Práctica 1

Seminario de Teoria de la Información Cuántica

Isaí E. Dávila Cuba

Operador densidad

1. Tomemos un operador densidad de un estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, entonces

$$\begin{aligned}\rho^2 &= (|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\psi\rangle\langle\psi| \\ &= |\psi\rangle\langle\psi|\,(\langle\psi|\psi\rangle) \\ &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \rho\end{aligned}$$

Ahora tomemos un operador densidad general $\rho = \sum_k c_k |k\rangle\langle k|$ y veamos que si cumple $\rho^2 = \rho$ entonces es un operador densidad puro:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \sum_k \sum_l c_k c_l (|k\rangle\langle k|)(|l\rangle\langle l|) \\ &= \sum_k \sum_l c_k c_l |k\rangle\langle l| \langle k|l\rangle \\ &= \sum_k \sum_l c_k c_l |k\rangle\langle l| \delta_l^k \\ &= \sum_k c_k^2 |k\rangle\langle k|\end{aligned}$$

Igualamos esto a ρ y obtenemos:

$$\sum_k c_k^2 |k\rangle\langle k| = \sum_k c_k |k\rangle\langle k|$$

Esto implica que $c_k(c_k - 1) = 0 \implies c_k = 0, 1$. Usando la condición de $\mathrm{Tr}\{\rho\} = 1$, tenemos que $c_k = 1$, por lo tanto,

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

2. Sea $\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i \rho_i$ con $\sum_i p_i = 1$. Como cada ρ_i es un operador densidad lo escribimos como $\rho_i = \sum_k c_k^i \left|k\right\rangle \left\langle k\right|$. Entonces,

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_k c_k^i \left|k\right\rangle \left\langle k\right| \\ &= \sum_k (\sum_{i=1}^{n} p_i c_k^i) \left|k\right\rangle \left\langle k\right|\end{aligned}$$

   Defino $\bar{p}_k = \sum_{i=1}^{n} p_i c_k^i$, entonces

$$\rho = \sum_k \bar{p}_k \left|k\right\rangle \left\langle k\right|$$

   Vemos que ρ tiene la forma de un operador densidad. Basta con verificar que $\bar{p}_k \geq 0$ y $\sum_k \bar{p}_k = 1$. Lo primero se verifica facilmente ya que es la suma de productos de números positivos. Para la segunda,

$$\sum_k \bar{p}_k = \sum_k \sum_{i=1}^{n} p_i c_k^i = \sum_i p_i \sum_k c_k^i = 1$$

Por lo tanto, verificamos que ρ es un operador densidad.

3.

4. Para un estado de dos quibits la matriz densidad es una matriz de 2×2. Sabemos que las matrices de Pauli junto con la identidad forman una base para este espacio, entonces podemos escribir a la matriz densidad como

$$\begin{aligned}\rho &= a\mathbb{I} + b\sigma_x + c\sigma_y + d\sigma_z \\ &= \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Además, sabemos que la matriz densidad tiene traza unidad

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\rho &= \mathrm{t}a + d + (a-d) = 1 \\ &\implies a = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Entonces,

$$\begin{aligned}\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+d & b-ic \\ b+ic & \frac{1}{2}-d \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2d & 2b-2ic \\ 2b+2ic & 1-2d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 2d & 2b-2ic \\ 2b+2ic & -2d \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

   Si definimos $r_z = 2d$, $r_x = 2b$, $r_y = 2c$ y $\vec{\mathbf{r}} = (r_x, r_y, r_z)$, entonces

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{I} + r_z\sigma_z + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\sigma}\right)\end{aligned}$$

Determinamos los autovalores de la matriz:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}$$

Estos son:

$$\lambda = \frac{1 \pm |\vec{\mathbf{r}}|}{2}$$

Sabemos que ρ representará un estado puro si $\rho^2 = \rho$, entonces $\text{Tr}\{\rho^2\} = \text{Tr}\{\rho\} = 1$, esto se traduce en la ecuación:

$$\frac{1}{2}(1 + |\vec{\mathbf{r}}|^2) = 1$$

Al ser $|\vec{\mathbf{r}}| \geq 0$, entonces $|\vec{\mathbf{r}}| = 1$.

Usando que $\text{Tr}\{\rho\vec{\sigma}\} =< \vec{\sigma} >$, podemos reemplazar ρ y obtener una relación para $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\rho\vec{\sigma}) &= \text{Tr}\left[\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\sigma})\vec{\sigma}\right] \\
&= \text{Tr}\left[\frac{1}{2}(\vec{\sigma} + (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\sigma})\vec{\sigma})\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\text{Tr}\left[(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\sigma})\vec{\sigma}\right]
\end{aligned}$$

Si calculamos esto último en componentes:

$$\text{Tr}\left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{r}})\sigma_i\right] = 2r_i$$

Entonces, $r_i =< \sigma_i > \implies \vec{\mathbf{r}} =< \vec{\sigma} >$

5. Para un sistema de dos quibits la matriz densidad es un elemento de las matrices de 4×4. Entonces, naturalmente podemos extender la idea del ejercicio 4 expresando este espacio con productos directos de las matrices de Pauli y la identidad.

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{ij} c_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j \\
&= c_{00}\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{i \neq j} c_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j + \sum_i b_i \mathbb{I} \otimes \sigma_i + \sum_i d_i \sigma_i \otimes \mathbb{I}
\end{aligned}$$

Donde $\sigma_0 = \mathbb{I}_{4\times4}$. Usando que $\text{Tr}(\rho) = 1$ hallamos que $c_{00} = \frac{1}{4}$. Entonces, podemos escribir

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I}_{4\times4} + \vec{\mathbf{r}}_1 \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{r}}_2 + \sum_{i \neq j} c_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j\right)$$

Al igual que el caso para un qubit, podemos hallar los vectores $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$ en función de los promedios de $\vec{\sigma}$.

$$\begin{aligned}
< \sigma_A > &= \text{Tr}(\rho\vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}) = \vec{\mathbf{r}}_1 \\
< \sigma_B > &= \text{Tr}(\rho\mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}) = \vec{\mathbf{r}}_2 \\
< \sigma_i \otimes \sigma_j > &= \text{Tr}(\rho\sigma_i \otimes \sigma_j) = c_{ij}
\end{aligned}$$

6. Usemos la condición de traza 1 del operador densidad:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho) &= x\,\mathrm{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi|) + \frac{1-x}{d}\,\mathrm{Tr}(\mathbb{I}_d)\\ &= x + \frac{1-x}{d}\cdot d = 1\end{aligned}$$

Por lo que no hay una restricción para el valor de x. En principio, puede ser cualquier número real. Es claro que cuando $x=1$, $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ representa unestado puro, mientras que cuando $x=0$, $\rho = \frac{\mathbb{I}_d}{d}$ representa un estado

Estados de sistemas compuestos. Entrelazamiento.

1. - $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$. La matriz densidad está dada por $\rho = |Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|$:

$$\rho = \left(\frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 00| \pm \langle 11|}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| \pm |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right)$$

Y en forma de matrices

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \pm 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Con

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ \pm 1\end{pmatrix}$$

- $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2}$. El estado en forma matricial tiene la forma

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

Y matriz densidad

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

2.
- Para el primero caso la matriz densidad era

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| \pm |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right)$$

La matriz reducida es entonces

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

Calculamos la entropía de entrelazamiento:

$$S(A) = -\operatorname{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)) = 1$$

- Para el segundo caso teníamos el operador densidad:

$$\rho = \frac{1}{4}(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle)(\langle 00| + \langle 10| - \langle 01| - \langle 11|)$$

Entonces, el operador densidad del estado reducido es:

$$\begin{aligned}\rho_A &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)\\ &= |+\rangle\langle +|\end{aligned}$$

Con $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Por lo que representa un estado puro. Entonces su entropía de Von Neumann debe ser cero.

3.
- Para el primer estado $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$, vemos que ya se encuentra en su descomposición de Schmidt. Escribamoslo de manera más sugerente

$$|Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

Entonces, $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ con $k = 0, 1$.

- Para el segundo estado $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2}$ construimos la matriz de coeficientes C:

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, hacemos la descomposición en valores singulares de C, obteniéndose (según el programa computacional *Mathics*)[1]

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz D nos dice que sólo tendremos un producto de elementos de la base de Schmidt:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

[1] Aunque aun no esta implementado simbólicamente

4. Construimos la matriz de coeficientes:
$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$
Queremos hallar los σ_k que son los valores singulares de C. Estos se pueden hallar como la raiz cuadrada de los autovalores de la matriz $C^\dagger C$ o $CC^\dagger$.
$$\begin{aligned} C^\dagger C &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 2\mathbb{R}e(\alpha^*\beta) \\ 2\mathbb{R}e(\alpha^*\beta) & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2\mathbb{R}e(\alpha^*\beta) \\ 2\mathbb{R}e(\alpha^*\beta) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Los autovalores de esta matriz son
$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \mathbb{R}e(\alpha^*\beta); \lambda_2 = \frac{1}{2} + \mathbb{R}e(\alpha^*\beta)$$
Entonces los valores singulares de C son
$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \mathbb{R}e(\alpha^*\beta)}; \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \mathbb{R}e(\alpha^*\beta)}$$

Entonces el estado será puro cuando alguno de los valores singulares se anule, entonces
$$\mathbb{R}e(\alpha^*\beta) = \pm\frac{1}{2}$$

El estado será entrelazado máximamente cuando $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ con $k = 0, 1$. Es decir, cuando $\mathbb{R}e(\alpha^*\beta) = 0$.

5. Ambos estados son diferentes pues tienen matrices densidad distintas. La matriz densidad para el estado de Bell $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$ es
$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle \langle\Psi_{AB}| = \frac{1}{2}(|01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10| + |10\rangle \langle 01| + |01\rangle \langle 01|)$$
mientras que la matriz densidad del segundo estado es
$$\rho'_{AB} = \frac{1}{2}(|01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10|)$$

Calculemos los operadores densidad del estado reducido A:
$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)$$
Y para el segundo sistema
$$\rho'_A = \mathrm{Tr}_B(\rho'_{AB}) = \frac{1}{2}(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)$$
Entonces, si hacemos actuar un operador local $\hat{O} = \hat{O}_A \otimes \mathbb{I}$, no podríamos distinguir ambos resultados. Pero sí, si hacemos actuar un operador globar $\hat{O} = \hat{O}_A \otimes \hat{O}_B$.