Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la información cuántica

Práctica II (Curso 2020)

I. **Traza Parcial, Entrelazamiento y Medidas**

1) Hallar el estado reducido del subsistema de los primeros m qubits y evaluar la entropía de entrelazamiento de la correspondiente partición $(m, n-m)$, con $1 \leq m \leq n-1$, para los estados siguientes:

$$|\Psi\rangle = (|0\ldots 0\rangle + |1\ldots 1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|\Phi\rangle = (|10\ldots 0\rangle + |010\ldots\rangle + \ldots |0\ldots 01\rangle)/\sqrt{n}$$

2) Dado el estado $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} C_{ij}|ij\rangle$, con $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$ y $|ij\rangle \equiv |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$,
a) Determine el estado reducido del sistema A.
b) Supongamos que se realiza una medida local en el sistema B, en la base $\{|j_B\rangle\}$. Determine el estado conjunto del sistema y el estado reducido del sistema A luego de la medición, si se obtiene el resultado j.
c) Determinar el estado promedio del sistema conjunto y del sistema A luego de la medición.

3) Determinar M_3 y el valor máximo de p tal que el conjunto $\{M_1, M_2, M_3\}$ con $M_1 = \sqrt{p}|1\rangle\langle 1|$, $M_2 = \sqrt{p}|-\rangle\langle -|$ y $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, represente una medida (generalizada) de un qubit. Utilizar esta medida para distinguir estados $|0\rangle$ y $|+\rangle$, y comparar su eficiencia con una medida proyectiva estándar de un qubit.

II. **Compuertas Lógicas Cuánticas**

1) Utilizando la notación $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_Y$, $Z = \sigma_z$, escribir las matrices que representan, en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$), los operadores

$$a)\ X \otimes I, \quad b)\ I \otimes X, \quad c)\ X \otimes X, \quad d)\ U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

Verificar que U_X es el Control Not cuántico en la base estándar. Verificar también que todos los operadores anteriores son unitarios y determinar sus inversas.

2) Comprobar que $W = U_X(H \otimes I)$, con $H = (X + Z)/\sqrt{2}$ la compuerta de Hadamard, transforma la base computacional en la base de Bell, determinando su representación matricial. Concluir que una medición en la base de Bell (es decir, basada en proyectores ortogonales sobre estos estados) es equivalente a aplicar $W^\dagger = (H \otimes I)U_X$ seguido de una medición en la base computacional (y una nueva aplicación de W). Representar mediante un circuito la anterior equivalencia.

3) Mostrar que $U_S = U_X \bar{U}_X U_X$, con $U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ y $\bar{U}_X = I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$, es el operador de "swap", que satisface

$$U_S|ab\rangle = |ba\rangle$$

para todo estado producto $|ab\rangle = |a\rangle|b\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Escribir la matriz que representa a U_S en la base computacional y dibujar el circuito correspondiente.

III **Teleportación Cuántica**

1) En el proceso de teleportación, hallar la matriz reducida de B en las siguientes etapas:
a) Antes de que A realice la medida
b) Luego de que A realice la medida, conociendo el resultado de esta.
c) El estado promedio luego de que A realice la medida, sin conocer el resultado de esta.

2) a) Aplicar el proceso de teleportación a un estado no puro general

$$\rho_C = p_0 \,|\psi_0\rangle\langle\psi_0| + (1-p_0)\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$$

indicando si el esquema estándar puede transmitir este estado.
b) Supongamos ahora que C está inicialmente entrelazado con un cuarto sistema D,

$$|\Psi_{DC}\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle|\psi_0\rangle + \sqrt{1-p_0}\,|1\rangle|\psi_1\rangle$$

¿Es posible realizar la teleportación cuántica? Interpretar.
c) Realizar el proceso de teleportación estándar para un estado puro en C con un estado de Bell $|\Psi_{AB}\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$, indicando las operaciones a realizar en B luego de las operaciones usuales en (C, A).

Trabajo Práctico II.

1) a) sea $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\ldots0\rangle + \ldots + |1\ldots1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_1 0_2 \ldots 0_m\rangle |0_{m+1} 0_{m+2} \ldots 0_n\rangle + |1_1 1_2 \ldots 1_m\rangle |1_{m+1} 1_{m+2} \ldots 1_n\rangle\right)$

es decir escribo mi estado como un producto de particiones. $\Rightarrow$ usando la descomp. de Schmidt.

$$\Rightarrow \rho_m = \sum_k \lambda_k^2 |k\rangle\langle k| = \frac{1}{2}\left(|0_1 0_2 \ldots 0_m\rangle\langle 0_1 0_2 \ldots 0_m| + |1_1 1_2 \ldots 1_m\rangle\langle 1_1 1_2 \ldots 1_m|\right) = \rho_A$$

Tenemos un sistema bipartito por lo que la entropía es:

$$S = -\sum_{k=1}^{2} \lambda_k^2 \log_2(\lambda_k^2) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \quad \rho_A =$$

b) sea $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[|10\ldots0\rangle + |01\ldots0\rangle + \ldots + |0\ldots01\rangle\right)$

Escribamos a $|\Phi\rangle$ como partición: $\rho_A = \frac{m}{n} |\psi_m\rangle\langle\psi_m| + \frac{n-m}{n}|0\rangle\langle 0|$

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\left(|1_1 0_2 \ldots 0_m\rangle + |0_1 1_2 \ldots 0_m\rangle + \ldots + |0_1 0_2 \ldots 0_m\rangle\right) \otimes |0_{m+1} 0_{m+2} \ldots 0_n\rangle + |0_1 0_2 \ldots 0_m\rangle \otimes \left(|1_{m+1} 0_{m+2} \ldots 0_n\rangle + |0_{m+1} 1_{m+2} \ldots 0_n\rangle + \ldots + |0_{m+1} 0_{m+2} \ldots 1_n\rangle\right)\Big]$$

$$= \sqrt{\frac{m}{n}}\left[\left(\frac{|1_1 0_2 \ldots 0_m\rangle + |0_1 1_2 \ldots 0_m\rangle + \ldots + |0_1 0_2 \ldots 0_m\rangle}{\sqrt{m}}\right) \otimes |0_{m+1} 0_{m+2} \ldots 0_n\rangle + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{n-m}{n}} |0_1 0_2 \ldots 0_m\rangle \otimes \left(\frac{|1_{m+1} 0_{m+2} \ldots 0_n\rangle + |0_{m+1} 1_{m+2} \ldots 0_n\rangle + \ldots + |0_{m+1} 0_{m+2} \ldots 1_n\rangle}{\sqrt{n-m}}\right)\right]$$

Tengo la descomposición de Schmidt:

$$S = -\sum_{k=1}^{2} \lambda_k^2 \log_2 \lambda_k^2 = \frac{m}{n}\log_2\frac{m}{n} + \left(\frac{n-m}{n}\right)\log_2\left(\frac{n-m}{n}\right)$$

2. $|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |ij\rangle$ con $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

a) $\rho = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{ijkl} C_{ij} C_{kl}^* |ij\rangle\langle kl| \Rightarrow$ el estado reducido ρ_A será:

$$\rho_A = \sum_{k'} \langle k'_B|\rho_{AB}|k'_B\rangle = \sum_{k'} \langle k'_B|\left[\sum_{ijkl} C_{ij} C_{kl}^* |ij\rangle\langle kl|\right]|k'_B\rangle$$

$$= \sum_{ijkl}\sum_{k'} C_{ij} C_{kl}^* |i\rangle \underbrace{\langle k'_B|j\rangle}_{\delta_{k'j}} \langle k| \underbrace{\langle l|k'_B\rangle}_{\delta_{k'l}}$$

$$= \sum_{k'}\sum_{ijkl} C_{ij} C_{kl}^* \delta_{k'j}\delta_{k'l} |i\rangle\langle k|$$

$$= \sum_{ik}\underbrace{\sum_{k'} C_{ik'} C_{kk'}^*}_{:= D_{ik}} |i\rangle\langle k| = \sum_{ik} D_{ik} |i\rangle\langle k|$$

Tenemos que hacer una medida proyectiva:

medida local en B, con valor $j \longrightarrow \frac{P_j^B|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_j^B|\psi\rangle}}$

$|\psi_{AB}\rangle \xrightarrow{M_j} \frac{I_a\otimes P_{b,j}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|I_a\otimes P_{b,j}|\psi\rangle}}$ con $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|I^a\otimes P_j^b|\psi\rangle}}$ y P_j^b una medida proyectiva sobre el estado j del sistema B.

$$|\psi'_{AB}\rangle = \frac{I^a\otimes P_j^B|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi_{AB}|I^A\otimes P_j^B|\psi_{AB}\rangle}} = \alpha_j I^A\otimes P_j^B \sum_{ik} c_{ij}|ik\rangle = \alpha_j \sum_{ik} c_{ij}|ik\rangle|j\rangle\langle j|$$

$$= \alpha_j \sum_{ik} c_{ik}|i\rangle|j\rangle\underbrace{\langle j|k\rangle}_{\delta_{jk}} = \underbrace{\alpha_j \sum_i c_{ij}|i\rangle}_{|\tilde{j}\rangle}|j\rangle = |\tilde{j}j\rangle \Rightarrow \rho_A = |\tilde{j}\rangle\langle\tilde{j}|$$

c) El estado promedio será $|\psi_{AB}\rangle_{prom} = \sum_j \sqrt{P_j}|\tilde{j}j\rangle$ y el estado reducido ρ_A será $\rho_A = \sum_j P_j|\tilde{j}\rangle\langle\tilde{j}|$ donde P_j es la probabilidad de medir el resultado j tal que $P_j = \frac{1}{|\alpha_j|^2}$.

3. $M = \{M_j, j=1,\dots,k\}$ $\quad P_j = \langle\psi|M_j^\dagger M_j|\psi\rangle$ con $\sum_j P_j = 1 \Rightarrow \sum_j M_j^\dagger M_j = \mathbb{1}$

a) $\Rightarrow M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 + M_3^\dagger M_3 = \mathbb{1} \rightarrow M_3^\dagger M_3 = \mathbb{1} - p|1\rangle\langle 1| - p|-\rangle\langle -|$ con $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$$M_3^\dagger M_3 = \begin{pmatrix} 1-\frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & 1-\frac{3}{2}p \end{pmatrix}$$ en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

pues $\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $|-\rangle\langle -| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det M_3^\dagger M_3 = 0 \Rightarrow p_M = 2\pm\sqrt{2}$.

ahora sabemos que $P_j = \langle\psi|M_j^\dagger M_j|\psi\rangle$ que cumple: $\left(\left(\langle\psi|M_j^\dagger\right)\left(M_j|\psi\rangle\right)\right) = \|M_j|\psi\rangle\|^2 \geq 0 \quad \lambda_j \geq 0$

$\Rightarrow p_M = 2-\sqrt{2}$

sea $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|1\rangle \Rightarrow p|1\rangle\langle 1| + p|-\rangle\langle -| + q|\psi\rangle\langle\psi| = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow p\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix} + q^*\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

entonces: $\begin{cases} \frac{p}{2} + q^*\cos^2\theta = 1 \\ \frac{3p}{2} + q\operatorname{sen}^2\theta = 1 \end{cases} \rightarrow 2p + q = 2$

$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|+\rangle\langle +|$ entonces: $P(M_1) = \mathrm{Tr}(M_1^\dagger M_1\rho) = \frac{p}{4} > \frac{1}{4}$

$P(M_2) = \mathrm{Tr}(M_2^\dagger M_2\rho) = \frac{p}{4} > \frac{1}{4}$

$P(M_3)$ no distingue.

II 1. $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_y$, $Z = \sigma_z$. Consideremos la base: $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

a. Definimos el producto tensorial de matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

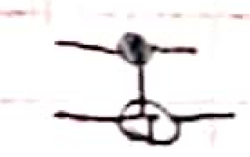
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1 B & a_2 B \\ a_3 B & a_4 B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1} \otimes X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

$$U_x = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes X = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11| = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Notamos que todas estas matrices son unitarias: $C^\dagger C = CC^\dagger = \mathbb{1}$ $\quad U_x^\dagger = U_x$

$$U_x = \begin{pmatrix} |0\rangle\langle 0| & 0 \\ 0 & |1\rangle\langle 1| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & |1\rangle\langle 1| \\ |1\rangle\langle 1| & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} =$$



$$\begin{cases} |00\rangle \to |00\rangle \\ |01\rangle \to |01\rangle \\ |10\rangle \to |11\rangle \\ |11\rangle \to |10\rangle \end{cases}$$

2). $W = U_x \cdot (H \otimes \mathbb{1}) = U_x \cdot \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$ con $H = \frac{X+Z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad U_x = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{X+Z}{\sqrt{2}}\right) \otimes \mathbb{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 1&0&-1&0 \\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_x (H \otimes \mathbb{1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&1&0&-1 \\ 1&0&-1&0 \end{pmatrix} = W$$

Lo aplico a la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

$$W|00\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{00}\rangle, \quad W|01\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{01}\rangle, \quad W|10\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{10}\rangle$$

$W|11\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{11}\rangle$ tengo la base de Bell

ahora para un estado $(a\,b\,c\,d)^T$ en la base de Bell $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{10}, \beta_{11}\}$

$$W^\dagger \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \\ a-d \\ b-c \end{pmatrix}$$

Si quiero medir $|\beta_{00}\rangle$: $a = 1$ $\quad W^\dagger|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{|\beta_{00}\rangle + |\beta_{10}\rangle}{\sqrt{2}} = |00\rangle$

si quiero medir $|\beta_{01}\rangle$: $b = 1$ $\quad W^\dagger|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (0\,1\,0\,1)^T = \frac{|\beta_{01}\rangle + |\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}} = |01\rangle$

si quiero medir $|\beta_{10}\rangle$: $c = 1$ $\quad W^\dagger|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (0\,1\,0\,-1)^T = \frac{|\beta_{01}\rangle - |\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}} = |10\rangle$

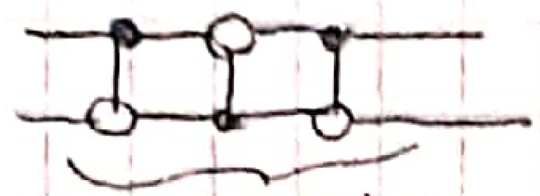
si quiero medir $|\beta_{11}\rangle$: $d = 1$ $\quad W^\dagger|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1\,0\,-1\,0)^T = \frac{|\beta_{00}\rangle - |\beta_{10}\rangle}{\sqrt{2}} = |11\rangle$

esto es una medida estándar.

3) $U_S = U_X \bar{U}_X U_X$ con $U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ y $\bar{U}_X = \mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$.

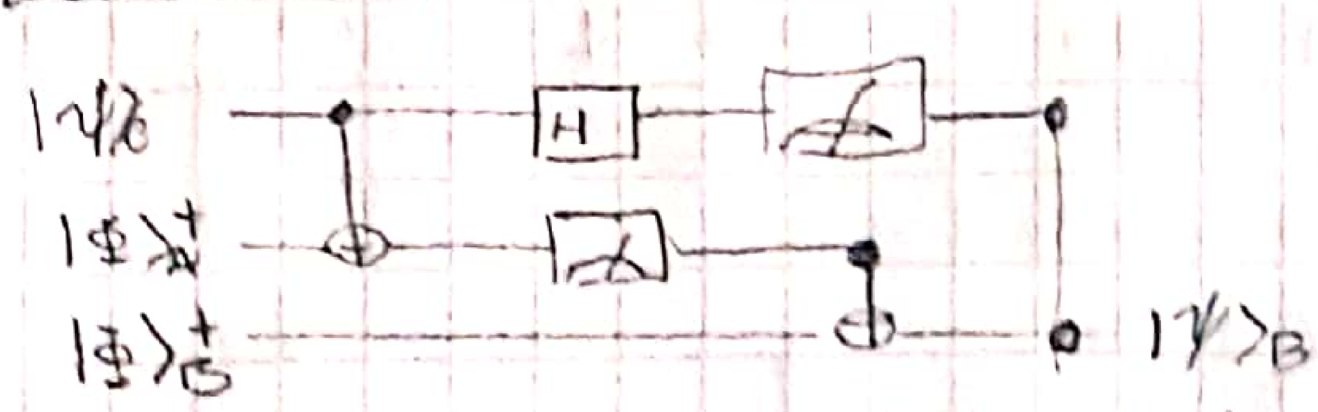
$$U_X = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\bar{U}_X = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{U}_X U_X = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}, U_S = U_X \bar{U}_X U_X = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$U_S|ab\rangle = |ba\rangle \Rightarrow$ $|ab\rangle$  $|ba\rangle$

$= U_S$

III. Teleportación:

1. 

donde $|\Phi\rangle = |\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$

$|\psi_c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

mi estado inicial es $|\psi_i\rangle = |\psi_C\rangle \otimes |\Phi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

$$|\psi_i\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) \xrightarrow{CNOT} \alpha|0\rangle\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta|1\rangle\left(\frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}\right) \xrightarrow{H}$$

$$\xrightarrow{H} \alpha\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |\psi_i'\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_i'\rangle = \frac{1}{2}\left[|00\rangle\alpha(|0\rangle + |1\rangle) + |11\rangle\alpha(|0\rangle + |1\rangle) + |10\rangle\beta(|0\rangle - |1\rangle) + |01\rangle\beta(|0\rangle - |1\rangle)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|00\rangle|\psi_c\rangle + |01\rangle X|\psi_c\rangle + |10\rangle Z|\psi_c\rangle + |11\rangle XZ|\psi_c\rangle\right]$$

Sabemos que $\rho_{CAB} = |\psi_i'\rangle\langle\psi_i'| \rightarrow \rho_B = Tr_{CA}(\rho_{CAB})$

$$\Rightarrow \rho_B = \frac{1}{4}\left[|\psi\rangle_c\langle\psi_c| + X|\psi_c\rangle\langle\psi_c|X + Z|\psi_c\rangle\langle\psi_c|Z + XZ|\psi_c\rangle\langle\psi_c|ZX\right]$$

$$|\psi_c\rangle\langle\psi_c| = \alpha^2|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta|0\rangle\langle 1| + \alpha\beta|1\rangle\langle 0| + \beta^2|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}$$

$$X|\psi_c\rangle\langle\psi_c|X = \alpha^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta|0\rangle\langle 1| + \alpha\beta|1\rangle\langle 0| + \beta^2|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}\beta^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \alpha^2\end{pmatrix}$$

$$Z|\psi_c\rangle\langle\psi_c|Z = \alpha^2|0\rangle\langle 0| - \alpha\beta|0\rangle\langle 1| - \alpha\beta|1\rangle\langle 0| + \beta^2|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}\alpha^2 & -\alpha\beta\\ -\alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}$$

$$XZ|\psi_c\rangle\langle\psi_c|ZX = \alpha^2|1\rangle\langle 1| - \alpha\beta|0\rangle\langle 1| - \alpha\beta|1\rangle\langle 0| + \beta^2|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}\beta^2 & -\alpha\beta\\ -\alpha\beta & \alpha^2\end{pmatrix}$$

$$\rho_B = \frac{1}{4}\Big[\alpha^2|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + \beta^2|1\rangle\langle 1| + \alpha^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + \beta^2|0\rangle\langle 0|$$
$$+ \alpha^2|0\rangle\langle 0| - \alpha\beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + \beta^2|1\rangle\langle 1| + \alpha^2|1\rangle\langle 1| - \alpha\beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + \beta^2|0\rangle\langle 0|\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{1}_2.$$

b) En cambio si medimos: $|00\rangle \to \rho_B^{00} = |\psi\rangle_c \langle\psi_c|$ $\quad |10\rangle \to \rho_B^{10} = Z|\psi_c\rangle\langle\psi_c| Z$

$|01\rangle \to \rho_B^{01} = X|\psi_c\rangle\langle\psi_c|X$ $\quad |11\rangle \to \rho_B^{11} = XZ|\psi_c\rangle\langle\psi_c| ZX.$

c) $\rho_{promedio} = \sum_j P_j \rho_j = \frac{1}{2}.$

2.a. La teleportación es lineal, por lo que transmito $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ y $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ por separado y sumo sus probabilidades:

$$\rho_{CAB} = p_0 |\psi_0'\rangle\langle\psi_0'| + (1-p_0)|\psi_1'\rangle\langle\psi_1'|$$

donde $|\psi_0'\rangle = \frac{1}{2}\left[|00\rangle|\psi_0\rangle + |01\rangle X|\psi_0\rangle + |10\rangle Z|\psi_0\rangle + |11\rangle XZ|\psi_0\rangle\right]$

$|\psi_1'\rangle = \frac{1}{2}\left[|00\rangle|\psi_1\rangle + |01\rangle X|\psi_1\rangle + |10\rangle Z|\psi_1\rangle + |11\rangle XZ|\psi_1\rangle\right]$

b. ahora tenemos $|\Psi_{DC}\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle|\psi_0\rangle + \sqrt{1-p_0}\,|1\rangle|\psi_1\rangle$, uso nuevamente linealidad.

entonces $|\Psi_{DCAB}\rangle = \frac{\sqrt{p_0}}{2}|0\rangle\left(|00\rangle|\psi_0\rangle + |01\rangle X|\psi_0\rangle + |10\rangle Z|\psi_0\rangle + |11\rangle XZ|\psi_0\rangle\right)$

$+ \frac{\sqrt{1-p_0}}{2}|1\rangle\left(|00\rangle|\psi_1\rangle + |01\rangle X|\psi_1\rangle + |10\rangle Z|\psi_1\rangle + |11\rangle XZ|\psi_1\rangle\right)$

en efecto, es posible la teleportación de un sistema C con un cuarto sistema D.

c) He de teleportar con $|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$

$$|\psi_{CAB}\rangle = |\psi_c\rangle \otimes |\beta_{11}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\left(\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}\right) \xrightarrow{CNOT} \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle(|01\rangle - |10\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle(|11\rangle - |00\rangle)$$

$$\xrightarrow{H} \frac{\alpha}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|01\rangle - |10\rangle) + \frac{\beta}{2}(|0\rangle - |1\rangle)(|11\rangle - |00\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\alpha|01\rangle(|0\rangle + |1\rangle) - \alpha|10\rangle(|0\rangle + |1\rangle) + \beta|11\rangle(|0\rangle - |1\rangle) - \beta|00\rangle(|0\rangle - |1\rangle)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[|00\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + |01\rangle(-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |10\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$$
$$+ |11\rangle(-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)\Big]$$

$\Rightarrow \quad \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle = XZ|\psi_c\rangle$; $-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = XZX|\psi_c\rangle$; $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = X|\psi_c\rangle = XZZ|\psi_c\rangle$

$-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle = XZXZ|\psi_c\rangle$

anexo ej 3: $U_S|00\rangle = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle$, $U_S|10\rangle = |01\rangle$, $U_S|01\rangle = |10\rangle$, $U_S|11\rangle = |11\rangle$

en efecto es el operador swap.