# Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la información cuántica

## Práctica I (Curso 2020)

I **Operador densidad.**

I.1 Demostrar que un operador densidad $\rho$ describe un estado puro sii $\rho^2 = \rho$.

I.2 Mostrar que si $\rho_i$, $i = 1, \ldots, m$, son operadores densidad, entonces

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\,,$$

es también un operador densidad. Esto muestra que el conjunto de operadores de densidad para un dado sistema es un conjunto convexo.

I.3 Mostrar que $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$, con $p \in (1/2, 1)$, puede ser escrito como

$$\rho = q|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q)|\beta\rangle\langle\beta|$$

con $q \in [1-p, p]$ arbitrario y $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ estados normalizados. Determine $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ e interprete ambas representaciones.

I.4 Mostrar que la matriz densidad más general para un qubit puede escribirse como

$$\rho = \tfrac{1}{2}(I + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

donde $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$ es un vector arbitrario con $|\boldsymbol{r}| \leq 1$, y $\vec{\sigma} = (X, Y, Z) \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ las matrices de Pauli. Determine los autovalores de $\rho$ e indique en qué casos $\rho$ representa un estado puro. Exprese también $\boldsymbol{r}$ en términos de $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \mathrm{Tr}\,\rho\,\boldsymbol{\sigma}$.

I.5 Generalizar I.4 a un sistema de dos qubits.

I.6 Determinar todos los valores posibles de $x$ para los cuales

$$\rho = x|\Phi\rangle\langle\Phi| + (1-x) I_d/d$$

con $|\Phi\rangle$ un estado normalizado e $I_d$ la identidad de $d \times d$ ($d = \mathrm{Tr}\, I_d$ es la dimensión del espacio de estados), es un operador densidad. Interpretar este estado.

II **Estados de sistemas compuestos. Entrelazamiento.**

II.1 Para un sistema de dos qubits, escribir explícitamente la matriz que representa a $\rho_{AB} = |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|$ en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ para:

$$a)\ |\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}\,, \qquad b)\ |\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2}$$

Verificar en todos los casos que los autovalores de $\rho$ son $(1, 0, 0, 0)$.

II.2 Hallar la matriz densidad reducida $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB}$ en todos los casos anteriores, y a partir de ella evaluar la entropía de entrelazamiento del estado.

II.3 Hallar la descomposición de Schmidt de los estados anteriores.

II.4 Para $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, hallar la descomposición de Schmidt del estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = \alpha \tfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \tfrac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

y a partir de ella indicar a) cuando el estado será separable b) cuando será entrelazado c) en qué caso el entrelazamiento será máximo.

II.5 a) Indicar en qué se diferencian el estado de Bell $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$ y el estado descripto por el operador densidad

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

b) Indicar si es posible distinguirlos mediante
i) el valor medio de un observable local $O_A \otimes I_B$.
ii) el valor medio de un observable $O = O_A \otimes O_B$.