Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica VII (Curso 2020)

I. Hallar las energías y autoestados exactos del Hamiltoniano

$$H=\sum_{i=1}^{n}[bc_i^\dagger c_i - v(c_i^\dagger c_{i+l}+c_{i+l}^\dagger c_i)]$$

en los casos fermiónico y bosónico, para el caso cíclico $n+1\equiv 1$ y a) $l=1$ b) $l=2$. Hallar también la energía fundamental si el número de partículas es $N=n/2$ (con n par) e interpretar H (Sugerencia: aplicar la transformada de Fourier discreta).

II. Consideremos el Hamiltoniano fermiónico

$$H=\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{p=1}^{\Omega}(c_{p+}^\dagger c_{p+}-c_{p-}^\dagger c_{p-})-\frac{1}{2}V\sum_{p\neq q}(c_{p+}^\dagger c_{q+}^\dagger c_{q-}c_{p-}+c_{p-}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+}c_{p+})-G\sum_{p\neq q}c_{p+}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+}c_{p-}$$

donde $V>0$, $G>0$ y $p,q=1\ldots,\Omega$. Plantear las ecuaciones de Hartree-Fock para el caso de $N=\Omega$ fermiones, hallando la solución de energía mínima para $G>0$, $V>0$. Identificar el umbral para ruptura de simetría (cual?) en la aproximación. Hallar también la energía mínima en esta aproximación, y las energías de partícula independiente. Discutir también la solución exacta.

III. Consideremos el Hamiltoniano de un sistema de n espines 1/2 en una cadena con interacción de primeros vecinos tipo XY y en un campo magnético transverso $\propto B$:

$$H=\sum_i[B\sigma_{iz}-J_x\sigma_{ix}\sigma_{i+1,x}-J_y\sigma_{iy}\sigma_{i+1,y}]$$

donde $i=1,\ldots n$ es un índice de sitio y $\sigma_{i\mu}$ matrices de Pauli, con $n+1=1$ (condición cíclica). Hallar el estado separable de mínima energía en el caso $J_x>0$, $|J_y|<J_x$, e identificar el umbral de J_x para ruptura de simetría (cual?) de la aproximación. Comparar con el resultado exacto para el caso particular $n=2$.

IV. Sea

$$H=\varepsilon\sum_p(c_{p+}^\dagger c_{p+}+c_{p-}^\dagger c_{p-})-G\sum_{p,q}c_{p+}^\dagger c_{p-}^\dagger c_{q-}c_{q+}$$

donde $G>0$ y $p,q=1\ldots,\Omega$.

a) Plantear las ecuaciones de BCS para el presente sistema y hallar la solución de energía mínima para el caso $G>0$ y $N=\Omega$. Identificar el umbral de G para ruptura de simetría en la aproximación (umbral de solución superconductora), y determinar, en función de G, el gap Δ, el potencial químico μ, la energía del estado fundamental en la aproximación BCS y las energías de cuasipartícula. Determinar también el estado fundamental en esta aproximación y la fluctuación $\langle N^2\rangle-\langle N\rangle^2$ del número de partículas.

b) Hallar los niveles de energía exactos del sistema y comparar con los resultados anteriores.