Ejercicios resueltos- teorema de green, integrales de linea

Matemáticas II (Universidad Rey Juan Carlos)

Resoluciones detalladas hoja de problemas 4

1.. Calcular (usando la fórmula de cálculo estándar) las siguientes integrales de línea:
(a) $\int_C xe^y\, dx$, donde C es el arco de la curva $x = e^y$ entre los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$.
(b) $\int_C \sin x\, dx + \cos y\, dy$, donde C es la curva compuesta por el semicírculo superior $x^2 + y^2 = 1$ entre los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ y el segmento de recta entre los puntos de coordenadas $(-1, 0)$ y $(-2, 3)$.

Solución. (a) Se trata de una curva que se puede parametrizar como gráfica de una función, $c(t) = (e^t, t)$ con $t \in [0, 1]$. Por tanto, usando la fórmula de cálculo para la integral parcial de línea tenemos

$$\int_C xe^y\, dx = \int_0^1 e^t e^t e^t\, dt = \int_0^1 e^{3t}\, dt = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

(b) En este ejemplo hay que calcular por separado la integral de línea en cada uno de los trozos de curva descritos en el enunciado, y después sumar para obtener el resultado final. Separamos pues la curva C en los dos trozos

• C_1 es el semicírculo superior, parametrizado por coordenadas polares $c_1(t) = (\cos\, t, \sin\, t)$ con $t \in [0, \pi]$. En este caso, usando la fórmula de cálculo de las integrales parciales de línea, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \sin\, x\, dx + \cos\, y\, dy &= \int_0^\pi (\sin(\cos(t))x'(t) + \cos(\sin(t))y'(t))\, dt \\
&= \int_0^\pi (\sin(\cos\, t)(-\sin\, t) + \cos(\sin\, t)\cos\, t)\, dt \\
&= (-\cos(\cos\, t) + \sin(\sin\, t))\Big|_0^\pi = -\cos(-1) + \cos(1) = 0.
\end{aligned}$$

• C_2 es el segmento que une los puntos $(-1, 0)$ y $(-2, 3)$, es decir, se parametriza con

$$c_2(t) = (1 - t)(-1, 0) + t(-2, 3) = (-1 - t, 3t),$$

y la integral de línea se calcula como:

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \sin\, x\, dx + \cos\, y\, dy &= \int_0^1 (\sin(-1 - t)(-1) + 3\cos(3t))\, dt = (\sin(3t) - \cos(1 + t))\Big|_0^1 \\
&= \sin\, 3 - \cos\, 2 + \cos\, 1.
\end{aligned}$$

Sumando, este último resultado es el resultado final. Como observación, el campo $\overline{F}(x, y) = (\sin\, x, \cos\, y)$ es un campo conservativo con función potencial $f(x, y) = \sin\, y - \cos\, x$, por tanto se podía haber utilizado el Teorema fundamental de las integrales de línea para obtener (con mayor rapidez) el mismo resultado.

2. Calcular las siguientes dos integrales de línea escalares:
(a) $\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$, donde C es la curva parametrizada

$$c(t) = \left(t^2, \sin\frac{\pi t}{4}, e^{t^2-2t}\right), \quad t \in [0,2].$$

(b) $\int_C \sin\, x\,dx + z\cos\, y\,dy + \sin\, y\,dz$, donde C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ orientada en sentido positivo (es decir antihorario).

Solución. Recordamos la correspondencia entre la integral de línea escalar y la integral de línea vectorial

$$\int_C \overline{F}\cdot ds = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz,$$

donde $\overline{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Usamos esta correspondencia en este ejercicio para ver las integrales que debemos calcular como integrales de línea de campos vectoriales (que van a ser conservativos) y así usar el Teorema fundamental de las integrales de línea.

(a) En este caso tenemos

$$\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz = \int_C \overline{F}\cdot\, ds, \qquad \overline{F} = (2xyz, x^2z, x^2y).$$

Es fácil observar que el campo $\overline{F}$ es conservativo y tiene como función potencial $f(x,y,z) = x^2yz$, y podemos así usar el teorema fundamental de las integrales de línea para calcular la integral evaluando la función potencial en las extremidades de la curva:

$$\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz = f(c(2)) - f(c(0)) = f(4,1,1) - f(0,0,1) = 16.$$

(b) En este caso tenemos

$$\int_C \sin\, x\,dx + z\cos\, y\,dy + \sin\, y\,dz = \int_C \overline{F}\cdot\, ds, \qquad \overline{F} = (\sin\, x, z\cos\, y, \sin\, y)$$

y observamos de nuevo que el campo $\overline{F}$ es conservativo y tiene como función potencial $f(x,y,z) = z\sin\, y - \cos\, x$. Teniendo en cuenta que la curva C es una curva cerrada (una elipse), resulta que la integral de línea es igual a cero.

3. Decidir cuáles de los siguientes cuatro campos vectoriales es conservativo, y en caso afirmativo, hallar su función potencial: $\overline{F}_1(x,y) = (e^x\sin y, e^x\cos y)$, $\overline{F}_2(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$, $\overline{F}_3(x,y) = (ye^x + \sin y, e^x + x\cos y)$ y $\overline{F}_4(x,y) = (3x^2 - 2y^2, 4xy + 3)$.

Solución. Observamos que todos estos campos tienen como dominio de definición todo $\mathbb{R}^2$, sin puntos exceptuados, es decir simplemente conexo, por tanto para decidir si los campos son conservativos basta por verificar la igualdad de las derivadas cruzadas.

• Para el campo $\overline{F}_1$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x \cos y,$$

por tanto el campo es conservativo. Es bastante evidente que $f_1(x, y) = e^x \sin y$ es la función potencial de este campo.

• Para el campo $\overline{F}_2$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -e^x \sin y, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x \sin y,$$

por tanto el campo $\overline{F}_2$ no es conservativo.

• Para el campo $\overline{F}_3$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x + \cos y,$$

por tanto el campo $\overline{F}_3$ es conservativo. Usando el algoritmo habitual para hallar una función potencial obtenemos desde el primer intento que una función potencial de este campo es $f_3(x, y) = ye^x + x \sin y$.

• Para el campo $\overline{F}_4$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -4y, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 4y,$$

por tanto el campo $\overline{F}_4$ no es conservativo.

4. Calcular las integrales de línea siguientes:

(a) $\int_C (\ln x + y)\, dx - x^2\, dy$, donde C es el rectángulo de vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 4)$ y $(3, 4)$.

(b) $\int_C \overline{F} \cdot ds$, donde $\overline{F}(x, y) = (xy, x^2 + x)$ y C es el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Solución. La idea de este ejercicio es darse cuenta que se trata en cada caso de *curvas cerradas* y poder usar el Teorema de Green.

(a) Es evidente que un rectángulo (recorrido en sentido antihorario) es una curva cerrada y como el campo vectorial

$$\overline{F}(x, y) = (\ln x + y, -x^2)$$

está definido en el interior del triángulo, se puede aplicar el teorema de Green. Obtenemos así que

$$\int_C (\ln x + y)\, dx - x^2\, dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\int_D (-2x - 1)\, dx\, dy,$$

donde D es el interior del rectángulo, que se puede describir como $\{1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$. Pasando a integrales iteradas tenemos

$$\int_C (\ln x + y)\, dx - x^2\, dy = \int_1^3 \int_1^4 (-2x - 1)\, dy\, dx = 3 \int_1^3 (-2x - 1)\, dx = -30.$$

(b) En este caso, el triángulo con vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ es una curva cerrada y su interior D se puede describir como $\{0 \leq y \leq 1, y-1 \leq x \leq 1-y\}$ (ya que la arista que une los vértices $(-1,0)$ y $(0,1)$ es un segmento de la recta $x = y-1$ y la arista que une los vértices $(1,0)$ y $(0,1)$ es un segmento de la recta $x+y=1$) y esta descripción se va a usar para calcular la integral doble. Usando el Teorema de Green, tenemos

$$\begin{aligned}\int_C \overline{F} \cdot ds &= \int\int_D (x+1)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (x+1)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_{x=y-1}^{x=1-y} dy = \int_0^1 (2-2y)\,dy = 1.\end{aligned}$$

5. Calcular la integral de línea vectorial $\int_C \overline{F} \cdot ds$, donde C es el arco de la parábola $y = 1+x^2$ entre los puntos de coordenadas $(-1,2)$ y $(1,2)$ y el campo vectorial $\overline{F}$ es

$$\overline{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Solución. Con la fórmula de cálculo de la definición, podemos parametrizar la curva como gráfica de una función $c(t) = (t, 1+t^2)$, $t \in [-1,1]$ y calcular la integral de línea, obteniendo que la función de t que se debe integrar al final es una función impar. En efecto, tenemos

$$\overline{F}(x(t),y(t)) = \overline{F}(t,1+t^2) = \left(\frac{t}{t^2+(1+t^2)^2}, \frac{1+t^2}{t^2+(1+t^2)^2}\right)$$

y $c'(t) = (1,2t)$, por tanto usando la fórmula de cálculo de una integral de línea de campo vectorial (con el producto escalar entre los vectores $\overline{F}(c(t))$ y $c'(t)$) obtenemos

$$\int_C \overline{F} \cdot ds = \int_{-1}^1 \frac{t(2t^2+3)}{t^2+(1+t^2)^2}\,dt = 0,$$

ya que el integrando es una función impar de t y el intervalo de integración $[-1,1]$ es simétrico respecto a 0.

De forma **alternativa**, observamos que el campo vectorial

$$\overline{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

satisface la condición de igualdad de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^4},$$

pero su dominio de definición no es simplemente conexo (es $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Pero en este caso se puede **probar que este campo sí es conservativo** usando el teorema con la integral que hemos visto en clase aplicado para los campos unitario y de vorticidad: si la integral sobre cualquier circunferencia vale 0, entonces es conservativo (se puede verificar tomando circunferencias centradas en $(0,0)$, parametrizando con $(x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t)$ y efectuar el cálculo exactamente como hemos hecho para el campo de vorticidad; en este caso sí da 0 como resultado). Observamos además que admite una función potencial definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Podemos aplicar el Teorema fundamental de las integrales de línea para concluir que

$$\int_C \overline{F}\cdot ds = f(1,2) - f(-1,2) = 0,$$

ya que la función $f(x,y)$ es par.

6. Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y) = (2xe^y, x + x^2e^y)$ y sea C el cuarto de círculo de radio 4 en el primer cuadrante, es decir la parte del círculo de radio 4 comprendida entre los puntos $A = (4,0)$ y $B = (0,4)$. Se pide:

(a) Hallar una función potencial $V(x,y)$ tal que se pueda escribir $\overline{F}(x,y) = \overline{G}(x,y) + \nabla V(x,y)$, donde $\overline{G}(x,y) = (0,x)$.

(b) Verificar que la integral de línea del campo vectorial $\overline{G}(x,y) = (0,x)$ sobre los segmentos OA y OB es cero, donde $O = (0,0)$ es el origen.

(c) Usar los resultados de los apartados (a) y (b) y el teorema de Green para calcular $\int_C \overline{F}\cdot ds$.

Solución. Se trata de un ejercicio algo más complejo que introduce la *técnica de descomposición* en el cálculo de integrales de línea: cada campo en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como una suma entre un campo conservativo y un campo de la forma $(0, F_2(x,y))$, y con este segundo campo se puede trabajar más fácilmente.

(a) Observamos que podemos escribir

$$\overline{F}(x,y) = (0,x) + (2xe^2, x^2e^y) = (0,x) + \nabla V(x,y),$$

donde $V(x,y) = x^2e^y$. Ponemos $\overline{G}(x,y) = (0,x)$.

(b) La parametrización del segmento OA está dada por

$$c_1(t) = (1-t)(0,0) + t(4,0) = (4t, 0), \qquad t\in[0,1].$$

Calculando con la fórmula de definición, tenemos $c_1'(t) = (4,0)$ para todo $t\in[0,1]$, por tanto

$$\overline{G}(c_1(t))\cdot c_1'(t) = (0,4t)\cdot(4,0) = 0,$$

y obtenemos que

$$\int_{OA}\overline{G}\cdot ds = 0.$$

De la misma manera, la parametrización del segmento OB está dada por

$$c_2(t) = (1-t)(0,0) + t(0,4) = (0,4t), \qquad t\in[0,1].$$

Calculando con la fórmula de definición, tenemos $c_2'(t) = (0,4)$ para todo $t \in [0,1]$, por tanto

$$\overline{G}(c_2(t)) \cdot c_1'(t) = (0,0) \cdot (0,4) = 0,$$

y obtenemos que

$$\int_{OB} \overline{G} \cdot ds = 0.$$

(c) Usando la linealidad de la integral de línea y la descomposición efectuada en el apartado (a), y aplicando el Teorema fundamental de las integrales de línea para el campo conservativo ∇V, tenemos

$$\int_C \overline{F} \cdot ds = \int_C \overline{G} \cdot ds + \int_C \nabla V \cdot ds = \int_C \overline{G} \cdot ds + V(0,4) - V(4,0).$$

Por una parte, recordando que $V(x,y) = x^2 e^y$ tenemos $V(0,4) - V(4,0) = -16$. Por otra parte, para calcular la integral de línea del campo vectorial $\overline{G}$, *podemos añadir los segmentos OA y BO* (orientados en esta dirección) para obtener así una curva cerrada y poder aplicar el Teorema de Green. En efecto, como hemos calculado en el apartado (b), la integral del campo $\overline{G}$ sobre dichos segmentos es cero, por tanto se puede escribir

$$\int_C \overline{G} \cdot ds = \int_{OA} \overline{G} \cdot ds + \int_C \overline{G} \cdot ds + \int_{BO} \overline{G} \cdot ds$$

y la última suma nos da la integral del campo $\overline{G}$ sobre la curva cerrada que es la frontera del sector de círculo OAB. Para esta integral de línea sobre la curva cerrada podemos aplicar el Teorema de Green y obtener que

$$\int_C \overline{G} \cdot ds = \int \int_D 1 \, dx \, dy = 4\pi,$$

ya que el dominio D es el cuarto de círculo de radio 4 y la última integral obtenida representa el área de ese cuarto de círculo (que es un cuarto del área total del disco de radio 4). Juntando todos los cálculos efectuados, obtenemos que

$$\int_C \overline{F} \cdot ds = \int_C \overline{G} \cdot ds + V(0,4) - V(4,0) = 4\pi - 16.$$

7. Calcular las siguientes integrales de línea sobre la curva C

(a) $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\, dx + (2x + \cos\, y^2)\, dy$, donde C es la curva frontera de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

(b) $\int_C \sin\, y\, dx + x \cos\, y\, dy$, donde C es la elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Solución. (a) Se observa que la curva C es una curva cerrada, por tanto se puede aplicar el Teorema de Green. Tenemos $F_1(x,y) = y + e^{\sqrt{x}}$, $F_2(x,y) = 2x + \cos\, y^2$, por tanto

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 - 1 = 1.$$

Aplicando el teorema de Green, obtenemos que

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\, dx + (2x + \cos y^2)\, dy = \iint_D 1\, dA,$$

donde D es el recinto plano limitado por las dos curvas. Observando que los puntos de intersección entre las dos curvas son $(0,0)$ y $(1,1)$, y que si $0 \leq x \leq 1$ tenemos $x^2 \leq \sqrt{x}$, podemos describir el dominio D en la forma

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

y pasamos a integrales iteradas:

$$\begin{aligned} \iint_D 1\, dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1\, dy\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(b) Observamos que el campo $\overline{F}(x,y) = (\sin y, x \cos y)$ es conservativo, al estar definido en todo $\mathbb{R}^2$ (simplemente conexo) y cumplir la igualdad de las derivadas cruzadas (cálculo obvio). Como la elipse es una curva cerrada, el resultado de la integral es 0.

8. Calcular las siguientes integrales de línea de campos vectoriales:
(a) $\int_C \overline{F} \cdot ds$, donde $\overline{F} = (2xz + y^2, 2xy, x^2 + 3z^2)$ y C es la curva parametrizada $c(t) = (t^2, t+1, 2t-1)$, $t \in [0,1]$.
(b) $\int_C \overline{F} \cdot ds$, donde $\overline{F} = (e^y, xe^y, (z+1)e^z)$ y C es la curva parametrizada $c(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$.
Solución. (a) El campo $\overline{F}$ es conservativo, lo que se puede ver verificando las igualdades de las derivadas cruzadas (aquellas que hemos llamado $(*)$ en los apuntes teóricos). Tenemos que hallar su función potencial, usando el algoritmo conocido (esta vez en tres pasos, al tratarse de un campo en $\mathbb{R}^3$). Integrando primero en x, obtenemos

$$f(x,y,z) = \int (2xz + y^2)\, dx = x^2 z + xy^2 + g(y,z),$$

donde $g(y,z)$ es la "constante de integración". Derivamos ahora respecto de y y obtenemos

$$2xy + \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

es decir $g(y,z) = h(z)$. Derivando finalmente en z tenemos

$$x^2 + h'(z) = x^2 + 3z^2 \Longrightarrow h'(z) = 3z^2 \Longrightarrow h(z) = z^3.$$

Por tanto, una función potencial del campo $\overline{F}$ es $f(x,y,z) = x^2 z + xy^2 + z^3$. Aplicando el Teorema fundamental de las integrales de línea, obtenemos

$$\int_C \overline{F} \cdot ds = f(c(1)) - f(c(0)) = f(1,2,1) - f(0,1,-1) = 1 + 4 + 1 - (-1)^3 = 7.$$

(b) Seguimos el mismo plan que en el apartado (a), observando que el campo $\overline{F}$ es también conservativo y su función potencial se obtiene de la misma forma que en el apartado (a). En este caso, en los primeros dos pasos obtenemos

$$f(x,y,z) = xe^y + h(z), \qquad h'(z) = (z+1)e^z,$$

e integrando en z obtenemos $h(z) = ze^z$, por tanto $f(x,y,z) = xe^y + ze^z$. De nuevo, aplicando el Teorema fundamental de las integrales de línea, obtenemos

$$\int_C \overline{F} \cdot ds = f(c(1)) - f(c(0)) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 2e.$$

9. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\overline{F} = (2y^{3/2}, 3x\sqrt{y})$ para mover un objeto desde el punto $P = (1,1)$ hasta el punto $Q = (2,4)$.

Solución. Como no se tiene ninguna curva específica, este ejercicio solo podría ser correcto si el campo fuera conservativo, y efectivamente lo es: es fácil comprobar la igualdad de las derivadas cruzadas (ambas dan como resultado $3\sqrt{y}$). Por tanto, buscando una función potencial, obtenemos

$$f(x,y) = 2xy^{3/2}.$$

Por el Teorema fundamental de las integrales de línea, obtenemos que el trabajo está dado por

$$f(Q) - f(P) = f(2,4) - f(1,1) = 32 - 2 = 30.$$

10. Un objeto parte desde el punto $(-2,0)$, se mueve hasta el punto $(2,0)$ a lo largo del eje X, y después desde el punto $(2,0)$ vuelve al punto inicial $(-2,0)$ describiendo el semicírculo $y = \sqrt{4-x^2}$. Encontrar el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\overline{F} = (x, x^3 + 3xy^2)$ para mover ese objeto a lo largo del camino indicado.

Solución. Sabemos que el trabajo se calcula con la integral de línea del campo vectorial $\overline{F}$. Podemos observar que el objeto describe una curva cerrada y simple, por tanto nos sugiere utilizar el Teorema de Green. Observamos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3(x^2 + y^2).$$

Aplicando el Teorema de Green, obtenemos que

$$W = \iint_D 3(x^2 + y^2)\, dA,$$

donde D es la mitad superior del disco $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$. Podemos pasar a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, donde $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ (solo tenemos la región donde $y \geq 0$, la mitad superior del círculo). Por tanto, recordando que $x^2 + y^2 = r^2$ y que el jacobiano es r, tenemos

$$W = 3\int_0^\pi \int_0^2 r^3\, dr\, d\theta = 3\pi \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=2} = 12\pi.$$