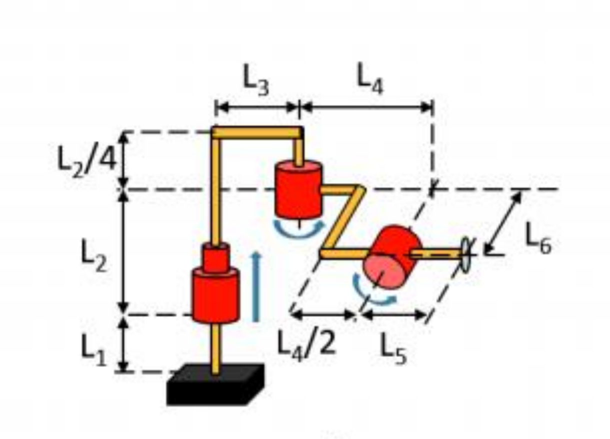
PROYECTO FUNDAMENTOS DE ROBÓTICA:

JUAN DE DIOS HERRERA HURTADO

Apartado 0

Comenzaremos determinando el brazo y la muñeca correspondiente al DNI, en mi caso es 47562083 siendo D1=8 y D2=3:

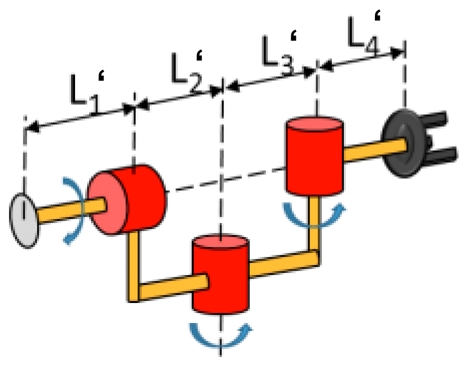
$$\mathrm{E1} = \mathrm{D1} * \frac{5}{9} = 8 * \frac{5}{9} = 4.44 \approx 4 \rightarrow \text{Brazo e}$$



e)

L1 (m)	L2 (m)	L3 (m)	L4 (m)	L5 (m)	L6 (m)
0.4	0.7	0.3	0.5	0.4	0.2

$$\mathrm{E2} = \mathrm{D2} * \frac{3}{9} = 3 * \frac{3}{9} = 1 \rightarrow \text{Muñeca 2}$$

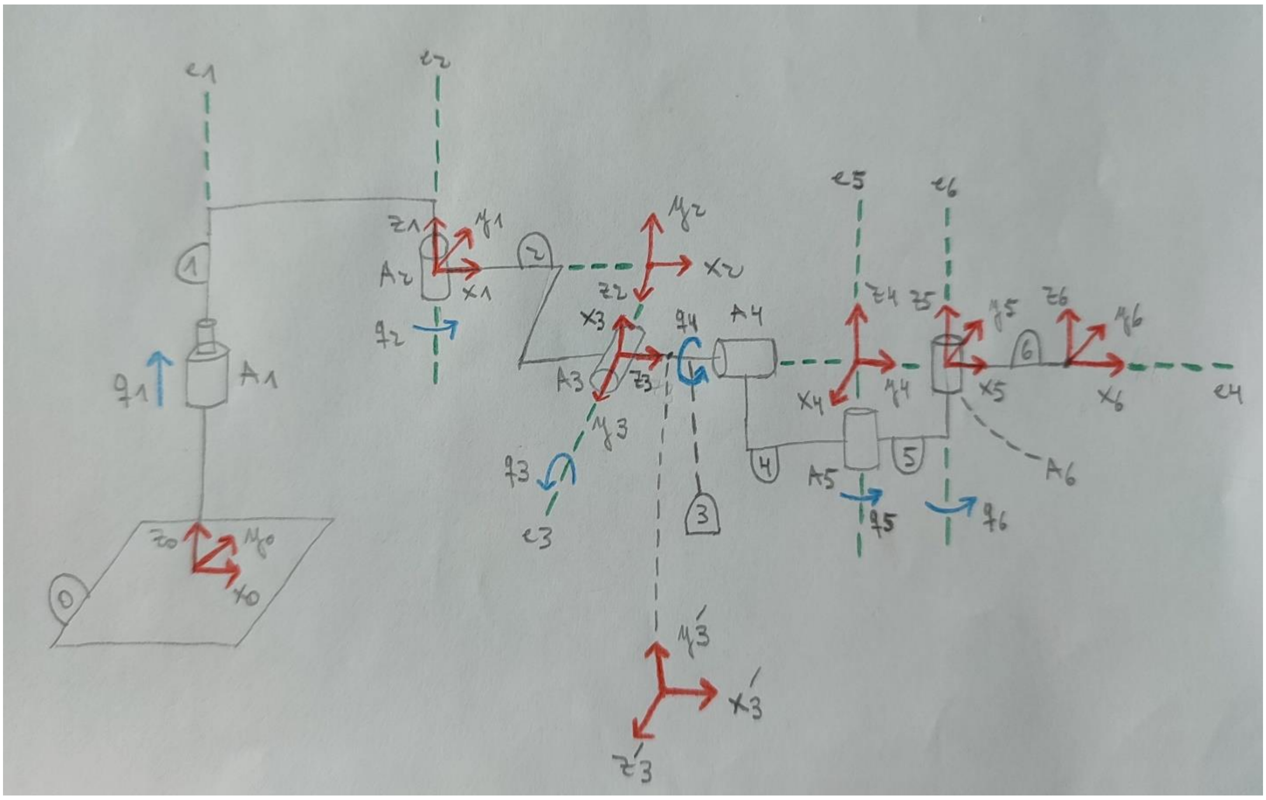


2)

L1’ (m)	L2’ (m)	L3’ (m)	L4’ (m)
0	0.2	0.1	0.1

Apartado 1-2

Se muestran ahora los ejes situados sobre un esquema del robot:



Una vez tenemos los ejes definidos, pasamos a completar la tabla del método de Denavit-Hartenberg:

	θi	di	ai	αi
1	0	q1 (L1+L2)	L3	0º
2	q2 (0º)	0	L4	90º
3	q3 (90º)	L6	0	90º
4	q4 (90º)	L5+L1’+L2’	0	90º
5	q5 (90º)	0	L3’	0
6	q6 (0º)	0	L4’	0

A continuación, añadimos una fila 3’ para cuando desacoplemos el extremo del brazo (punto de interés ahora) de la muñeca. La tabla con el desacoplo aplicado quedaría así:

	θi	di	ai	αi
1	0	q1 (L1+L2)	L3	0º
2	q2 (0º)	0	L4	90º
3’	q3 (0º)	L6	L5	0º

Apartado 3

A continuación, se muestran las seis matrices de transformación homogéneas correspondientes a cada par de articulaciones consecutivas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(q2) & 0 & \sin(q2) & L4 * \cos(q2) \\ \sin(q2) & 0 & -\cos(q2) & L4 * \sin(q2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(q3) & 0 & \sin(q3) & 0 \\ \sin(q3) & 0 & -\cos(q3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos(q4) & 0 & \sin(q4) & 0 \\ \sin(q4) & 0 & -\cos(q4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L5 + L1' + L2' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos(q5) & -\sin(q5) & 0 & L3' * \cos(q5) \\ \sin(q5) & \cos(q5) & 0 & L3' * \sin(q5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos(q6) & -\sin(q6) & 0 & L4' * \cos(q6) \\ \sin(q6) & \cos(q6) & 0 & L4' * \sin(q6) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3{}' = \begin{bmatrix} \cos(q3) & -\sin(q3) & 0 & L5 * \cos(q3) \\ \sin(q3) & \cos(q3) & 0 & L5 * \sin(q3) \\ 0 & 0 & 1 & L6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apartado 4

Ahora expresamos las ecuaciones simbólicas ya sin tener en cuenta la muñeca:

$$\mathrm{T} = \mathrm{A}_1 * \mathrm{A}_2 * \mathrm{A}_3{}'$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \cos(q2) * \cos(q3) & -\cos(q2) * \sin(q3) & \sin(q2) & L3 + L4 * \cos(q2) + L6 * \sin(q2) + L5 * \cos(q2) * \cos(q3) \\ \cos(q3) * \sin(q2) & -\sin(q2) * \sin(q3) & -\cos(q2) & L4 * \sin(q2) - L6 * \cos(q2) + L5 * \cos(q3) * \sin(q2) \\ \sin(q3) & \cos(q3) & 0 & q1 + L5 * \sin(q3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo el elemento (1,4) px, (2,4) py y (3,4) pz.

Apartado 5

Pasamos ahora a resolver la cinemática inversa. Se obtienen las siguientes ecuaciones para las respectivas q1, q2 y q3:

$$\mathrm{A}_1^{-1} * \mathrm{T} = \mathrm{A}_2 * \mathrm{A}_3{}'$$

De esta igualdad se obtiene la ecuación:

$$p_z - q1 = L5 * \sin(q3) \quad \textbf{(1)}$$

Multiplicamos ahora por el inverso de A2 a la izquierda:

$$\mathrm{A}_2^{-1} * \mathrm{A}_1^{-1} * \mathrm{T} = \mathrm{A}_3{}'$$

Obtenemos otras dos ecuaciones:

$$p_x * \sin(q2) - p_y * \cos(q2) - L3 * \sin(q2) = L6 \quad \textbf{(2)}$$

$$p_x * \cos(q2) - L3 * \cos(q2) - L4 + p_y * \sin(q2) = L5 * \cos(q3) \quad \textbf{(3)}$$

De la ecuación (2) se obtiene (esta solución la encontré en internet, me resultó muy útil y fácil, así que he decidido aplicarla):

$$q2 = \mathrm{atan2}(L6, \pm\alpha) - \mathrm{atan2}(-p_y, p_x - L3)$$

$$\text{Siendo } \alpha = \sqrt{(-p_y)^2 + (p_x - L3)^2 - L6^2}$$

Ahora despejamos q3 de la ecuación (3) teniendo ya el valor de q2:

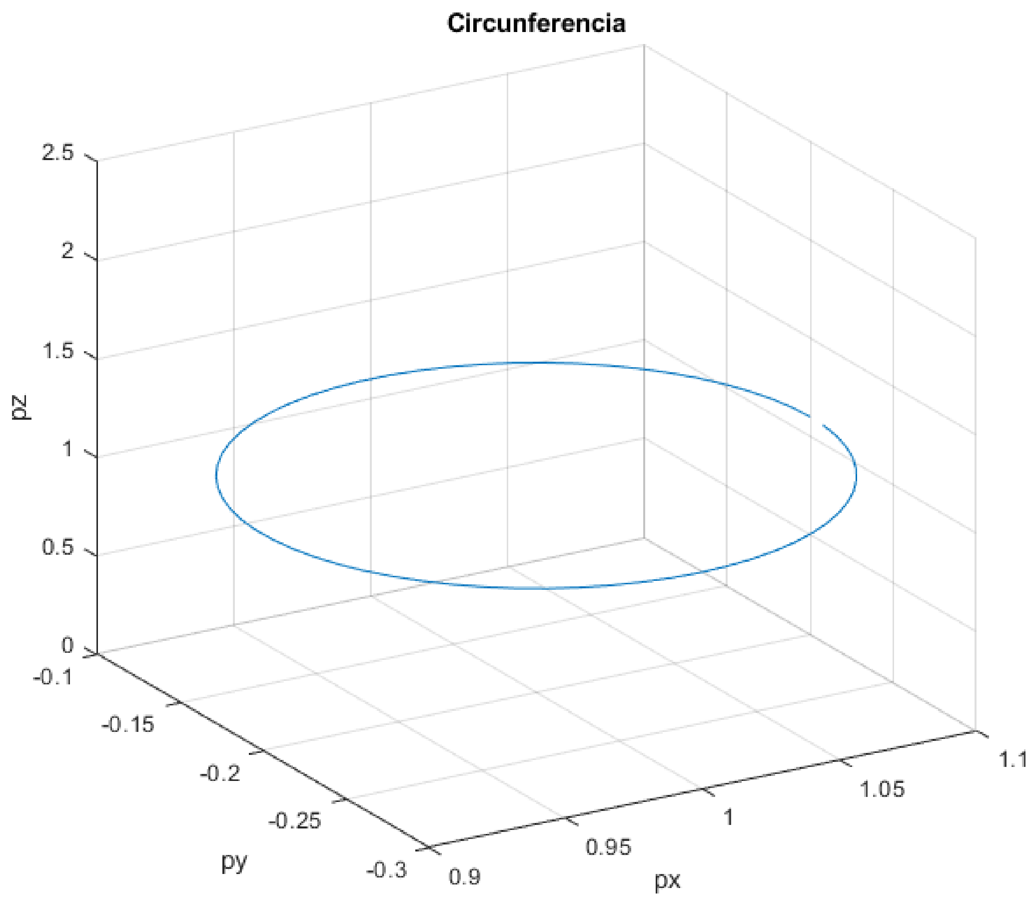
$$q3 = \cos^{-1}\left[\frac{p_x * \cos(q2) - L3 * \cos(q2) - L4 + p_y * \sin(q2)}{L5}\right]$$

Por último, de la ecuación (1) despejamos q1:

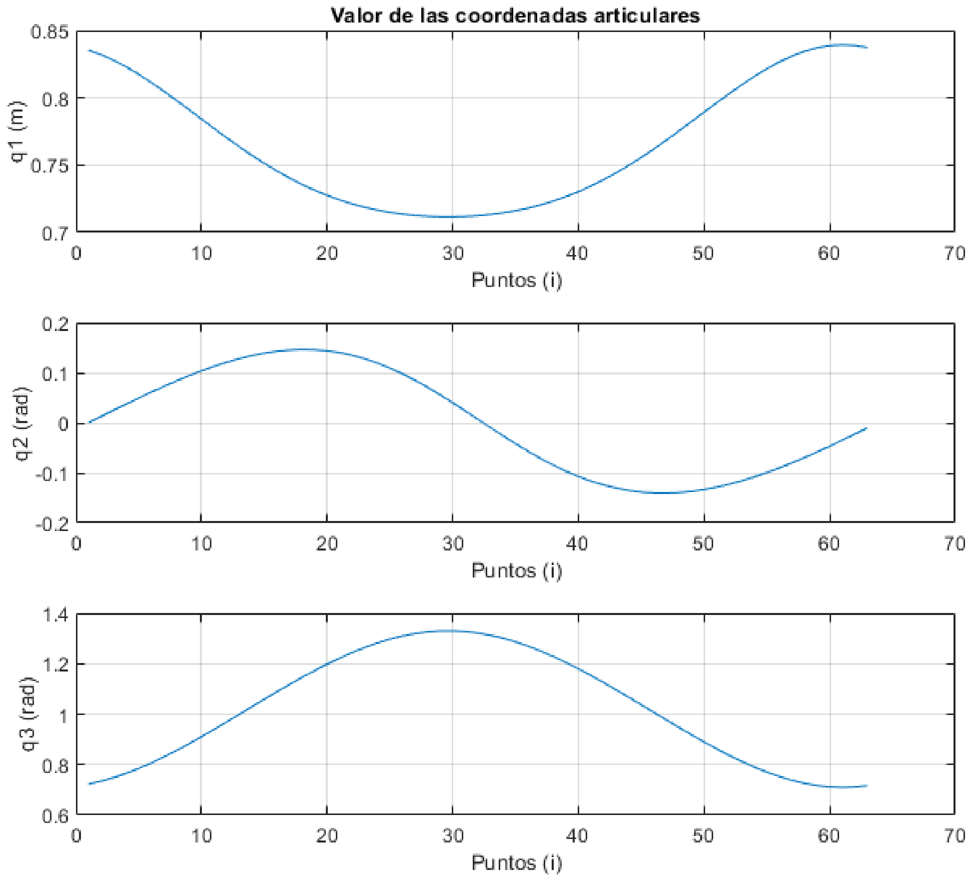
$$q_1 = p_z - L_5 * \sin(q3)$$

Apartado 6

Pasamos a ver las trayectorias de las articulaciones. Defino una circunferencia de radio 0.1 metros y centrada en el punto [1, -0.2, 1.1]. La circunferencia resultante es la siguiente:



Los valores que toman las coordenadas articulares a lo largo de la circunferencia descrita anteriormente son los siguientes:



Apartado 7

Pasamos a calcular el jacobiano directo como:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta p_x}{\delta q1} & \frac{\delta p_x}{\delta q2} & \frac{\delta p_x}{\delta q3} \\ \frac{\delta p_y}{\delta q1} & \frac{\delta p_y}{\delta q2} & \frac{\delta p_y}{\delta q3} \\ \frac{\delta p_z}{\delta q1} & \frac{\delta p_z}{\delta q2} & \frac{\delta p_z}{\delta q3} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & L6 * \cos(q2) - L4 * \sin(q2) - L5 * \cos(q3) * \sin(q2) & -L5 * \cos(q2) * \sin(q3) \\ 0 & L4 * \cos(q2) + L6 * \sin(q2) + L5 * \cos(q2) * \cos(q3) & -L5 * \sin(q2) * \sin(q3) \\ 1 & 0 & L5 * \cos(q3) \end{bmatrix}$$

Igualando J = 0 nos queda:

$$\frac{\sin(2 * q3) * L5^2}{2} + L4 * \sin(q3) * L5 = 0$$

De aquí claramente se obtiene:

$$q3 = 0º \pm 180º * k \ ; \ k \text{ entero}$$

Todas estas soluciones son los puntos singulares.

Para obtener el jacobiano inverso calculamos la inversa de J:

[(2*cos(q3)*(L4*cos(q2) + L6*sin(q2) + L5*cos(q2)*cos(q3)))/(2*L4*sin(q3) + L5*sin(2*q3)), (2*cos(q3)*(L4*sin(q2) - L6*cos(q2) + L5*cos(q3)*sin(q2)))/(2*L4*sin(q3) + L5*sin(2*q3)), 1]

[-sin(q2)/(L4 + L5*cos(q3)), cos(q2)/(L4 + L5*cos(q3)), 0]

[-(2*(L4*cos(q2) + L6*sin(q2) + L5*cos(q2)*cos(q3)))/(sin(2*q3)*L5^2 + 2*L4*sin(q3)*L5), -(2*(L4*sin(q2) - L6*cos(q2) + L5*cos(q3)*sin(q2)))/(sin(2*q3)*L5^2 + 2*L4*sin(q3)*L5), 0]