Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la información cuántica

Práctica I (Curso 2020)

I Operador densidad.

I.1 Demostrar que un operador densidad ρ describe un estado puro sii $\rho^2 = \rho$.

I.2 Mostrar que si ρ_i, $i = 1, \ldots, m$, son operadores densidad, entonces

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\,,$$

es también un operador densidad. Esto muestra que el conjunto de operadores de densidad para un dado sistema es un conjunto convexo.

I.3 Mostrar que $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$, con $p \in (1/2, 1)$, puede ser escrito como

$$\rho = q|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q)|\beta\rangle\langle\beta|$$

con $q \in [1-p, p]$ arbitrario y $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ estados normalizados. Determine $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ e interprete ambas representaciones.

I.4 Mostrar que la matriz densidad más general para un qubit puede escribirse como

$$\rho = \tfrac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

donde $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$ es un vector arbitrario con $|\boldsymbol{r}| \leq 1$, y $\vec{\sigma} = (X, Y, Z) \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ las matrices de Pauli. Determine los autovalores de ρ e indique en qué casos ρ representa un estado puro. Exprese también $\boldsymbol{r}$ en términos de $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \mathrm{Tr}\,\rho\,\boldsymbol{\sigma}$.

I.5 Generalizar I.4 a un sistema de dos qubits.

I.6 Determinar todos los valores posibles de x para los cuales

$$\rho = x|\Phi\rangle\langle\Phi| + (1-x)I_d/d$$

con $|\Phi\rangle$ un estado normalizado e I_d la identidad de $d \times d$ ($d = \mathrm{Tr}\,I_d$ es la dimensión del espacio de estados), es un operador densidad. Interpretar este estado.

II Estados de sistemas compuestos. Entrelazamiento.

II.1 Para un sistema de dos qubits, escribir explícitamente la matriz que representa a $\rho_{AB} = |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|$ en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ para:

$$a)\ |\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}\,, \qquad b)\ |\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2}$$

Verificar en todos los casos que los autovalores de ρ son $(1, 0, 0, 0)$.

Escaneado con CamScanner

II.2 Hallar la matriz densidad reducida $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB}$ en todos los casos anteriores, y a partir de ella evaluar la entropía de entrelazamiento del estado.

II.3 Hallar la descomposición de Schmidt de los estados anteriores.

II.4 Para $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, hallar la descomposición de Schmidt del estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = \alpha \tfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \tfrac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

y a partir de ella indicar a) cuando el estado será separable b) cuando será entrelazado c) en qué caso el entrelazamiento será máximo.

II.5 a) Indicar en qué se diferencian el estado de Bell $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$ y el estado descripto por el operador densidad

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

b) Indicar si es posible distinguirlos mediante
i) el valor medio de un observable local $O_A \otimes I_B$.
ii) el valor medio de un observable $O = O_A \otimes O_B$.

Escaneado con CamScanner

I.1) Analizo si es veraz que un estado es puro sii $\rho^2=\rho$

$\rightarrow$ Si ρ es puro, sea $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ con $\rho=|\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \rho^2=\rho\rho=|\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|=\rho$

$\leftarrow$ Escribamos $\rho=\sum_i P_i|i\rangle\langle i| \rightarrow \rho^2=\left(\sum_i P_i|i\rangle\langle i|\right)^2=\sum_{ij} P_iP_j\,|i\rangle\underbrace{\langle i|j\rangle}_{\delta_{ij}}\langle j| = \sum_i P_i^2|i\rangle\langle i|$

pero quiero que se cumpla $\sum_i P_i\,|i\rangle\langle i| = \sum_i P_i^2|i\rangle\langle i|$

$\Rightarrow P_i=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases} \Rightarrow \rho=|k\rangle\langle k|$ es puro.

I.2) En un sistema tengo i operadores densidad ρ_i $(i=1,\dots,m)$ puedo escribir:

$\rho=\sum_i P_i\rho_i$ con $\sum_i P_i=1 \Rightarrow \rho_i=\sum_j P_j^i\,|j\rangle\langle j|$ entonces:

$$\rho=\sum_i P_i\rho_i=\sum_{ij}P_iP_j^i\,|j\rangle\langle j| = \sum_j\underbrace{\left(\sum_i P_iP_j^i\right)}_{Q_j}|j\rangle\langle j| = \sum_j Q_j\,|j\rangle\langle j|$$

siendo Q_j tal que:

$$\sum_j Q_j=\sum_{ij}P_iP_j^i=\underbrace{\sum_j P_j^i}_{=1}\left(\sum_i P_i\right)=\sum_i P_i=1 \text{ está normalizado.}$$

Para que sea un buen operador densidad se debe cumplir:

- $\mathrm{Tr}\,\rho=1 \mapsto \mathrm{Tr}\left(\sum_j Q_j\,|j\rangle\langle j|\right)=\sum_j Q_j=1$
- $Q_j\geq 0 \mapsto Q_j=\sum_i P_iP_i^j\geq 0$ pues $P_i, P_i^j\geq 0$ y como todos sus autovalores son reales y positivos $\rightarrow \rho^\dagger=\rho$.
- $\rho\geq 0 \Rightarrow$ Es un operador densidad.

I.3) Tengo $\rho=p|\alpha\rangle\langle\alpha|+(1-p)|\beta\rangle\langle\beta|$ tal que $\langle\alpha|\alpha\rangle=\langle\beta|\beta\rangle=1$ y $\langle\alpha|\beta\rangle\neq 0$

ahora: $\sqrt{p_i}\,|a_i\rangle=\sum_j u_{ij}\sqrt{p_j}\,|j\rangle \Rightarrow$

$$\sqrt{p}\,|\alpha\rangle=u_{11}\sqrt{p}\,|0\rangle+u_{12}\sqrt{1-p}\,|1\rangle$$

$$\sqrt{1-p}\,|\beta\rangle=u_{21}\sqrt{p}\,|0\rangle+u_{22}\sqrt{1-p}\,|1\rangle \quad \text{con } U=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow q=\sum_{jk}u_{ij}u_{ik}^*\sqrt{p_j}\sqrt{p_k}\,\delta_{jk}=\sum_j|u_{ij}|^2p_j$ pero $|u_{ij}|^2$ es doblemente estocástica pues $U\in U^\dagger$

$\Rightarrow \vec{q}=\mathbb{D}\cdot\vec{p}$ con $\vec{q}=\begin{pmatrix}q\\1-q\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\begin{pmatrix}p\\1-p\end{pmatrix} \rightarrow q<p$ y $1-q<1-p$.

$\Rightarrow q\in[1-p,p]$

I.4 Sea $\rho = P|0'\rangle\langle 0'| + (1-P)|1'\rangle\langle 1'| = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ tal que $a+c=1$.

Podemos escribir $a = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a-c}{2}$; $c = \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a-c}{2}$

$$\Rightarrow \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{a-c}{2} & b_R + i b_I \\ b_R - i b_I & \frac{1}{2} - \frac{a-c}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbb{1}_2 + \frac{a-c}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{1}_2 + \frac{a-c}{2}\sigma_z + b_R\sigma_x - b_I\sigma_y = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_2 + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

Este paso está justificado debido a $\vec{\sigma}$ forma una base de $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

$\rho = \left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_2 + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)$ con $\vec{r} = (2b_R, -2b_I, a-c)$

Verifiquemos que ρ sea un operador densidad, cumplirá $\rho \geq 0$: $\langle |\rho| \rangle \geq 0$

$\frac{1}{4} - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 - b_R^2 - b_I^2 \geq 0$ por lo que $\frac{1}{4} \geq \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b_R^2 + b_I^2$

$|\vec{r}|^2 = (a-c)^2 + 4b_R^2 + 4b_I^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{|\vec{r}|^2}{4}$ por lo que $|\vec{r}| \leq 1$

Podemos concluir que esta estructura está definida en una esfera de radio 1.

Calculemos los autovalores de ρ:

$$\rho\hat{u} = \lambda\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_2 + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)\vec{u} \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b_R^2 + 4b_I^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm |\vec{r}|\right)$$

Esto implica que ρ será puro sii $|\vec{r}| = 1$ i.e. $\vec{r}$ está en el borde de la esfera.

Por lo que los autovalores en el caso puro son $\lambda_\pm = 0, 1$.

Además: $r_x = 2 \cdot b_R = \langle \sigma_x \rangle$; $r_y = 2 \cdot b_I = \langle \sigma_y \rangle$, $r_z = a - c = \langle \sigma_z \rangle$.

$$\langle \vec{\sigma} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho\vec{\sigma}) = \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_2 + \vec{r}\,\vec{\sigma}\right)\vec{\sigma}\right] = \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{2}\vec{\sigma} + (\vec{r}\cdot\vec{\sigma})\vec{\sigma}\right)\right]$$

I.5 Para dos qubits, necesito contar todas las permutaciones $\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta$, definamos

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \text{ que cumple: } Tr[\Sigma_{\alpha\beta}\Sigma_{\gamma\delta}] = 4\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}$$

Podemos generalizar la matriz densidad: $\rho = \frac{1}{4}\Gamma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}$ que cumple $\langle \Sigma_{\mu\nu}\rangle = \Gamma_{\mu\nu}$

En general $\Sigma_{\mu_1 \dots \mu_n} = \bigotimes_{i=1}^{m} \sigma_{\mu_i}$ y tal que: $Tr[\Sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_m}\Sigma_{\beta_1 \dots \beta_m}] = 2^m \delta^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_m}$

I.6 $\rho = x|\Phi\rangle\langle\Phi| + \left(\frac{1-x}{d}\right)\mathbb{1}_d$. Necesito probar que es un operador densidad.

si $x=0$; $\rho = \frac{1}{d}\mathbb{1}_d$ estado maximalmente entrelazado

si $x=1$: $\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ estado puro.

II.1 a) Tenemos un cambio de base de: $S = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \to \tilde{S} = \{|\Psi_{AB}\rangle\}$

Con $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$ con $\rho_{AB} = |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|$

$$|\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}| = \frac{1}{2}\left[(|00\rangle \pm |11\rangle)(\langle 00| \pm \langle 11|)\right] = \frac{1}{2}\left[|00\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| \pm |11\rangle|00\rangle + |11\rangle\langle 11|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda = (1;0,0,0)$$

b) $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2}$;

$$|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \frac{1}{4}\left[(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle)(\langle 00| + \langle 10| - \langle 01| - \langle 11|)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 10| - |00\rangle\langle 01| - |00\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 11|$$

$$- |01\rangle\langle 00| - |01\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda = (1,0,0,0)$$

II.3 Hallamos la descomposición de Schmidt:

a): $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$: $\{|k_A\rangle\} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ y $\{|k_B\rangle\} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ con $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b): $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$. sea $|+-\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)_A \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)_B = \frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2}$

¿ sea $|-+\rangle = \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle}{2}$

$\Rightarrow |\Psi_{AB}\rangle = |+-\rangle \Rightarrow \{k_A\} = \{|+\rangle\}$ y $\{k_B\} = \{|-\rangle\}$ y $\lambda = 1$

$\boxed{II.2}$ $\rho_A = Tr_B \, \rho_{AB}$ pero de la decomp. de Schmidt sabemos que $\rho_A = \sum_k \lambda_k^2 |k_A\rangle\langle k_A|$

a) $\rho_A = \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| \pm |1\rangle\langle 1|]$ b) $\rho_A = |+\rangle\langle +|$

$\boxed{II.4}$ $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$: $|\Psi_{AB}\rangle = \alpha\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

si $|+\rangle := \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$, $|-\rangle := \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Rightarrow |++\rangle + |--\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |00\rangle - |00\rangle - |10\rangle - |11\rangle}{2}$$

$$= |00\rangle + |11\rangle$$

y $$|++\rangle - |--\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle - |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2} = |01\rangle + |10\rangle$$

$$\rightarrow |\Psi_{AB}\rangle = \alpha\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \alpha\left(\frac{|++\rangle + |--\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|++\rangle - |--\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|++\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|--\rangle \Rightarrow \{|k_A\rangle\} = \{|+\rangle, |-\rangle\},$$

$$\{|k_B\rangle\} = \{|+\rangle, |-\rangle\} \qquad \lambda_\pm = \frac{\alpha \pm \beta}{\sqrt{2}}.$$

a) si $\alpha = \pm\beta \Rightarrow$ estado separable. b) $\alpha \neq \pm\beta \Rightarrow$ estado entrelazado.

c) $\alpha = 0$, ó $\beta = 0 \Rightarrow$ maximalmente entrelazado

$\boxed{II.5}$ a $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \tilde{\rho}_{AB} = \frac{1}{2}[|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|]$

entrelazado pero puro.

$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$ no puedo distinguir el ket $\Rightarrow$ es mezcla

b i) $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B$ $\langle\mathcal{O}\rangle_{\tilde{\rho}}$ $Tr[\tilde{\rho}\mathcal{O}_1]$ Eg. $\mathcal{O}_A = |01\rangle\langle 01|$

$\langle\mathcal{O}\rangle_{\tilde{\rho}} = Tr[\tilde{\rho} \cdot \mathcal{O}_1] = \frac{1}{2}$ y $\langle\mathcal{O}\rangle_\rho = Tr[\rho \cdot \mathcal{O}_1] = \frac{1}{2}$

no los distingue.

ii) $\mathcal{O}_2 \neq \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B$ Eg.: $\mathcal{O}_2 = |01\rangle\langle 10| \Rightarrow \langle\mathcal{O}_2\rangle_{\tilde{\rho}} = Tr[\tilde{\rho} \cdot \mathcal{O}_2] = \frac{1}{2}$.

$\langle\mathcal{O}_2\rangle_\rho = Tr[\rho \cdot \mathcal{O}_2] = 0$.

este si los distingue.