Teoría de la Información Cuántica

Práctica 3 - Año 2020

Beaucamp, Jean Yves

1. Compuertas Lógicas Cuánticas

1. Sabemos que podemos escribir el operador densidad de un qubit como una matriz $\rho \in \mathbb{C}^{2x2}$ dada por $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})$. Por lo tanto, buscamos una expresión de los operadores de rotación en la representación de $\mathbb{C}^{2x2}$. Sabemos que $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ son una base del álgebra de generadores de $su(2)$. Por lo tanto, $e^{-i\sigma_k}$, para $k = x, y, z$, será una base del grupo de matrices unitarias de determinante 1, es decir, si $M \in SU(2)$, entonces $M = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ vector unitario. Para pasar de $SU(2)$ a $U(2)$ solo deberemos multiplicar M por una fase compleja arbitraria, ya que

$$\det\left(e^{i\alpha}M\right) = e^{i2\alpha}\det\{M\} = e^{i2\alpha}.$$

Por lo tanto, toda transformación unitaria de un qubit (matrices unitarias de 2x2) podrá ser escrita como

$$U = e^{i\alpha}R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2}.$$

2. Para el caso general, como $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{1}$ (ya que $\sigma_k^2 = \mathbb{1}$), y por consiguiente $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^{2n} = 1$ y $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^{2n+1} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, las matrices de rotación de qubits $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ podrán ser expresadas como

$$\begin{aligned} R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\theta/2)^{2k}}{(2k)!}\mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\theta/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{1}\cosh\left(\frac{i\theta}{2}\right) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\sinh\left(\frac{-i\theta}{2}\right) \\ &= \mathbb{1}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$iR_x(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i^2\sigma_x = \sigma_x = X,$$

$$iR_y(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i^2\sigma_y = \sigma_y = Y,$$

y

$$iR_z(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i^2\sigma_z = \sigma_z = Z.$$

Para el caso de la compuerta Hadamard, si $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, entonces

$$iR_{\hat{\mathbf{n}}}(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \cdot \boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix} = H.$$

Finalmente, como $\sigma_k^\dagger = \sigma_k$, y $H^\dagger = H$, entonces analizándolo en términos geométricos, $XZX = XZX^\dagger = R_x(\pi)ZR_x(-\pi) = -Z$, pudiendo ser interpretado como una rotación en π sobre el eje x, invirtiendo la orientación de un vector inicial en la dirección z a $-z$. Bajo la misma justificación geométrica, $XYX = XYX^\dagger = R_x(\pi)YR_x(-\pi) = -Y$. Con un razonamiento análogo, como podemos ver en la fig. 1, $HXH = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\pi)XR_{\hat{\mathbf{n}}}(\pi) = Z$. Como además H es autoadjunto, entonces también se cumple $HZH = X$ (gráficamente evidente).

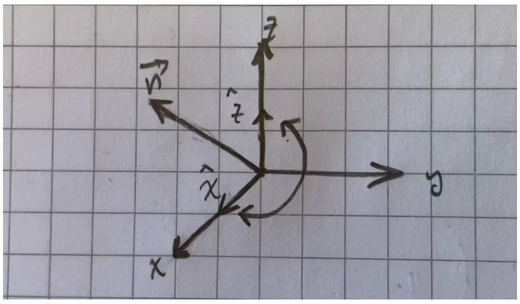
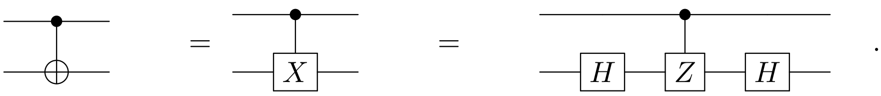


Figura 1: Rotación en π alrededor del eje $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ de un vector unitario $\hat{\mathbf{x}}$ a $\hat{\mathbf{z}}$.

3. Buscamos un tiempo t y un Hamiltoniano H de dos qubits tal que el operador de evolución unitaria $U(t)$ cumpla
$$U(t) = \exp\left\{\frac{-iHt}{\hbar}\right\} \equiv R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) \otimes R_{\hat{\mathbf{m}}}(\phi).$$
Es fácil ver que $e^{\mathbb{1}\otimes A} = \mathbb{1} \otimes e^A$:
$$e^{\mathbb{1}\otimes A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{1}\otimes A)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{1}\otimes A^n}{n!} = \mathbb{1}\otimes\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\right) = \mathbb{1}\otimes e^A.$$
De forma análoga se puede demostrar que $e^{A\otimes\mathbb{1}} = e^A \otimes \mathbb{1}$. Por lo tanto, el problema se reduce a obtener $e^M = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ y $e^N = R_{\hat{\mathbf{m}}}(\phi)$, y expresarlo en la forma de un operador de evolución temporal. Por lo estudiado en II.1, sabemos que $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$. Utilizando la definición del operador de Spin $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, entonces:
$$R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = e^{-i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\frac{\boldsymbol{S}}{\hbar}} = e^{\frac{-iH_{\theta\hat{\mathbf{n}}}t}{\hbar}},$$
con $H_{\theta\hat{\mathbf{n}}} = \frac{g\mu_B}{\hbar}\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{g\mu_B}{2}\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, que corresponde al hamiltoniano de Spin para un electrón inmerso en un campo magnético $\boldsymbol{B} = \theta\hat{\mathbf{n}}$. El tiempo, en este caso, corresponderá a $t = \frac{\hbar}{g\mu_B}$. Para $R_{\hat{\mathbf{m}}}(\phi)$ el resultado es equivalente, obteniendo $H_{\phi\hat{\mathbf{m}}} = \phi\hat{\mathbf{m}}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Por lo tanto,
$$H = H_{\theta\hat{\mathbf{n}}}\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes H_{\phi\hat{\mathbf{m}}} = \frac{g\mu_B}{2}\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\frac{g\mu_B}{2}\phi\hat{\mathbf{m}}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \qquad t = \frac{g\mu_B}{\hbar}.$$
Si se desea realizar la operación en un tiempo $t = t_0$, basta solo con escalar los campos magnéticos $\boldsymbol{B}_A = \theta\hat{\mathbf{n}} \to \frac{\theta}{t_0}\hat{\mathbf{n}}$ y $\boldsymbol{B}_B = \phi\hat{\mathbf{m}} \to \frac{\phi}{t_0}\hat{\mathbf{m}}$.

4. Resulta útil primero realizar un cambio de base para obtener un operador de interacción diagonal. Por lo demostrado en I.2, sabemos que $HZH = X$. Entonces,



Entonces, el problema de ahora se reduce a obtener un hamiltoniano compatible con un operador de interacción diagonal
$$U_{CZ} = |0\rangle\langle 0|\otimes\mathbb{1} + |1\rangle\langle 1|\otimes Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
Por su carácter diagonal, es intuitivo construir H como
$$H = \alpha\sigma_z \times \mathbb{1} + \beta\mathbb{1}\otimes\sigma_z + \gamma\sigma_z\otimes\sigma_z + \nu\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}.$$

Podemos despreciar el término en $\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}$ al representar únicamente una fase global. Además, para que sea simétrico, $\alpha=\beta$, y $\gamma=\alpha\xi$. Luego,

$$H=\alpha(\sigma_z\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\sigma_z+\xi\sigma_z\otimes\sigma_z),$$

obteniendo en cada estado

$$\begin{aligned} &H\left|00\right\rangle=\alpha(2+\xi)\left|00\right\rangle, && H\left|10\right\rangle\alpha(-1+1-\xi)\left|10\right\rangle=-\alpha\xi\left|10\right\rangle, \\ &H\left|01\right\rangle=\alpha(1-1-\xi)\left|01\right\rangle=-\alpha\xi\left|01\right\rangle, && H\left|11\right\rangle=(-1-1+\xi(-1)^2)\left|11\right\rangle=-\alpha(2-\xi)\left|11\right\rangle. \end{aligned}$$

Para que el resultado resulte idéntico en $|00\rangle$, $|01\rangle$ y $|10\rangle$ (compatible con (1)), vemos que $\xi=-1$, por lo que entonces el hamiltoniano se reduce a

$$H=\alpha(\sigma_z\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\sigma_z-\sigma_z\otimes\sigma_z)=\alpha\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U_{CZ}=e^{\frac{-iHt}{\hbar}}=\exp\left\{-i\omega t\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}\right\}&=\begin{pmatrix}e^{-i\omega t}&&&\\&e^{-i\omega t}&&\\&&e^{-i\omega t}&\\&&&e^{3i\omega t}\end{pmatrix} \\ &=e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&e^{4i\omega t}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde se ha definido $\omega=\alpha/\hbar$. Buscar que el último elemento de la diagonal sea -1 (para obtener (1)) nos impone una condición sobre t y ω como

$$4\omega t=\pi+2n\pi \implies t=\frac{(1+2n)}{4\omega}\pi.$$

El factor exponencial remanente resulta una fase global, por lo que no es relevante en la medición final del sistema.

La compuerta U_{CNOT} podrá ser entonces realizada por

$$U_{CX}=(\mathbb{1}\otimes H_{ad})U_Z(\mathbb{1}\otimes H_{ad}),$$

donde H_{ad} es el operador de la compuerta Hadamard, con hamiltoniano

$$H_{Had}=\mathbb{1}\otimes\frac{g\mu_B\pi}{2\sqrt{2}}(\sigma_x+\sigma_z).$$

2. Estados de dos qubits y traspuesta parcial.

1. Podemos describir de forma general un estado de dos qubits por medio de su matriz densidad, expresada como

$$\rho_{AB}=\frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}+\boldsymbol{r}_A\cdot\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_B+\sum_{i,j=1}^{3}J_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j\right]. \tag{2}$$

   a) Como

$$\mathrm{Tr}\big\{(\sigma_i\otimes\sigma_j)(\sigma_{i'}\otimes\sigma_{j'})\big\}=\mathrm{Tr}_A(\sigma_i\sigma_{i'})\,\mathrm{Tr}_B(\sigma_j\sigma_{j'})=2\delta_{ii'}\;2\delta_{jj'}=4\delta_{ii'}\delta_{jj'},$$

entonces es trivial ver que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_A \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{AB} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1}) = \boldsymbol{r}_A,$$
$$\langle \boldsymbol{\sigma}_B \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{AB} \mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{r}_B,$$

y

$$\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{AB} \sigma_i \otimes \sigma_j) = J_{ij}.$$

b) La matriz densidad del sistema puede ser escrita de manera más compacta como

$$\rho = \sum_{\mu\nu}^{4} J_{\mu\nu} \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu.$$

No necesariamente la matriz $J_{\mu\nu}$ del sistema resulta diagonal, por lo que no está garantizado que pueda ser diagonalizada. Sin embargo, como si admite una descomposición en valores singulares, los ejes locales de los subsistemas A y B si pueden ser rotados individualmente (recordamos que toda matriz unitaria, en particular las matrices V y W de cambio de base en la SVD, pueden ser expresadas como rotaciones generales como se ha demostrado en el ejercicio I.1) tal que el sistema resultante si adquiera una forma

$$\rho'_{AB} = \sum_{\nu=1}^{n_s} \lambda_\nu \sigma'_\nu \otimes \sigma''_\nu.$$

c) Las matrices densidad reducidas ρ_A y ρ_B estarán determinadas por los elementos de matriz

$$\langle 0|\sigma_x|0\rangle = \langle 1|\sigma_x|1\rangle = \langle 0|\sigma_y|0\rangle = \langle 1|\sigma_y|1\rangle = 0, \qquad \langle 0|\sigma_z|0\rangle = 1, \qquad \langle 1|\sigma_z|1\rangle = -1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\rho_B &= \mathrm{Tr}_A\, \rho_{AB} \\
&= \frac{1}{4}\Bigg(2\mathbb{1}_B + r_z^A \cancel{(\langle 0|\sigma_z^A|0\rangle + \langle 1|\sigma_z^A|1\rangle)} \mathbb{1}_B + 2\boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{r}_B \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{3} \cancel{(\langle 0|\sigma_z^A|0\rangle + \langle 1|\sigma_z^A|1\rangle)} \sum_{j=1}^{3} J_{3j} \sigma_j^B \Bigg) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\mathbb{1}_B + 2\boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{r}_B \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_B + \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{r}_B \right).
\end{aligned}$$

Por un procedimiento análogo podemos encontrar la matriz densidad reducida ρ_A, obteniendo

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_A + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{r}_A \right).$$

d) La matriz traspuesta parcial respecto a B de ρ_{AB} estará determinada por

$$\sigma_x^t = \sigma_x, \quad \sigma_y^t = -\sigma_y, \quad \sigma_z^t = \sigma_z.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\rho_{AB}^{t_B} &= \frac{1}{4}\left[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}^t + \boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1}^t + \mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \boldsymbol{r}_B + \sum_{i,j=1}^{3} J_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j^t \right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot (r_x^B, -r_y^B, r_z^B) + \sum_{i,j=1}^{3} J_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j^t \right].
\end{aligned}$$

e) Utilizando el Mathematica y las expresiones para $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$ y $\boldsymbol{J}_{ij}$ encontradas en II.1.a, podemos encontrar la forma (2) de los siguientes estados puros:

(I) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\boldsymbol{r}_A = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1}) = (0,0,0),$$
$$\boldsymbol{r}_B = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = (0,0,0),$$

y

$$J_{ij} = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\sigma_i \otimes \sigma_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(II) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$.

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\boldsymbol{r}_A = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1}) = (0,0,0),$$
$$\boldsymbol{r}_B = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = (0,0,0),$$

y

$$J_{ij} = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\sigma_i \otimes \sigma_j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Para $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, consideraremos el estado de un sistema definido por la matriz densidad

$$\rho = x\,|\Psi\rangle\langle\Psi| + \frac{1-x}{4}\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Es trivial ver que $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$, y que $\rho^\dagger = \rho$. La condición que resta verificar es la semipositividad de ρ. Evaluando en Mathematica los autovalores, obtenemos

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1-x}{4} \geq 0 \implies x \leq 1,$$

y

$$\lambda_4 = \frac{1+3x}{4} \geq 0 \implies x \geq -\frac{1}{3},$$
$$\therefore x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

b) Para que se trate de un estado puro, $\rho^2 = \rho$. Intuitivamente, es razonable suponer que solo para $x = 1 \implies \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ este requerimiento se cumplirá. Esto puede ser verificado evaluando la condición de igualdad en Mathematica.

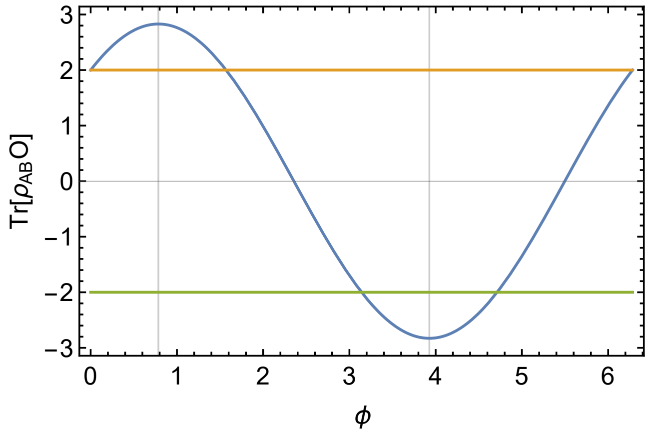


Figura 2: Valor medio del observable CHSH O.

c) Sea

$$O = \sigma_x \otimes \sigma_{x'} + \sigma_z \otimes \sigma_{z'} + \sigma_x \otimes \sigma_{z'} - \sigma_z \otimes \sigma_{x'}$$

el observable CHSH, donde los ejes x' y z' se encuentran rotados mediante una rotación $R_y(\phi)$, es decir,

$$\sigma_{x'} = R_y(\phi)\sigma_x R_y^\dagger(\phi), \qquad \sigma_{z'} = R_y(\phi)\sigma_z R_y^\dagger(\phi).$$

Luego, evaluando la traza en Mathematica,

$$\begin{aligned} \langle O \rangle = \mathrm{Tr}(\rho O) &= -x\cos\phi - x\cos\phi - x\sin\phi - x\sin\phi \\ &= -2x(\cos\phi + \sin\phi) \\ &= -2x\sqrt{2}\cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-2\sqrt{2}x, 2\sqrt{2}x\right]. \end{aligned}$$

Clásicamente,

$$O = \underbrace{\sigma_x}_{\substack{\pm 1 \\ \pm 1}} \otimes \underbrace{(\sigma_{x'} + \sigma_{z'})}_{\substack{\pm 2 \\ \pm 0}} + \underbrace{\sigma_z}_{\substack{\pm 1 \\ \pm 1}} \otimes \underbrace{(\sigma_{z'} - \sigma_{x'})}_{\substack{0 \\ \pm 2}} = \pm 2.$$

Por lo tanto, para $2\sqrt{2}x > 2 \implies x > 1/\sqrt{2}$, el valor medio del observable CHSH viola las cotas establecidas clásicamente (fig. 2).

d) Para un sistema de dos qubits, sabemos que

$$\rho_{AB}^{t_B} \geq 0 \iff \rho_{AB} \text{ es separable.}$$

Por lo tanto, para que el estado ρ sea entrelazado, los autovalores de su matriz traspuesta parcial deberán ser negativos. En particular para un sistema de dos qubits, donde la matriz densidad se encuentra descrita por

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} \implies \rho_{AB}^{t_B} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}^t & \begin{pmatrix} \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{23} & \rho_{24} \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{41} & \rho_{42} \end{pmatrix}^t & \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{13} & \rho_{23} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{14} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{41} & \rho_{33} & \rho_{43} \\ \rho_{32} & \rho_{42} & \rho_{34} & \rho_{33} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para el caso particular que estamos estudiando,

$$\rho_{AB}^{t_B} = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & 0 \\ -\frac{x}{2} & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}.$$

Esta nueva matriz tendrá ahora autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1-3x}{4} < 0 \implies x > \frac{1}{3},$$

y

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1+x}{4} < 0 \implies x < -1.$$

El segundo caso no corresponde a un estado físico del sistema, por lo que nos reducimos a considerar solo λ_1. Luego, considerando también que $x \leq 1$, entonces para que el sistema presente entrelazamiento, $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$.

e) Para $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$, donde el sistema presentará entrelazamiento, el único autovalor negativo de la matriz $\rho_{AB}^{t_B}$ será $\lambda_1 = (1-3x)/4$, como fue demostrado en el ejercicio anterior. Por lo tanto, $N = -\lambda_1(\rho_{AB}^{t_B}) = (3x-1)/4$. Para $x \leq 1/3$ no tendremos autovalores negativos de $\rho_{AB}^{t_B}$, por lo que $N = 0$. En general,

$$N(\rho_{AB}) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right], \\ \dfrac{3x-1}{4}, & \text{si } x \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}.$$

Para un sistema de dos qubits, sabemos que la concurrencia puede ser calculada como

$$C(x) = \text{máx}\{2\lambda_{max}(R) - \operatorname{Tr} R, 0\},$$

donde R es la matriz

$$R = \left(\rho_{AB}^{1/2}\ (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AB}^{*}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\ \rho_{AB}^{1/2}\right)^{1/2} = \rho_{AB}.$$

Finalmente, el entrelazamiento de formación para un sistema de dos qubits estará dado por:

$$E(\rho_{AB}) = \sum_{i=0,1} p_i \log_2 p_i, \qquad p_i = \frac{1 + (-1)^i\sqrt{1-C^2}}{2}.$$

Las tres magnitudes físicas enunciadas se encuentran representadas gráficamente para este sistema en la figura 3.

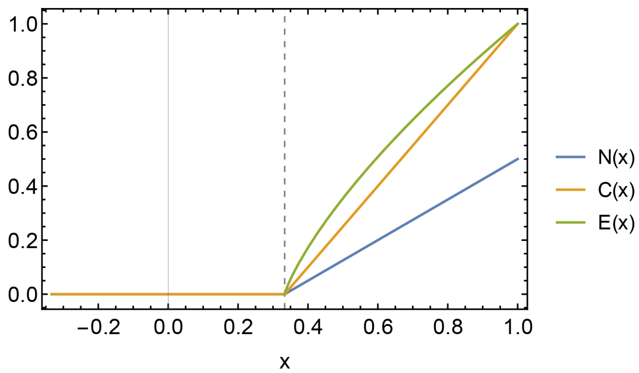


Figura 3: Negatividad, concurrencia y entrelazamiento de formación para un sistema de dos qubits en el estado ρ_{AB}.