Práctica 6

1) Sea $\mathcal{H}$ el esp de estados del osc. armónico. Definimos los estados coherentes como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

donde $|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ con a y a^+ op de creación / aniquilación bosónicos, que satisfacen

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

a) $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \exp(\alpha a^+)|0\rangle$

✓

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} |0\rangle$$

b) Sea $T(\alpha) := \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$

$$= \exp(-i\sqrt{2}(Re(\alpha)p - Im(\alpha)q))$$

Por tal motivo, interpretaremos a T como un op traslación. Veam que $|\alpha\rangle = T(\alpha)|0\rangle$

$$T(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}|0\rangle$$

$$= e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^* a} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |0\rangle$$

$$e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^* a} \underset{\text{BCH}}{=} e^{\alpha a^+ - \alpha^* a - \frac{1}{2}|\alpha|^2 \underbrace{[a^+, a]}_{= Id}} \underbrace{+ \frac{1}{12}[a^+,[a^+,a]] + \dots}_{0 \text{ pues } [a^+,a] = 1}$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* a)^n}{n!} |0\rangle$$

Solo contribuye $n=0$ (ya que $a^n|0\rangle = 0$)

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^+)^n}{n!} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle$$

c) $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ (i.e., los coherentes son autoest. de a)

$$a|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$

$$= \alpha\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle$$

$$\underset{n'=n-1}{=} \alpha\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'=0} \frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'!}} |n'\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

d) $P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2$ es la d.d. de Poisson

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|}{2}} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'}} \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}}$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

$$\rightarrow P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}$$

que corresponde a una Poisson de $E(P) = V(P) = |\alpha|^2$

e) $\langle \alpha | p | \alpha \rangle = \langle \alpha | \frac{a - a^+}{i\sqrt{2}} | \alpha \rangle$

$= \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\langle \alpha | a | \alpha \rangle - \langle \alpha | a^+ | \alpha \rangle \right)$

$= \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\alpha - \alpha^* \right) = \sqrt{2}\, I_m(\alpha)$

$\langle \alpha | q | \alpha \rangle = \langle \alpha | \frac{a + a^+}{\sqrt{2}} | \alpha \rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha + \alpha^* \right)$

$= \sqrt{2}\, Re(\alpha)$

f) Si $H = \hbar \omega a^+ a$, la evolución de $|\alpha(0)\rangle = |\alpha\rangle$ será

$|\alpha(t)\rangle = U(t)\, |\alpha\rangle = e^{-it\hbar\omega a^+ a} |\alpha\rangle$

$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it\hbar\omega a^+ a} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it\hbar n\omega} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

$a^+ a |n\rangle = n|n\rangle$

$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-i\hbar t\omega} \alpha \right)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

$= |\alpha(t)\rangle$ con $\alpha(t) = e^{-i\hbar t\omega} \alpha$

e) $\langle \beta | \alpha \rangle \underset{1a}{=} \left(\langle 0 | e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{\beta^* a} \right) \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} |0\rangle \right)$

$$= e^{\frac{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}} \langle 0 | e^{\beta^* a} e^{\alpha a^+} |0\rangle$$

Por otro lado

$$[\beta^* a, \alpha a^+] = \beta^* \alpha \, 1\!\!1$$

$$\Rightarrow e^{\beta^* a} e^{\alpha a^+} = e^{\beta^* a + \alpha a^+ + \frac{\beta^* \alpha}{2}}$$

$$= e^{\frac{\beta^* \alpha}{2}} e^{\alpha a^+ + \beta^* a}$$

$[\alpha a^+, \beta^* a] = -\alpha \beta^*$

$$= e^{\frac{\beta^* \alpha}{2}} e^{\alpha a^+} e^{\beta^* a} e^{\frac{\alpha \beta^*}{2}}$$

$$\Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{2}} e^{\beta^* \alpha} \underbrace{\langle 0 | e^{\alpha a^+}}_{\langle 0 |} \underbrace{e^{\beta^* \alpha} |0\rangle}_{|0\rangle}$$

$$= e^{-\frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{2}} e^{\beta^* \alpha}$$

h) Los estados coherentes forman un conjunto sobre-completo, en el sentido que

$$\int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \, d\alpha = 1\!\!1$$

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| \, d\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(x-iy)^n (x+iy)^m}{\sqrt{n!\, m!}} |n\rangle\langle m| \, dx\, dy$$

$\alpha = x + iy$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!\,m!}} \int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-r^2} r^{n+m} e^{i\theta(n-m)}\, r\,dr\,d\theta}_{2\pi\delta_{nm}}$$

Polares
$x+iy = re^{i\theta}$

$$= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} r^{2n+1}\, dr$$

$$= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-u} \frac{u^n}{2}\, du}_{\frac{1}{2}\Gamma(n+1) \underset{n\in\mathbb{N}}{=} \frac{n!}{2}}$$

$u = r^2$
$du = 2r\,dr$

$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \frac{n!}{2}$$

$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \pi\, \mathrm{Id}$$

i) Por Heisenberg, tenemos $\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2}$. Veamos que los estados coherentes alcanzan el mínimo de esta desigualdad.
Ya tenemos los valores medios de p y q, sólo nos queda calcular:

- $$\langle q^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha | (a + a^\dagger)^2 | \alpha \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle \alpha | a^2 + (a^\dagger)^2 + aa^\dagger + a^\dagger a | \alpha \rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left((\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}(\alpha)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\bullet \ \langle p^2 \rangle = \frac{1}{(i\sqrt{2})^2} \langle \alpha | (a - a^\dagger)^2 | \alpha \rangle$$

$$\underset{\text{analog}}{=} -\frac{1}{2} \left((\alpha - \alpha^*)^2 - 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left((2i \, \mathrm{Im}(\alpha))^2 - 1 \right)$$

$$= 2 \, \mathrm{Im}(\alpha)^2 + \frac{1}{2}$$

Combinando los resultados:

$$\Delta p \Delta q = \left(\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\cancel{2 \, \mathrm{Im}(\alpha)^2} + \frac{1}{2} - \cancel{2 \, \mathrm{Im}(\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cancel{2 \mathrm{Re}(\alpha)^2} + \frac{1}{2} - \cancel{2 \mathrm{Re}(\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

2)

a) El efecto de un divisor de haces, representado por el op unitario

$$U = e^{-i\theta(a_1 a_2^+ + a_1^+ a_2)}$$

sobre un estado coherente, es

$$U(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\alpha\cos\theta - i\beta\sin\theta\rangle \otimes |\beta\cos\theta - i\alpha\sin\theta\rangle$$

d/

$$U(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} U e^{\beta a_1^+} e^{\alpha a_2^+} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\underset{(1)}{=} e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} U e^{\beta a_1^+} U^+ U e^{\alpha a_2^+} U^+ \underbrace{U|00\rangle}_{=|00\rangle}$$

usando U unitario

$$= e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} e^{\beta U a_1^+ U^+} e^{\alpha U a_2^+ U^+} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Veamos ahora como calcular los exponentes. Estos son de la forma $e^{\lambda B} A e^{-\lambda B}$ (con $A = a_1^+$, $B = a_1 a_2^+ + a_1^+ a_2$, $\lambda = -i\theta$) de modo que podemos usar la fórmula BCH en la forma

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} C_n$$

---

(1)

$$U U^+ = e^{-i\theta(a_1 a_2^+ + a_1^+ a_2)} e^{i\theta(a_2 a_1^+ + a_2^+ a_1)} = Id$$

Análog, U op. unitario

donde las C_n son determinadas por medio de la recurrencia $C_0 = A$ $C_n = [B, C_{n-1}]$ $n \geq 1$

$$C_0^{(1)} = a_1^+$$

$$C_1^{(1)} = [a_1 a_2^+ + a_1^+ a_2, a_1^+] = a_2^+ [a_1, a_1^+] = a_2^+$$

$$C_2^{(1)} = [a_1 a_2^+ + a_1^+ a_2, a_2^+] = a_1^+ [a_2, a_2^+] = a_1^+$$

y así $C_{2n}^{(1)} = a_1^+$; $C_{2n+1}^{(1)} = a_2^+$

Luego, usando la fórmula

$$U a_1^+ U^+ = \sum_{n\geq 0} \frac{(-i\theta)^n}{n!} C_n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-i\theta)^{2n}}{2n!} a_1^+ + \sum_{n\geq 0} \frac{(-i\theta)^{2n+1}}{2n!} a_2^+$$

$$= a_1^+ \cos\theta - i a_2^+ \operatorname{sen}\theta$$

Análogamente con el 2° exponente,

$$U a_2^+ U^+ = a_2^+ \cos\theta - i a_1^+ \operatorname{sen}\theta$$

Finalmente:

$$U |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} e^{\beta(a_1^+\cos\theta - i a_2^+ \operatorname{sen}\theta)} e^{\alpha(a_2^+\cos\theta - i a_1^+ \operatorname{sen}\theta)} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$0 = [a_1^+, a_2^+] \rightarrow = e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} e^{a_1^+(\beta\cos\theta - i\alpha\operatorname{sen}\theta)} e^{a_2^+(\alpha\cos\theta - i\beta\operatorname{sen}\theta)} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Por otro lado

$$|\beta\cos\theta - i\alpha\operatorname{sen}\theta|^2 + |\alpha\cos\theta - i\beta\operatorname{sen}\theta|^2$$

Encontrando $\alpha = x+iy$ $\beta = u+iv$, y usando el método analítico

$= x^2+y^2+u^2+v^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

Así, usamos la igualdad de 1.a para obtener

$= |\alpha\cos\theta - i\beta \operatorname{sen}\theta\rangle \otimes |\beta\cos\theta - i\alpha \operatorname{sen}\theta\rangle$

b) Definiendo $|10\rangle = a_2^\dagger|00\rangle$ $|01\rangle = a_1^\dagger|00\rangle$

$U|01\rangle = U a_1^\dagger|00\rangle = U a_1^\dagger U^\dagger \underbrace{U|00\rangle}_{|00\rangle}$

$\overset{\text{ant.}}{=} (a_1^\dagger\cos\theta - i a_2^\dagger \operatorname{sen}\theta)|00\rangle$

$= |\cos\theta\rangle \otimes |-i\operatorname{sen}\theta\rangle$

Análogamente $U|10\rangle = |-i\operatorname{sen}\theta\rangle \otimes |\cos\theta\rangle$

Parte II

1] Hallar las energías, estados y fundamental de los siguientes Hamiltonianos

a) Sea $H = \varepsilon(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2) - v(c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1)$

Para diagonalizarlo, utilizamos la t. de Fourier sobre el conjunto $\{c_n\}_{n\in[n]}$ donde n es el número de partículas, es decir

$$b_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n=0}^{n} e^{-2\pi i \frac{jn}{n}} c_n$$

$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n} e^{2\pi i \frac{jn}{n}} b_j$$

En general, los términos cinéticos del Hamiltoniano serán invariantes frente a esta transformación

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^\dagger c_j = \frac{1}{n} \sum_{j,n,n'} e^{-2\pi i \frac{jn}{n}} b_n^\dagger e^{2\pi i \frac{jn'}{n}} b_{n'}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{n,n'} \underbrace{\left(\sum_j e^{-2\pi i \frac{j}{n}(n-n')} \right)}_{n\delta_{nn'}} b_n^\dagger b_{n'}$$

$$= \sum_{n=1}^{n} b_n^\dagger b_n$$

mientras que los términos de intercambio

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j,n,n'} e^{-2\pi i j \frac{n}{n}} b_n^+ e^{2\pi i (j+1)\frac{n'}{n}} b_{n'} +$$

$$+ e^{-2\pi i (j+1)\frac{n}{n}} b_n^+ e^{2\pi i j \frac{n'}{n}} b_{n'}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j,n,n'} e^{2\pi i \frac{n'}{n}} e^{-2\pi i \frac{j}{n}(n-n')} b_n^+ b_{n'}$$

$$+ e^{-2\pi i \frac{n}{n}} e^{-2\pi i \frac{j}{n}(n-n')} b_n^+ b_{n'}$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \left(e^{2\pi i \frac{n}{n}} + e^{-2\pi i \frac{n}{n}} \right) b_n^+ b_n$$

Sumo sobre j y usando δ

$$= \sum_{n=1}^{n} 2\cos\left(\frac{2\pi}{n} n\right) b_n^+ b_n$$

Con ello, el Hamiltoniano de n part. tiene:

$$H = \sum_j \varepsilon c_j^+ c_j - v\left(c_j^+ c_{j+1} + c_{j+1}^+ c_j\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \varepsilon b_n^+ b_n - 2v\cos\left(\frac{2\pi}{n} n\right) b_n^+ b_n$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \underbrace{\left(\varepsilon - 2v\cos\left(\frac{2\pi}{n} n\right)\right)}_{:= \lambda_n} b_n^+ b_n$$

donde λ_n autoenergía del sistema, con autoest

$$b_n^+|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi i \frac{j n}{n}} c_j^+ |0\rangle$$

El vacío asociado a la base de op $\{b_n\}_{n\in[n]}$ deberá satisfacer $b_n|0'\rangle = 0 \quad \forall n\in[n]$

Para buscarlo lo ponemos como C.L. de estados

$$|0'\rangle = \sum_{m=0}^{n} \xi_m |m\rangle$$

$$0 = b_n|0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{n} e^{\frac{2\pi i}{n} j n}\, \xi_m \underbrace{c_j|m\rangle}_{\delta_{j,m}|0\rangle}$$

De modo que como vale $\forall n$, la única manera de verificarlo es $\xi_m = \delta_{m0}$ (pues ningún c_j deja a $|0\rangle$) Luego $|0'\rangle = |0\rangle$

Volvemos al caso original, de $n=2$.

$$\lambda_k = \varepsilon - 2v\cos\left(\frac{2\pi}{2} n\right) \qquad n\in\{1,2\}$$

Con autoest.

$$b_1^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle - |01\rangle\right)$$

$$b_2^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + |01\rangle\right)$$

b) Sea ahora el hamiltoniano

$$H = \varepsilon\left(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2\right) - \nu\left(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1\right)$$

i) En el caso fermiónico, los op. de destrucción y creación verifican

$$\{c_j, c_n^\dagger\} = \delta_{jn} \qquad \{c_j, c_n\} = \{c_j^\dagger, c_n^\dagger\} = 0$$

Para diagonalizar el hamiltoniano, intentamos escribirlo en forma matricial, ie

$$H = \nu^\dagger X \nu + \lambda \quad \text{con} \quad \nu = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^\dagger \\ c_2^\dagger \end{pmatrix}$$

Para facilitar la tarea, intentamos escribir a W como una mat. ortogonal

$$H = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{c_i^\dagger c_i + c_i^\dagger c_i}{2}\right) - \nu\left(\frac{c_1^\dagger c_2^\dagger + c_1^\dagger c_2^\dagger}{2} + \frac{c_2 c_1 + c_2 c_1}{2}\right)$$

$$[c_i, c_i^\dagger] = 1d \qquad \{c_1^\dagger, c_2^\dagger\} = \{c_1, c_2\} = 0$$

$$= \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{c_i^\dagger c_i - c_i c_i^\dagger + 1d}{2}\right) - \nu\left(\frac{c_1^\dagger c_2^\dagger - c_2^\dagger c_1^\dagger}{2} + \frac{c_2 c_1 - c_1 c_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^\dagger & c_2^\dagger & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & \varepsilon & \nu & 0 \\ 0 & \nu & -\varepsilon & 0 \\ -\nu & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^\dagger \\ c_2^\dagger \end{pmatrix} + \varepsilon$$

La idea es buscar op. de creación y aniquilación transformados $c_i^\dagger, c_i$

$$\begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix}}_{W} \begin{pmatrix} c \\ c^+ \end{pmatrix}$$

La forma es por consistencia al jugar

Es esta, la de la llamada transformación de Bogoliubov, y con esta construcción, la W resulta ortogonal.

La idea es llegar a un hamiltoniano diagonal,

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^+ & a \end{pmatrix} W X \underbrace{W^t}_{\text{ort}} \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} - \varepsilon$$

Para ello, diagonalizamos X usando Matemática

$$X = W^t \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ 0 & & -\lambda & \\ & & & -\lambda \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & U & & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \end{array}}_{W}$$

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon^2 + \nu^2} \qquad a = \sqrt{\frac{\lambda + \varepsilon}{2\lambda}} \qquad b = \sqrt{\frac{\lambda - \varepsilon}{2\lambda}}$$

Con ello, el hamiltoniano queda como

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^+ & a \end{pmatrix} \cancel{W W^t} D \cancel{W W^t} \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} + \varepsilon$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left[2 (a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2) - 2 \right] + \varepsilon$$

$$= \lambda \underbrace{N}_{\substack{a_i^+ a_i \\ \text{(op. número)}}} + \underbrace{\varepsilon - \lambda}_{E_0} \quad \text{(energía del vacío)}$$

En la transformación de Bogoliubov, el nuevo vacío está dado por

$$|0'\rangle = C\, e^{\frac{1}{2} T^{ij} c_i^+ c_j^+} |0\rangle$$

donde $T = U^{-1} V$ y C cte de norm. En este caso:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |0'\rangle = C\, e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} c_1^+ c_2^+ + \frac{b}{a} c_2^+ c_1^+\right)} |0\rangle$$

$$= C\, e^{-\frac{b}{a} c_1^+ c_2^+} |0\rangle$$

$$= C\left(1 - \frac{b}{a} c_1^+ c_2^+ + \underbrace{\cancel{\quad\quad}}_{\substack{\text{el resto} \\ \text{se anula, al} \\ \text{tener términos} \\ (c_i^+)^2 = 0}}\right)|0\rangle$$

$$= C\left(|00\rangle - \frac{b}{a}|11\rangle\right)$$

Finalmente, determinamos la cte pidiendo

ii) Si se tratan de bosones, las relaciones de conmutación son

$$[c_j, c_k^\dagger] = \delta_{jk} \qquad [c_j, c_k] = [c_j^\dagger, c_k^\dagger] = 0$$

Análogamente, podemos escribir el hamiltoniano de H de la siguiente manera (cuidando los signos)

$$H = \varepsilon\left(\sum_{i=1,2} \frac{c_i^\dagger c_i + c_i c_i^\dagger - \mathbb{1}}{2}\right) - v\left(\frac{c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2^\dagger c_1^\dagger}{2} + \frac{c_1 c_2 + c_2 c_1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^\dagger & c_2^\dagger & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & -v \\ 0 & \varepsilon & -v & 0 \\ 0 & -v & \varepsilon & 0 \\ -v & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}}_{X} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^\dagger \\ c_2^\dagger \end{pmatrix}$$

Nuevamente usaremos el método de la t. de Bogoliubov

$$\begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix}}_{W} \begin{pmatrix} c \\ c^\dagger \end{pmatrix}$$

En este caso, la mat. de transformación no será ortogonal, sino que satisface $W \Pi W^\dagger = \Pi$

donde $$\Pi = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [c, c^\dagger] & [c, c] \\ [c^\dagger, c^\dagger] & [c^\dagger, c] \end{pmatrix}$$

Definiendo $M = W^{-1}$, podemos diagonalizar a H

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^+ & a \end{pmatrix} M^+ X M \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} - \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^+ & a \end{pmatrix} \Pi M^{-1} \underline{\Pi X} M \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} - \varepsilon$$

$W^+ = \Pi W^{-1} \Pi \Rightarrow M^+ = \Pi M^{-1} \Pi$

Diagonalizo a ΠX via Mathematica

$$\Pi X = M \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & -\lambda & \\ 0 & & & -\lambda \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}}_{M^{-1} = W}$$

Con $\lambda = \sqrt{\varepsilon^2 - v^2}$ $(|\varepsilon| > |v| \checkmark)$ $\quad a = \sqrt{\frac{\varepsilon + \lambda}{2\lambda}}$ $\quad b = \sqrt{\frac{\varepsilon - \lambda}{2\lambda}}$

Con ello, al igual que antes, el hamiltoniano queda diagonalizado (se cancela la mat M)

$$H = \lambda N - \underbrace{(\lambda - \varepsilon)}_{E_0}$$

Nuevamente, usamos la misma regla para calcular el vacío

$$|0'\rangle = C e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} c_1^+ c_2^+ + \frac{b}{a} c_2^+ c_1^+\right)} \qquad |0\rangle =$$

$$T = U^{-1} V = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= C\, e^{-\frac{b}{a} c_1^+ c_2^+} |0\rangle$$

$$= C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{b}{a} c_1^+ c_2^+\right)^n |0\rangle$$

$$= C \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^n \left(\frac{c_1^+}{\sqrt{n!}}\right)^n \left(\frac{c_2^+}{\sqrt{n!}}\right)^n |0\rangle$$

$$= C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-b}{a}\right)^n |n\, n\rangle$$

y determinamos la cte:

$$1 = \langle 0'|0'\rangle = C^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-b}{a}\right)^{2n} \underset{\text{geom}}{=} \frac{1}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow C^2 = 1-\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

2] Hallar el entrelazamiento entre modos para el [illegible]

a) Como el vacío no presenta cambio de la transformación, el entrelazamiento será nulo

$$\rho_A = Tr_B |00\rangle\langle 00| = |0\rangle\langle 0|$$

$$E_{AB} = S(\rho_A) = 0$$

b) i) En el caso fermiónico

$$|0'\rangle = a|00\rangle - b|11\rangle$$

$$\rho = |0'\rangle\langle 0'| = a^2|00\rangle\langle 00| + b^2|11\rangle\langle 11| - ab\left(|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|\right)$$

$$\Rightarrow \rho_A = Tr_B\, \rho = a^2|0\rangle\langle 0| + b^2|1\rangle\langle 1|$$

$$\Rightarrow E_{AB} = -a^2\log_2 a^2 - b^2 \log_2 b^2$$

ii) $$\rho = |0'\rangle\langle 0'| = \frac{1}{a^2}\sum_{n,m}^{\infty}\left(\frac{-b}{a}\right)^{n+m}|nn\rangle\langle mm|$$

$$\Rightarrow \rho_A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^2}\sum_{n,m}\left(\frac{-b}{a}\right)^{n+m}|n\rangle\langle m|\,\delta_{nn}\,\delta_{nm}$$

$$= \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{a}\right)^{2n}|k\rangle\langle n|$$

$$\Rightarrow E_{AB} = S(\rho_A) = -\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} 2n\log_2\left(\frac{b}{a}\right)$$