Práctica 2

Paula Pagano

6 de octubre de 2020

I Traza Parcial, Entrelazamiento y Medidas

1) Hallar el estado reducido del subsistema de los primeros m qubits y evaluar la entropía de entrelazamiento de la correspondiente particion $(m; n-m)$, con $1 \leq m \leq n-1$, para los estados siguientes:

$$a) \quad |\Psi\rangle = (|0\ldots0\rangle + |1\ldots1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$b) \quad |\Phi\rangle = (|10\ldots0\rangle + |010\ldots\rangle + \cdots + |0\ldots01\rangle)/\sqrt{n}$$

a) Empecemos por $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\overbrace{|0\ldots0\rangle}^{m}\overbrace{|0\ldots0\rangle}^{n-m} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overbrace{|1\ldots1\rangle}^{m}\overbrace{|1\ldots1\rangle}^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0_A\rangle|0_B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_A\rangle|1_B\rangle$$

$n_s = 2$, notar que consideramos $|k_1\rangle$ ortogonal a $|k_2\rangle$. Luego, como tenemos al estado escrito en su descomposición de Schmidt, la entropía de entrelazamiento:

$$E(A, B) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1$$

entonces es máximamente entrelazado. Ahora el estado reducido

$$\rho_A = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_1^2}|0\ldots0\rangle\langle0\ldots0| + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_1^2}|1\ldots1\rangle\langle1\ldots1|$$

b) Hagamosló primero apra el caso $n = 3$

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle|00\rangle + +\sqrt{2}|0\rangle\frac{(|10\rangle + |01\rangle)}{\sqrt{2}}\right)$$

notar que $|1\rangle$ es ortogonal a $|0\rangle$ y $|00\rangle$ es ortogonal a $|10\rangle$ y a $|01\rangle$.

$$|\Phi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle|00\rangle$$

Ahora ya lo tengo en la descomposición de Schmidt

$$\rho_A = \frac{2}{2}|0\rangle\langle0| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle1|$$

$$E(A,B) = -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}$$

Veamos el caso general

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\overbrace{|0\ldots0\rangle}^{m}(|10\ldots0\rangle + |01\ldots0\rangle + \cdots + |0\ldots01\rangle) + \left(\overbrace{|10\ldots0\rangle}^{m} + |01\ldots0\rangle + \cdots + |0\ldots01\rangle\right)|0\ldots0\rangle\right]$$

El sistema A tiene dimensión m y el sistema B $n-m$

$$|\Phi\rangle = \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{n}}\overbrace{|0\ldots0\rangle}^{m}\underbrace{\frac{(|10\ldots0\rangle + |01\ldots0\rangle + \cdots + |0\ldots01\rangle)}{\sqrt{n-m}}}_{|\Phi_{n-m}\rangle} + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}\underbrace{\frac{\overbrace{|10\ldots0\rangle}^{m} + |01\ldots0\rangle + \cdots + |0\ldots01\rangle}{\sqrt{m}}}_{|\psi_m\rangle}|0\ldots0\rangle$$

$$\rho_A = \frac{n-m}{n}|0\ldots0\rangle\langle0\ldots0| + \frac{m}{n}|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$$

$$E = -\frac{n-m}{n}\log_2\frac{n-m}{n} - \frac{m}{n}\log_2\frac{m}{n}$$

2) Dado el estado $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} C_{ij}|ij\rangle$, con $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$ y $|ij\rangle \equiv |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$,

a) Determine el estado reducido del sistema A.

$$\rho = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \sum_{i,j,k,l} C_{ij}C^*_{jk}|ij\rangle\langle kl|$$

El estado reducido

$$\rho_A = \sum_{k'}\langle k'_B|\rho_{AB}|k'_B\rangle = \sum_{k'}\langle k'_B|\sum_{i,j,k,l} C_{ij}C^*_{jk}|ij\rangle\langle kl|\,|k'_B\rangle = \sum_{k',i,j,k,l} C_{ij}C^*_{jk}|i\rangle\underbrace{\langle k'_B|j\rangle}_{\delta_{k',j}}\langle k|\underbrace{\langle l|k'_B\rangle}_{\delta_{l,k'}}$$

$$= \sum_{k',i,j,k,l} C_{ij}C^*_{jk}\delta_{k',j}\delta_{l,k'}|i\rangle\langle k| = \sum_{i,k}\underbrace{\sum_{k'} C_{ik'}C^*_{kk'}}_{D_{ik}}|i\rangle\langle k|$$

$$\rho_A = \sum_{i,k} D_{ik}|i\rangle\langle k|$$

b) Supongamos que se realiza una medida local en el sistema B, en la base $\{|j_B\rangle\}$. De- termine el estado conjunto del sistema y el estado reducido del sistema A luego de la medicion, si se obtiene el resultado j.

Si hago una medida local en B, obteniendo el resultado j, mi estado colapsa a $\frac{P_j^B|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_j^B|\psi\rangle}}$

$$|\psi_{AB}\rangle \xrightarrow{\overset{M_j}{\uparrow}} \frac{I^A\otimes P_j^B|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|I^A\otimes P_j^B|\psi\rangle}}$$

Llamo $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|I^A\otimes P_j^B|\psi\rangle}}$, y $P_j^B = |j\rangle\langle j|$ es una medida proyectiva sobre el estado j al sistema B

$$|\psi'_{AB}\rangle = \frac{I^A\otimes P_j^B|\psi_{AB}\rangle}{\sqrt{\langle\psi_{AB}|I^A\otimes P_j^B|\psi_{AB}\rangle}} = \alpha_j I^A\otimes P_j^B\sum_{i,k} C_{ij}|ik\rangle = \alpha_j\sum_{i,k} C_{ij}|ik\rangle|j\rangle\langle j|$$

$$\alpha_j \sum_{i,k} C_{ij} |i\rangle |j\rangle \underbrace{\langle j|k\rangle}_{\delta_{j,k}} = \underbrace{\alpha_j \sum_{i} C_{ij} |i\rangle}_{|\tilde{j}\rangle} |j\rangle = \left|\tilde{j}j\right\rangle$$

Por lo que el estado final será un estado producto, con estado reducido $\rho_A = \left|\tilde{j}\right\rangle \left\langle\tilde{j}\right|$

c) Determinar el estado promedio del sistema conjunto y del sistema A luego de la medición.

El estado promedio será

$$|\psi_{AB}\rangle_{\text{prom}} = \sum_j \sqrt{P_j} \left|\tilde{j}j\right\rangle$$

y el reducido será

$$\rho_A = \sum_j P_j \left|\tilde{j}\right\rangle \left\langle\tilde{j}\right|$$

donde P_j es la probabilidad de medir el resultado j, tal que $P_j = \frac{1}{|\alpha_j|^2}$

3) Determinar M_3 y el valor maximo de p tal que el conjunto $\{M_1, M_2, M_3\}$ con $M_1 = \sqrt{p}\,|1\rangle\langle 1|$, $M_2 = \sqrt{p}\,|-\rangle\langle -|$ y $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ represente una medida (generalizada) de un qubit. Utilizar esta medida para distinguir estados $|0\rangle$ y $|+\rangle$, y comparar su eficiencia con una medida proyectiva estándar de un qubit.

Las medidas proyectivas son tales que los operadores M_m deben satisfacer que $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ y ser proyectores ortogonales, es decir M_m debe ser hermítico y $M_m M_{m'} = \delta_{m,m'} M_m$

Uso que $\sum_j M_j^\dagger M_j = I$ entonces

$$M_3^\dagger M_3 = I - p\,|1\rangle\langle 1| - p\,|-\rangle\langle -|$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - p\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1-\frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & 1-\frac{3}{2}p \end{pmatrix}$$

La manera encontrar el valor máximo de p es pedir que sea semidefinida positiva $\lambda_j \geq 0$

$$\lambda_1 = 1/2(-\sqrt{2}p - 2p + 2)$$

$$\lambda_2 = 1/2(\sqrt{2}p - 2p + 2)$$

Pidiendo semidefinida positiva

$$p \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}, \qquad \lambda_1 = 1/2(-\sqrt{2}p - 2p + 2), \qquad \lambda_2 = 1/2(\sqrt{2}p - 2p + 2)$$

¿Cómo uso esto para diferenciar qué estado vino?

Escribamos un M_3 general como $M_3 = q\,|\psi\rangle\langle\psi|$

$$p\,|1\rangle\langle 1| + p\,|-\rangle\langle -| + q\,|\psi\rangle\langle\psi| = I$$

a $|\psi\rangle$no lo conocemos, y lo escribimos de forma arbritaria

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Si escribo la matriz

$$p\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda el sistema

$$\begin{cases} p/2 + q\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 \\ 3p/2 + q\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 \end{cases} \quad \rightarrow 2p + q = 2$$

El estado que mandan es tipo clásico

$$\rho = \frac{1}{2}\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| + \frac{1}{2}\left|+\right\rangle\left\langle +\right|$$

$$P\left(M_1\right) = Tr\left(M_1^\dagger M_1 \rho\right) = p/4 > 1/4$$

$$P\left(M_2\right) = Tr\left(M_2^\dagger M_2 \rho\right) = p/4 > 1/4$$

$$P(M_3)\text{ no distingue}$$

Eficiencia: llegas a $p = 2 - \sqrt{2} > 1/4$

II Compuertas Lógicas Cuánticas

1) Utilizando la notación $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_y$, $Z = \sigma_z$, escribir las matrices que representan, en la base computacional $\{\left|00\right\rangle, \left|01\right\rangle, \left|10\right\rangle, \left|11\right\rangle\}$, los operadores

$a)\ X \otimes I, \qquad b)\ I \otimes X, \qquad c)\ X \otimes X, \qquad d)\ U_X = \left|0\right\rangle\left\langle 0\right| \otimes I + \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \otimes X$

Verificar que U_X es el Control Not cuántico en la base estándar. Verificar también que todos los operadores anteriores son unitarios y determinar sus inversas.

a)

$$X \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(X \otimes I\right)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el operador es unitario.

$$\left(X \otimes I\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$I \otimes X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I \otimes X)^{\dagger} = I \otimes X$$

por lo que es unitaria.

$$(I \otimes X)^{-1} = I \otimes X$$

c)

$$X \otimes X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(X \otimes X)^{\dagger} = (X \otimes X)^{-1} = X \otimes X$$

d)

$$U_X = |0\rangle \langle 0| \otimes I + |1\rangle \langle 1| \otimes X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_X^{\dagger} = U_X^{-1} = U_X$$

Verifiquemos si U_X es el control not, para ello vamos a aplicarlo a la base estándar

$$U_X |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle$$

$$U_X |01\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |01\rangle$$

$$U_X |10\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11\rangle$$

$$U_X |11\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle$$

Efectivamente U_X es el control not.

2) Comprobar que $W = U_X\,(H\otimes I)$, con $H = (X+Z)/\sqrt{2}$ la compuerta de Hadamard, transforma la base computacional en la base de Bell, determinando su representacion matricial. Concluir que una medición en la base de Bell (es decir, basada en proyectores ortogonales sobre estos estados) es equivalente a aplicar $W^\dagger = (H\otimes I)\,U_X$ seguido de una medición en la base computacional (y una nueva aplicación de W). Representar mediante un circuito la anterior equivalencia.

Comenzamos escribiendo H como matriz

$$H = (X+Z)/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W = U_X\,(H\otimes I) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Apliquemos W a la base computacional

$$W\,|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{00}\rangle$$

$$W\,|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{01}\rangle$$

$$W\,|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{10}\rangle$$

$$W\,|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{11}\rangle$$

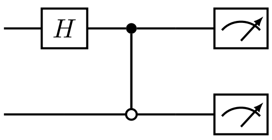
Comprobamos entonces que transforma de la base computacional a la de Bell.

Veamos cómo actúa $W^\dagger$ sobre un estado $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ en la base de Bell $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{10}, \beta_{11}\}$, entonces

$$W^\dagger\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a+d \\ b+c \\ a-d \\ b-c \end{pmatrix}$$

Al medir

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\,|\beta_{00}\rangle \to a = 1 \to W^\dagger\,|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{|\beta_{00}\rangle+|\beta_{01}\rangle}{\sqrt{2}} = |00\rangle \\
\bullet\,|\beta_{01}\rangle \to b = 1 \to W^\dagger\,|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{|\beta_{01}\rangle+|\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}} = |01\rangle \\
\bullet\,|\beta_{10}\rangle \to c = 1 \to W^\dagger\,|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{|\beta_{01}\rangle-|\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}} = |10\rangle \\
\bullet\,|\beta_{11}\rangle \to d = 1 \to W^\dagger\,|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{|\beta_{00}\rangle-|\beta_{10}\rangle}{\sqrt{2}} = |11\rangle
\end{array}\right\}\text{Medida estándar}$$



3) Mostrar que $U_S = U_X\overline{U}_XU_X$, con $U_X = |0\rangle\langle 0|\otimes I + |1\rangle\langle 1|\otimes X$ y $\overline{U}_X = I\otimes|0\rangle\langle 0| + X\otimes|1\rangle\langle 1|$, es el operador de «swap», que satisface

$$U_S\,|ab\rangle = |ba\rangle$$

para todo estado producto $|ab\rangle = |a\rangle\,|b\rangle \in \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$. Escribir la matriz que representa a U_S en la base computacional y dibujar el circuito correspondiente.

Del inciso 1) teníamos

$$U_X = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{U}_X = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{U}_XU_X = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$U_S = U_X\overline{U}_XU_X = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Veamos cómo actúa:

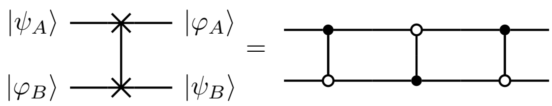
$$U_S\left|00\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|00\right\rangle$$

$$U_S\left|01\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|10\right\rangle$$

$$U_S\left|10\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|01\right\rangle$$

$$U_S\left|11\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left|11\right\rangle$$

Vemos que efectivamente U_S es el operador swap.

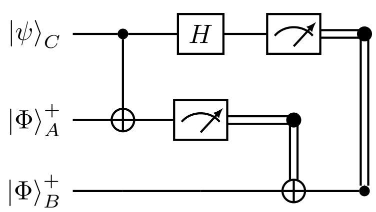


III Teleportación Cuántica

1) En el proceso de teleportación, hallar la matriz reducida de B en las siguientes etapas:

a) Antes de que A realice la medida

El proceso de teleportación lo podemos representar de la siguiente manera



Tengo el estado inicial

$$\left|\psi_i\right\rangle = \left|\psi_C\right\rangle \otimes \left|\Phi\right\rangle = \left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right)\left(\frac{\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Voy aplicando al estado inicial las operaciones

$$\left|\psi_i\right\rangle = \left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right)\left(\frac{\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle}{\sqrt{2}}\right) \underset{}{\overset{\substack{\text{CNOT}\\ \uparrow}}{\rightarrow}} \alpha\left|0\right\rangle\left(\frac{\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left|1\right\rangle\left(\frac{\left|10\right\rangle + \left|01\right\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\xrightarrow{\overset{\text{H}}{\uparrow}} \alpha\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}\right)+\beta\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}\right)=|\psi_i'\rangle$$

Acomodando los términos

$$|\psi_i'\rangle=\frac{1}{2}\left[|00\rangle_{AC}\overbrace{(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)}^{|\psi_C\rangle_B}+|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\right]$$

$$|\psi_i'\rangle=\frac{1}{2}\left[|00\rangle|\psi_C\rangle+|01\rangle X|\psi_C\rangle+|10\rangle Z|\psi_C\rangle+|11\rangle XZ|\psi_C\rangle\right]$$

Ahora quiero obtener la matriz reducida B que esta definida de la siguiente manera

$$\rho_{CAB}=|\psi_i'\rangle\langle\psi_i'|\rightarrow\rho_B=Tr_{CA}(\rho_{CAB})$$

$$\rho_B=\frac{1}{4}\left(|\psi_C\rangle\langle\psi_C|+X|\psi_C\rangle\langle\psi_C|X+Z|\psi_C\rangle\langle\psi_C|Z+XZ|\psi_C\rangle\langle\psi_C|ZX\right)$$

Escribamos cada uno de los términos por separado y veamos los términos que se cancelan

$$|\psi_C\rangle\langle\psi_C|=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)(\alpha\langle 0|+\beta\langle 1|)=\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\cancel{\alpha\beta|0\rangle\langle 1|}+\cancel{\alpha\beta|1\rangle\langle 0|}+\beta^2|1\rangle\langle 1|$$

$$X|\psi_C\rangle\langle\psi_C|X=\alpha^2|1\rangle\langle 1|+\cancel{\alpha\beta|0\rangle\langle 1|}+\cancel{\alpha\beta|1\rangle\langle 0|}+\beta^2|0\rangle\langle 0|$$

$$Z|\psi_C\rangle\langle\psi_C|Z=\alpha^2|0\rangle\langle 0|-\cancel{\alpha\beta|0\rangle\langle 1|}-\cancel{\alpha\beta|1\rangle\langle 0|}+\beta^2|1\rangle\langle 1|$$

$$XZ|\psi_C\rangle\langle\psi_C|ZX=\alpha^2|1\rangle\langle 1|-\cancel{\alpha\beta|0\rangle\langle 1|}-\cancel{\alpha\beta|1\rangle\langle 0|}+\beta^2|0\rangle\langle 0|$$

$$\rho_B=\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\left(\cancel{2}\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\cancel{2}\beta^2|1\rangle\langle 1|+\cancel{2}\alpha^2|1\rangle\langle 1|+\cancel{2}\beta^2|0\rangle\langle 0|\right)$$

$$\rho_B=\frac{1}{2}\left[\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{=1}|0\rangle\langle 0|+\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{=1}|1\rangle\langle 1|\right]=\frac{1}{2}\left[|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|\right]=\frac{I}{2}$$

b) Luego de que A realice la medida, conociendo el resultado de esta.

Si se que medí

- $|00\rangle\rightarrow\rho_B^{00}=|\psi_C\rangle\langle\psi_C|$
- $|01\rangle\rightarrow\rho_B^{01}=X|\psi_C\rangle\langle\psi_C|X$
- $|10\rangle\rightarrow\rho_B^{10}=Z|\psi_C\rangle\langle\psi_C|Z$
- $|11\rangle\rightarrow\rho_B^{11}=XZ|\psi_C\rangle\langle\psi_C|ZX$

c) El estado promedio luego de que A realice la medida, sin conocer el resultado de esta.

$$\rho_{\text{prom}}=\sum_j P_j\rho_j=\frac{I}{2}$$

2.

a) Aplicar el proceso de teleportación a un estado no puro general

$$\rho_C = p_0 \left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right| + (1-p_0) \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_1\right|$$

indicando si el esquema estándar puede transmitir este estado.

Como la teleportación es lineal, transmito$\left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right|$ y $\left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_1\right|$ por separado, aplicando lo que hice antes con $\left|\psi_C\right\rangle \left\langle\psi_C\right|$ y los sumo con sus probabilidades, de manera que:

$$\rho_{CAB} = p_0 \left|\psi_0'\right\rangle \left\langle\psi_0'\right| + (1-p_0) \left|\psi_1'\right\rangle \left\langle\psi_1'\right|$$

donde

$$\left|\psi_0'\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left|00\right\rangle \left|\psi_0\right\rangle + \left|01\right\rangle X \left|\psi_0\right\rangle + \left|10\right\rangle Z \left|\psi_0\right\rangle + \left|11\right\rangle XZ \left|\psi_0\right\rangle\right]$$

$$\left|\psi_1'\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left|00\right\rangle \left|\psi_1\right\rangle + \left|01\right\rangle X \left|\psi_1\right\rangle + \left|10\right\rangle Z \left|\psi_1\right\rangle + \left|11\right\rangle XZ \left|\psi_1\right\rangle\right]$$

b) Supongamos ahora que C esta inicialmente entrelazado con un cuarto sistema D,

$$\left|\Psi_{DC}\right\rangle = \sqrt{p_0} \left|0\right\rangle \left|\psi_0\right\rangle + \sqrt{1-p_0} \left|1\right\rangle \left|\psi_1\right\rangle$$

¿Es posible realizar la teleportación cuántica? Interpretar.

El resultado de teleportar $\left|\Psi_{DC}\right\rangle$ estará dado por

$$\left|\Psi'_{DCAB}\right\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{p_0} \left|0\right\rangle \left[\left|00\right\rangle \left|\psi_0\right\rangle + \left|01\right\rangle X \left|\psi_0\right\rangle + \left|10\right\rangle Z \left|\psi_0\right\rangle + \left|11\right\rangle XZ \left|\psi_0\right\rangle\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{1-p_0} \left|1\right\rangle \left[\left|00\right\rangle \left|\psi_1\right\rangle + \left|01\right\rangle X \left|\psi_1\right\rangle + \left|10\right\rangle Z \left|\psi_1\right\rangle + \left|11\right\rangle XZ \left|\psi_1\right\rangle\right]$$

por lo que el qubit de B va a estar entrelazado con el de D.

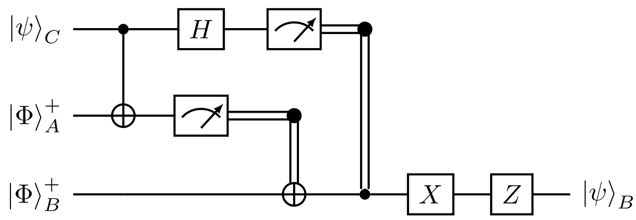
c) Realizar el proceso de teleportacion estandar para un estado puro en C con un estado de Bell $\left|\psi_{AB}\right\rangle = \left(\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle\right)/\sqrt{2}$, indicando las operaciones a realizar en B luego de las operaciones usuales en (C, A)

Quiero teleportar el $\left|\psi_{AB}\right\rangle$, entonces hagamos un procedimiento similar al del inciso a)

$$\left|\psi_{CAB}\right\rangle = \overbrace{\left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right)}^{\left|\psi_C\right\rangle}\left(\frac{\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle}{\sqrt{2}}\right) \overset{\overset{\text{CNOT}}{\uparrow}}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\left|0\right\rangle\left(\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\left|1\right\rangle\left(\left|11\right\rangle - \left|00\right\rangle\right)$$

$$\overset{\overset{\text{H}}{\uparrow}}{\rightarrow} \frac{1}{2}\left[\alpha\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\left(\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle\right) + \beta\left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right)\left(\left|11\right\rangle - \left|00\right\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left|00\right\rangle \underbrace{\left(\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle\right)}_{XZ\left|\psi_C\right\rangle} + \left|01\right\rangle \underbrace{\left(-\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right)}_{XZX\left|\psi_C\right\rangle} + \left|10\right\rangle \underbrace{\left(\alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle\right)}_{XZZ\left|\psi_C\right\rangle} + \left|11\right\rangle \underbrace{\left(-\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\right)}_{XZXZ\left|\psi_C\right\rangle}\right]$$


$|\psi\rangle_C$
$|\Phi\rangle_A^+$
$|\Phi\rangle_B^+$
H
X
Z
$|\psi\rangle_B$