

# Práctica 1

Inés Corte

27 de septiembre de 2020

## I. Operador densidad

I.1)  $\rho$  describe estado puro  $\iff \rho^2 = \rho$

$\Rightarrow$ ) Como  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  ( $\rho$  de un estado puro es proyector),  $\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = \rho$

$\Leftarrow$ )  $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| = \rho^2 = \sum_i p_i^2 |i\rangle\langle i| \implies p_i = 0, 1$  pero como  $\sum p_i = 1$ ,

$p_i = 1$  y  $p_j = 0 \forall j \neq i$ . Como  $\text{ran}(\rho)=1$ , describe a un estado puro.

I.2)  $\rho_i$  son operadores densidad y tenemos

$$\rho = \sum_{i=1}^m p_i \rho_i, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

A partir de estas condiciones podemos ver que  $\rho$  es un operador densidad, ya que:

- $\rho^\dagger = \sum_i p_i^* \rho_i^\dagger = \sum_i p_i \rho_i = \rho$
- $\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\sum p_i \rho_i) = \sum p_i \text{Tr}(\rho_i)$ , y como  $\text{Tr}(\rho_i) = 1 \forall i$ ,  $\text{Tr}(\rho) = \sum p_i = 1$
- $\langle\psi|\rho|\psi\rangle = \langle\psi|(\sum_i p_i \rho_i)|\psi\rangle = \sum_i p_i \langle\psi|\rho_i|\psi\rangle \geq 0$  ya que  $\langle\psi|\rho_i|\psi\rangle \geq 0$  y  $p_i \geq 0$

I.3) Partimos de  $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$ , con  $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ .

Ahora escribimos  $\begin{cases} |0\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle \\ |1\rangle = c|\alpha\rangle + d|\beta\rangle \end{cases}$  para expresar a  $\rho$  en la base  $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ .

$$\begin{aligned} \rho &= [p|a|^2 + (1-p)|c|^2] |\alpha\rangle\langle\alpha| + [pab^* + (1-p)cd^*] |\alpha\rangle\langle\beta| + [pba^* + (1-p)dc^*] |\beta\rangle\langle\alpha| + \\ &+ [p|b|^2 + (1-p)|d|^2] |\beta\rangle\langle\beta| = q |\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q) |\beta\rangle\langle\beta| \text{ y buscamos los } q \text{ que cumplen.} \end{aligned}$$

Entonces  $pba^* + (1-p)dc^* = pab^* + (1-p)cd^* = 0$ . Con lo restante,

$$\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & |c|^2 \\ |b|^2 & |d|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$$

Como  $\rho$  debe ser un operador densidad, debe cumplir a su vez que  $\text{Tr} \rho = 1$ .

El ejercicio puede resolverse siguiendo “Majorization and the interconversion of bipartite states” de Nielsen (Quantum Information and Computation, Vol.1, No.1 (2001) 76-93).

- I.4)  $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  son ortogonales respecto del producto usual de matrices, por lo que forman una base del espacio de matrices de  $2 \times 2$ . Por lo tanto, podemos escribir a cualquier matriz densidad  $\rho$  de un qubit como combinación lineal de los elementos de la base, es decir

$$\rho = \alpha I + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z$$

Al ser  $\rho$  una matriz densidad,  $\text{Tr}(\rho) = 1$ , por lo que pedimos

$$\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\alpha I + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z) = \alpha \text{Tr}(I) + \sum_{i=x,y,z} r_i \text{Tr}(\sigma_i) = 1$$

y como  $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ , resulta

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \implies \alpha \text{Tr}(I) + 0 = 2\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{1}{2}.$$

A partir de esto,  $\langle \sigma_i \rangle = \text{Tr}(\rho \sigma_i) = \text{Tr}(r_j \sigma_j \sigma_i) = 2r_j \delta_{ij} = 2r_i$ . Sacamos el  $\frac{1}{2}$  como factor común para que podamos interpretar  $\vec{r} = (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle)$ , y nos queda

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix}.$$

Tenemos  $\det(\rho) = \frac{1}{4}(1 - \vec{r}^2)$ . Como  $\rho$  es semi-definida positiva, los autovalores deben ser no negativos, es decir  $\det(\rho) \geq 0 \implies 1 - \vec{r}^2 \geq 0 \implies |\vec{r}| \leq 1$ .

Podemos elegir al eje  $z$  en la dirección de  $\vec{r}$  para así ver más fácil los autovalores de  $\rho$ :

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}(I + |\vec{r}| \sigma_z) \implies \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm |\vec{r}|).$$

Si  $\rho$  representa un estado puro, un autovalor debe ser 0 y el otro 1. Esto ocurre si  $|\vec{r}| = 1$ .

#### I.5) Generalización de I.4

Lo del inciso anterior para un qubit lo podemos escribir como

$$\rho = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^3 r_i \sigma_i,$$

donde  $d = 2$  es la dimensión del espacio y definimos  $\sigma_0 = I_{2 \times 2}$ .

Queremos generalizarlo para 2 qubits. Como  $\{\sigma_i, i = 0, \dots, 3\}$  era la base del espacio de  $2 \times 2$ , la base del espacio de los 2 qubits será el producto tensorial de los elementos de la base de cada qubit. Es decir,  $\{\sigma_{\mu} \otimes \sigma_{\nu}, \mu, \nu = 0, \dots, 3\}$

$$\rho = \frac{1}{d^2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 r_{\mu} r_{\nu} (\sigma_{\mu} \otimes \sigma_{\nu})$$

- I.6) Queremos hallar los valores posibles de  $x$  para que  $\rho = x |\Phi\rangle\langle\Phi| + (1-x)I_d/d$  sea un operador densidad, siendo  $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ .

Como queremos que  $\rho$  sea un operador densidad, debe ser semidefinido positivo. Claramente  $|\Phi\rangle$  es un autoestado de  $\rho$ , por lo que

$$\langle\Phi|\rho|\Phi\rangle = \langle\Phi|\left(x|\Phi\rangle\langle\Phi| + \frac{1-x}{d}I_d|\Phi\rangle\right) = \langle\Phi|\left(x + \frac{1-x}{d}\right)|\Phi\rangle = x + \frac{1-x}{d} \geq 0.$$

Luego,  $\langle \Phi | \rho | \Phi \rangle \geq 0 \implies (1-d)x \leq 1$ .

Sea  $|\Phi_\perp\rangle$  estado normalizado tal que  $\langle \Phi_\perp | \Phi \rangle = 0$ , utilizando  $|\psi\rangle = \alpha |\Phi\rangle + \beta |\Phi_\perp\rangle$ , tenemos que

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \implies |\alpha|^2 \left( x + \frac{1-x}{d} \right) + |\beta|^2 \frac{1-x}{d} \geq 0.$$

Como lo que acompaña a  $|\alpha|^2$  es lo que antes pedimos que fuera no negativo, resulta entonces que  $\frac{1-x}{d} \geq 0 \implies x \leq 1$ . Volviendo a la condición  $(1-d)x \leq 1$ , como  $d \geq 2$ , necesariamente  $x$  debe ser no negativo (si queremos que esto valga para una dimensión  $d$  genérica). Por lo tanto, para que el operador  $\rho$  antes definido sea un operador densidad debe cumplirse que  $0 \leq x \leq 1$ .

## II. Estados de sistemas compuestos. Entrelazamiento

II.1) Matriz de  $\rho_{AB} = |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|$  en la base computacional  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  :

a) Para  $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$  tenemos el operador densidad

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| \pm |11\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 11|).$$

Ahora para armar la matriz necesitamos los resultados de aplicar  $\rho_{AB}$  a cada elemento de la base, y escribirlos como combinación lineal de ellos.

$$\rho_{AB} |00\rangle = \frac{1}{2} |00\rangle \pm \frac{1}{2} |11\rangle$$

$$\rho_{AB} |01\rangle = \rho_{AB} |10\rangle = 0$$

$$\rho_{AB} |11\rangle = \pm \frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$$

La matriz del operador es entonces  $\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

Como tenemos filas dependientes, por lo menos un autovalor es cero. Por los resultados de arriba, vemos que  $|01\rangle$  y  $|10\rangle$  son autoestados con autovalor cero, así que tiene por lo menos multiplicidad 2. Para los autovalores restantes:

$$\det(\rho_{AB} - \lambda I) = \left( \frac{1}{2} - \lambda \right)^2 \lambda^2 \mp \frac{1}{2} \lambda \left( \pm \frac{1}{2} \lambda \right) = 0$$

Omitiendo el  $\lambda^2$  (que representa el autovalor cero con multiplicidad 2),

$$\left( \frac{1}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \implies \lambda = 0 \text{ o } \lambda = 1.$$

Por lo tanto, los autovalores son 0 (con multiplicidad 3) y 1.

b) Con  $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = & \frac{1}{4} |00\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|) - \frac{1}{4} |01\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|) + \\ & + \frac{1}{4} |10\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|) - \frac{1}{4} |11\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|). \end{aligned}$$

En forma matricial,  $\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

De *WolframAlpha*, obtenemos que los autovalores son (1,0,0,0).

## II.2) Matriz reducida $\rho_A$ y entropía de entrelazamiento del estado

a)  $\rho_{AB} = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| \pm |11\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 11|)$

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

$$E(A, B) = S(\rho_A) = -2\frac{1}{2} \log_2(\frac{1}{2}) = 1 \text{ (completamente desordenado).}$$

b)  $\rho_{AB} = \frac{1}{4} |00\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|) - \frac{1}{4} |01\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|) + \frac{1}{4} |10\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|) - \frac{1}{4} |11\rangle (\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| - \langle 11|).$

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{4} (2|0\rangle\langle 0| + 2|0\rangle\langle 1| + 2|1\rangle\langle 0| + 2|1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

En forma matricial,  $\rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  cuyos autovalores son 0 y 1. Luego,

$$E(A, B) = S(\rho_A) = 0 - 1 \log_2(1) = 0 \text{ (no hay desorden).}$$

## II.3) Descomposición de Schmidt de los estados del II.1

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle |0\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle |1\rangle$$

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2} = \frac{1}{2} |0\rangle (|0\rangle - |1\rangle) + \frac{1}{2} |1\rangle (|0\rangle - |1\rangle) = |+\rangle |-\rangle$$

II.4) Siendo  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , buscamos descomposición de Schmidt del estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = \alpha \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |01\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |10\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |11\rangle.$$

Para nuestro estado,  $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , recordando que

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} |i, j\rangle = \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k |u_k\rangle |v_k\rangle \implies \rho_A = \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k^2 |u_k\rangle \langle u_k|,$$

donde  $\sigma_k^2$  son los autovalores de  $C^\dagger C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^* \beta + \beta^* \alpha \\ \beta^* \alpha + \alpha^* \beta & 1 \end{pmatrix}$

y  $n_s = \text{ran}(C)$ . Si consideramos que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tenemos  $C^\dagger C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & 1 \end{pmatrix}.$

Autovalores  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm 2\alpha\beta)$  y con esto podemos ver para qué valores será el estado separable o entrelazado:

- **separable** si sólo un autovalor es 1 y el resto valen 0 (es decir  $2\alpha\beta = 1$ , y como  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  queda  $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ )

- **entrelazado** si hay más de un autovalor no nulo (es decir,  $2\alpha\beta \neq 1$ )
- **máximamente entrelazado** si todos los autovalores son no nulos e iguales (es decir  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}$ , con lo que o bien  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , o bien  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ )

Otra forma de hacerlo

$$\begin{aligned} \begin{cases} |+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases} &\implies \begin{cases} |0\rangle = \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1\rangle = \frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}, \text{ y reescribimos al estado como} \\ |\Psi_{AB}\rangle &= \frac{|+\rangle+|-\rangle}{2} \left[ \alpha \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{|+\rangle-|-\rangle}{2} \left[ \beta \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}} + \alpha \frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}} \right] \\ |\Psi_{AB}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} 2(\alpha + \beta) |++\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} 2(\alpha - \beta) |--\rangle \quad (\text{descomposición de Schmidt}) \end{aligned}$$

II.5) Tenemos estado de Bell  $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$  y estado descrito por  $\rho_{AB} = \frac{|01\rangle\langle 01|+|10\rangle\langle 10|}{2}$

a) El operador densidad asociado al estado  $|\Psi_{AB}\rangle$  es

$$\rho_{Bell} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

y representa a un estado puro, mientras que  $\rho_{AB}$  es un estado mezcla.

b) i) No podemos distinguirlos mediante el valor medio de un observable local ya que los resultados son iguales.

$$\begin{aligned} \langle\Psi_{AB}|O_A \otimes I_B|\Psi_{AB}\rangle &= \langle 01|O_A \otimes I_B|01\rangle + \langle 01|O_A \otimes I_B|10\rangle + \langle 10|O_A \otimes I_B|01\rangle + \\ &+ \langle 10|O_A \otimes I_B|10\rangle = \langle 0|O_A|0\rangle \langle 1|I_B|1\rangle + \langle 1|O_A|1\rangle \langle 0|I_B|0\rangle = \langle 0|O_A|0\rangle + \langle 1|O_A|1\rangle \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\rho_{AB}O_A \otimes I_B) = \langle 01|O_A \otimes I_B|01\rangle + \langle 10|O_A \otimes I_B|01\rangle = \langle 0|O_A|0\rangle + \langle 1|O_A|1\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{II) } \langle\Psi_{AB}|O_A \otimes O_B|\Psi_{AB}\rangle &= \langle 01|O_A \otimes O_B|01\rangle + \langle 01|O_A \otimes O_B|10\rangle + \langle 10|O_A \otimes O_B|01\rangle + \\ &+ \langle 10|O_A \otimes O_B|10\rangle = \langle 0|O_A|0\rangle \langle 1|O_B|1\rangle + \langle 0|O_A|0\rangle \langle 1|O_B|1\rangle + \\ &+ \langle 0|O_A|0\rangle \langle 1|O_B|1\rangle + \langle 1|O_A|1\rangle \langle 0|O_B|0\rangle \neq \text{Tr}(\rho_{AB}O_A \otimes O_B), \text{ ya que} \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\rho_{AB}O_A \otimes O_B) = \langle 0|O_A|0\rangle \langle 1|O_B|1\rangle + \langle 0|O_A|0\rangle \langle 1|O_B|1\rangle$$

Por lo tanto, podemos distinguir los estados.