$dv = adt \quad \rightarrow \quad \int dv = \int adt = a_0 t + Cte \quad \rightarrow \quad v = a_0 t + v_0, \quad v_0 = Cte$$

$$dx = vdt \quad \rightarrow \quad \int dx = \int vdt = \int (a_0 t + v_0) dt \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + Cte$$

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0, \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad x = x_0$$

Por integrales definidas (limite abierto)

Suponemos que a $t = t_0 = 0$, $v = v_0$, $x = x_0$

$$dv = adt \quad \rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt \quad \rightarrow \quad [v]_{v_0}^{v} = [a_0 t]_{t_0}^{t} \quad \rightarrow \quad v - v_0 = a_0 t - a_0 t_0 \quad \rightarrow$$

$$v = a_0 t + v_0$$

$$dx = vdt \quad \rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = \int_{t_0}^{t} (a_0 t + v_0) dt \quad \rightarrow \quad [x]_{x_0}^{x} = \left[\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t\right]_{t_0}^{t} \quad \rightarrow$$

$$x - x_0 = \left[\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t\right] - \left[\frac{1}{2} a_0 t_0{}^2 + v_0 t_0\right] \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

Busquemos la relación entre la aceleración, la velocidad y la posición sin tener en cuenta el tiempo.

$$vdv = adx \quad \rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx \quad \rightarrow \quad \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = [a_0 x]_{x_0}^{x} \quad \rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a_0 x - a_0 x_0$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a_0 (x - x_0)$$

$$a = a_0, \; v = a_0 t + v_0, \; x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0, \; v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Aceleración en función del tiempo

Si $a = f(t)$ una función del tiempo cualquiera como podría ser por ejemplo $a = \sqrt{t^3 + e^e}$
A continuación solo aplicaremos una manera de integrar.

$$dv = adt \quad \rightarrow \quad \int dv = \int adt = \int f(t) dt \quad \rightarrow \quad v(t) = \int f(t) dt + v_0$$

$$dx = vdt \quad \rightarrow \quad \int dx = \int vdt = \int v(t) dt \quad \rightarrow \quad x(t) = \int v(t) dt + x_0$$

$$a = f(t),\quad v = \int f(t)dt + v_0 = v(t),\quad x = \int v(t)dt + x_0$$

Aceleración en función de la velocidad

Si $a = f(v)$

Tenemos 2 posibles utilizaciones de las ecuación diferenciales

a) $dv = adt$, $dt = \frac{dv}{a} = \frac{dv}{f(v)}$, integrando a cada lado obtenemos

$$t = \int \frac{dv}{f(v)} + t_0 \quad \Rightarrow \quad v = v(t)$$

La primera integral proporciona una función que define el tiempo en función de la velocidad $t(v)$, de la cual encontraremos invirtiendo la velocidad en función del tiempo $v(t)$. Integrando esta función encontraremos la posición en función del tiempo.

$$x = \int v(t)dt + x_0$$

b) $vdv = adx$, $dx = \frac{vdv}{f(v)}$, $x = x_0 + \int \frac{vdv}{f(v)}$. En este caso encontramos la posición en función de la velocidad $x(v)$

Aceleración en función de la posición

Si $a = f(x)$ solamente tenemos una posible ecuación diferencial a utilizar.

$vdv = adx$, integrando de cada lado obtenemos:

$$\int vdv = \int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2\int f(x)dx = v(x)$$

El resultado no proporciona la velocidad en funcion de la posición. Aplicado la ecuación diferencial $vdt = dx$ y reordenando $\frac{dx}{v(x)} = dt$ de manera a tener las variables separadas en cada lado de la ecuación. Integrando nuevamente de cada lado obtenemos:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad x = x(t)$$

Encontramos primero el tiempo en función de la posición $t(x)$ que invirtiendo nos dará la posición en función del tiempo $x(t)$.

Para encontrar la velocidad en función del tiempo $v(t)$ simplemente derivaremos la posición.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

5. Movimientos

A continuación estudiaremos los diferentes tipos de movimientos diferenciándolos en función de las dimensiones necesarias para definirlos. Como hemos introducido en la primera parte del curso existen varias maneras de referenciar un punto en un plano o en el espacio. Aprenderemos a calcular las velocidades y aceleración para cada tipo de referencial. En los apartados siguientes definiremos la posición con el vector $\vec{r}$, la velocidad con $\vec{v}$ y la aceleración con $\vec{a}$.

5.1. Movimiento Rectilíneo

En el aparado anterior hemos aprendido a solucionar las posibles relaciones entre las variables físicas posición, velocidad, aceleración y tiempo. Estos resultados se podrán aplicar directamente a problemas de movimientos rectilíneos donde la trayectoria del objeto se pueda definir con un solo eje. Definiendo la posición $\vec{r}$ como un vector de coordenada $x = f(t)$, una función del tiempo, podemos escribir que $\vec{r} = x\vec{i}$ donde $\vec{i}$ es el vector unitario del eje.

A continuación veremos como se deriva este vector. Derivaremos la posición $\vec{r} = x\vec{i}$ respecto al tiempo.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x\vec{i})}{dt}$$

Aplicando las propiedades de las derivaciones de funciones para el producto obtenemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x\vec{i})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt}$$

El problema consiste en saber a que corresponde el segundo término. La derivada $\frac{d\vec{i}}{dt}$ corresponde la variación del vector unitario respecto al tiempo. El eje de coordenadas no varia respecto al tiempo, por lo tanto su vector unitario tampoco.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = 0$$

Aplicando este resultado obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{r}} &= x\,\vec{\mathrm{i}} \\ \vec{\mathrm{v}} &= \dot{x}\,\vec{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \\ \vec{\mathrm{a}} &= \ddot{x}\,\vec{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} \end{aligned}$$

5.2. Movimiento Curvilíneo plano

En un movimiento en dos dimensiones existen varias maneras de referenciar la posición del punto. Para cada una de ellas estudiaremos como calcular la velocidad y la aceleración. Otro referencial posible es el referencial intrínseco a la trayectoria es decir que solo depende de ella y de ningún elemente de referencia exterior. Veremos las ventajas de este referencial.

5.2.1. Coordenadas cartesianas

En un referencial cartesiano es decir coordenadas rectangulares, simplemente añadimos un eje respecto al movimiento rectilíneo. Por lo tanto tendremos que aplicar para cada uno de los ejes los cálculos que nos permitirán calcular la velocidad y aceleración. La posición, la velocidad y la aceleración se convierten en vectores. Para cada una de las coordenadas del vector tendremos una función $x = f_1(t), y = f_2(t)$.

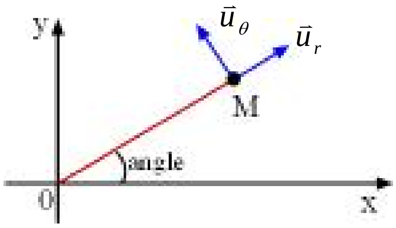
Resumiendo tenemos:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

5.2.2. Coordenadas polares

Otra manera de referencial un punto sobre un plano es utilizando las coordenadas polares muy útiles en problemas de robótica. Se define la posición de un objeto mediante la distancia de este respecto a un origen y del ángulo que tiene respecto a un eje horizontal.

Posición



Los vectores unitarios del sistema de referencia son $\vec{u}_r$ que lleva la dirección de OM, y su vector perpendicular $\vec{u}_\theta$. La posición del objeto se define entonces como

$$OM = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

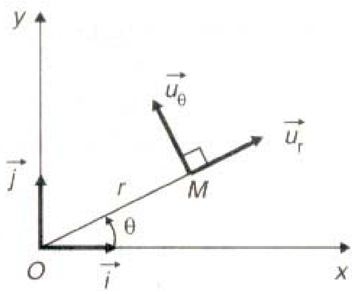
Velocidad

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo. Aplicando esta operación nos encontramos con un problema. El vector $\vec{u}_r$, a medida que se mueve el objeto varía en función del tiempo. Su dirección cambia. Por lo tanto tendremos que derivarlo y a diferencia del referencial cartesiano el resultado será diferente de 0.

$$OM = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\,\vec{u}_r)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{u}_r + \vec{r}\,\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} \neq 0$$

Para una mejor lectura de las ecuaciones los vectores se escribirán en algunos casos en negrita.

Derivación de un vector respecto del tiempo



Sea M es un punto del plano **i**, **j** de coordenadas polares $r\ (t)$ y $\theta\ (t)$, y $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ los vectores unitarios radial y ortoradial respectivamente.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j} \end{cases}$$

La derivada respecto del tiempo de $\mathbf{u}_r$ es:

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\mathbf{i} + \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta = \dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

Para $\mathbf{u}_\theta$ tendremos:

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_r = -\dot{\theta}\,\mathbf{u}_r$$

Comparando los dos resultados, se tiene: derivar un vector unitario respecto del tiempo equivale a rotarlo de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido trigonométrico y multiplicarlo por $\dot{\theta}$.

Aplicando este resultado a nuestro problema de la velocidad

$$\vec{v} = \frac{dOM}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\,\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{r}\,u_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

Aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\dot{r}}{dt}\mathbf{u}_r + \dot{r}\frac{d\,\mathbf{u}_r}{dt}\right) + \left(\frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\,\mathbf{u}_\theta}{dt}\right) + \frac{d\dot{z}}{dt}\mathbf{k}$$

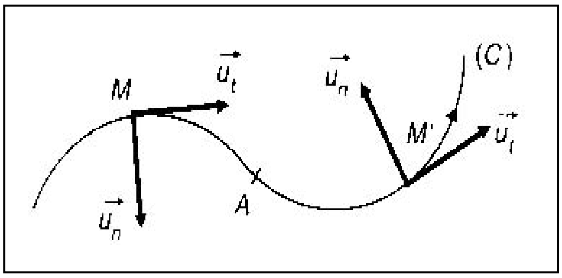
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathbf{u}_r\right) + \ddot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

Resumiendo los resultados anteriores,

$$\mathbf{r} = r(t)\mathbf{u}_r = r\mathbf{u}_r$$
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

5.2.3. Coordenadas normal y tangente (coordenadas de Frenet)



El referencial de Frenet se mueve con la trayectoria y depende solamente de ella, razón por la cual se considera un referencial intrínseco a la curva. Este referencial tiene muchas ventajas para definir y entender los conceptos de velocidad y aceleración en los problemas de mecánica donde ya se conoce la trayectoria. El referencial esta definido por 2 vectores:

- $\mathbf{u}_t$, vector tangente a la trayectoria en el punto M
- $\mathbf{u}_n$, vector normal a $\mathbf{u}_t$ orientado positivamente en dirección de la concavidad de la trayectoria en el punto M

Posición:

Se define con la coordenada curvilínea: $s = f(t)$.

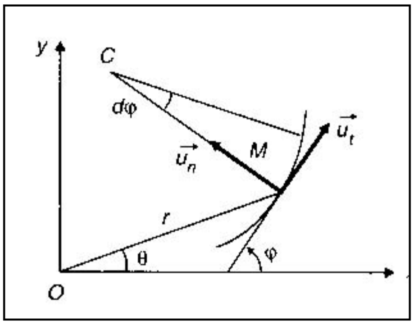
A partir de un punto de origen definido sobre la curva, s representa la distancia recorrida sobre esta curva.

Velocidad:

El vector velocidad es tangente a la trayectoria, por lo tanto es igual a $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$ donde v es el modulo del vector **v**. Como v es la variación de la coordenada curvilínea respecto del tiempo $v = ds/dt$ podemos definir la velocidad de la manera siguiente:

$$\vec{v} = v\,\vec{u}_t = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t$$

Aceleración:



$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_t + v\frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$$

Falta definir que es $d\mathbf{u}_t/dt$. No confundir con el vector $\mathbf{u}_t$ de las coordenadas cilíndricas. En la figura siguiente φ es el ángulo que forma el vector con el eje *Ox*. podemos definir los vectores $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_n$ por:

$$\mathbf{u}_t = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{u}_n = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$$

entonces,

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\,\mathbf{i} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\,\mathbf{j} = \dot{\varphi}\,\mathbf{u}_n$$

por otra parte tenemos que

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{d\varphi}{ds}$$

Designando por C el centro de la curvatura de la trayectoria en el punto M (es el centro del circulo al cual podemos asimilar la trayectoria al rededor del punto M) y por R el radio de este circulo R = CM, denominado radio de curvatura, tenemos

$$s = R\varphi \quad \rightarrow \quad ds = R\,d\varphi \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \text{lo que implica} \quad \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{v}{R}$$

Finalmente la aceleración tiene dos componente, una componente tangente a la curva que varia el modulo del vector velocidad y una componente normal que cambia la dirección de este vector. En este referencial intrínseco a al trayectoria se entiende mejor la necesidad de definir la velocidad y la aceleración para caracterizar el recorrido de un objeto.
Aplicando los resultados anteriores obtenemos:

$$a = \dot{v}\,\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_n$$

Resumiendo,

$$\begin{aligned} &s = f(t) \\ &\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{u}_t = v\mathbf{u}_t \\ &\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_n = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_n \end{aligned}$$

5.2.4. Clasificación de los movimientos según las coordenadas tangente y normal

Esta clasificación es extraída del libro de física de Ignacio Martín Bragado.

Los movimientos se pueden clasificar según las componentes intrínsecas de la aceleración ya que estas nos informan más directamente la implicación de aceleración en la variación de la trayectoria. La aceleración tangente, modifica el modulo de la velocidad mientras que la aceleración normal modifica su dirección. Esto nos permite clasificar fácilmente el tipo de movimiento según

1. $a_t = 0$
   a. $a_n = 0$: Movimiento rectilíneo y uniforme
   b. $a_n = cte$: Movimiento circular uniforme.
   c. $a_n \ != cte$: Movimiento circular acelerado.

2. $a_n = 0$
   a. $a_t = 0$: Movimiento rectilíneo y uniforme
   b. $a_t = cte$: Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
   c. $a_t \ != cte$: Movimiento rectilíneo acelerado.

3. $a_t \ != 0$ i $a_n \ != 0$. Movimiento curvilíneo.

5.3. Movimiento Curvilíneo en el espacio

Simplemente pondremos las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración para cada uno de los posibles referenciales.

5.3.1. Coordenadas cartesianas

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

5.3.2. Coordenadas cilíndricas

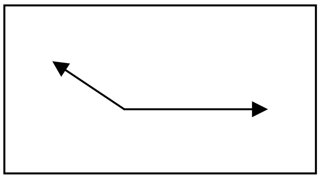
$$\mathbf{r} = r(t)\mathbf{u}_r = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

5.3.3. Coordenadas esféricas

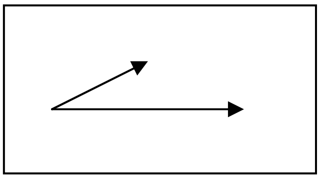
5.4. Movimiento acelerado y decelerado

Movimiento acelerado:
Diremos de un movimiento que es acelerado cuando su velocidad aumenta en función del tiempo. Es el caso cuando el vector velocidad y aceleración son del mismo sentido. Visto a través del producto escalar entre el vector velocidad y aceleración tenemos que:

$\vec{a}.\vec{v} > 0$



Movimiento desacelerado



Movimiento acelerado

Movimiento decelerado:
Por analogía con lo dicho anteriormente $\vec{a}.\vec{v} < 0$

Movimiento uniforme:
Es el caso donde el modulo de la velocidad no varia por lo tanto $\vec{a}.\vec{v} = 0$ ya que solo tenemos la aceleración normal que es perpendicular a la velocidad.

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$

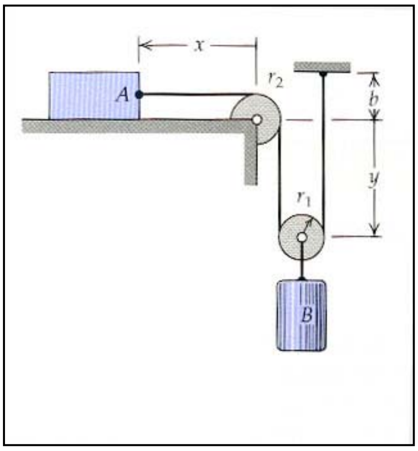
Ejercicio
La ecuación horaria de un vehículo en movimiento rectilíneo $x(t) = -t^3/3 + 4t^2 - 7t$. Determinar los periodos de tiempo en el cual el movimiento es acelerado y desacelerado.

$$v(t) = -t^2 + 8t - 7 = -(t-1)(t-7)$$
$$a(t) = -2t + 8 = -2(t-4)$$

t	1	4	7	
t-1	-	+	+	+
t-7	-	-	-	+
t-4	-	-	+	+
v	-	+	+	-
a	+	+	-	-
v.a	-	+	-	+

t < 1 : movimiento desacelerado
1 < t < 4 : movimiento acelerado
4 < t < 7 : movimiento desacelerado
7 < t : movimiento acelerado

6. Movimiento vinculado



Hablaremos de movimiento vinculado cuando varios objetos esta unidos por ejemplo por cuerdas y poleas. En la figura siguiente tenemos un caso claro de movimiento vinculado en el cual la posición del objeto A depende de la del objeto B o inversamente. El problema consiste en conocer la relación que los vincula.
Al estar unidos por una cuerda empezaremos a analizar su longitud. La longitud L de la cuerda es constante y se puede definir como

$$L = x + \frac{\pi r_2}{2} + 2y + \pi r_1 + b$$

$\frac{\pi r_2}{2}$ y πr_1 son las longitudes debido a las poleas. Estas longitudes son constantes. Si agrupamos todas las constante podemos escribir mas simplemente que $L = x + 2y + cte$.
Si derivamos sucesivamente respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(x + 2y + cte)}{dt} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{d(cte)}{dt}$$

$$0 = \dot{x} + 2\dot{y} \quad \Rightarrow \quad 0 = v_A + 2v_B$$

$$0 = \ddot{x} + 2\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad 0 = a_A + 2a_B$$

Sin tener en cuenta los signo ya que estos dependerán del sistema de referencia que utilicemos para cada objeto, obtenemos que en este caso la velocidad del objeto A es el doble de la velocidad del objeto B, y de la misma forma la aceleración del objeto A también es el doble de la aceleración del objeto B.