Universidad del Rosario

Escuela de Ingenieria, Ciencia y Tecnología

Resolución de problemas mediante el método númerico Newton - Raphson

Santiago Gomez Corrales

Sergio Andrés Guevara

Juan David Salazar

31 de Octubre de 2023

1 Introducción

El método de Newton - Raphson, también conocido como el método de Newton, es una poderosa herramienta en el ámbito de la matemática y la ciencia que se utiliza para aproximar soluciones a ecuaciones no lineales. Desarrollado en el siglo XVII por Isaac Newton y Joseph Raphson, este método revolucionario ha demostrado ser invaluable en una amplia gama de aplicaciones en ingeniería, física, economía, y muchas otras disciplinas.

A medida que avanzamos en este documento, descubriremos cómo el método de Newton-Raphson se ha convertido en una herramienta indispensable en la caja de herramientas de los científicos, ingenieros y matemáticos, permitiendo abordar problemas complejos y no lineales de manera eficiente y precisa. Su versatilidad y aplicabilidad en diversas disciplinas lo convierten en un tema de gran interés y relevancia en el mundo actual de la investigación y la resolución de problemas.

2 Marco Teórico

2.1 Conceptos clave

- **Función:** Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.
- **Convergencia:** Se refiere a la tendencia de una secuencia o una serie de valores hacia un valor límite a medida que se consideran más términos o elementos de la secuencia.
- **Raices de una función:** Las raíces de una función $y = f(x)$ son los valores x en los cuales $f(x)$ se hace 0. En algunos casos, la función f tiene una forma tal que el problema se puede resolver algebraicamente.
- **Algoritmo:** El conjunto de instrucciones sistemáticas y previamente definidas que se utilizan para realizar una determinada tarea.
- **Derivada:** La derivada de una función describe la razón de cambio instantáneo de la función en un cierto punto.
- **Teorema:** Proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas, postulados o de otras proposiciones ya demostradas.

2.2 Teorema de Taylor

Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable k veces en el punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces existe una funcion $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + h_k(x)(x-a)^k,$$

con

$$\lim_{x \to a} h_k(x) = 0$$

2.3 Método de Newton - Raphson

El método de Newton es un procedimiento abierto, lo que significa que su convergencia global no está asegurada. La única forma de garantizar la convergencia es escogiendo un valor inicial que esté lo suficientemente cerca de la raíz que se busca. Por lo tanto, se debe iniciar la iteración con un valor que esté razonablemente cerca del cero (conocido como punto de inicio o valor supuesto). La proximidad relativa del punto inicial a la raíz depende en gran medida de la naturaleza de la función; si ésta tiene múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes cerca de la raíz, entonces las posibilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo que requiere seleccionar un valor supuesto cercano a la raíz. Una vez hecho esto, el método linealiza la función mediante la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán iteraciones sucesivas hasta que el método haya convergido lo suficiente.
Visto como:

Sea f una función derivable definida en un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, tal que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tomando como un punto de incio denominado x_0 y se define para cada $j \in \mathbb{N}$.

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}.$$

2.3.1 Resolución hacia el algoritmo

El método de Newton-Raphson, posibilita hallar una raíz de una ecuación no-lineal siempre que la estimación innicial sea adecuada.
El esquema iterativo de Newton puede derivarse del desarrollo de Taylor de la función alrededor de la estimación inicial.
Dada la ecuación $f(x) = 0$, ahora supongamos que existe una unica solución $\psi \in [a, b]$. A partir de un punto x_0 que ete ,lo suficientmente cerca, a la raíz en cuestión. Por lo tanto tenemos que

$$f(\psi) = f(x_0) + (\psi - x_0)f'(x_0) + \frac{(\psi - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta h)$$

donde $0 < \theta < 1$ y $h = \psi - x_0$. Asumiendo que la diferencia de $\psi - x_0$ es muy pequeña, el método de Newton - Raphson guiará el proceso a despreciar el sumando en $(a - x_0)^2$, por lo que a partir del primer desarrollo

$$f(\psi) \cong f(x_0) + (\psi - x_0)f'(x_0)$$

Dada la suposición inicial, se sabe que ψ es solución de la ecuación $f(x) = 0$, tal que $f(\psi) = 0$, despúes

$$f(x_0) + (\psi - x_0)f'(x_0) \cong 0$$

Donde al momento de despejar ψ

$$(\psi - x_0)f'(x_0) \cong -f(x_0) \tag{1}$$

$$\psi - x_0 \cong -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2}$$

$$\psi \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3}$$

Donde

$$\psi \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Por lo que se evidencia que al tomar como punto de inicio un valor x_0 lo suficientemente cercano a ψ, el valor x_1 que se obtiene, también proporciona una valor próximo a la raíz ψ.

Así que ahora el valor de x_1 se encontrará mas cerca a la raíz ψ, que el valor de x_0. Así que bajo estas nuevas condiciones, si se repitiera el mismo proceso, pero a partir de x_1 Desembocariamos en una segunda aproximación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ya que x_2 es más cercano a la raíz solución que x_1, tenemos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Para x_3

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

Donde se hace evidente el patron que sigue cada iteración de las aproximaciones. Podemos afirmar que solo hace falta encontrar un x_j lo suficientemente cercano a la raíz en cuestión, es decir a ψ.

A partir de la sucesión recursiva $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, contemplamos la fórmula

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

El algoritmo alcanzará un punto final donde la diferencia $|\frac{x_{j+1}-x_j}{x_j}|$ sea lo suficientemente pequeña

2.3.2 Particularidades del método

Requisitos de funcionamiento:

- Es esencial que la aproximación inicial x_0 este lo suficientemente cerca a la solución ψ. Ya que al momento de despreciar el sumando $(\psi - x_0)^2$ del desarrollo de Taylor. Si x_0 no es adecuado nos podemos alejar de la solución.

- Es importante que esten siempre presentes determinadas condiciones, para que por cada iteración $j-1$.

Dichas condiciones que se consideraran más adelante. Dada la siguiente ecuacion

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \tag{1}$$

La cual corresponde a la recta tangente de $f(x)$ en x_0. Por lo que x_1 satisface la ecuación

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0 \tag{2}$$

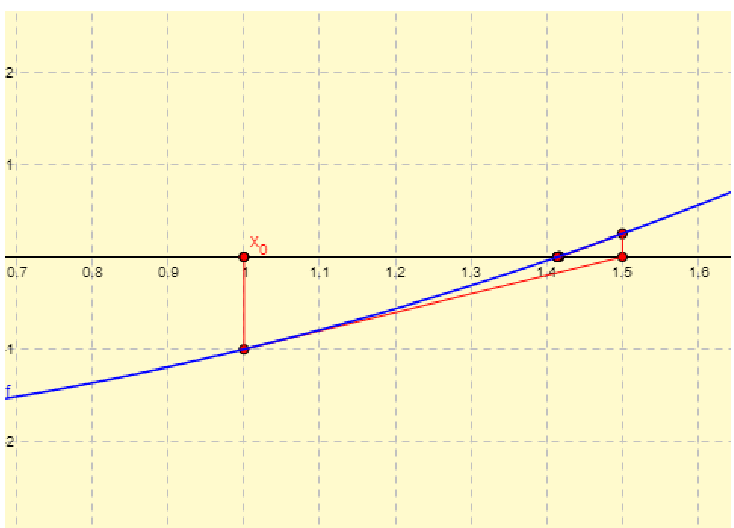
Para que el método Newton - Raphson converja, es necesario que la función $f(x)$ sea derivable en el intervalo que se considere. También en el intervalo en cuestión no puede de haber puntos de inflexión, ni máximos ni minimos.

Ejemplo de función que converge

Sea la función $f_a(x) = x^2 - 2$, al tomar $x_0 = 1$

Tabla 1: Primeras 4 Iteraciones de la función $f_a(x)$

j	x_j	$f_a(x_j)$
0	1	-1
1	1.5	0.25
2	1.4166666667	0.0069444444
3	1.4142156863	0.0000060073
4	1.4142135624	0

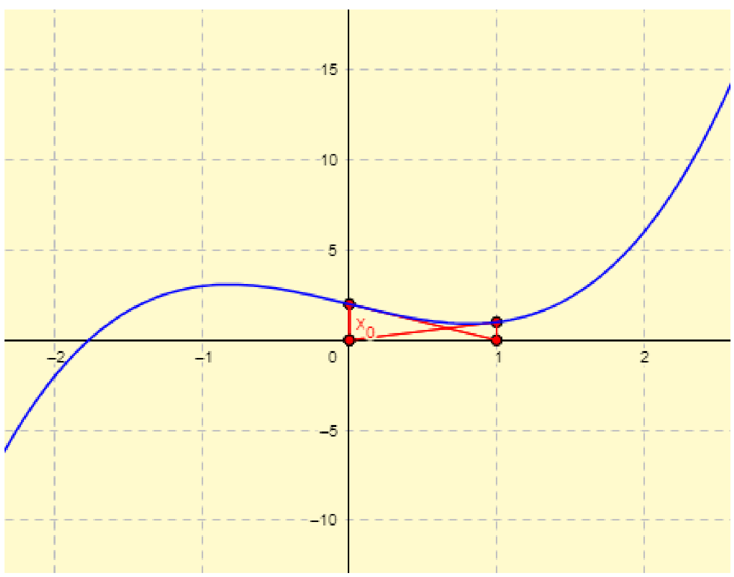


Ejemplo de función que diverge

Sea la función $f_b(x) = x^3 - 2x + 2$, al tomar $x_0 = 0$

Tabla 2: Primeras 4 Iteraciones de la función $f_b(x)$

j	x_j	$f_b(x_j)$
0	0	2
1	1	1
2	0	2
3	1	1
4	0	2



2.3.2 Existencia de la raíz

Cuando se tenga un intervalo de trabajo $[a, b]$, se debe cumplir la condición

$$f(a)f(b) < 0$$

2.3.3 Unicidad de la raíz y concavidad

- Aquí basicamente se debe cumplir que $f(x) \neq 0$

- Dado un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ La concavidad para una función f debe de cumplir que $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$

2.3.5 Intersección de la tangente a $f(x)$ en $[a, b]$

Se debe asegurar que la recta tangente a la curva en el extremo del intervalo en el cual $f(x)$ sea mínima, intersecte a la abcisa.

$$c \in [a, b], \frac{|f(c)|}{|f'(c)|} \leq (b - a)$$

2.3.6 Teorema importante

Teorema que muestra condiciones suficientes para la convergencia del método de Newton - Raphson.

Supongamos que $f \in C^2[a, b]$, (donde f admite primera y segunda derivada) se verifica:

- i) $f(a)f(b) < 0$
- ii) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$

- iii) $f''(x)f''(y) \geq 0$, $\forall x, y \in [a,b]$
- iv) $max\left\{\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|}\right\} \leq (b-a)$

Entonces $\exists!\ s \in [a,b] : f(s) = 0$

2.3.7 Estimación del error

Sea ψ una raíz:

$$|x_{j+1} - \psi| \leq C|x_j - \psi|^2$$

Para una cierta constante C. Esto significa que cuando el error sea menor o igual a 0,1 con cada nueva iteración el número de decimales exactos se duplica, pero esto es una aproximación se puede aplicar en la estimación aproximada del error.

2.3.8 Error relativo entre dos aproximaciones sucesivas

$$E = \frac{|x_{j+1} - x_j|}{|x_{j+1}|}$$

Este error relativo es tomado como si la última aproximación fuera el valor exacto y las iteraciones se detienen cuando este error es aproximadamente menor a una cantidad fijada con anterioridad.

3 Algoritmo de Newton - Raphson. Implementación en MATLAB

Definición de la función que contiene el método de Newton-Raphson

```
function [raiz, tabla] = newton_raphson(func, dfunc, x0, tol, max_iter)
    % Inicializacion de variables
    x = x0;
    iter = 0;
    tabla = [];

    while iter < max_iter
        % Calculo del valor de la funcion y su derivada en el punto x
        fx = func(x);
        dfx = dfunc(x);

        % Almacenamiento del valor de x y f(x) en la tabla
        tabla = [tabla; x fx];

        % Calculo del nuevo valor de x
        x_new = x - fx/dfx;

        % Comprobacion de la condicion de parada
        if abs(x_new - x) < tol
            raiz = x_new;
            return;
        end

        % Actualizacion de variables para la siguiente iteracion
        x = x_new;
        iter = iter + 1;
    end

    error('El metodo de Newton-Raphson no convergio');
end
```

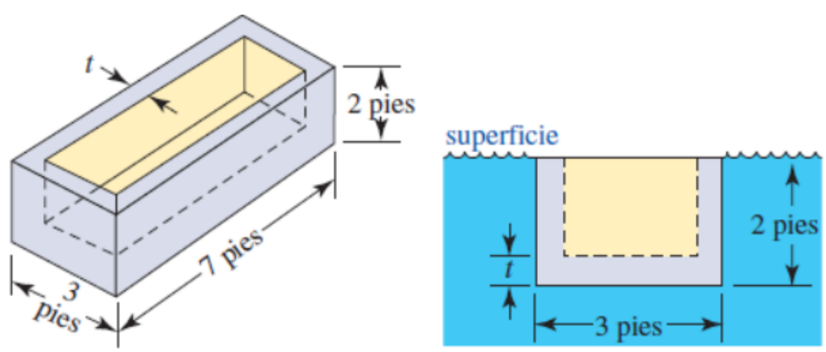
Invocación de la función con estimación inicial, rango de tolerancia, y tanto max. como min. de iteraciones

```
format long
f = @(x) %Aqui va la funcion f(x);
df = @(x) %Derivada de la funcion f(x);
[raiz, tabla] = newton_raphson(f, df, 0, 1e-11, 100);
disp(tabla);
```

4 Problema a solucionar

4.1 Planteamiento del problema

Se vacía un bloque rectangular de acero para formar una tina de grosor uniforme t. Las dimensiones de la tina se muestran en la siguiente figura a). Para que la tina flote en agua, como se muestra en la figura b), el peso del agua desplazada debe ser igual al peso de la tina (principio de Arquímedes).



a) b)

Si el peso especifico del aguaes 62,4 $lb/pies^3$ y el peso especifico del acero es 490 $lb/pies^3$, entonces, el peso del agua desplazada es igual a 62,4∗(volumen del agua desplazada).

Peso de la tina = 490∗(volumen de acero de la tina).

4.2 Ecuación solución en función de t

Por principio de Arquimedes. Si el peso del agua desplazada es igual al peso de la tina, entonces t satisface la ecuación:

$$t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t - \frac{1638}{1225} = 0$$

Demostración. Primero que nada denomtemos el peso del agua deplazada, como P_{Ad}, el peso de la tina como P_t. También tomemos el volumen del agua desplzada $= \alpha$ y volumen del acero de la tina $= \beta$.

Por lo que Dada la suposición inicial, tenemos que el peso del agua desplazada es igual al peso de la tina

$$P_{Ad} = P_t$$

Al tomar el valor de cada uno

$$62{,}4\alpha = 490\beta$$

Entonces, ahora debemos hallar tanto el valor de α (volumen del agua desplazada) como el valor de β (volumen del acero de la tina).

Para el volumen del agua desplazada:

Por el principio de arquimedes, podemos asegurar, que el volumen del agua desplazada es igual al volumen total del objeto introducido.

Sea el volumen total de la tina denotado como V_t, observamos

$$V_t = \alpha$$

Tomando en cuenta las dimensiones totales de la tina: **alto:** 2 pies, **ancho:** 7 pies y **largo:** 3 pies. Sabiendo que la tina tiene forma de prisma rectangular, su volumen es igual a (largo)x(ancho)x(alto).

$$V_t = 3 * 7 * 2 = 42$$

$$V_t = 42 = \alpha$$

Para el volumen del acero de la tina:

Podremos hallar el valor de β (volumen del acero de la tina), si conocemos el volumen total de la tina, y el volumen interno de esta misma, para despúes poder expresar β como $V_t -$ volumen interno de la tina.

Tomemos el volumen interno de la tina como V_{It}, entonces dadas las propiedades geometricas de la tina, su volumen interno puede expresarse como $V_{It} =$ (largo total$-2t$) $*$ (ancho total - $2t$) $*$ (alto total - t), Luego

$$V_{It} = (3 - 2t)(7 - 2t)(2 - t)$$

$$V_{It} = -4t^3 + 28t^2 - 61t + 42$$

Ahora para la expresión

$$\beta = V_t - V_{It}$$

Al tomar los valores de V_t y V_{It}

$$\beta = 42 - (-4t^3 + 28t^2 - 61t + 42)$$

$$\beta = 4t^3 - 28t^2 + 61t$$

Ya que tenemos los valores tanto de α como β, podemos reemplazarlos en la ecuación original

$$62{,}4\alpha = 490\beta \tag{1}$$

$$62{,}4(42) = 490(4t^3 - 28t^2 + 61t) \tag{2}$$

$$2620,8 = 490(4t^3 - 28t^2 + 61t) \tag{3}$$

$$\frac{2620,8}{490} = \frac{490(4t^3 - 28t^2 + 61t)}{490} \tag{4}$$

$$\frac{2620,8}{490} = 4t^3 - 28t^2 + 61t \tag{5}$$

$$\frac{\frac{2620{,}8}{490}}{4} = \frac{(4t^3 - 28t^2 + 61t)}{4} \tag{6}$$

$$\frac{2620{,}8}{1960} = \frac{4t^3}{4} - \frac{28t^2}{4} + \frac{61t}{4} \tag{7}$$

$$\frac{2620{,}8}{1960} = t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t \tag{8}$$

Al estudiar la expresión $\frac{2620{,}8}{1960}$ vemos que su valor decimal, es el mismo que para la expresion $\frac{1638}{1225}$. Por lo que para la ecuación anterior, escribimos

$$\frac{1638}{1225} = t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t \tag{9}$$

$$-t^3 + 7t^2 - \frac{61}{4}t + \frac{1638}{1225} = 0 \tag{10}$$

$$-1(-t^3 + 7t^2 - \frac{61}{4}t + \frac{1638}{1225}) = 0(-1) \tag{11}$$

$$t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t - \frac{1638}{1225} = 0 \tag{12}$$

$\square$

Por lo que se ha demostrado que t satisface la ecuación

$$t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t - \frac{1638}{1225} = 0$$

4.3 Aproximación a la máxima raíz positiva, mediante método Newton - Raphson

Para la función

$$f(t) = t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t - \frac{1638}{1225}$$

Apartir del modelo

$$t_{j+1} = t_j - \frac{f(t_j)}{f'(t_j)}$$

y la sucesión $\{t_j\}_{j=0}^{n}$

Primera iteración

Sea $t_0 = 0$ y $f'(t) = 3t^2 - 14t + \frac{61}{4}$, tenemos que

$$t_{0+1} = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} \tag{1}$$

$$t_1 = 0 - \frac{(0)^3 - 7(0)^2 + \frac{61}{4}(0) - \frac{1638}{1225}}{3(0)^2 - 14(0) + \frac{61}{4}} \tag{2}$$

$$t_1 = 0{,}087681498829040 \tag{3}$$

Segunda iteración

$$t_2 = t_1 - \frac{(t_1)^3 - 7(t_1)^2 + \frac{61}{4}t_1 - \frac{1638}{1225}}{3(t_1)^2 - 14(t_1) + \frac{61}{4}} \tag{1}$$

$$t_2 = 0{,}091465068636545 \tag{2}$$

Tercera iteración

$$t_3 = t_2 - \frac{(t_2)^3 - 7(t_2)^2 + \frac{61}{4}t_2 - \frac{1638}{1225}}{3(t_2)^2 - 14(t_2) + \frac{61}{4}} \tag{1}$$

$$t_3 = 0{,}091471956160659 \tag{2}$$

Cuarta iteración

$$t_4 = t_3 - \frac{(t_3)^3 - 7(t_3)^2 + \frac{61}{4}t_3 - \frac{1638}{1225}}{3(t_3)^2 - 14(t_3) + \frac{61}{4}} \tag{1}$$

$$t_4 = 0{,}091471956183457 \tag{2}$$

Para el caso de la 4 iteración la función finalmente converge, ya que tenemos que se cumple:

- $f(t_4) = 0$
- La diferencia entre dos estimaciones sucesivas de la raíz, dada una tolerancia de $1e - 11$ es menor a 0.00000000001. es decir

$$|t_4 - t_3| < 0{,}00000000001$$

5 Conclusiones

- **Eficacia del Método Newton-Raphson:** El método Newton-Raphson, que es un método iterativo de resolución de ecuaciones no lineales, puede ser muy eficaz para resolver ecuaciones complejas como la que se presenta en probelma a solucionar.

- **Aplicación Práctica:** La aplicación del método Newton-Raphson al problema anterior demuestra su utilidad en situaciones prácticas. En este caso, se utilizó para determinar el grosor necesario para que una tina de acero flote en agua.

- **Importancia de las Condiciones Iniciales:** El éxito del método Newton-Raphson depende en gran medida de una buena elección de la condición inicial. Una mala elección puede llevar a soluciones no deseadas o a que el método no converja.

- **Limitaciones:** Aunque el método Newton-Raphson es poderoso, también tiene sus limitaciones. No siempre converge y, cuando lo hace, no siempre es a la raíz que esperamos. Esto es especialmente cierto para funciones con múltiples raíces.

Bibliografía

[1] D. R Bartle R. G. Sherbert. *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*. Limusa, 1990.

[2] Ignacio Larrosa Cañestro. *Geogebra, Método de Newton - Raphson*. URL: https://www.geogebra.org/m/XCrwWHzy.

[3] Facultad de Ingeniería U.N.M.D.P. *Análisis númerico. Método Newton - Raphson*. URL: http://www3.fi.mdp.edu.ar/analisis/temas/no_lineales_1/newtonRaphson.

[4] Karl Stromberg. *Introduction to classical real analysis*. Wadsworth, 1981.

[5] RAMA ESTUDIANTIL DEL IEEE DE LA UCSA. *Método Newton - Raphson*. URL: https://ramaucsa.wordpress.com/2011/01/06/metodo-newton-raphson/#:~:text=El%20m%C3%A9todo%20de%20Newton-Raphson,cercano%20a%20la%20ra%C3%ADz%20buscada.

[6] Eric W. Weisstein. *Newton's Method. From MathWorld*. URL: https://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html.

[7] Wikipedia. *Teorema de Taylor*. 2023. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Taylor.