Seminario de información cuántica 2020

Paula Pagano

24 de septiembre de 2020

Práctica 1

1. Operador densidad

1.1. Demostrar que un operador densidad ρ describe un estado puro sii $\rho^2 = \rho$

Ida

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \to \rho^2 = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi||\psi\rangle}_{1} \langle\psi| = \rho$$

Vuelta

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| = \rho^2 = \sum_i p_i^2 |i\rangle\langle i|$$

entonces $p_i = 1$ y el resto 0

1.2. Mostrar que si ρ_i, $i = 1, \ldots, m$, son operadores densidad, entonces

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i\rho_i,\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\ ,$$

es tambien un operador densidad. Esto muestra que el conjunto de operadores de densidad para un dado sistema es un conjunto convexo.

Quiero mostrar que: $\rho^\dagger = \rho$, $Tr\rho = 1$ y que $\rho \geq 0$

$$\rho^\dagger = \sum_i p_i \underbrace{\rho_i^\dagger}_{\rho_i} = \sum_i p_i\rho_i = \rho$$

$$Tr\rho = \sum_i p_i \underbrace{Tr\rho_i}_{1} = \sum_i p_i = 1$$

$$\langle\phi_k|\rho|\phi_k\rangle = p_k \underbrace{\langle\phi_k|\phi_k\rangle}_{\geq 0} \geq 0\ \forall k$$

1.3. Mostrar que $\rho = p\,|0\rangle\langle 0| + (1-p)\,|1\rangle\langle 1|$, con $p \in (1/2, 1)$, puede ser escrito como

$$\rho = q\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q)\,|\beta\rangle\langle\beta|$$

con $q \in [1-p, p]$ arbitrario y $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ estados normalizados. Determine $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ e interprete ambas representaciones.

Tenemos que $\rho = q\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q)\,|\beta\rangle\langle\beta|$, con $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1$, pero con $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$- Debo probar que $q \in [1-p, p]$. Para hacerlo uso que puedo escribir $\sqrt{q_i}\,|a_i\rangle = \sum_j u_{ij}\sqrt{p_j}\,|j\rangle$, en particular

$$\sqrt{q}\,|\alpha\rangle = u_{11}\sqrt{p}\,|0\rangle + u_{12}\sqrt{1-p}\,|1\rangle$$

$$\sqrt{1-q}\,|\alpha\rangle = u_{21}\sqrt{p}\,|0\rangle + u_{22}\sqrt{1-p}\,|1\rangle$$

es decir transformo con $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ unitaria. Entonces

$$q = \sum_{jk} u_{1j}u_{1k}^*\sqrt{p_j}\sqrt{p_k}\delta_{jk} = \sum_j |\,u_{1j}\,|^2 p_j$$

Llamando $D_{ij} = |\,u_{ij}\,|^2$, la matriz D será doblemente estocástica pues U es unitaria, luego

$$\vec{q} = D\vec{p}$$

con $\vec{q} = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$ y $\vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$. Ahora, como D es doblemente estocástica, implica que $q \prec p$ y $1-q \prec 1-p$, por lo que $q \in [1-p, p]$.

1.4. Mostrar que la matriz densidad mas general para un qubit puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma)$$

donde $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ es un vector arbitrario con $|\,\boldsymbol{r}\,| \leq 1$, y $\vec{\sigma} = (X, Y, Z) \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ las matrices de Pauli. Determine los autovalores de ρ e indique en qué casos ρ representa un estado puro. Exprese también $\boldsymbol{r}$ en términos de $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = Tr\rho\boldsymbol{\sigma}$.

Tengo que $\rho = p\,|0'\rangle\langle 0'| + (1-p)\,|1'\rangle\langle 1'| = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ con $a + c = 1$

$$a = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a-c}{2}; \qquad c = \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a-c}{2}$$

Puedo escribir a ρ como

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{a-c}{2} & b_R + ib_I \\ b_R - ib_I & \frac{1}{2} - \frac{a-c}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a-c}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b_R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_I\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}I + \frac{a-c}{2}\sigma_z + b_R\sigma_x - b_I\sigma_y = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

siendo $b = b_R + ib_I$ y $\boldsymbol{r} = (2b_R, -b_I, a-c)$. Para que ρ sea operador densidad, debe cumplir que $\rho \geq 0$, o sea $|\,\rho\,| \geq 0$, por lo que

$$\frac{1}{4} - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 - b_R^2 - b_I^2 \geq 0 \longrightarrow \frac{1}{4} \geq \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b_R^2 + b_I^2 \tag{1}$$

Por otro lado $|\,\boldsymbol{r}\,|^2 = (a-c)^2 + 4b_R^2 + 4b_I^2$, si lo reemplazo en la expresión (1) obtengo:

$$1 \geq |\,\boldsymbol{r}\,|^2$$

Por lo que todo estado puede escribirse en una esfera de radio 1 (considerando el borde y el interior de la misma).

Veamos ahora los autovalores de ρ, tengo

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b_R^2 + 4b_I^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm |\,\boldsymbol{r}\,|\right)$$

deducimos entonces que para cuando $|\,\boldsymbol{r}\,| = 1$, y se obtiene que $\lambda_{\pm} = 0, 1$. Además, obtengo que

$$r_x = 2b_R = \langle \sigma_x \rangle \qquad r_y = -2b_I = \langle \sigma_y \rangle \qquad r_z = a - c = \langle \sigma_z \rangle$$

1.5. Generalizar I.4 a un sistema de dos qubits.

Para un sistema de dos qubits, voy a tener todas las permutaciones de $\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu$, defino a $D_{\mu\nu} = \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu$, tal que

$$Tr\left[D_{\alpha\beta}, D_{\mu\nu}\right] = 4\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}$$

Por lo que ahora mi matriz densidad va a estar dada por

$$\rho = \frac{1}{2} r_{\mu\nu} D_{\mu\nu}$$

con $\langle D_{\mu\nu} \rangle = r_{\mu\nu}$.

1.6. Determinar todos los valores posibles de x para los cuales

$$\rho = x\,|\Phi\rangle\,\langle\Phi| + (1-x)\,I_d/d$$

con $|\Phi\rangle$ un estado normalizado e I_d la identidad de $d \times d$ ($d = TrI_d$ es la dimensión del espacio de estados), es un operador densidad. Interpretar este estado.

Tengo $\rho = x\,|\Phi\rangle\,\langle\Phi| + (1-x)\,I_d/d$, veamos los extremos

- Si $x = 1$ entonces $\rho = |\Phi\rangle\,\langle\Phi|$, tengo un estado puro
- Si $x = 0$ entonces $\rho = I_d/d$, un estado máximamente mezclado.

Estos valores de x me dan las cotas, es decir $1 \leq x \leq 1$.

2. Estados de sistemas compuestos. Entrelazamiento.

2.1. Para un sistema de dos qubits, escribir explícitamente la matriz que representa a $\rho_{AB} = |\Phi_{AB}\rangle\,\langle\Phi_{AB}|$ en la base computacional $\{|00\rangle\,, |01\rangle\,, |10\rangle\,, |11\rangle\}$ para:

$$a)\ |\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}} \qquad b)\ |\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2}$$

Verificar en todos los casos que los autovalores de ρ son $(1, 0, 0, 0)$.

a)

En la base de 2-qubits:

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\rho_{AB} = |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego los autovalores

$$|\,\rho_{AB} - \lambda I\,| = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_{1,2,3} = 0 \qquad\qquad \lambda_4 = 1$$

b)

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego los autovalores

$$|\,\rho_{AB} - \lambda I\,| = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_{1,2,3} = 0 \qquad\qquad \lambda_4 = 1$$

2.2. Hallar la matriz densidad reducida $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB}$ en todos los casos anteriores, y a partir de ella evaluar la entropía de entrelazamiento del estado.

Usando 2.3

a)

$$\rho_A = Tr_B\left(|\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|\right) = \sum_k \sigma_k^2 |k_A\rangle\langle k_A| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando la matriz reducida es como la identidad ahí ya se que ese estado es **maximamente entrelazado**.

$$E(A,B) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1$$

b)

$$\rho_A = Tr_B\left(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|\right) = \sum_k \sigma_k^2 |k_A\rangle\langle k_A| = \frac{1}{4}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\left(\langle 0| + \langle 1|\right) = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right) = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$S(A) = -1\log_2 1 = 0$$

Porque es cero

2.3. Hallar la descomposición de Schmidt de los estados anteriores.

Teníamos la descomposición de Schmidt

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij}|ij\rangle \overset{\text{descomposición en valores unitarios } C=UDV^\dagger}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=1}^{n_S} \sigma_k |k_A\rangle|k_B\rangle$$

Puro (quiere decir que es un proyector) $\neq$ Producto queda un estado producto entonces no es entrelazado ($n_s = 1$)

Si $n_s \geq 2$ es entrelazado. Por eso es útil la descomposición de Schmidt.

a)

Veamos si a

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + 0|01\rangle + 0|10\rangle$$

$$C = \left(\begin{array}{cc} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$Rg(C) = 2 = n_s$

Lo que me dieron ya era la descomposición de Schmidt, porque C ya es diagonal.

b)

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2} = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right) + |1\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$Rg(C) = 1 = n_s$$

entonces el estado es mezcla. Defino $|k_A\rangle = |0\rangle + |1\rangle$ y $|k_B\rangle = |0\rangle - |1\rangle$

2.4. Para $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, hallar la descomposición de Schmidt del estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = \alpha\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \beta\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

y a partir de ella indicar a) cuándo el estado será separable b) cuándo será entrelazado c) en qué caso el entrelazamiento será máximo.

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Caso máximamente entrelazado $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ entonces $|\psi\rangle = |\psi_{00}\rangle$ y si $\alpha = 0$ u $\beta = 1$ entonces $|\psi\rangle = |\psi_{01}\rangle$

Ahora qué pasa si $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle = |+\rangle|+\rangle$ entonces es mezcla (porque es producto) -> es evidente si hago la descomposición de schmidt

Tenemos a los estados $|+\rangle = \left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ y $|-\rangle = \left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$, voy a escribir a los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en términos de estos estados

$$|+\rangle + |-\rangle = \frac{2|0\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |0\rangle$$

$$|+\rangle - |-\rangle = \frac{2|1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |1\rangle$$

Ahora reescribo $|\Psi_{AB}\rangle$

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\left[|++\rangle + \cancel{|+-\rangle} + \cancel{|-+\rangle} + |--\rangle + |++\rangle - \cancel{|+-\rangle} - \cancel{|-+\rangle} + |--\rangle\right]$$

$$+\frac{\beta}{2\sqrt{2}}\left[|++\rangle - \cancel{|+-\rangle} + \cancel{|-+\rangle} - |--\rangle + |++\rangle + \cancel{|+-\rangle} - \cancel{|-+\rangle} - |--\rangle\right]$$

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{\alpha}{\cancel{2}\sqrt{2}}\left[\cancel{2}|++\rangle + \cancel{2}|--\rangle\right] + \frac{\beta}{\cancel{2}\sqrt{2}}\left[\cancel{2}|++\rangle - \cancel{2}|--\rangle\right]$$

$$|\Psi_{AB}\rangle = |++\rangle\frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}} + |--\rangle\frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}}$$

Ya obtuve la descomposición de Schmidt.

a) Si $\alpha = \pm\beta$ se anula uno de los 2 términos y $n_s = 1$, por lo que tengo un estado separable.

b) Si $\alpha \neq \pm\beta$ el estado es entrelazado

c) Si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ entonces tengo un estado maximamente entrelazado y viceversa también, ya que $E(A,B) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1$.

2.5. a) Indicar en qué se diferencian el estado de Bell

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

y el estado descripto por el operador densidad

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right)$$

b) Indicar si es posible distinguirlos mediante

i) el valor medio de un observable local $O_A \otimes I_B$

ii) el valor medio de un observable $O = O_A \otimes O_B$

a)

Escribamos el operador densidad del estado de Bell

$$\rho'_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \frac{1}{2}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)\left(\langle 01| + \langle 10|\right) = \frac{1}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right)$$

Vemos que en el operador densidad del estado de Bell tengo términos cruzados, mientras que en el operador densidad ρ_{AB} no.

b) i)

Dado que $\langle O_A \otimes I_B\rangle = Tr\left(\rho_A O_A\right)$ quiero calcular los operadores reducidos de ambos estados, ya que si son distintos voy a poder distinguirlas mediante el operador O_A

$$\rho_A = Tr_B\rho_{AB} = \langle 0_B|\rho_{AB}|0_B\rangle + \langle 1_B|\rho_{AB}|1_B\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

$$\rho'_A = Tr_B\rho'_{AB} = \langle 0_B|\rho'_{AB}|0_B\rangle + \langle 1_B|\rho'_{AB}|1_B\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

Como los operados son iguales con el operador O_A no puedo distinguir entre ambos estados.

b) ii)

ii) Si es posible, pero no siempre, qué tienen que cumplir O_A y O_B para que el val medio me de una cosa con el Psi y otra con el Rho , tiene que ser un observable que enganche los términos cruzados. recordar que $O_{A/B}$ son los sigma_x y z, qué combinación de estos me distingue de un estado del otro. Puedo meterlo en matemática y probar todos los valores medios

$$\langle\psi_{AB}|\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B|\psi_{AB}\rangle = Tr\rho_{AB}\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B$$

Base de 2 qubit: $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho'_{AB} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\rho'_{AB} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Defino las matrices densidad:

In [56]:
```
rhoab=Matrix([[0,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,0]])
rhoab
```

Out[56]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [57]:
```
rhoabp=Matrix([[0,0,0,0],[0,1,1,0],[0,1,1,0],[0,0,0,0]]
rhoabp
```

Out[57]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculo los valores medios del operador $\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B$

```
In [78]: W1=rhoab*np.kron(sigmax(),sigmax())
         W1
```

Out[78]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
In [74]: W1.trace()
```

Out[74]: 0

```
In [79]: W2=rhoabp*np.kron(sigmax(),sigmax())
         W2
```

Out[79]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
In [80]: W2.trace()
```

Out[80]: 2.0

Como me dan distintos para un estado del otro quiere decir que los puedo distinguir