Cinemática

Ejercicios

Juan Coll Soler
juanc@salleurl.edu

Índice

Movimiento rectilíneo ***3***
Ejercicio 1 3
Ejercicio 2 4
Ejercicio 3 4
Ejercicio 4 6
Ejercicio 5 6

Movimiento curvilíneo plano ***8***

Coordenadas Cartesianas o rectangulares **8**
Ejercicio 1 8
Ejercicio 2 10
Ejercicio 3 11
Ejercicio 4 12

Coordenadas de Frenet **13**
Ejercicio 1 13
Ejercicio 2 14
Ejercicio 3 15

Coordenadas Polares **16**
Ejercicio 1 16
Ejercicio 2 17

Movimiento vinculado ***18***
Ejercicio 1 18
Ejercicio 2 18

<u>Los ejercicios están sacados de los libros siguientes:</u>

1) ***Mecánica para ingenieros – Dinámica**, j.lMeriam, L.G. Kraige, tercera edición editorial Reverté*
2) ***Física volumen 1**, Paul A. Tipler, cuarta edición, editorial Reverté*
3) ***Mécanique**, Emile Amzallag, edicience internacional.*

Movimiento rectilíneo

Ejercicio 1

El desplazamiento de una partícula obligada a moverse a lo largo de una recta esta dado por $s = 2t^3 - 24t + 6$, donde se mide en metros desde un origen conveniente, y t en segundos. Hallar (a) el tiempo que tarda la partícula en adquirir una velocidad de 72 m/s desde el reposo en el instante t = 0, (b) su aceleración cuando v = 30 m/s y (c) su desplazamiento en el intervalo de t = 1s a t = 4s.

$$v = \dot{s} = 6t^2 - 24 \; m\,s^{-1}$$
$$a = \dot{v} = 12t \; m\,s^{-2}$$

(a) $$72 = 6t^2 - 24 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 4 \\ t = -4 \end{cases}$$

La solución negativa no tiene sentido físico ya que consideramos el origen de tiempo en t = 0.

$$t = 4\,s$$

(b) Buscamos el tiempo para el cual v = 30 m/s y lo substituimos en la funcion de la aceleración.

$$30 = 6t^2 - 24 \quad \Rightarrow \quad t = 3\,s$$
$$a = 12t = 12 \times 3 = 36\,m\,s^{-2}$$

(c) $$s(4) - s(1) = 54\,m$$

Ejercicio 2

Una partícula se mueve a lo largo del eje x con una velocidad inicial $v_x = 50\,m/s$ en el origen en el instante t = 0.Durante los cuatro primeros segundos carece de aceleración y, a partir de ese momento, sufre la acción de una fuerza retardadora que le comunica una aceleración constante $a = -10\,m/s^2$ .Calcular la velocidad y la coordenada x de la partícula en los instantes t = 8 s y t = 12 s y hallar la coordenada x máxima que alcanza.

La velocidad a partir de t = 4 se calcula como

$$dv = adt \quad \Rightarrow \quad \int_{50}^{v} dv = \int_{4}^{t} adt \quad \Rightarrow \quad v = -10t + 90\,m\,s^{-1}$$

$$t = 8s \quad \Rightarrow \quad v = 10\,m\,s^{-1}$$
$$t = 12s \quad \Rightarrow \quad v = -30\,m\,s^{-1}$$

La coordenada de la partícula en un instante posterior a t = 4 s es la distancia recorrida por la partícula durante los 4 primeros segundos mas la distancia recorrida a partir de los 4 s con la deceleración *a*.

$$ds = vdt \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{s} ds = v_x \int_{0}^{4} t + \int_{4}^{t} vdt = 4v_x + \int_{4}^{t} \left(-10t + 90\right) dt$$
$$s = 200 + (-5t^2 + 90t)\Big]_4^t = -5t^2 + 90t - 80\,m$$

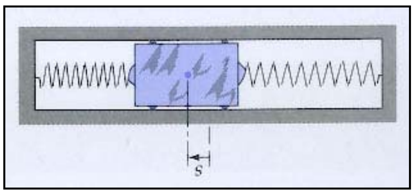
$$t = 8s \quad \Rightarrow \quad s = 320\,m$$
$$t = 12s \quad \Rightarrow \quad s = 280\,m$$

La coordenada máxima se alcanza antes de que el movimiento cambien de dirección es decir cuando la velocidad cambie de signo.

$$v = 0 = -10t + 90 \quad \Rightarrow \quad t = 9\,s$$
$$s = s(9) = 325\,m$$

Ejercicio 3

La corredera montada entre dos resortes se mueve en la guía horizontal con rozamiento despreciable y tiene una velocidad v_0 en la dirección s al pasar por el centro donde s = 0 y t = 0. Los dos resortes juntos ejercen una fuerza retardadora del movimiento de la corredera que comunica a esta una aceleración proporcional al desplazamiento, pero de sentido opuesto, y de valor $a = -k^2 s$, donde k es una constante. Hallar las expresiones del desplazamiento s y la velocidad v como funciones del tiempo t.



Tenemos 2 maneras de solucionar el problema:

(a) Como la velocidad esta expresada en función del desplazamiento utilizamos la expresión $vdv = ads$.

$$\int vdv = \int ads \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \int -k^2 sds = -\frac{k^2}{2}s^2 + C_1$$

Cuando $s = 0$ y $t = 0$, $v = v_0$.

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = +\sqrt{-k^2 s^2 + v_0^2}$$

Queremos tener la ecuación de la velocidad en función del tiempo *t*. Utilizamos la expresión siguiente:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{v}$$

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} + C_2 \quad \Rightarrow \quad t = \int \frac{ds}{k\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2 - s^2}} + C_2 = \frac{1}{k}\arcsin\frac{ks}{v_0} + C_2$$

Para $t = 0 \ y \ s = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \frac{v_0}{k}\sin kt \\ v &= \dot{s} = v_0 \cos kt \end{aligned}}$$

(b) Sabemos que $a = \ddot{s}$. tenemos entonces $a = \ddot{s} = -k^2 s$ y la relación siguiente

$$\ddot{s} + k^2 s = 0$$

Es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden cuya solución se escribe

$$s = A\sin kt + B\cos kt$$

donde A,B y k son constantes.

$$v = \dot{s} = Ak\cos kt - Bk\sin kt$$

La condición inicial $t = 0$, $s = 0$ y $v = v_0$ exige que $A = \frac{v_0}{k}$ y $B = 0$. Volvemos a encontrar el mismo resultado

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \frac{v_0}{k}\sin kt \\ v &= \dot{s} = v_0 \cos kt \end{aligned}}$$

Ejercicio 4

Un carguero se mueve a 8 m/s cuando sus motores se paran bruscamente. Sabiendo que son necesarios 6 segundos para que el carguero reduzca su velocidad a 4 m/s, determinar la distancia s recorridas por el carguero y su velocidad durante dicho intervalo como funciones del tiempo t. La deceleración del carguero es proporcional al cuadrado de su velocidad, de forma que $a = -kv^2$.

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -kv^2 = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -kdt = \frac{dv}{v^2}$$

$$-k\int_0^t dt = \int_8^v \frac{dv}{v^2} \quad \Rightarrow \quad -kt = \left[-\frac{1}{v}\right]_8^v = -\frac{1}{v} + \frac{1}{8}$$

$$v = \frac{8}{1+8kt}$$

Sabemos que en 6 segundos el carguero reduce su velocidad a 4 m/s.

$$4 = \frac{8}{1+8k6} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{48}$$

$$\boxed{v = \frac{8}{1+\frac{t}{6}}}$$

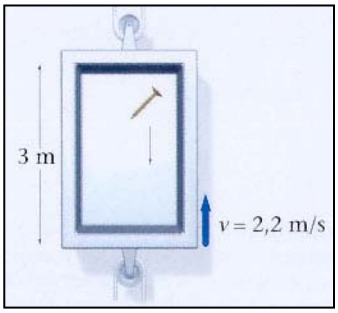
Calculo de la distancia:

$$ds = vdt \quad \Rightarrow \quad s = \int_0^t \frac{8}{1+\frac{t}{6}}dt = 8\int_0^t \frac{(1/6)}{(1/6)\left(1+\frac{t}{6}\right)}dt = 48\ln\left(1+\frac{t}{6}\right)$$

$$\boxed{s = 48\ln\left(1+\frac{t}{6}\right)}$$

Ejercicio 5

Una persona en un ascensor ve un tornillo que cae del techo. La altura del ascensor es de 3m. (a) Si el ascensor se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 2,2 m/s, ¿cuánto tiempo tarda el tornillo en chocar contra el suelo? (b) Si el ascensor parte del reposo cuando cae el tornillo y asciende con una aceleración constante $a_0 = 4\,m\,s^{-2}$,¿cuánto tiempo tardara el tornillo a chocar contra el suelo?



(a) Ecuación de la posición del suelo del ascensor (movimiento rectilíneo y uniforme) cogiendo como origen a t = 0, $x_a = 0$ m.

$$x_a = v_0 t$$

Ecuación de la posición x_t del tornillo (movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado), sabiendo que a t = 0, s = 3m.

$$x_t = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + 3$$

donde $v_0 = 2{,}2\,m\,s^{-1}$

El tornillo choca contra el suelo cuando $x_t = x_a$

$$v_0 t = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + 3 \quad \Rightarrow \quad -\frac{gt^2}{2} + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{6}{g}}$$

La solución que nos interesa es la positiva ya que la negativa no tiene significado físico. si $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

$$t = \sqrt{\frac{6}{9{,}81}} = 0{,}78\,s$$

Podemos constatar que la solución no depende de la velocidad inicial v_0.

(b) Ecuación de la posición x_a del suelo del ascensor (movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado) cogiendo como origen a t = 0, $x_a = 0$ m.

$$x_a = \frac{a_0}{2} t^2$$

Ecuación de la posición x_t del tornillo (movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado), sabiendo que a t = 0, s = 3m.

$$x_t = -\frac{g}{2} t^2 + 3$$

El tornillo choca contra el suelo cuando $x_t = x_a$

$$\frac{a_0}{2} t^2 = -\frac{g}{2} t^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{6}{a_0 + g} \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{6}{a_0 + g}}$$

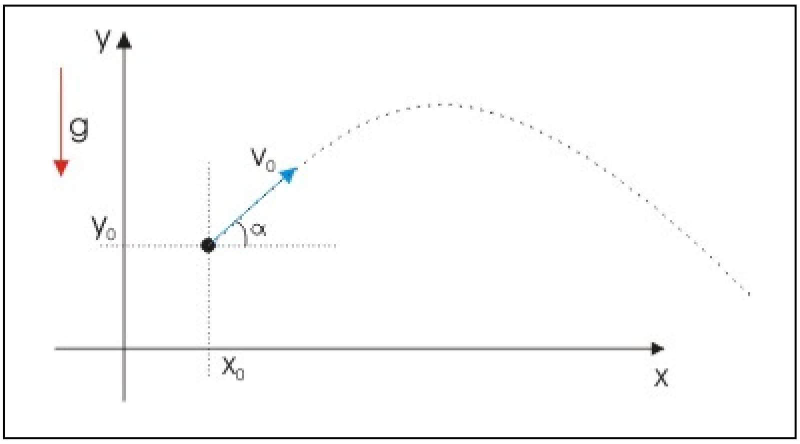
$$t = \sqrt{\frac{6}{9{,}81 + 4}} = 0{,}66\,s$$

Movimiento curvilíneo plano

Coordenadas Cartesianas o rectangulares

Ejercicio 1

El tiro parabolico



El tiro parabólico es una combinación de 2 movimientos:

a) rectilíneo y uniforme sobre el eje de las x. No existe aceleración horizontal.
b) rectilíneo y uniformemente acelerado sobre el eje de las y. La aceleración es la de la gravedad.

El objetivo es encontrar las 2 funciones x(t) y y(t) que caracterizan la trayectoria. Definiendo por **p**(t) la posición del proyectil tenemos:

$$\mathbf{p}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

Sobre el eje **i** el movimiento es rectilíneo y uniforme: $a = 0$

$$dv_x = a_x dt \quad \rightarrow \quad \int dv_x = \int a_x dt \quad \rightarrow \quad v_x = 0 + Cte \quad \rightarrow \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$dx = v_x dt \quad \rightarrow \quad \int dx = \int v_x dt \quad \rightarrow \quad x = \int v_{0x} dt + Cte = v_{0x}\, t + x_0$$

$$x(t) = v_{0x} t + x_0 \quad \text{donde} \quad v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

Sobre el eje **j** el movimiento es rectilíneo y uniformemente acelerado, donde la aceleración es constante y de valor $\bar{a} = -g\,\bar{j}$ con $g = 9{,}8\,ms^{-2}$.

$$dv_y = a_y dt \quad \rightarrow \quad \int dv_y = \int a_y dt \quad \rightarrow \quad v_y = -gt + Cte \quad \rightarrow \quad v_y = -gt + v_{0y}$$

$$dy = v_y dt \quad \rightarrow \quad \int dx = \int v_y dt \quad \rightarrow \quad y = \int \left(-gt + v_{0y}\right)dt + Cte = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}\ t + y_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \quad \text{donde} \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

Calculo del ángulo para el cual el proyectil llega mas lejos:

Para simplificar los cálculos utilizaremos como valores iniciales $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.

$$x(t) = v_{0x}t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

El proyectil llega mas lejos cuando su coordenada x(t) es máxima. El problema se reduce a maximizar la función x(t) para el valor de t donde el proyectil vuele a estar en el suelo, es decir y = 0.

La primera etapa es entonces averiguar para que valor de t el proyectil cae en el suelo.

$$y = 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

dos soluciones $\begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{-v_{0y}}{-g/2} = \dfrac{2v_{0y}}{g} \end{cases}$

La primera solución el instante inicial, la segunda es la que nos interesa. Remplazando t en la ecuación de x(t) tenemos:

$$x(t) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \qquad \text{donde} \qquad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

El máximo de esta función depende del máximo de $\sin\alpha\cos\alpha$ ya que los otros valores son constantes. Para encontrar un máximo derivamos la función $g(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$.

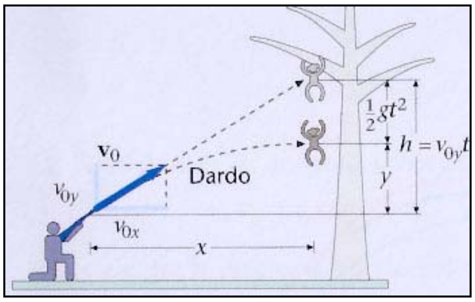
$$g'(\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) + \cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$g'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2\alpha - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$$

La solución es entonces tirar el proyectil con un ángulo de 45º (siempre que no tengamos en cuenta el rozamiento del aire).

Ejercicio 2

Un guardabosques con una cerbatana intenta disparar un dardo tranquilizante a un mono que cuelga de una mano de una rama. El guardabosques apunta directamente al mono sin tener en cuenta que el dardo seguirá un trayectoria parabólica y pasara, por tanto, por debajo del mono. Sin embargo, este, viendo salir el dardo, se suelta de la rama y cae del árbol, esperando evitar el dardo. Demostrar que el mono será alcanzado independientemente de cual sea la velocidad inicial del dardo, con tal , de que, sea suficientemente grande para recorrer la distancia horizontal que separa el guardabosques del árbol. Suponer que el tiempo de reacción del mono es despreciable.



Trayectoria y_m del mono:

$$y_m = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

$$x_m = x_0$$

Trayectoria del dardo

$$y_d = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oy}t$$

$$x_d = v_{ox}t$$

El dado tocara el mono cuando su trayectoria cruce la recta de la trayectoria del mono. Por lo tanto primero encontraremos el tiempo t de una posible colisión (cuando el dardo halla recorrido la distancia x_0 o x en el dibujo). Después con este tiempo t compararemos las posiciones del mono y del dardo. Si estas son la mismas El dardo toca al mono.

$$x_0 = v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_0}{v_{0x}}$$

Trayectoria del mono a t:

$$y_m = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0}{v_{0x}}\right)^2 + h$$

Trayectoria del dardo a t:

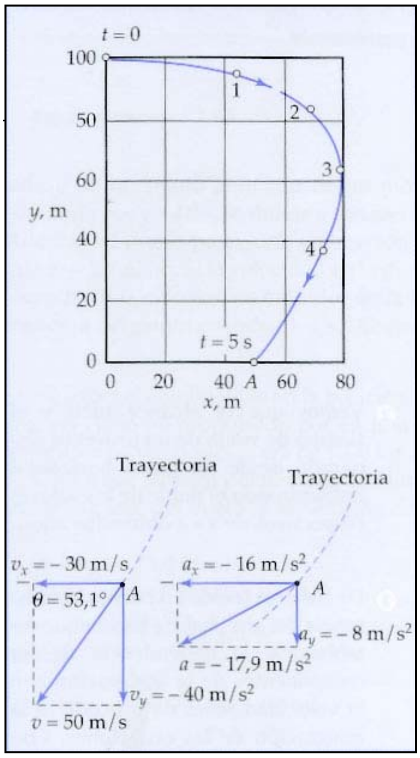
$$y_d = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\frac{x_0}{v_{0x}}$$

$$= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0}{v_{0x}}\right)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x_0$$

$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{h}{x_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x_0 = h$ por tanto, $y_m = y_d$. El mono y el dardo siempre colisionaran.

Ejercicio 3

Un movimiento curvilíneo de un punto esta definido por $v_x = 50 - 16t$ e $y = 100 - 4t^2$, donde v_x son metros por segundo, y son metros y t segundos. Se sabe además que cuando $t = 0$ es $x = 0$. Representar la trayectoria y determinar la velocidad y la aceleración cuando alcanza la posición y = 0.



Para dibujar la trayectoria necesitamos la coordenada *x*.

$$dx = vdt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (50 - 16t)dx \quad \Rightarrow \quad x = 50t - 8t^2$$

Pero a $t = 0$, $x = 0$ lo que implica que $x = -8t^2 + 50t$ m

Para dibujar la trayectoria utilizaremos varios valor de t ya que tenemos las funciones para la coordenada x e y.

$$y = 100 - 4t^2$$
$$x = -8t^2 + 50t$$

Velocidad:

$$v_y = \dot{y} = -8t$$
$$v_x = \dot{x} = 50 - 16t$$

Aceleración:

$$a_y = \ddot{y} = -8$$
$$a_x = \ddot{x} = -16$$

Para saber la velocidad y la aceleración cuando $y = 0$, hemos de determinar en que tiempo t, $y = 0$, y después sustituir-lo en las ecuaciones de velocidad y aceleración.

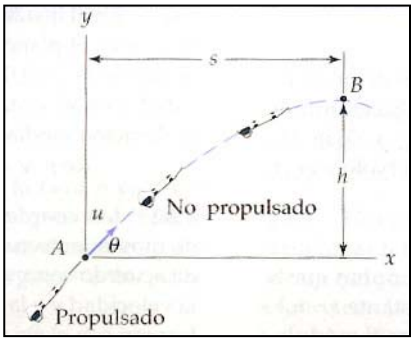
$y = 100 - 4t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ La solución valida es la positiva.

$$v_y = -40\, ms^{-1}$$
$$v_x = -30\, ms^{-1}$$

$$a_y = -8$$
$$a_x = -16$$

Ejercicio 4

Un cohete ha consumido todo su combustible cuando alcanza la posición A en la que lleva una velocidad **u** y forma un ángulo θ respecto a la horizontal. Se inicia entonces el vuelo balística (no propulsado) y alcanza una altura máxima adicional h en un posición B tras recorrer una distancia s a partir de A. Determinar las expresiones de h y s, el tiempo t de vuelo entre A y B y la ecuación de la trayectoria. Par a el intervalo de tiempo en cuestión, considérese una Tierra plana con aceleración de la gravedad constante g y despréciese toda resistencia del aire.



Sobre el eje x tenemos:

$$a_x = 0$$
$$v_x = \mathbf{u}\cos\theta$$
$$x = \mathbf{u}\,t\cos\theta$$

Sobre el eje y tenemos:

$$a_y = -g$$
$$v_y = -gt + \mathbf{u}\sin\theta$$
$$y = -\frac{g}{2}t^2 + \mathbf{u}\,t\sin\theta$$

En el punto mas alto de la trayectoria la velocidad v_y s'anula.

$$v_y = 0 = -gt + \mathbf{u}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{\mathbf{u}\sin\theta}{g}}$$

$$h = -\frac{g}{2}\left(\frac{\mathbf{u}\sin\theta}{g}\right)^2 + \mathbf{u}\sin\theta\left(\frac{\mathbf{u}\sin\theta}{g}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}}$$

$$s = u\frac{u\sin\theta}{g}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}}$$

Ecuación de la trayectoria:

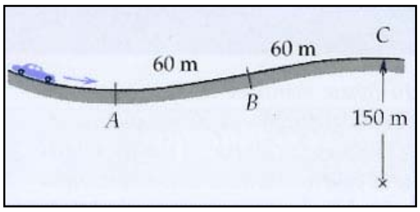
$$x = \mathbf{u}\,t\cos\theta \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{u\cos\theta}$$

$$\boxed{y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2 + \mathbf{u}\sin\theta\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)}$$

Coordenadas de Frenet

Ejercicio 1

Previniéndose de la depresión y del cambio de rasante de la carretera. el conductor del automóvil aplica los frenos al objeto de producir una desaceleración constante. En el fondo A de la depresión la velocidad es de 100 km/h y en el punto mas elevado C del cambio de rasante, separado de A 120 m de carretera, es 50 km/h. Si lo pasajeros experimentan en A una aceleración total de 3m/s^2 y el radio de curvatura del cambio de rasante en C es 150 m, calcular (a) el radio de curvatura ρ en A, (b) la aceleración en el punto de inflexión B y (c) la aceleración total en C.



En el punto A:

$v_A = 100\, km/h = 27{,}78\, ms^{-1}$

La aceleración total es la suma de la aceleración tangente y normal y sabemos que su modulo es de 3m/s^2.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad \Rightarrow \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Tenemos la aceleración total y podemos calcular la aceleración tangente la cual sabemos que es constante por el enunciado.

$$vdv = a_t ds \quad \Rightarrow \quad \int_{v_A}^{v_B} vdv = a_t \int_{s_A}^{s_B} ds \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(v_C^2 - v_A^2\right) = a_t\left(s_C - s_A\right) \quad \Rightarrow \quad a_t = -2{,}41\, ms^{-2}$$

Podemos ahora encontrar el modula de la aceleración normal con

$a_n^2 = a^2 - a_t^2 \quad \Rightarrow \quad a_n = 1{,}78\, ms^{-2}$

Sabiendo que $a_n = \frac{v_A^2}{\rho}$ (ver teoria), podemos encontrar el radio de curvatura ρ en A.

$$\boxed{\rho = \frac{v_A^2}{a_n}}$$

En el punto B:

Como en el punto de inflexión el radio de curvatura es infinito. Por lo tanto $a_n = 0$ solo tenemos la aceleración tangente que es constante y cuyo valor se ha calculado anteriormente.

$$\boxed{a_t = -2{,}41\, ms^{-2}}$$

En el punto C:

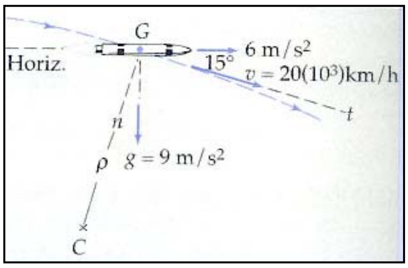
$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$a_t = -2{,}41\, ms^{-2}$

$a_n = \frac{v_C^2}{\rho_c} = 1{,}29\, ms^{-2}$

$$\boxed{a = 2{,}73\, ms^{-2}}$$

Ejercicio 2



Un cohete mantiene su eje en posición horizontal durante la fase propulsada de vuelo a gran altura. El empuje imprime al cohete una aceleración horizontal de $6 m\,s^{-2}$ y la componente vertical de la aceleración es la aceleración de la gravedad a dicha altura que es $g = 9 m\,s^{-2}$. En el instante representa la velocidad del centro de masa G del cohete a lo largo de su trayectoria inclinada 15º es v_0 20 000 km/h. Para dicha posición, determinar (a) el radio de curvatura de la trayectoria del vuelo, (b) el aumento del modulo de la velocidad v (el vector se escribe **v**) por unidad de tiempo, (c) el desplazamiento angular $\dot{\beta}$ por unidad de tiempo del radio de curvatura CG y (d) la expresión vectorial de la aceleración total **a** del cohete, y su modulo.

Nos piden el radios de curvatura y el aumento del modulo de la velocidad. El sistema de coordenadas que mejor se adapta para este caso es el de Frenet donde la aceleración se compone de una aceleración tangente $\mathbf{a}_t$ ($a_t\mathbf{u}_t$ donde $\mathbf{u}_t$ es un vector unitario en la dirección de la normal a la trayectoria) a la trayectoria y una aceleración normal $\mathbf{a}_n$ $(a_n\mathbf{u}_n)$. Respecto a la horizontal el cohete esta inclinado de 15º.

$$a_x = 6 m\,s^{-2}$$
$$a_y = g = 9 m\,s^{-2}$$

$$a_n = a_y \cos 15º - a_x \sin 15º = 7{,}14 m\,s^{-2}$$
$$a_t = a_x \cos 15º + a_y \sin 15º = 8{,}12 m\,s^{-2}$$

Para no tener problemas pasaremos todas los datos al S.I.

$$v_0 = 20\,000\, km/h = 20\,000\,(10^3) m/3600 s = 5555{,}55\, m\,s^{-1}$$

(a) Sabiendo que $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ donde ρ es el radio de curvatura tenemos

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(5555{,}55)^2}{7{,}14} = 4{,}32\,(10^6)\, m$$

(b) La variación de la velocidad por unidad de tiempo es la definición de la aceleración: $dv/dt = \dot{v} = a$. En coordenadas de Frenet la aceleración tangente modifica el modulo de la velocidad y la aceleración normal, su dirección. Por lo tanto la variación del modulo de la velocidad es $a_t = 8{,}12 m\,s^{-2}$

(c) El desplazamiento angular β por unidad de tiempo ($\dot{\beta}$) es la velocidad angular. Sabemos que $v = \rho\dot{\beta}$

$$\dot{\beta} = \frac{v}{\rho} = \frac{5555{,}55}{4{,}32\,(10^6)} = 12{,}85\left(10^{-4}\right) rad\; s^{-1}$$

(d) En coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{36 + 81} = 10{,}81\, m\, s^{-2}$$

En coordenadas de Frenet:

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(7{,}14)^2 + (8{,}12)^2} = 10{,}81\, m\, s^{-2}$$

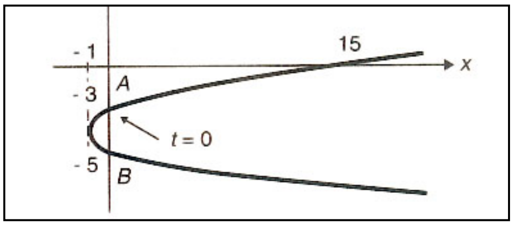
Ejercicio 3

Un movimiento se define por las ecuaciones $x(t) = t^2 + 2t, \quad y(t) = t - 3$. Encontrar:

a) La ecuación de la trayectoria.
b) Los vectores velocidad y aceleración.
c) El radio de curvatura en el punto A cuando t = 0.

a) $t = 3 + y, \quad x = (3 + y)^2 + 2\,(3 + y) = y^2 + 8y + 15$.

La grafica de la función es una parábola.



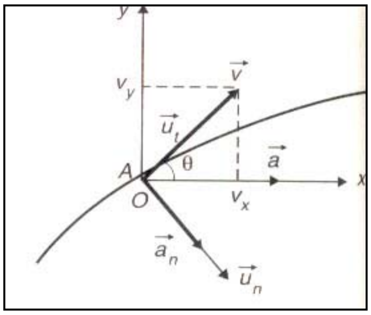
b)

Vector velocidad:

$$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} = 2(t+1)\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Vector aceleración:

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} = 2\,\mathbf{i}$$



c) $$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_n \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a_n}$$

$$a_n = a \sin\theta = a \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$$

Utilizamos relaciones trigonométricas ya que sabemos que $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2}$ para t = 0.

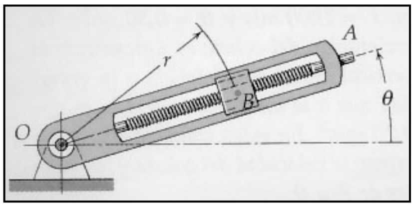
$$a_n = 2\frac{1/2}{\sqrt{1 + 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$ por otra parte sabemos que $v^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Coordenadas Polares

Ejercicio 1

El giro del brazo radial ranurado esta regido por $\theta = 0{,}2t + 0{,}02t^3$ donde θ está en radianes y t está en segundos. Simultáneamente, el husillo motorizado acciona el cursor B y controla si distancia a O según $r = 0{,}2 + 0{,}04t^2$, donde r está en metros y t en segundos. Calcular la velocidad y la aceleración del cursor en el instante *t = 3s.*



Primero calcularemos los valores $r, \dot{r}, \ddot{r}$ y $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ para t = 3 s y luego substituiremos estos valores en las expresiones en coordenadas polares de la velocidad y la aceleración.

$r = 0{,}2 + 0{,}04t^2$	$r(3) = 0{,}56\,m$
$\dot{r} = 0{,}08t$	$\dot{r}(3) = 0{,}24\,ms^{-1}$
$\ddot{r} = 0{,}08$	$\ddot{r}(3) = 0{,}08\,ms^{-2}$

$\theta = 0{,}2t + 0{,}02t^3$	$\theta(3) = 1{,}14\,rad$
$\dot{\theta} = 0{,}2 + 0{,}06t^2$	$\dot{\theta}(3) = 0{,}74\,rad\ s^{-1}$
$\ddot{\theta} = 0{,}12t$	$\ddot{\theta}(3) = 0{,}36\,rad\ s^{-2}$

Velocidad:

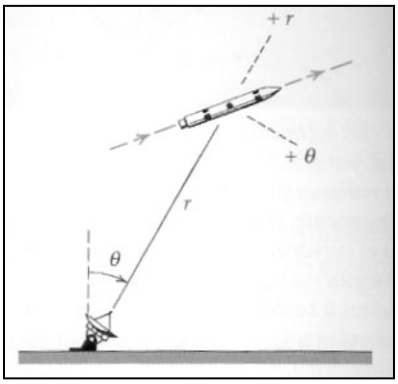
$v_r = \dot{r}$	$v_r = 24\,ms^{-1}$
$v_\theta = r\dot{\theta}$	$v_\theta = 0{,}414\,ms^{-1}$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = 0{,}479\,ms^{-1}$

Aceleración:

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$	$a_r = -0{,}227\,ms^{-2}$
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$	$a_\theta = 0{,}557\,ms^{-2}$
$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$	$a = 0{,}601\,ms^{-2}$

Ejercicio 2

Un radar de seguimiento se encuentra en el mismo plano vertical que la trayectoria balística de un cohete que realiza un vuelo no propulsado por encima de la atmósfera. En el instante en que $\theta = 30º$ los datos de seguimiento son $r = 8(10^4)\,m$, $\dot{r} = 1200\,ms^{-1}$ y $\dot{\theta} = 0{,}80\,grd\,s^{-1}$. La aceleración del cohete es únicamente la vertical descendente debida a la gravedad que a la altura considerada es $g = 9{,}20\,ms^{-2}$. En estas condiciones, determinar (a) la velocidad del cohete y (b) los valores de $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$.



Antes de responder a las preguntas convertir los datos al S.I.

$$\dot{\theta} = 0{,}80\,grd\,s^{-1} = 0{,}80\left(\frac{\pi}{180}\right) = 0{,}014\,rad\,s^{-1}$$

(a) Sabemos que en coordenadas polares $\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$

$$\dot{r} = v_r = 1200\,m\,s^{-1}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} = 8(10^4)(0{,}014) = 1120\,m\,s^{-1}$$

$$v = \sqrt{v_r + v_\theta} = 1639{,}42\,m\,s^{-1}$$

(b) Sabemos que $\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\,\mathbf{u}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{u}_\theta$. La única aceleración a la cual se somete el cohete es g (gravedad).

En coordenadas polares g se descompone de la manera siguiente:

$$a_r = -9{,}20\cos 30º = -7{,}97\,m\,s^{-2}$$
$$a_\theta = 9{,}20\sin 30º = 4{,}60\,m\,s^{-2}$$

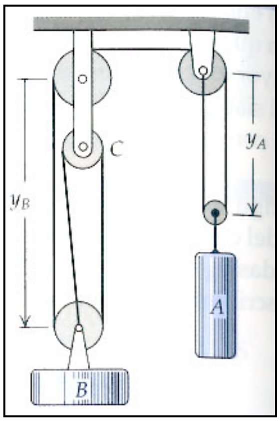
$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -7{,}97 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 7{,}71\ m\ s^{-2}$$

$$a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 4{,}60 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 4{,}2\,(10^{-4})\,rad\,s^{-2}$$

Movimiento vinculado

Ejercicio 1

En el aparejo de la figura el cilindro A posee una velocidad descendente de 0,3 *m/s*. Hallar la velocidad ascendente de B. En la imagen y_B tendría que empezar en el centro de la polea C. Resolver el ejercicio con esta condición.



La longitud constante del cable del aparejo es

$$L = 3y_B + 2y_A + Ctes$$

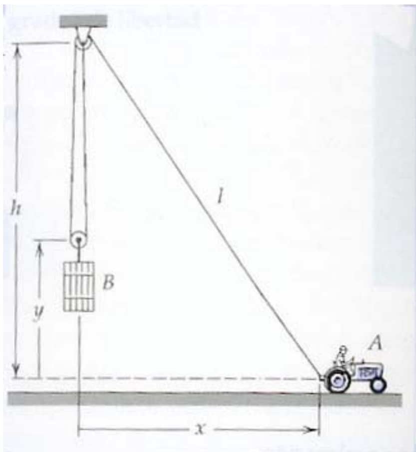
Las constantes representan las longitudes de cable fijas.
Derivando respecto del tiempo resulta

$$0 = 3\dot{y}_B + 2\dot{y}_A \quad \Rightarrow \quad 0 = 3v_B + 2v_A \quad \Rightarrow \quad v_B = -\frac{2}{3}v_A$$

$$v_A = 0{,}3\,ms^{-1}$$
$$v_B = -0{,}2\,ms^{-1}$$

Ejercicio 2

El tractor A se emplea para izar el embalaje con el aparejo representado. Si A posee una velocidad v_A hacia delante, hallar, en función de x, la velocidad hacia arriba de v_B del embalaje.



La posición del tractor se especifica con la coordenada x, y la del embalaje con la coordenada y. La longitud constante del cable es

$$L = 2(h-y) + l = 2(h-y) + \sqrt{h^2 + x^2}$$

Derivando respecto del tiempo

$$0 = -2\dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

Substituyendo los valores de $\dot{x} = v_A$ y $\dot{y} = v_B$ queda

$$v_B = \frac{v_A}{2}\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$