Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica VI (Curso 2020)

I. **Estados coherentes.**
1) Sea

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

un estado coherente, donde $|n\rangle = (a^\dagger)^n|0\rangle/\sqrt{n!}$ y $a^\dagger, a$ son operadores de creación y aniquilación bosónicos. Demostrar las siguientes propiedades:

a) $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle$
b) $|\alpha\rangle = T(\alpha)|0\rangle$, donde $T(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] = \exp[-i\sqrt{2}(\mathrm{Re}(\alpha)p - \mathrm{Im}(\alpha)q)]$ es un operador de traslación y $p = \frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2}i}$, $q = \frac{a^\dagger+a}{\sqrt{2}}$ son los operadores impulso y coordenada asociados. Esto muestra que $|\alpha\rangle$ es un estado fundamental de oscilador armónico "trasladado". Notar que $T(\alpha)$ es unitario.
c) $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ (autoestado del operador aniquilación).
d) $P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2$ sigue una distribución de Poisson, con $E(n) = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2 = V(n)$.
e) $\langle\alpha|p|\alpha\rangle = \sqrt{2}\mathrm{Im}(\alpha)$, $\langle\alpha|q|\alpha\rangle = \sqrt{2}\mathrm{Re}(\alpha)$.
f) Si $H = \hbar\omega a^\dagger a \Rightarrow \exp[-iHt]|\alpha\rangle = |\alpha(t)\rangle$, con $\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha$.
La evolución temporal de $|\alpha\rangle$ es pues una rotación del parámetro complejo α, con frecuencia angular ω.
e) No ortogonalidad: $\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-(|\alpha^2|+|\beta|^2)/2+\beta^*\alpha}$
h) (Sobre)completitud: $\frac{1}{\pi}\int_C d\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = I$ (Identidad).
i) Incerteza Mínima: $\Delta p\Delta q = 1/2$, donde $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$, $(\Delta q)^2 = \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2$, con los valores medios tomados respecto de $|\alpha\rangle$. Los estados coherentes son pues los estados cuánticos más "cercanos" a estados clásicos de oscilador armónico.

2) a) Mostrar que el efecto de un divisor de haces (beamsplitter), representado por el operador unitario $U = \exp[-i\theta(a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2)]$, sobre un estado coherente es

$$U|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle = |\alpha\cos\theta - i\beta\sin\theta\rangle\otimes|\beta\cos\theta - i\alpha\sin\theta\rangle$$

b) Hallar $U|10\rangle$, $U|01\rangle$, donde $|10\rangle = a_2^\dagger|00\rangle$, $|01\rangle = a_1^\dagger|00\rangle$.

II. Transformaciones unitarias y de Bogoliubov.
1) Hallar las energías, autoestados y el estado fundamental de los siguientes Hamiltonianos:
a)

$$H = \varepsilon(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2) - v(c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1)$$

b)

$$H = \varepsilon(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2) - v(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1),$$

Considerar tanto el caso fermiónico como el bosónico (en este caso para $|v| < \varepsilon$; Justificar esta restricción).
2) Hallar el entrelazamiento (de los modos 1 y 2) del estado fundamental en a)–b) para $|g| < \varepsilon$.