

Teoría de la Información Cuántica

*Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física
Universidad Nacional de La Plata
2019*

ÍNDICE GENERAL

1	ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO	1
1.1	Operador Densidad y Entropía de Von Neumann	2
1.2	Sistemas Compuestos y Estados Reducidos	3
1.3	Información Mutua y Entropía Condicional	4
1.4	Entrelazamiento de Estados Puros	5
1.5	Entrelazamiento de Estados no Puros	6
1.6	Criterios Básicos de Separabilidad	7
1.7	Medidas de Entrelazamiento	8
1.7.1	Concurrencia	9
1.7.2	Negatividad	9
1.8	Fidelidad	10
	BIBLIOGRAFÍA	11

1 ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO

“ Solo sé que no sé nada y, al saber que nada sé,
algo sé.”

Sócrates

Una propiedad clave que caracteriza el comportamiento de los sistemas en el régimen cuántico es el llamado *Entrelazamiento cuántico*. Esta propiedad puede entenderse como la imposibilidad de representar las correlaciones existentes en un sistema cuántico en términos de una distribución estadística sobre posibles configuraciones del sistema, especificables en términos de estados locales definidos. Para entender cómo esta noción es fundamental en la descripción clásica de los sistemas físicos, consideremos por ejemplo el sistema Tierra-Luna-Sol. Para la mecánica newtoniana, estos tres astros son entes distintos, con propiedades independientes. Así, en cada instante el Sol, la Tierra y la Luna cuentan con posiciones y velocidades bien definidas. El efecto de la interacción entre estos cuerpos se reduce entonces a cambiar las velocidades de estos cuerpos en función de las posiciones de los otros. Este marco de trabajo, que podemos llamar *reduccionista*, permite describir y predecir el comportamiento de la mayoría de los sistemas físicos macroscópicos en forma a la vez computacionalmente eficiente y precisa. Sin embargo, al tratar de aplicarlo a sistemas en la escala atómica comienza a mostrar sus fallas: en esta escala, el entrelazamiento implica que para ciertos estados del sistema, las propiedades de las partes no estén bien definidas. Por ejemplo, el estado típico de una molécula de Hidrógeno no puede en general describirse en términos de los estados de los átomos que la conforman: existen observables globales (la energía de la molécula, el impulso angular) que no son compatibles con los observables asociados a los átomos por separado. Esto nos obliga en mecánica cuántica a tratar los sistemas compuestos desde una perspectiva *holística*, en el sentido de que debemos tratar al sistema como un todo. Una consecuencia inmediata es que la descripción exacta de los sistemas cuánticos se vuelve mucho más compleja que la de su equivalente clásico.

Sin embargo, no todos los sistemas cuánticos parecen requerir de una descripción que aborde toda esa complejidad potencial. Por ejemplo, el sistema Tierra-Sol-Luna en sí es un sistema cuántico. La clave del éxito de su descripción clásica consiste en que en su evolución el estado de cada una de sus partes permanece bien definido. Decimos entonces que el sistema admite descripción en términos de *estados separables*. Por otro lado, la molécula de Hidrógeno típicamente se encuentra en un estado en el que el estado de sus partes

no está bien definido. Decimos por esto que su descripción requiere considerar *estados entrelazados*. Podemos decir entonces que cuanto más entrelazados se encuentren los estados típicos de un sistema (en un dado régimen) más nos costará representarlos en forma precisa y eficiente a la vez.

La definición y evaluación de medidas que cuantifiquen el grado de entrelazamiento presente en un sistema es una tarea bastante más compleja, tanto desde un punto de vista formal como práctico. En lo que resta del capítulo daremos una definición más formal de lo que es un *estado cuántico entrelazado* [1-4]. Se introducirán entonces algunos elementos de la teoría de la información que nos permitirán definir medidas de entrelazamiento y de correlaciones cuánticas entre partes de un sistema.

1.1. OPERADOR DENSIDAD Y ENTROPÍA DE VON NEUMANN

El estado de un sistema cuántico se puede caracterizar por un *operador densidad* (o matriz densidad) ρ , el cual es un operador hermítico de traza 1 y con todos sus autovalores no negativos:

$$\rho \geq 0, \quad \text{Tr} \rho = 1. \quad (1.1)$$

Este operador determina el valor medio de cualquier observable O :

$$\langle O \rangle = \text{Tr} \rho O. \quad (1.2)$$

La probabilidad de encontrar al sistema en un estado particular $|i\rangle$, (que supondremos normalizado) es entonces

$$p_i = \langle P_i \rangle = \text{Tr} \rho P_i = \langle i | \rho | i \rangle, \quad (1.3)$$

donde $P_i = |i\rangle\langle i|$ es el proyector ortogonal sobre el estado $|i\rangle$.

En el caso de un sistema cuántico en un estado puro $|i\rangle$, ρ es entonces el proyector ortogonal sobre el espacio generado por $|i\rangle$:

$$\rho = |i\rangle\langle i|, \quad (1.4)$$

y satisface $\rho^2 = \rho$. En el caso general, la descomposición espectral de ρ la escribiremos como

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|, \quad (1.5)$$

donde $\{p_i, i = 1, \dots, n\}$ son los autovalores de ρ ($p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$) y $\{|i\rangle, i = 1, \dots, n\}$ los correspondientes autovectores normalizados ($\langle i | i' \rangle = \delta_{ii'}$). El caso puro corresponde a $p_i = 1$ para un cierto estado y 0 para todos los demás. En el caso general,

tenemos $\rho^2 \leq \rho$ (es decir, $\rho^2 - \rho$ es un operador con autovalores $-p_i(1 - p_i)$ negativos o nulos).

La entropía de von Neumann [1, 5, 6] se define como

$$S(\rho) = -\text{Tr } \rho \log \rho \quad (1.6)$$

$$= -\sum_i p_i \log p_i, \quad (1.7)$$

y es una medida de la falta de información asociada al estado ρ . Tenemos $S(\rho) \geq 0$, con $S(\rho) = 0$ únicamente si ρ es un estado puro ($\rho^2 = \rho$). $S(\rho)$ será por el contrario máxima ($S(\rho) = \log n$ si el espacio de Hilbert del sistema tiene dimensión n) si el estado ρ es máximamente “mezclado” $\rho_n = I_n/n$, donde I_n denota el operador identidad, tal que $p_i = 1/n \forall i$.

1.2. SISTEMAS COMPUESTOS Y ESTADOS REDUCIDOS

Dados dos sistemas cuánticos distinguibles, que denotaremos como A y B , con sendos espacios de Hilbert H_A y H_B y espacio de Hilbert conjunto $H_A \otimes H_B$, el estado conjunto estará determinado por una cierta *matriz densidad conjunta* ρ_{AB} . La entropía conjunta es por lo tanto

$$S(A, B) = S(\rho_{AB}) = -\text{Tr } \rho_{AB} \log \rho_{AB}. \quad (1.8)$$

Un observable *local* en el sistema A es un observable de la forma $O_A \equiv o_A \otimes I_B$, donde I_B denota la identidad en H_B . Su valor medio es entonces

$$\langle O_A \rangle = \text{Tr } \rho_{AB} O_A = \text{Tr}_A \rho_A o_A, \quad (1.9)$$

donde hemos definido la *matriz densidad reducida* [1, 5]

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} \quad (1.10)$$

la cual determina completamente los valores medios de todo observable local en A . Explícitamente, $\langle i | \rho_A | j \rangle = \sum_k \langle ik | \rho_{AB} | jk \rangle$, donde $|ik\rangle \equiv |i\rangle \otimes |k\rangle$ son los estados de una base producto ortonormal de $H_A \otimes H_B$. Análogamente,

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB},$$

determina los valores medios de cualquier operador local O_B en B . Las entropías locales son

$$S(A) = -\text{Tr } \rho_A \log \rho_A, \quad S(B) = -\text{Tr } \rho_B \log \rho_B.$$

El estado conjunto es no correlacionado si y solo si $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, es decir, si y solo si es un estado producto, en cuyo caso sus autovalores son $p_{ij} = p_i^A p_j^B$ con p_i^A y p_j^B los

autovalores de ρ_A y ρ_B respectivamente. En tal caso las entropías satisfacen $S(A, B) = S(A) + S(B)$, como es fácil ver de la definición (1.8).

1.3. INFORMACIÓN MUTUA Y ENTROPÍA CONDICIONAL

Podemos ahora definir la **información mutua** como

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \quad (1.11)$$

Esta cantidad es una medida de la correlación (total) entre A y B [1, 5]. Si $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, $S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$ y por lo tanto $I(A : B) = 0$. En caso contrario $I(A : B) > 0$.

Esta positividad de $I(A : B)$ es conceptualmente evidente: $S(A) + S(B)$ es una medida de la falta de información cuando sólo se dispone de información sobre los valores medios de todos los observables locales (es decir, cuando se conoce sólo ρ_A y ρ_B), mientras que $S(A, B)$ mide la falta de información cuando se conoce además toda la información sobre las correlaciones, es decir, sobre todos los valores medios de observables generales del tipo $O_{AB} = O_A \otimes O_B$. Por lo tanto $S(A, B) \leq S(A) + S(B)$.

Clásicamente, es decir, para sistemas descritos por densidades de probabilidad, se tiene además

$$S(A, B) \geq S(A), \quad S(A, B) \geq S(B) \quad (1.12)$$

Las entropías condicionales $S(A|B)$ y $S(B|A)$ pueden definirse como

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B), \quad S(B|A) = S(A, B) - S(A) \quad (1.13)$$

y son por lo tanto cantidades no negativas en sistemas clásicos.

Sin embargo, la desigualdad (1.12) no sigue siendo válida en sistemas cuánticos, es decir, en sistemas descritos por operadores densidad. En otras palabras, en sistemas cuánticos la entropía global puede ser menor que las entropías locales, y las entropías condicionales definidas como en (1.13) pueden por lo tanto ser negativas.

A modo de ejemplo, consideremos un par de qubits o espines $1/2$ en un estado de Bell, por ejemplo

$$|\Psi\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.14)$$

donde $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ denota un estado con ambos espines en la dirección z positiva. El estado $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ es un estado puro y por lo tanto,

$$S(\rho_{AB}) = 0.$$

No obstante, los estados reducidos son máximamente mezclados:

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|).$$

Por lo tanto,

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1, \quad (1.15)$$

tomando el logaritmo en base 2. Esto implica $S(A) = S(B) > S(A, B) = 0$, a diferencia de cualquier sistema clásico. Más aun, los estados locales están máximamente mezclados (es decir, máximamente “desordenados”) a pesar de que el estado global es puro (es decir, máximamente “ordenado”). Para este estado tenemos entonces

$$I(A : B) = 2$$

$$S(A|B) = S(B|A) = -1.$$

Como veremos a continuación, la violación de las desigualdades clásicas (1.12) puede darse solo cuando el estado ρ es entrelazado.

1.4. ENTRELAZAMIENTO DE ESTADOS PUROS

Si un estado cuántico puro $|\Psi_{AB}\rangle$ de un sistema conjunto $A + B$ se puede escribir como estado producto, no posee entrelazamiento y se lo denomina *separable*. Por otro lado un estado *entrelazado* no puede descomponerse en un producto de estados:

$$|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle \Rightarrow |\Psi_{AB}\rangle \text{ separable} \quad (1.16)$$

$$|\Psi_{AB}\rangle \neq |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle \Rightarrow |\Psi_{AB}\rangle \text{ entrelazado} \quad (1.17)$$

Las entropías de los subsistemas de un estado puro son idénticas (véase (1.22) y permiten definir la *entropía de entrelazamiento* [1, 3], que cuantifica el **entrelazamiento** de un estado cuántico puro bipartito, como

$$E(A, B) = S(A) = S(B). \quad (1.18)$$

$E(A, B)$ es una medida de las correlaciones cuánticas en el estado. Si $|\Psi_{AB}\rangle$ es separable, entonces $\rho_A = |\Psi_A\rangle\langle\Psi_A|$, $\rho_B = |\Psi_B\rangle\langle\Psi_B|$ y $E(A, B) = 0$.

En el caso puro $E(A, B)$ es menos la entropía condicional:

$$S(A|B) = S(B|A) = -E(A, B), \quad (1.19)$$

pues $S(A, B) = 0$. Mientras que la correspondiente información mutua es

$$I(A : B) = S(A) - S(A|B) = 2S(A) = 2E(A, B). \quad (1.20)$$

Podemos considerar a $I(A : B)$ como una medida de todas las correlaciones en el sistema, mientras que a $E(A, B)$ como una medida de correlaciones puramente cuánticas.

Una forma de determinar si un estado cuántico es entrelazado es a través de la *descomposición de Schmidt* del estado [1]: Existen siempre bases locales $\{|k_A\rangle\}$ y $\{|k_B\rangle\}$ ortonormales, en las que $|\Psi\rangle$ puede escribirse en la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k |k_A\rangle |k_B\rangle, \quad (1.21)$$

donde n_s es el número de Schmidt y $\sigma_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k^2 = 1$. Las matrices densidad reducidas están entonces dadas por

$$\rho_A = \sum_k \sigma_k^2 |k_A\rangle \langle k_A|, \quad \rho_B = \sum_k \sigma_k^2 |k_B\rangle \langle k_B|. \quad (1.22)$$

Estas son isospectrales por lo que $S(A) = S(B)$. El caso separable corresponde a $n_s = 1$, donde $E(A, B) = 0$, mientras que el caso entrelazado a $n_s \geq 2$, en el que

$$E(A, B) = - \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k^2 \log(\sigma_k^2) \quad (1.23)$$

La descomposición de Schmidt puede obtenerse a partir de la *descomposición en valores singulares* de la matriz de los coeficientes de expansión de $|\Psi\rangle$ en una base producto ortogonal, arbitraria [1], siendo los σ_k los valores singulares de dicha matriz. En el caso del estado de Bell (ecuación 1.14), ya está expresado en una base de Schmidt, con $n_s = 2$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/\sqrt{2}$.

El entrelazamiento es considerado un *recurso esencial* en información cuántica [1, 2], ya que permite formas radicalmente nuevas de intercambio y procesamiento de la información, tales como la teleportación cuántica [7] y la computación cuántica [1].

1.5. ENTRELAZAMIENTO DE ESTADOS NO PUROS

La definición de entrelazamiento cuántico es más compleja para estados ρ generales no necesariamente puros ($\rho^2 \leq \rho$). De hecho, en el caso general no es posible obtener un método general para determinar si el estado es entrelazado, en un número finito de pasos. Por lo tanto tampoco es posible obtener una medida computable del mismo.

Según la definición introducida por R.F. Werner en 1989 [8], un estado cuántico general es *entrelazado* si no es *separable* o *clásicamente correlacionado*, en cuyo caso puede ser escrito como una combinación convexa de estados producto, es decir, una superposición estadística de estados no correlacionados:

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha}, \quad q_{\alpha} \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ separable} \quad (1.24)$$

$$\rho \neq \sum_{\alpha} q_{\alpha} \rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha}, \quad q_{\alpha} \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ entrelazado} \quad (1.25)$$

donde $\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 1$. En particular, un estado producto $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, es decir, un estado no correlacionado, es un estado separable. Pero también lo es cualquier combinación convexa de los mismos. El argumento [8] es que los estados separables pueden ser generados mediante operaciones locales y comunicación clásica (es decir, por (*LOCC: Local Operations and Classical Communication*) [1]) y por lo tanto no contienen correlaciones cuánticas.

En otras palabras, dos personas a cierta distancia pueden, a través de comunicación clásica, acordar preparar un estado producto $|\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle$, pero también una combinación estadística de estados producto: A tira un dado y de acuerdo al valor de este prepara $|\Psi_A^{\alpha}\rangle$, $\alpha = 1, \dots, 6$ y avisa a B , quien prepara el correspondiente estado $|\Psi_B^{\alpha}\rangle$, originando así una combinación convexa del tipo (1.24) ($\rho = \sum_{\alpha=1}^6 \frac{1}{6} |\Psi_A^{\alpha}\rangle\langle\Psi_A^{\alpha}| \otimes |\Psi_B^{\alpha}\rangle\langle\Psi_B^{\alpha}|$).

Por otro lado un estado entrelazado no puede ser escrito de la forma anterior con coeficientes q_{α} positivos. Estos se generan únicamente por medio de una interacción cuántica entre los sistemas. Pueden generarse como autoestados de un Hamiltoniano que contenga términos de interacción $\sum_{\alpha} o_A^{\alpha} \otimes o_B^{\alpha}$, o haciendo evolucionar un estado inicialmente separable con un Hamiltoniano del tipo anterior [1, 9] (de forma que el operador evolución $U(t) = \exp[-iHt/\hbar]$ no sea un producto de operadores de evolución locales $U_A(t) \otimes U_B(t)$).

Los estados ρ diagonales en una base producto: $\rho = \sum_{i,j} p_{ij} |ij\rangle\langle ij|$ son un caso particular de estado separable. En el caso general, los distintos términos en (1.24) no son necesariamente conmutantes.

En el caso puro, la definición (1.24) coincide por supuesto con la previa dada en la ecuación (1.17): Si $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$, la combinación convexa (1.24) es necesariamente un estado producto $\rho_A \otimes \rho_B$, con ρ_A y ρ_B puros.

1.6. CRITERIOS BÁSICOS DE SEPARABILIDAD

En general, excepto en casos simples como el de dos qubits, no es fácil determinar si un estado no puro, es separable o entrelazado. En realidad es un problema considerado en general “*hard*” [10].

El **criterio de la traspuesta parcial**, introducido por Asher Peres en 1996 [11], proporciona un criterio de separabilidad simple, computable y necesario, pero en general no suficiente. Es decir,

$$\rho_{AB} \text{ separable} \Rightarrow \rho_{AB}^{t_A} \geq 0, \quad (1.26)$$

donde t^A denota *traspuesta parcial* [1] ($\langle ij|\rho_{AB}^{t_A}|kl\rangle = \langle kj|\rho_{AB}|il\rangle$). Es decir, si $\rho_{AB}^{t_A}$ tiene algún autovalor negativo entonces ρ_{AB} es entrelazado. Pero si todos sus autovalores son no-negativos puede ser aún entrelazado. Sólo en el caso de dos qubits o qubit/qutrit, el presente criterio es *necesario y suficiente* [11, 12].

El **criterio entrópico estándar** se basa en que los estados separables al igual que los sistemas clásicos, son siempre más desordenados globalmente que localmente [12]:

$$\rho \text{ separable} \Rightarrow S(A, B) \geq S(A), \quad (1.27)$$

y análogamente, $S(A, B) \geq S(B)$. Corresponden pues a entropías condicionales $S(A|B)$ y $S(B|A)$ *positivas*.

Los estados entrelazados pueden satisfacer, como vimos, $S(A, B) < S(A)$, pero a diferencia del caso puro, en el caso no puro esta condición no es necesaria: Existen también estados entrelazados que son más desordenados globalmente que localmente ($S(A, B) > S(A)$, $S(A, B) > S(B)$). Notemos también que en el caso no puro, $S(A)$ no es necesariamente igual a $S(B)$.

El presente criterio entrópico ($\rho_{AB} \text{ separable} \Rightarrow S(A, B) \geq S(A)$) puede generalizarse en realidad a otras entropías mucho más generales (por ejemplo, del tipo $S(\rho) = \text{Tr} f(\rho)$, con f cóncava y $f(0) = f(1) = 0$ [13]), dando lugar al **criterio entrópico generalizado** [14], que es más fuerte que el criterio entrópico basado en la entropía de von Neumann [12] y equivalente al criterio general de desorden [15].

1.7. MEDIDAS DE ENTRELAZAMIENTO

La medida de entrelazamiento en estados no puros es un tema que no está cerrado y es aún más difícil. Usualmente se utiliza como medida el entrelazamiento de formación, definido por la denominada “*Convex Roof Extension*” de la definición para estados puros [2, 4]:

$$E(A, B) \equiv E(\rho_{AB}) = \min_{\sum_i q_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = \rho_{AB}} \sum_i q_i E(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|) \quad (1.28)$$

es decir, es el mínimo, entre todas las representaciones posibles de ρ_{AB} como combinación convexa de estados puros $|\Psi_i\rangle$ (no necesariamente ortogonales), del promedio del entrelazamiento en los mismos, definido de acuerdo a (1.18). En general, la cantidad (1.28) no es computable de forma exacta.

1.7.1. CONCURRENCIA

La gran excepción es el caso de dos qubits (o sea, dos sistemas con espacio de Hilbert local de dimensión 2, tal como un par de espines $1/2$), donde W.K. Wootters logró obtener una fórmula general computable en 1998 por medio de la llamada concurrencia C_{AB} [16]:

$$E(A, B) = - \sum_{\nu=\pm} q_{\nu} \log q_{\nu}, \quad (1.29)$$

donde

$$q_{\nu} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2(A, B)}}{2}, \quad (1.30)$$

$$C(A, B) = \text{Max}[2\lambda_M - \text{Tr} R, 0]. \quad (1.31)$$

Aquí λ_M es el autovalor máximo de la matriz $R = \sqrt{\rho_{AB}^{1/2} \tilde{\rho}_{AB} \rho_{AB}^{1/2}}$, con $\tilde{\rho}_{AB} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho_{AB}^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ en la base estándar, compuesta por los autoestados producto de $\sigma_z \otimes \sigma_z$. Aquí $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ denota las matrices de Pauli.

Se verifica

$$0 \leq C(A, B) \leq 1, \quad 0 \leq E(A, B) \leq 1 \quad (1.32)$$

con $E(A, B) = C(A, B) = 1$ para un estado de Bell (que es, por lo tanto, un estado máximamente entrelazado), y $E(A, B) = C(A, B) = 0$ para un estado separable, siendo $E(A, B)$ una función estrictamente creciente de $C(A, B)$.

Para el caso de un estado puro arbitrario de dos qubits, se ve que (1.29) se reduce a la entropía $S(A) = S(B)$ de cualquiera de los qubits, dada por la expresión (1.23) con $n_s = 2$. En tal caso $C(A, B) = 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

1.7.2. NEGATIVIDAD

La negatividad es un estimador de entrelazamiento computable para estados mixtos de cualquier dimensión [17-19], definida por

$$N_{AB} = (\text{Tr} |\rho_{AB}^{\text{t}_A}| - 1)/2, \quad (1.33)$$

donde $\rho_{AB}^{\text{t}_2}$ denota la traspuesta parcial de ρ_{AB} . La Ec. (1.33) es simplemente el valor absoluto de la suma de los autovalores negativos de $\rho_{AB}^{\text{t}_A}$. Si ρ_{AB} es un estado puro ($\rho_{AB} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$), la Ec. (1.33) se reduce a una entropía de entrelazamiento generalizada,

$$N_{AB} = [(\text{Tr} \sqrt{\rho_A})^2 - 1]/2 = \sum_{i < j} \lambda_i^1 \lambda_j^1 \quad (1.34)$$

donde $\rho_A = \text{Tr}_B |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ es el estado reducido de A y λ_i^1 sus autovalores. En este caso el estado es entrelazado si y solo si $N_{AB} > 0$. Consecuentemente, la Ec. (1.34) se anula para ρ_A puro ($|\psi_0\rangle$ separable), y alcanza su máximo para ρ_A máximamente mezclado (es decir, $|\psi_0\rangle$ máximamente entrelazado), en cuyo caso $N_{AB} = (d-1)/2$, con $d = \text{Min}[d_A, d_B]$ (en particular, $N_{AB} = s$ para un par de espines s).

En el caso mixto general, $N_{AB} > 0$ implica entrelazamiento de ρ_{AB} , pero $N_{AB} = 0$ no implica necesariamente separabilidad, salvo para sistemas qubit-qubit o qubit-qutrit [12], ya que existen ciertos estados mixtos entrelazados (*bound entangled states*) que igualmente cumplen $N_{AB} = 0$. No obstante, dada su computabilidad, N_{AB} es corrientemente utilizada como una medida o estimador de entrelazamiento de estados mixtos.

1.8. FIDELIDAD

La fidelidad [1] es una medida de la distancia entre dos estados cuánticos (puros o no puros). Se define como

$$F(\rho, \rho') = \text{Tr} \sqrt{\rho^{1/2} \rho' \rho^{1/2}}. \quad (1.35)$$

Para estados puros $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\rho' = |\psi'\rangle\langle\psi'|$, $F(\rho, \rho')$ se reduce al modulo del *overlap*:

$$F(\rho, \rho') = |\langle\psi|\psi'\rangle|. \quad (1.36)$$

En ambos casos, la fidelidad es un número entre 0 y 1,

$$0 \leq F \leq 1,$$

con $F(\rho, \rho') = 1$ si y solo si $\rho = \rho'$ y $F(\rho, \rho') = 0$ si y solo si ρ y ρ' tienen soportes ortogonales.

La fidelidad está relacionada con otra cantidad que mide cuan diferentes son dos estados, conocida como medida o métrica de Wootters. Esta última puede evaluarse en función de la primera por la relación

$$B(\rho, \rho') = \arccos F(\rho, \rho') \quad (1.37)$$

Esta medida define una distancia entre los operadores estadísticos, ya que es una cantidad semidefinida positiva y simétrica que satisface la desigualdad triangular ($B(\rho, \rho') \leq B(\rho, \rho'') + B(\rho'', \rho')$).

BIBLIOGRAFÍA

1. M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 2000.
2. G. Vidal. «Entanglement renormalization.» *Phys. Rev. Lett.* 2007, 99:220405.
3. B. Schumacher. «Quantum coding». *Phys. Rev. A* 51, 4 1995. C.H. Bennett, H. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53** 2046 (1996), págs. 2738-2747. DOI: [10.1103/PhysRevA.51.2738](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.51.2738). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.2738>.
4. C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin y W. K. Wootters. «Mixed-state entanglement and quantum error correction». *Phys. Rev. A* 54:5, 1996, págs. 3824-3851. DOI: [10.1103/PhysRevA.54.3824](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.3824).
5. A. Wehrl. «General properties of entropy». *Rev. Mod. Phys.* 50, 2 1978, págs. 221-260. DOI: [10.1103/RevModPhys.50.221](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.50.221). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.50.221>.
6. J. von Neumann. «Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik». *Göttinger Nachrichten*, 1927, pág. 245.
7. C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres y W. K. Wootters. «Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels». *Phys. Rev. Lett.* 70, 13 1993, págs. 1895-1899. DOI: [10.1103/PhysRevLett.70.1895](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1895>.
8. R. F. Werner. «Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model». *Phys. Rev. A* 40:8, 1989, págs. 4277-4281. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.4277](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.4277).
9. R. Rossignoli y C. T. Schmiegelow. «Entanglement generation resonances in XY chains». *Phys. Rev. A* 75:1, 2007, pág. 012320. DOI: [10.1103/PhysRevA.75.012320](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.012320).
10. F. Giraldi y P. Grigolini. «Quantum entanglement and entropy.» *Phys. Rev. A* 64:2, 2001, pág. 032310.
11. A. Peres. «Separability Criterion for Density Matrices». *Phys. Rev. Lett.* 77:8, 1996, págs. 1413-1415. DOI: [10.1103/PhysRevLett.77.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413).

12. M. Horodecki, P. Horodecki y R. Horodecki. «Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions». *Physics Letters A* 223:1-2, 1996, págs. 1-8. ISSN: 0375-9601. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960196007062>.
13. N. Canosa y R. Rossignoli. «Generalized nonadditive entropies and quantum entanglement». *Physical Review Letters* 88:17, 2002, págs. 1704011-1704014.
14. R. Rossignoli y N. Canosa. «Generalized entropic criterion for separability». *Phys. Rev. A* 66:4, 2002, pág. 042306. DOI: [10.1103/PhysRevA.66.042306](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.042306).
15. M. A. Nielsen y J. Kempe. «Separable States Are More Disordered Globally than Locally». *Phys. Rev. Lett.* 86:22, 2001, págs. 5184-5187. DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.5184](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5184).
16. S. Hill y W. Wootters. «Entanglement of a pair of quantum bits». *Phys. Rev. Lett.* 78, 1997, pág. 5022.
17. G. Vidal y R. Werner. *Phys. Rev. A* 65, 2002, pág. 032314.
18. K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera y M. Lewenstein. *Phys. Rev. A* 58, 1998, pág. 883.
19. K. Życzkowski. *Phys. Rev. A* 60, 1999, pág. 3496.
20. (a) T. Ramos, H. Pichler, A. Daley y P. Zoller. *Phys. Rev. Lett.* 113, 2014, pág. 237203; (b) A. Glaetzle, M. Damonte, R. Nath, C. Gross, I. Bloch y P. Zoller. *Phys. Rev. Lett.* 114, 2015, pág. 173002; (c) I. Bloch, J. Dalibard y W. Zwerger. *Rev. Mod. Phys.* 80, 2006, pág. 885.
21. (a) J. Perk, H. Capel, M. Zuilhof y T. Siskens. *Phys. A* 81, 1975, pág. 319; (b) T. Siskens, H. Capel y J. Perk. *Phys. Lett. A* 53, 1975, pág. 21.
22. (a) J. Perk, H. Capel y T. Siskens. *Phys. A* 89, 1977, pág. 304; (b) J. Perk y H. Capel. *Phys. A* 92, 1978, pág. 163; (c) J. Perk y H. Au-Yang. *J. Stat. Phys.* 135, 2009, pág. 599; (d) J. Perk y H. Capel. *Phys. A* 92, 1978, pág. 163; (e) J. Perk y H. Au-Yang. *J. Stat. Phys.* 135, 2009, pág. 599.
23. (a) E. Kutznetsova y E. Fel'dman. *JETP. Lett.* 102, 2006, pág. 882; (b) E. Fel'dman y M. Rudavets. *JETP. Lett.* 81, 2005, pág. 47; (c) S. Doronin, A. Pyrkov y E. Fel'dman. *JETP. Lett.* 85, 2007, pág. 519.
24. (a) C. Majumdar y D. Gosh. *J. Math. Phys.* 10, 1969, pág. 1388; (b) C. Majumdar y D. Gosh. *J. Math. Phys.* 10, 1969, pág. 1399; (c) B. Shastri y B. Sutherland. *Phys. Rev. Lett.* 47, 1981, pág. 964.
25. (a) J. Sirker, A. Herzog, A. Oles y P. Horsch. *Phys. Rev. Lett.* 101, 2008, pág. 157204; (b) A. Herzog, P. Horsch, A. Oles y J. Sirker. *Phys. Rev. B* 84, 2011, pág. 134428.

26. (a) C. Lamas y J. Matera. *Phys. Rev. B* 92, 2015, pág. 115111; (b) J. Matera y C. Lamas. *J. Phys.: Condens. Matter* 26, 2014, pág. 326004.