# Introducción a la Arquitectura de Computadoras Cuánticas

## Práctica 0: Repaso de Matemática C (Curso 2025)

*Verificar en el caso de ser posible las cuentas con Mathematica, Jupyter notebook o algún software similar.*

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ x+2y+z & = & 1 \\ x+3y+\alpha z & = & \beta \end{array}\right.$, con $x, y, z$ incógnitas,

   (a) Determinar si $\exists$ $\alpha$ y $\beta$ tales que el sistema es i) compatible determinado, ii) compatible indeterminado y iii) incompatible, y hallar el conjunto solución en los casos compatibles. Interpretar geométricamente el conjunto solución.

   (b) Hallar el determinante de la matriz de coeficientes (de $3\times 3$). ¿Para qué valores de $\alpha$ es esta matriz singular? ¿Cual es el volumen generado por sus columnas?

   (c) Determinar el rango, la nulidad y el espacio nulo de la matriz anterior según el valor de $\alpha$, y explicar su significado. ¿Para qué valores de $\alpha$ y $\beta$ pertenece $(1,1,\beta)^T$ a su espacio columna?

2. (a) Explicar qué significa que una matriz $A$ de $n \times n$ sea diagonalizable. Si $A$ es diagonalizable y no singular, ¿Es $3A^{-1}$ también diagonalizable? Justificar.

   (b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$,

   i) Indicar a partir de propiedades evidentes si es diagonalizable y si posee autovalores obvios.
   ii) Hallar sus autovalores y autoespacios. En caso de que exista, obtener una matriz ortogonal $S$ y una matriz diagonal $D$ tales que $S^{-1} = S^T$ y $S^T AS = D$.
   iii) Expresar $A^{10}$ en términos de $S$ y $D$, e indicar sus autovalores y autoespacios. Evaluar también $A^{10}\boldsymbol{v}$ para $\boldsymbol{v} = (1,2,1)^T$.

3. (a) Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación que rota todo vector respecto un ángulo $\pi/2$ es sentido antihorario. Determinar:
   i) Su representación matricial en la base canónica y la expresión de $R(\boldsymbol{v})$ para un vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   ii) Su imagen y su núcleo. ¿ Tiene $R$ inversa? Justificar.

4. Si $z = (1-i)/2$. Determinar:

   (a) La parte real e imaginaria de $1/z^*$, donde $z^*$ es el conjugado de $z$.

   (b) La representación polar y la parte real e imaginaria de $z^{10}$.

   (c) La raíces cuadradas de $z$.

   (d) La parte real e imaginaria de $e^{2\pi z}$.