Práctica 3

Compuertas lógicas cuánticas (2° parte)

1) Escribir explícitamente el op. de rotación de la qubit alrededor de un eje $\check{n}$
$R_{\check n}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\check{n}\bar{\sigma}}$ y mostrar que las transformación unitaria cualquiera puede escribirse como $U = e^{\alpha} R_{\check n}(\theta)$

$\cancel{\alpha}$

$$R_{\check n}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i\theta}{2}\check{n}\bar{\sigma}\right)^n}{n!}$$

Para poder simplificar la expresión consideremos

$$(\check{n}\bar{\sigma})^n = (n_i\sigma_i)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ n_i\sigma_i & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$(n_i\sigma_i)^2 = n^i n^j \sigma_i\sigma_j = n^i n^j(\delta_{ij}\, id + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)$$

$$= (n^i)^2\, id + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \underbrace{\left(\frac{n^i n^j - n^j n^i}{2}\right)}_{0}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow R_{\check n}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^{2n}}{2n!} id + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \bar{n}\cdot\bar{\sigma}$$

$$= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n}}{2n!} id + \sum_{n=0} \frac{(-1)^n\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} (-i\bar{n}\bar{\sigma})$$

$$= id_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\check{n}\cdot\bar{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Por otro lado, los op [illegible] los unit es una mat $U \in SU(2)$. Por otro lado el conjunto de mat de Pauli σ_i es un conjunto de generadores del álgebra de $SU(2)$, ie $\langle\{\sigma_i\}\rangle = T_g SU(2)$

Luego, existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tq

$$U = e^{-i\lambda_i \sigma_i} = e^{-i\theta\check{n}\cdot\bar{\sigma}}$$

$$\check{n} = \frac{1}{\|(\lambda_i)\|}(\lambda_i)$$

2]

$$iR_{x_i}(\pi) = i(-i\sigma_{x_i}) = X_i$$

$$iR_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)}(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z) = H$$

3] Buscar un Hamilt H de dos qubits y un tiempo t tq los operadores de evolución cumplan

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad \text{sea} \quad R_{\check{n}}(\theta) \otimes R_{\check{m}}(\phi)$$

En primer lugar, notemos que

$$e^{iA\otimes id_B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA\otimes id_B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n \otimes id_B}{n!}$$

$$= e^{iA} \otimes id_B$$

De este modo, el problema de rotación a hallar M tq $e^{iM} = R_{\hat{n}}(\theta)$, que, por el ej. anterior, sabemos que

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\check{n}\cdot\vec{\sigma}} = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}\hat{n}\cdot\vec{S}}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

- Definiendo $H_{\theta\check{n}} := \check{n}\cdot\bar{S}$, y tomando

$$H = H_{\theta\check{n}} \otimes id + id \otimes H_{\check{m}\phi}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\theta\check{n}}} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\phi\check{m}}} = R_{\hat{n}}(\theta) \otimes R_{\hat{m}}(\phi)$$

$$[H_{\theta\check{n}} \otimes id, id \otimes H_{\check{m}\phi}] = 0$$

- Una manera más física de interpretar el resultado, $H = -\bar{\mu}\cdot\bar{B}$ el hamiltoniano de una partícula en un campo magnético $\bar{B}$, con

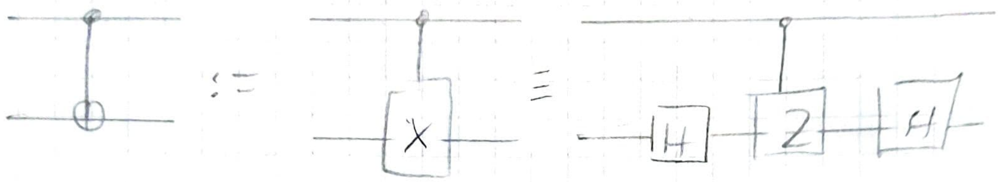
$$\bar{\mu} = -g\mu_B\vec{S}$$

$$\Rightarrow R_{\check{n}}(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{\mu}\cdot\widehat{\bar{B}}\,\frac{\theta}{\frac{g\mu_B}{\hbar}}}$$

4) Determina los hamiltonianos de los qubits y el tiempo t para $U = e^{-iHt}$ del CNOT (U_x)

Para simplificar el problema, realizaremos un cambio de base, en efecto, notamos

$HZH = X \Rightarrow$



De este modo, buscaremos los hamiltonianos de los qubits para U_Z, y uno para H (para un qubit).

$$U_Z = |0\rangle\langle 0| \otimes id + |1\rangle\langle 1| \otimes Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por su carácter diagonal, proponemos

$$H = a(\sigma_z \otimes id) + b(id \otimes \sigma_z) + c(\sigma_z \otimes \sigma_z) \otimes d(id \otimes id)$$

$$1 = H|00\rangle = a + b + c + d$$

$$1 = H|01\rangle = a - b - c + d$$

$$1 = H|10\rangle = -a + b - c + d$$

$$-1 = H|11\rangle = -a - b + c + d$$

$$\Rightarrow a = b = d = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H_{U_z} = \frac{\alpha}{2}\left(\sigma_z \otimes id + id \otimes \sigma_z - \sigma_z \otimes \sigma_z + id \otimes I_2\right)$$

$$U_z = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \Rightarrow \text{con } t = \frac{2\pi\alpha}{\hbar}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-2\pi i U_z} = U_z$$

Por otro lado, la puerta [illegible] es [illegible], tenemos [illegible] la puerta de Hadamard como

$$H = i R_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)}(\pi) \Rightarrow H_{Had} = \frac{\hbar\omega_0\pi}{2\sqrt{2}}\left(\sigma_x + \sigma_z\right)$$

Parte 2

1) Podemos escribir de forma general la matriz densidad de dos qubits como

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}\Big[id\otimes id + \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}\left(r_i^A \sigma_i \otimes id + r_i^B\, id\otimes\sigma_i\right) + J_{ij}\,\sigma_i\otimes\sigma_j \Big]$$

a) Es análogo al ej. 5 de la práctica 1

b) Escribiendo a ρ_{AB} en forma análoga al ej 5

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}\sum_{i,j=0}^{4} r^{ij}\,\sigma_i\otimes\sigma_j$$

Podemos descomponer a r en SVD

$$r = UDV \qquad \text{con } U,V \in SU(4),\ D \text{ diagonal}$$

$$\Rightarrow \rho_{AB} = \frac{1}{4}\sum_{i,j,n=0}^{4} U_{in} D_{nn} V_{nj}\,\sigma_i\otimes\sigma_j$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n} D_{nn} \underbrace{\Big(\sum_i U_{in}\sigma_i\Big)}_{\text{Ob sobre 1 qubit}} \otimes \Big(\sum_j V_{nj}\sigma_j\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n} D_{nn}\,\sigma_i'\otimes\sigma_j'$$

$\downarrow$

obtengo resultado ej 1

c) $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB} = \frac{1}{4} \sum_n \Big[\mathrm{id}_2 + \sum_{i,j} \delta_{ij}\, r_i^A \sigma_i$

$+ r_i^B\, \mathrm{id}_2 \langle n|\sigma_i|n\rangle + J_{ij}\, \sigma_i \langle n|\sigma_j|n\rangle$

Por otro lado, notando que $\langle n|\sigma_x|n\rangle = \langle n|\sigma_y|n\rangle$ $\forall\, n$, y $\langle 0|\sigma_3|0\rangle = 1$ $\langle 1|\sigma_3|1\rangle = -1$, tenemos

$= \frac{1}{4} \sum_n \Big(2\mathrm{id}_2 + 2 r_i^A \sigma_i + r_3^B \langle n|\sigma_3|n\rangle$

$+ J_{i3}\, \sigma_i \langle n|\sigma_3|n\rangle \Big)$

$= \frac{1}{4}\Big[2\mathrm{id}_2 + 2 r_i^A \sigma_i + r_3^B \big(\langle 0|\cancel{\sigma_3}|0\rangle + \langle 1|\cancel{\sigma_3}|1\rangle \big)$

$+ \cancel{J_{i3}\, \sigma_i (1 - 1)} \Big]$

$= \frac{1}{2}(\mathrm{id}_2 + r_i^A \sigma_i)$

Análogamente $\rho_B = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_2 + r_i^B \sigma_i)$

c) Consideramos ahora el estado

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

guía 2

Usando las rep. matricial de $\sigma_i \otimes \sigma_j$ podemos calcular a V y J a partir de los valores medios del inciso a

$$V_A^i = Tr(\rho_{AB}\, \sigma_i \otimes id) = (0,0,0)$$

$$V_B^i = Tr(\rho_{AB}\, id \otimes \sigma_i) = (0,0,0)$$

$$J_{ij} = Tr(\rho_{AB}\, \sigma_i \otimes \sigma_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde usé el Mathematica para calcular los valores anteriores.

2)

Para $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$ consideramos el estado

$$\rho_{AB} = x\,|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{(1-x)}{4}\, id \otimes id$$

$$= \frac{x}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01|\right) + \frac{(1-x)}{4}\, id_4$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-x}{4}+\frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1-x}{4}+\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}$$

a) Veamos las cond. para que ρ sea un est. físico

- $Tr(\rho) = (1-x) + x = 1$ ✓
- ρ op positivo: para ello, podemos ver que todos los autovalores sean no negativos. Encontrándolos en Mathematica:

$\lambda_1 = \frac{1-x}{4}$ $\qquad \lambda_2 = \frac{1+3x}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 0 \leq \lambda_1 \Rightarrow x \leq 1 \\ \cdot\ 0 \leq \lambda_2 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \end{array}\right\} \ -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

b) Para que se trate de un estado puro, $\rho^2 = \rho$. Si bien intuitivamente esto se cumple para $x=1$ (pues $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$), podemos calcular usando el comando Solve de Mathematica, que es efectivamente el único caso.

c) El observable CHSH corresponde a

$$O = \sigma_x \otimes \sigma_{x'} + \sigma_z \otimes \sigma_{z'} + \sigma_x \otimes \sigma_{z'} - \sigma_z \otimes \sigma_{x'}$$

donde los ejes primados corresponden a una rotación Φ en y, ie: $\sigma_{x'} = R_y(\Phi)\sigma_x R_y^\dagger(\Phi)$

Nos interesa saber para qué valores de X se viola la desigualdad de Bell, ie

$\langle O \rangle \nleq 2$. Calculemos el valor medio.

Usando Mathematica, se tiene:

$$\langle O \rangle = -2X(\cos(\Phi) + \operatorname{sen}(\Phi))$$

$$= -2\sqrt{2}X \operatorname{sen}(\Phi)$$

$$\Rightarrow \langle O \rangle \in [-2\sqrt{2}X, 2\sqrt{2}X]$$

Por otro lado

$$O = \sigma_x \otimes (\sigma_{x'} - \sigma_{z'}) + \sigma_z \otimes (\sigma_{z'} - \sigma_{x'})$$

Clásicamente, cada uno de los observables es ± 1, mientras que $A-B$ es 0 o ± 2

$$\Rightarrow O = \pm 1 \cdot 0 + \pm 1 \cdot \pm 2$$

$$\pm 1 \cdot \pm 2 + \pm 1 \cdot 0$$

$$\Rightarrow |O_{\text{clásico}}| \leq 2$$

Luego tengo $2\sqrt{2}\, x > 2 \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, el experimento viola la cota clásica, tenemos la desigualdad de Bell

d) En un sistema descripto por una mat. densidad ρ, decimos que ρ_{AB} es entrelazado si no es separable, ie $\nexists$ ρ_{A_i}, ρ_{B_i}, w_i tq

$$\rho_{AB} = \sum_i w_i\, \rho_{A_i} \otimes \rho_{B_i}$$

En un paper de A Peres, vemos que una cond. necesaria para separabilidad es que la transposición parcial de ρ no tenga ningún autovalor negativo.

Dado $\rho = \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|$

$$\rho^{T_b} := (id \otimes T)\rho = \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes (|k\rangle\langle l|)^t$$

$$= \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |l\rangle\langle k|$$

$$\rho_{AB}^{t_B} = \Big[\frac{x}{2}\big(\overbrace{|01\rangle\langle 01|}^{|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|} + |10\rangle\langle 10| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| \big) + \frac{(1-x)}{4}\, id_2 \otimes id_2 \Big]^{t_b}$$

$$= \frac{x}{2}\big(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| \big) + \frac{(1-x)}{4}\, id_2 \otimes id_2$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & \frac{1-x}{4}+\frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-x}{4}+\frac{x}{2} & 0 \\ -\frac{x}{2} & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}
$$

Calculando los autovalores con Mathematica:

$$\lambda_1 = \frac{1-3x}{4} < 0 \iff \frac{1}{3} < x$$

$$\lambda_2 = \frac{1+x}{4} < 0 \iff -1 > x$$

El segundo caso corresponde a un estado no físico, por lo visto en a) De modo, se tendrá el entrelazado para $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$