Guías de Teoría de la Información Cuántica - 2do Cuatrimestre del 2020

Federico Petrovich

1. Guía 1

1.1. Parte 1

1.1.1. Ejercicio 1

En general, un operador densidad que describe el estado de un sistema compuesto por N estados posibles $|\psi_1\rangle$, ..., $|\psi_N\rangle$ se escribe como

$$\rho = \sum_i p_i \ |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \,,$$

donde p_i es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $|\psi_i\rangle$. El estado del sistema es puro si y solo si $p_i = 1$ para algún i, y por lo tanto $p_j = 0$ para todo $j \neq i$.

Si los $|\psi_i\rangle$ son ortonormales se tiene que

$$\rho^2 = \left(\sum_i p_i \ |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \right) \left(\sum_j p_j \ |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \right) = \sum_{ij} p_i \ p_j \ \langle\psi_i|\psi_j\rangle \ |\psi_i\rangle \langle\psi_j| = \sum_i p_i^2 \ |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \,.$$

Luego,

$$\rho^2 = \rho$$

si y solo si

$$p_i^2 = p_i \ \forall \ 1 \leq i \leq n,$$

lo cual ocurre si y solo si $p_i = 1$ para algún i y $p_j = 0$ para todo $j \neq i$.

1.1.2. Ejercicio 2

Sean

$$\rho_i = \sum_j p_{ij} \ |\psi_{ij}\rangle \langle\psi_{ij}|$$

con

$$\sum_j p_{ij} = 1$$

un conjunto de operadores densidad. Luego,

$$\rho = \sum_i p_i \ \rho_i = \sum_i p_i \ \sum_j p_{ij} \ |\psi_{ij}\rangle \langle\psi_{ij}| = \sum_{ij} p_i \ p_{ij} \ |\psi_{ij}\rangle \langle\psi_{ij}|$$

es un operador densidad ya que

$$\sum_{ij} p_i \ p_{ij} = \sum_i p_i \ \sum_j p_{ij} = \sum_i p_i = 1.$$

1.1.3. Ejercicio 3 (preguntar)

Sea

$$\rho = p \ |0\rangle \langle 0| + (1-p) \ |1\rangle \langle 1| \,.$$

Escribiendo

$$|0\rangle = a \ |\alpha\rangle + b \ |\beta\rangle \,,$$

$$|1\rangle = c \ |\alpha\rangle + d \ |\beta\rangle \,,$$

se tiene que

$$\rho = p \;\left(a \;\left|\alpha\right\rangle + b \;\left|\beta\right\rangle\right)\left(a^* \;\left\langle\alpha\right| + b^* \;\left\langle\beta\right|\right) + (1-p) \;\left(c \;\left|\alpha\right\rangle + d \;\left|\beta\right\rangle\right)\left(c^* \;\left\langle\alpha\right| + d^* \;\left\langle\beta\right|\right),$$

o bien,

$$\rho = p \;\left(\left|a\right|^2 \;\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| + a\; b^* \;\left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right| + \right),$$

1.1.4. Ejercicio 4

En general, como un qubit vive en un espacio de dimensión 2 y toda matriz densidad es hermítica, se puede escribir

$$\rho = \frac{1}{2}\;\sum_{\mu=0}^{3} r_\mu\;\sigma_\mu,$$

donde σ_0 es la identidad y las σ_i son las matrices de Pauli. Sabiendo que

$$\frac{1}{2}\;tr\left(\sigma_\mu\;\sigma_\nu\right) = \delta_{\mu\nu}$$

se tiene que

$$r_\nu = tr\left(\rho\;\sigma_\nu\right).$$

Como

$$tr\left(\hat{\rho}\;\hat{O}\right) = \left\langle\hat{O}\right\rangle$$

para cualquier operador, se tiene que

$$r_\mu = \left\langle\sigma_\mu\right\rangle$$

y por ende

$$r_0 = 1,$$

$$r_i = \left\langle\sigma_i\right\rangle,\; i = x,\; y,\; z.$$

Además, teniendo en cuenta que

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \left\langle\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right\rangle = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^2\;\left\langle S^2\right\rangle,$$

entonces

$$\left|\overline{r}\right| = \frac{2}{\hbar}\;\sqrt{\left\langle S^2\right\rangle} \leq \frac{2}{\hbar}\;\frac{\hbar}{2} = 1.$$

Para hallar los autovalores, hay que resolver la ecuación

$$\rho\left|\psi\right\rangle = \lambda\;\left|\psi\right\rangle,$$

o bien, llamando r al módulo de $\overline{r}$ y $\hat{n}$ a su dirección,

$$\overline{\sigma}\cdot\hat{n}\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{2\;r}\;\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left|\psi\right\rangle.$$

Como los autovalores de $\hat{n}\cdot\overline{\sigma}$ son ± 1, entonces

$$\lambda = \frac{1}{2}\;\left(1 \pm r\right).$$

Como ρ representa un estado puro si y solo si $\rho = \rho^2$, todos su autovalores deben valer 0 o 1 en este caso y por lo tanto $r = 1$. En resumen, $r < 1$ para un estado mixto y $r = 1$ para un estado puro.

1.1.5. Ejercicio 5

Para un sistema de 2 qubits la matriz densidad se puede escribir como

$$\rho = \frac{1}{4}\ \sum_{\mu_1=0}^{3}\sum_{\mu_2=0}^{3} r_{\mu_1}\ r_{\mu_2}\ \sigma_{\mu_1}\otimes\sigma_{\mu_2}.$$

Además,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\ tr\left(\left(\sigma_{\mu_1}\otimes\sigma_{\mu_2}\right)\ \left(\sigma_{\nu_1}\otimes\sigma_{\nu_2}\right)\right) &= \tfrac{1}{4}\ \sum_{ij}\left\langle i_A, j_B\right|\left(\sigma_{\mu_1}\otimes\sigma_{\mu_2}\right)\ \left(\sigma_{\nu_1}\otimes\sigma_{\nu_2}\right)\left|i_A, j_B\right\rangle \\ = \tfrac{1}{4}\ \sum_{ij}\left\langle i_A, j_B\right|\left(\sigma_{\mu_1}\otimes\sigma_{\mu_2}\right)\ \left(\sigma_{\nu_1}\left|i_A\right\rangle\otimes\sigma_{\nu_2}\left|j_B\right\rangle\right) &= \tfrac{1}{4}\ \sum_{ij}\left\langle i_A, j_B\right|\left(\sigma_{\mu_1}\ \sigma_{\nu_1}\left|i_A\right\rangle\otimes\sigma_{\mu_2}\ \sigma_{\nu_2}\left|j_B\right\rangle\right) \\ = \tfrac{1}{4}\ \sum_{ij}\left\langle i_A\right|\sigma_{\mu_1}\ \sigma_{\nu_1}\left|i_A\right\rangle\ \left\langle j_B\right|\sigma_{\mu_2}\ \sigma_{\nu_2}\left|j_B\right\rangle &= \tfrac{1}{4}\ tr\left(\sigma_{\mu_1}\ \sigma_{\nu_1}\right)\ tr\left(\sigma_{\mu_2}\ \sigma_{\nu_2}\right) = \delta_{\mu_1\nu_1}\ \delta_{\mu_2\nu_2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r_{\nu_1}\ r_{\nu_2} = tr\left(\rho\ \ \left(\sigma_{\nu_1}\otimes\sigma_{\nu_2}\right)\right),$$

o bien,

$$r_{\nu_1}\ r_{\nu_2} = \left\langle\sigma_{\nu_1}\right\rangle\ \left\langle\sigma_{\nu_2}\right\rangle.$$

Luego, al igual que antes,

$$r_\mu = \left\langle\sigma_\mu\right\rangle.$$

Esto implica que

$$\rho = \frac{1}{4}\ \left(I\otimes I + \sum_{i=1}^{3}\left\langle\sigma_i\right\rangle\ \sigma_i\otimes I + \sum_{j=1}^{3}\left\langle\sigma_j\right\rangle\ I\otimes\sigma_j + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left\langle\sigma_i\right\rangle\ \left\langle\sigma_j\right\rangle\ \sigma_i\otimes\sigma_j\right).$$

Para hallar los autovalores, conviene escribir

$$\rho = \frac{1}{4}\ \left[I\otimes I + r\ \left(\overline{\sigma}\cdot\hat{n}\right)\otimes I + r\ I\otimes\left(\overline{\sigma}\cdot\hat{n}\right) + r^2\ \left(\overline{\sigma}\cdot\hat{n}\right)\otimes\left(\overline{\sigma}\cdot\hat{n}\right)\right].$$

Sea $\left|\delta,\hat{n}\right\rangle$ el autoestado de $\overline{\sigma}\cdot\hat{n}$ correspondiente al autovalor δ, donde δ puede valer 1 o -1. Se tiene entonces que

$$\rho\left|\delta_1,\hat{n}\right\rangle\otimes\left|\delta_2,\hat{n}\right\rangle = \frac{1}{4}\ \left(1 + r\ \delta_1 + r\ \delta_2 + r^2\ \delta_1\ \delta_2\right)\left|\delta_1,\hat{n}\right\rangle\otimes\left|\delta_2,\hat{n}\right\rangle$$

y por lo tanto los autovalores están dados por

$$\lambda\left(\delta_1,\delta_2\right) = \frac{1}{4}\ \left[1 + r\ \left(\delta_1+\delta_2\right) + r^2\ \delta_1\ \delta_2\right],$$

donde los δ_i son solo signos. Los 3 autovalores son entonces

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{4}\ \left(1-r\right)^2 \\ \frac{1}{4}\ \left(1-r\right)\ \left(1+r\right) \\ \frac{1}{4}\ \left(1+r\right)^2\end{array}\right.$$

y el segundo de ellos es doble.
Al igual que antes, el estado puro se obtiene cuando $r = 1$ ya que en este caso todos sus autovalores valen 0 o 1.

1.1.6. Ejercicio 6

Teniendo en cuenta que

$$\rho = x\ \left|\Phi\right\rangle\left\langle\Phi\right| + \frac{1-x}{d}\ I_d,$$

por un lado se tiene que

$$\rho\left|\Phi\right\rangle = \left(x + \frac{1-x}{d}\right)\left|\Phi\right\rangle$$

y por el otro

$$\rho\left|\Phi_\perp\right\rangle = \frac{1-x}{d}\left|\Phi_\perp\right\rangle,$$

donde

$$\langle \Phi_\perp | \Phi \rangle = 0.$$

Como el espacio generado por $|\Phi\rangle$ y por todos los estados ortogonales a $|\Phi\rangle$ es completo, la matriz densidad tiene solo dos autovalores que son

$$p_1 = x + \frac{1-x}{d}$$

y

$$p_2 = \frac{1-x}{d}.$$

Este último esta $d-1$ veces degenerado.

Como p_1 y p_2 deben ser positivos, se tiene que cumplir entonces que

$$x + \frac{1-x}{d} \geq 0$$

y que

$$\frac{1-x}{d} \geq 0,$$

o bien,

$$x \geq -\frac{1}{d-1}$$

y

$$x \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{1}{d-1} \leq x \leq 1.$$

1.2. Parte 2

1.2.1. Ejercicio 1

En el ítem a, operador densidad está dado por

$$\rho = \frac{1}{2}\ (|00\rangle \pm |11\rangle)(\langle 00| \pm \langle 11|) = \frac{1}{2}\ (|00\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| \pm |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$$

y por lo tanto la matriz es

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede ver fácilmente que $\lambda = 0$ es autovalor triple (ya que la matriz tiene rango 1) y el restante es $\lambda = 1$.

En el ítem b, el operador densidad está dado por

$$\rho = \frac{1}{4}\ (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)(\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|)$$

y por lo tanto la matriz es

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que antes, $\lambda = 0$ es autovalor triple ya que la matriz tiene rango 1 y el restante es $\lambda = 1$.

1.2.2. Ejercicio 2

En el ítem a, el operador densidad reducido está dado por

$$\rho_A = \langle 0_B|\,\rho\,|0_B\rangle + \langle 1_B|\,\rho\,|1_B\rangle = \frac{1}{2}\ \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

y por lo tanto la matriz resulta

$$\rho_A = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

La entropía de entrelazamiento es entonces

$$E\,(A,B) = -\frac{1}{2}\ \log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \log_2\frac{1}{2} = 1.$$

En el ítem b se tiene que

$$\begin{aligned}\rho_A = \langle 0_B|\,\rho\,|0_B\rangle + \langle 1_B|\,\rho\,|1_B\rangle &= \tfrac{1}{4}\ \left[\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\ \left(\langle 0| + \langle 1|\right) + \left(-|0\rangle - |1\rangle\right)\ \left(-\langle 0| - \langle 1|\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\ \left[\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\ \left(\langle 0| + \langle 1|\right)\right] = \tfrac{1}{2}\ \left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)\end{aligned}$$

y por lo tanto la matriz resulta

$$\rho_A = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right).$$

Como sus autovalores son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, la entropía de entrelazamiento queda

$$E\,(A,B) = -\log_2 1 = 0.$$

1.2.3. Ejercicio 3

En el ítem a, el estado ya está escrito en su descomposición de Schmidt.
En cuanto al ítem b, teniendo en cuenta que

$$\rho_A = \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k^2\ |k_A\rangle\langle k_A|$$

y que por lo hecho en el ejercicio 2

$$\rho_A = \frac{1}{2}\ \left[\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\ \left(\langle 0| + \langle 1|\right)\right],$$

es fácil ver que $\sigma_1 = 1$ y el estado de Schmidt correspondiente a ese valor y al sistema A es el $\frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(|0\rangle + |1\rangle\right)$, mientras que $\sigma_2 = 0$. El estado de Schmidt correspondiente a σ_1 y al sistema B, $|\phi\rangle$, debe ser tal que

$$\frac{1}{2}\ \left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(|0\rangle + |1\rangle\right)\otimes|\phi\rangle$$

y por lo tanto es fácil ver que

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(|0\rangle - |1\rangle\right).$$

Luego, la descomposición de Schmidt del estado $|\Psi_{AB}\rangle$ es

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}\ \left(|0\rangle + |1\rangle\right)\otimes\left(|0\rangle - |1\rangle\right).$$

1.2.4. Ejercicio 4

La matriz C correspondiente al estado $|\Psi_{AB}\rangle$ está dada por

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{array}\right)$$

y por lo tanto

$$C\ C^\dagger = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \alpha^* & \beta^* \\ \beta^* & \alpha^* \end{array}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\ \beta^* + \alpha^*\ \beta \\ \alpha\ \beta^* + \alpha^*\ \beta & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{array}\right).$$

Teniendo en cuenta que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

se puede escribir

$$\alpha = \cos\frac{\gamma}{2}\ e^{i\ \phi},$$

$$\beta = \sin\frac{\gamma}{2}\ e^{i\ (\phi+\Delta\phi)}$$

y por ende

$$C\ C^\dagger = \frac{1}{2}\ \begin{pmatrix} 1 & \sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi \\ \sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz están dados por

$$\lambda = \frac{1}{2}\ [1 \pm \sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi]$$

y los autovectores por

$$V_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$V_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$C^\dagger\ C = C\ C^\dagger,$$

la descomposición de Schmidt del estado será

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sqrt{1+\sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi}\ \ |{++}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sqrt{1-\sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi}\ \ |{--}\rangle\,,$$

donde

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (|0\rangle + |1\rangle)$$

y

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (|0\rangle - |1\rangle)\,.$$

Teniendo esto en cuenta, para responder el ítem a, el estado es separable cuando

$$|\sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi| = 1.$$

Por el contrario, teniendo en cuenta lo pedido en el ítem b, el estado es entrelazado cuando

$$|\sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi| < 1.$$

Finalmente, para resolver el ítem c, el entrelazamiento máximo ocurre cuando

$$\frac{1}{2}\ [1 - \sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi] = \frac{1}{2}\ [1 + \sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi]\,,$$

o bien,

$$\sin(\gamma)\ \cos\Delta\phi = 0.$$

Esto se da cuando $\gamma = 0$, $\gamma = \pi$, $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ o $\Delta\phi = \frac{3\ \pi}{2}$.

1.2.5. Ejercicio 5

El estado de Bell tiene un operador densidad dado por

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\ (|01\rangle + |10\rangle)\ (\langle 01| + \langle 10|)$$

que es distinto que el del otro estado. Con esto se responde el ítem a.
En cuanto al ítem b, es fácil probar que para ambos estados se tiene que

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}\ (|0\rangle\,\langle 0| + |1\rangle\,\langle 1|)\,.$$

Luego, no es posible distinguirlos mediante el valor medio de un observable $O_A \otimes I_B$, ni tampoco de un observable $I_A \otimes O_B$. Solo es posible distinguirlos mediante el valor medio de un observable $O = O_A \otimes O_B$ dado la ρ_{AB} es distinta para ambos estados.