Taller de Fractales
(Conjunto de Mandelbrot y Julia)

Juan Esteban Ladino y Carlos Sebastian Martinez
Variable Compleja
Presentado a: Alexander Caicedo
Universidad del rosario

06/09/2020

1. Conjunto de Julia

Gastón Julia fue el primero en realizar estudios de funciones complejas que generaban conjuntos extraños. Una de estas fue:

$Z_{n+1} = Z_n^2 + c$

Siendo Z_k con k = 0,...,n , números complejos y c una constante compleja. Lo que Gastón propuso fue fijar dicha c y pasar todos los números complejos por el método. La sucesión de estos resultados se denomina la **orbita** de z_0 y el resultado al que tiende se denomina **atractor**. Si hacemos esto continuamente observamos que la sucesión tiende al infinito. Pierre Fatou logro demostrar que si aplicamos este método iterativo a todos los puntos del plano obtenemos que la mayoría de ellos generan orbitas hacia el infinito, y que si para un z_0 se cumple que un elemento en su órbita tiene modulo mayor a 2 y $|c|$ entonces su órbita tiende al infinito.

Llamamos entonces al conjunto de Julia los puntos del plano complejo para los cuales las iteradas de la función en dichos puntos constituyen una sucesión no divergente.
Julia demostró que para saber si el conjunto de Julia asociado a un complejo c es conexo solo se tenia que estudiar la orbita del 0. Si la orbita del 0 se escapaba al infinito entonces el conjunto de Julia asociado a ese c era disconexo, y si no lo hacia el conjunto era conexo.

2. Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos c para los que el conjunto de Julia asociado es conexo. Es decir es el conjunto de números complejos c para los cuales:

$Z_{n+1} = Z_n^2 + c$, con $z_0 = 0$ no es divergente.

Estos conjuntos cumplen con ciertas propiedades. Una curiosa de este conjunto M es la auto similitud que presenta. Si ampliamos una imagen de esta cerca del borde del conjunto encontraremos en muchas zonas al propio conjunto de Mandelbrot otra vez.

3. Generación de Imágenes y vídeo

3.1. Generación de la imagen:

Se realizo la implementación computacional del conjunto de Julia con n's y c's específicos en MATLAB, para una matriz de números complejos y se gráfico con el siguiente pseudocódigo:

```
for i in Matrix:
    z0 = i; z = 0
    k = 0
    while |z| < 2 and k < inf (Acotado por C.D.C.)
        z = z^n + z0 + c
        k = k + 1
    end
    i = k // entrada i guarda un #, se transforma en color
end
```

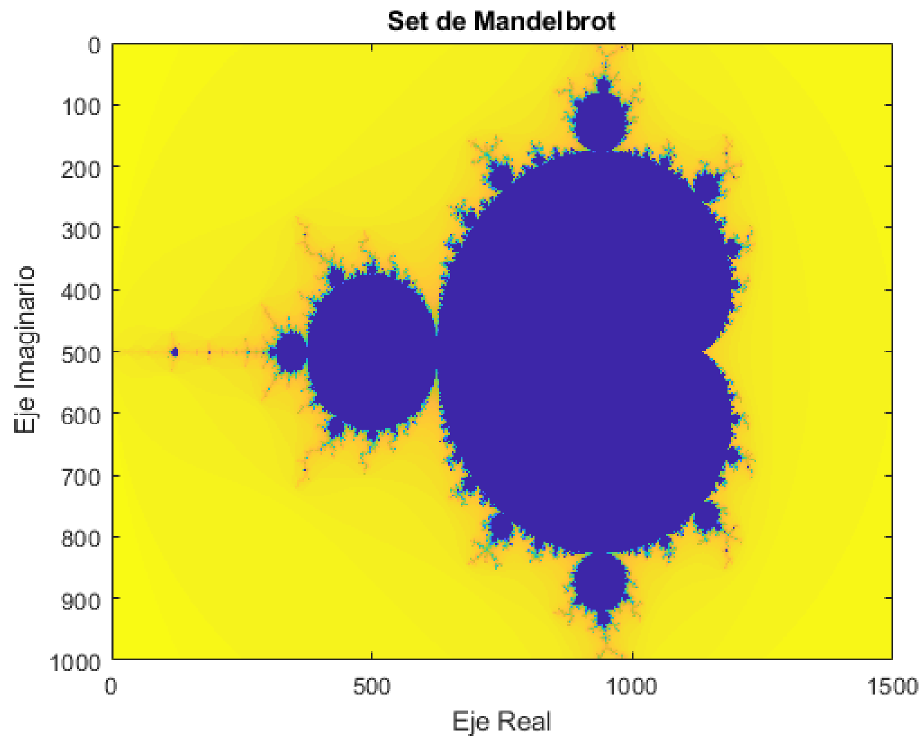
Donde *Matrix* es una matriz de números complejos y c es una constante y C.D.C (criterio de convergencia)

De esta manera se calcula la matriz de convergencia, luego con:

```
imagesc[Matrix]
```

clase de MATLAB (que construye una imagen a través de una matriz) generamos la imagen del la matriz que representa el conjunto de Julia

Figura 1. Set de Mandelbrot



3.2. Generación de Vídeo:

Usando herramientas de MATLAB *videowriter* creamos un vídeo:

```
v = videowriter('nombre.avi')
open.(v)
for i in MF:
    imagesc(i)
end
close(v)
```

Donde MF son Matrices $Matrix$ con diferentes valores de n y c, y genera distintas imágenes que por medio de *videowriter* las ubica en un vídeo y las anima

4. Explicación

Teorema: si $|Z_n| > 2$ y $|Z_n| \geq |c|$ entonces la sucesión diverge

Demostración:

Suponga que $|Z_n| > 2$ y $|Z_n| \geq |c|$ entonces $\exists\ e > 0$ tal que $|Z_n| = 2 + e$

Por desigualdad triangular tenemos que:

$|Z_n^2| = |Z_n + c - c| \leq |Z_n^2 + c| + |c|$

Despejando

$|Z_n^2 + c| \geq |Z_n|^2 + |c| \geq |Z_n|^2 - |Z_n| = (|Z_n| - 1)|Z_n| = (2 + e - 1)|Z_n| = (1 + e)|Z_n|$

Finalmente

$|Z_{n+1}| = |Z_n^2 + c| \geq (1 + e)|Z_n|; donde (1 + e) > 1$

De aquí, $|Z_{n+1}|$ será mayor que $|Z_n|$ y al continuar iterando, dado que las condiciones iniciales se seguirán cumpliendo ($|Z_{n+1}| > 2$ y $|Z_{n+1}| \geq |c|$), continuara aumentando el valor en módulo, por lo que la sucesión divergirá al infinito.

5. Referencias

- ✓ https://www.gaussianos.com/ %C2 %BFque-es-el-conjunto-de-mandelbrot-historia-y-construccion/
- ✓ https://www.matesfacil.com/fractales/Julia/lleno/conjunto-de-Julia-lleno-imagenes-funcion-definicion-teorema-disco-fractal-iteraciones-ejemplos.html
- ✓ http://www-old.dma.fi.upm.es/docencia/cursosanteriores/99-00/segundociclo/sistdin/sdma
- ✓ http://www-old.dma.fi.upm.es/docencia/cursosanteriores/99-00/segundociclo/sistdin/sdma
- ✓ http://www-old.dma.fi.upm.es/docencia/cursosanteriores/99-00/segundociclo/sistdin/sdma
- ✓ http://lcr.uns.edu.ar/fvc/NotasDeAplicacion/FVC-Aller %20Sebasti %C3 %A1n.pdf
- ✓ http://www-old.dma.fi.upm.es/docencia/cursosanteriores/99-00/segundociclo/sistdin/sdma
- ✓ http://lcr.uns.edu.ar/fvc/NotasDeAplicacion/FVC-Aller %20Sebasti %C3 %A1n.pdf
- ✓ http://radiorho.blogspot.com/2016/11/arte-fractal-coloreando-el-conjunto-de.html