

# Teoría de la Información Cuántica

## Práctica 3 - Año 2020

BEAUCAMP, Jean Yves

### 1. Compuertas Lógicas Cuánticas

1. Sabemos que podemos escribir el operador densidad de un qubit como una matriz  $\rho \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  dada por  $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ . Por lo tanto, buscamos una expresión de los operadores de rotación en la representación de  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Sabemos que  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  son una base del álgebra de generadores de  $su(2)$ . Por lo tanto,  $e^{-i\sigma_k}$ , para  $k = x, y, z$ , será una base del grupo de matrices unitarias de determinante 1, es decir, si  $M \in SU(2)$ , entonces  $M = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2}$  para algún  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $\hat{\mathbf{n}}$  vector unitario. Para pasar de  $SU(2)$  a  $U(2)$  solo deberemos multiplicar  $M$  por una fase compleja arbitraria, ya que

$$\det(e^{i\alpha} M) = e^{i2\alpha} \det\{M\} = e^{i2\alpha}.$$

Por lo tanto, toda transformación unitaria de un qubit (matrices unitarias de  $2 \times 2$ ) podrá ser escrita como

$$U = e^{i\alpha} R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2}.$$

2. Para el caso general, como  $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{1}$  (ya que  $\sigma_k^2 = \mathbb{1}$ ), y por consiguiente  $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^{2n} = \mathbb{1}$  y  $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^{2n+1} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , las matrices de rotación de qubits  $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$  podrán ser expresadas como

$$\begin{aligned} R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta/2)^{2k}}{(2k)!} \mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{1} \cosh\left(\frac{i\theta}{2}\right) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sinh\left(\frac{-i\theta}{2}\right) \\ &= \mathbb{1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$iR_x(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i^2\sigma_x = \sigma_x = X,$$

$$iR_y(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i^2\sigma_y = \sigma_y = Y,$$

y

$$iR_z(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i^2\sigma_z = \sigma_z = Z.$$

Para el caso de la compuerta Hadamard, si  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ , entonces

$$iR_{\hat{\mathbf{n}}}(\pi) = i\left(\cancel{\mathbb{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - i\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = H.$$

Finalmente, como  $\sigma_k^\dagger = \sigma_k$ , y  $H^\dagger = H$ , entonces analizándolo en términos geométricos,  $XZX = XZX^\dagger = R_x(\pi)ZR_x(-\pi) = -Z$ , pudiendo ser interpretado como una rotación en  $\pi$  sobre el eje  $x$ , invirtiendo la orientación de un vector inicial en la dirección  $z$  a  $-z$ . Bajo la misma justificación geométrica,  $XYX = XYX^\dagger = R_x(\pi)YR_x(-\pi) = -Y$ . Con un razonamiento análogo, como podemos ver en la fig. 1,  $HXH = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\pi)XR_{\hat{\mathbf{n}}}(\pi) = Z$ . Como además  $H$  es autoadjunto, entonces también se cumple  $HZH = X$  (gráficamente evidente).

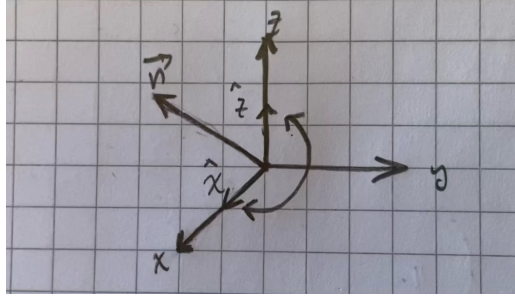


Figura 1: Rotación en  $\pi$  alrededor del eje  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$  de un vector unitario  $\hat{\mathbf{x}}$  a  $\hat{\mathbf{z}}$ .

3. Buscamos un tiempo  $t$  y un Hamiltoniano  $H$  de dos qubits tal que el operador de evolución unitaria  $U(t)$  cumpla

$$U(t) = \exp\left\{\frac{-iHt}{\hbar}\right\} \equiv R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) \otimes R_{\hat{\mathbf{m}}}(\phi).$$

Es fácil ver que  $e^{\mathbb{1} \otimes A} = \mathbb{1} \otimes e^A$ :

$$e^{\mathbb{1} \otimes A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{1} \otimes A)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{1} \otimes A^n}{n!} = \mathbb{1} \otimes \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) = \mathbb{1} \otimes e^A.$$

De forma análoga se puede demostrar que  $e^{A \otimes \mathbb{1}} = e^A \otimes \mathbb{1}$ . Por lo tanto, el problema se reduce a obtener  $e^M = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$  y  $e^N = R_{\hat{\mathbf{m}}}(\phi)$ , y expresarlo en la forma de un operador de evolución temporal. Por lo estudiado en II.1, sabemos que  $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$ . Utilizando la definición del operador de Spin  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ , entonces:

$$R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = e^{-i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{S}}{\hbar}} = e^{\frac{-iH_{\theta\hat{\mathbf{n}}}}{\hbar}},$$

con  $H_{\theta\hat{\mathbf{n}}} = \theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , que corresponde al hamiltoniano de Spin para un electrón inmerso en un campo magnético  $\mathbf{B} = \theta\hat{\mathbf{n}}$ . El tiempo, en este caso, corresponderá a  $t = 1$ . Para  $R_{\hat{\mathbf{m}}}(\phi)$  el resultado es equivalente, obteniendo  $H_{\phi\hat{\mathbf{m}}} = \phi\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ . Por lo tanto,

$$H = H_{\theta\hat{\mathbf{n}}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\phi\hat{\mathbf{m}}} = \frac{\hbar}{2}\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \frac{\hbar}{2}\phi\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad t = 1.$$

Si se desea realizar la operación en un tiempo  $t = t_0$ , basta solo con escalar los campos magnéticos  $\mathbf{B}_A = \theta\hat{\mathbf{n}} \rightarrow \frac{\theta}{t_0}\hat{\mathbf{n}}$  y  $\mathbf{B}_B = \phi\hat{\mathbf{m}} \rightarrow \frac{\phi}{t_0}\hat{\mathbf{m}}$ .

4. Resulta útil primero realizar un cambio de base para obtener un operador de interacción diagonal. Por lo demostrado en I.2, sabemos que  $HZH = X$ . Entonces,

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \boxed{X} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \boxed{H} \text{---} \boxed{Z} \text{---} \boxed{H} \text{---} \end{array}.$$

Entonces, el problema de ahora se reduce a obtener un hamiltoniano compatible con un operador de interacción diagonal

$$U_{CZ} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Por su carácter diagonal, es intuitivo construir  $H$  como

$$H = \alpha\sigma_z \otimes \mathbb{1} + \beta\mathbb{1} \otimes \sigma_z + \gamma\sigma_z \otimes \sigma_z + \nu\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}.$$

Podemos despreciar el término en  $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$  al representar únicamente una fase global. Además, para que sea simétrico,  $\alpha = \beta$ , y  $\gamma = \alpha\xi$ . Luego,

$$H = \alpha(\sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_z + \xi \sigma_z \otimes \sigma_z),$$

obteniendo en cada estado

$$\begin{aligned} H|00\rangle &= \alpha(2 + \xi)|00\rangle, & H|10\rangle &= \alpha(-1 + 1 - \xi)|10\rangle = -\alpha\xi|10\rangle, \\ H|01\rangle &= \alpha(1 - 1 - \xi)|01\rangle = -\alpha\xi|01\rangle, & H|11\rangle &= (-1 - 1 + \xi(-1)^2)|11\rangle = -\alpha(2 - \xi)|11\rangle. \end{aligned}$$

Para que el resultado resulte idéntico en  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$  y  $|10\rangle$  (compatible con (1)), vemos que  $\xi = -1$ , por lo que entonces el hamiltoniano se reduce a

$$H = \alpha(\sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_z - \sigma_z \otimes \sigma_z) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U_{CZ} = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} &= \exp \left\{ -i\omega t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & & & \\ & e^{-i\omega t} & & \\ & & e^{-i\omega t} & \\ & & & e^{3i\omega t} \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & e^{4i\omega t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde se ha definido  $\omega = \alpha/\hbar$ . Buscar que el último elemento de la diagonal sea  $-1$  (para obtener (1)) nos impone una condición sobre  $t$  y  $\omega$  como

$$4\omega t = \pi + 2n\pi \implies t = \frac{(1 + 2n)}{4\omega} \pi.$$

El factor exponencial remanente resulta una fase global, por lo que no es relevante en la medición final del sistema.

La compuerta  $U_{CNOT}$  podrá ser entonces realizada por

$$U_{CX} = (\mathbb{1} \otimes H_{ad})U_Z(\mathbb{1} \otimes H_{ad}),$$

donde  $H_{ad}$  es el operador de la compuerta Hadamard, con hamiltoniano

$$H_{Had} = \mathbb{1} \otimes \frac{\hbar\pi}{2\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z).$$

## 2. Estados de dos qubits y traspuesta parcial.

1. Podemos describir de forma general un estado de dos qubits por medio de su matriz densidad, expresada como

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left[ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}_B + \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right]. \quad (2)$$

a) Como

$$\text{Tr}\{(\sigma_i \otimes \sigma_j)(\sigma_{i'} \otimes \sigma_{j'})\} = \text{Tr}_A(\sigma_i \sigma_{i'}) \text{Tr}_B(\sigma_j \sigma_{j'}) = 2\delta_{ii'} 2\delta_{jj'} = 4\delta_{ii'} \delta_{jj'},$$

entonces es trivial ver que

$$\langle \sigma_A \rangle = \text{Tr}(\rho_{AB} \sigma \otimes \mathbb{1}) = \mathbf{r}_A,$$

$$\langle \sigma_B \rangle = \text{Tr}(\rho_{AB} \mathbb{1} \otimes \sigma) = \mathbf{r}_B,$$

y

$$\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \rangle = \text{Tr}(\rho_{AB} \sigma_i \otimes \sigma_j) = J_{ij}.$$

b) La matriz densidad del sistema puede ser escrita de manera más compacta como

$$\rho = \sum_{\mu\nu}^4 J_{\mu\nu} \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu.$$

No necesariamente la matriz  $J_{\mu\nu}$  del sistema resulta diagonal, por lo que no está garantizado que pueda ser diagonalizada. Sin embargo, como si admite una descomposición en valores singulares, los ejes locales de los subsistemas  $A$  y  $B$  si pueden ser rotados individualmente (recordamos que toda matriz unitaria, en particular las matrices  $V$  y  $W$  de cambio de base en la SVD, pueden ser expresadas como rotaciones generales como se ha demostrado en el ejercicio I.1) tal que el sistema resultante si adquiere una forma

$$\rho'_{AB} = \sum_{\nu=1}^{n_s} \lambda_\nu \sigma'_\nu \otimes \sigma''_\nu.$$

c) Las matrices densidad reducidas  $\rho_A$  y  $\rho_B$  estarán determinadas por los elementos de matriz

$$\langle 0|\sigma_x|0\rangle = \langle 1|\sigma_x|1\rangle = \langle 0|\sigma_y|0\rangle = \langle 1|\sigma_y|1\rangle = 0, \quad \langle 0|\sigma_z|0\rangle = 1, \quad \langle 1|\sigma_z|1\rangle = -1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \rho_B &= \text{Tr}_A \rho_{AB} \\ &= \frac{1}{4} \left( 2\mathbb{1}_B + r_z^A (\langle 0|\sigma_z^A|0\rangle + \langle 1|\sigma_z^A|1\rangle) \mathbb{1}_B + 2\sigma_B \cdot \mathbf{r}_B \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 (\langle 0|\sigma_z^A|0\rangle + \langle 1|\sigma_z^A|1\rangle) \sum_{j=1}^3 J_{3j} \sigma_j^B \right) \\ &= \frac{1}{4} (2\mathbb{1}_B + 2\sigma_B \cdot \mathbf{r}_B) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_B + \sigma_B \cdot \mathbf{r}_B). \end{aligned}$$

Por un procedimiento análogo podemos encontrar la matriz densidad reducida  $\rho_A$ , obteniendo

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_A + \sigma_A \cdot \mathbf{r}_A).$$

d) La matriz traspuesta parcial respecto a  $B$  de  $\rho_{AB}$  estará determinada por

$$\sigma_x^t = \sigma_x, \quad \sigma_y^t = -\sigma_y, \quad \sigma_z^t = \sigma_z.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{t_B} &= \frac{1}{4} \left[ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}^t + \mathbf{r}_A \cdot \sigma \otimes \mathbb{1}^t + \mathbb{1} \otimes \sigma^t \cdot \mathbf{r}_B + \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j^t \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbf{r}_A \cdot \sigma \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma \cdot (r_x^B, -r_y^B, r_z^B) + \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j^t \right]. \end{aligned}$$

e) Utilizando el Mathematica y las expresiones para  $\mathbf{r}_A$ ,  $\mathbf{r}_B$  y  $J_{ij}$  encontradas en II.1.a, podemos encontrar la forma (2) de los siguientes estados puros:

(I)  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ .

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathbf{r}_A = \text{Tr}(\rho_{AB}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1}) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}_B = \text{Tr}(\rho_{AB}\mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = (0, 0, 0),$$

y

$$J_{ij} = \text{Tr}(\rho_{AB}\sigma_i \otimes \sigma_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(II)  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ .

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathbf{r}_A = \text{Tr}(\rho_{AB}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1}) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}_B = \text{Tr}(\rho_{AB}\mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = (0, 0, 0),$$

y

$$J_{ij} = \text{Tr}(\rho_{AB}\sigma_i \otimes \sigma_j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Para  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ , consideraremos el estado de un sistema definido por la matriz densidad

$$\rho = x |\Psi\rangle\langle\Psi| + \frac{1-x}{4} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Es trivial ver que  $\text{Tr} \rho = 1$ , y que  $\rho^\dagger = \rho$ . La condición que resta verificar es la semi-positividad de  $\rho$ . Evaluando en Mathematica los autovalores, obtenemos

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1-x}{4} \geq 0 \implies x \leq 1,$$

y

$$\lambda_4 = \frac{1+3x}{4} \geq 0 \implies x \geq -\frac{1}{3},$$

$$\therefore x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

b) Para que se trate de un estado puro,  $\rho^2 = \rho$ . Intuitivamente, es razonable suponer que solo para  $x = 1 \implies \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  este requerimiento se cumplirá. Esto puede ser verificado evaluando la condición de igualdad en Mathematica.

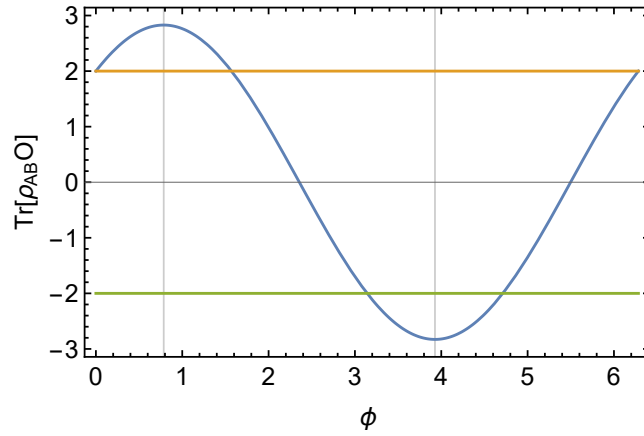


Figura 2: Valor medio del observable CHSH  $O$ .

c) Sea

$$O = \sigma_x \otimes \sigma_{x'} + \sigma_z \otimes \sigma_{z'} + \sigma_x \otimes \sigma_{z'} - \sigma_z \otimes \sigma_{x'}$$

el observable CHSH, donde los ejes  $x'$  y  $z'$  se encuentran rotados mediante una rotación  $R_y(\phi)$ , es decir,

$$\sigma_{x'} = R_y(\phi) \sigma_x R_y^\dagger(\phi), \quad \sigma_{z'} = R_y(\phi) \sigma_z R_y^\dagger(\phi).$$

Luego, evaluando la traza en Mathematica,

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \text{Tr}(\rho O) = -x \cos \phi - x \cos \phi - x \sin \phi - x \sin \phi \\ &= -2x(\cos \phi + \sin \phi) \\ &= -2x\sqrt{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \in [-2\sqrt{2}x, 2\sqrt{2}x]. \end{aligned}$$

Clásicamente,

$$O = \underbrace{\sigma_x}_{\pm 1} \otimes \underbrace{(\sigma_{x'} + \sigma_{z'})}_{\pm 2} + \underbrace{\sigma_z}_{\pm 1} \otimes \underbrace{(\sigma_{z'} - \sigma_{x'})}_{0} = \pm 2.$$

Por lo tanto, para  $2\sqrt{2}x > 2 \implies x > 1/\sqrt{2}$ , el valor medio del observable CHSH viola las cotas establecidas clásicamente (fig. 2).

d) Para un sistema de dos qubits, sabemos que

$$\rho_{AB}^{t_B} \geq 0 \iff \rho_{AB} \text{ es separable.}$$

Por lo tanto, para que el estado  $\rho$  sea entrelazado, los autovalores de su matriz traspuesta parcial deberán ser negativos. En particular para un sistema de dos qubits, donde la matriz densidad se encuentra descrita por

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} &\implies \rho_{AB}^{t_B} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}^t & \begin{pmatrix} \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{23} & \rho_{24} \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{41} & \rho_{42} \end{pmatrix}^t & \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{13} & \rho_{23} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{14} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{41} & \rho_{33} & \rho_{43} \\ \rho_{32} & \rho_{42} & \rho_{34} & \rho_{44} \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el caso particular que estamos estudiando,

$$\rho_{AB}^{t_B} = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-x}{4} + \frac{x}{2} & 0 \\ -\frac{x}{2} & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}.$$

Esta nueva matriz tendrá ahora autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1-3x}{4} < 0 \implies x > \frac{1}{3},$$

y

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1+x}{4} < 0 \implies x < -1.$$

El segundo caso no corresponde a un estado físico del sistema, por lo que nos reducimos a considerar solo  $\lambda_1$ . Luego, considerando también que  $x \leq 1$ , entonces para que el sistema presente entrelazamiento,  $x \in (\frac{1}{3}, 1]$ .

- e) Para  $x \in (\frac{1}{3}, 1]$ , donde el sistema presentará entrelazamiento, el único autovalor negativo de la matriz  $\rho_{AB}^{t_B}$  será  $\lambda_1 = (1-3x)/4$ , como fue demostrado en el ejercicio anterior. Por lo tanto,  $N = -\lambda_1(\rho_{AB}^{t_B}) = (3x-1)/4$ . Para  $x \leq 1/3$  no tendremos autovalores negativos de  $\rho_{AB}^{t_B}$ , por lo que  $N = 0$ . En general,

$$N(\rho_{AB}) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{3x-1}{4}, & \text{si } x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Para un sistema de dos qubits, sabemos que la concurrencia puede ser calculada como

$$C(x) = \max\{2\lambda_{\max}(R) - \text{Tr } R, 0\},$$

donde  $R$  es la matriz

$$R = \left( \rho_{AB}^{1/2} (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB}^{1/2} \right)^{1/2} = \rho_{AB}.$$

Finalmente, el entrelazamiento de formación para un sistema de dos qubits estará dado por:

$$E(\rho_{AB}) = \sum_{i=0,1} p_i \log_2 p_i, \quad p_i = \frac{1 + (-1)^i \sqrt{1 - C^2}}{2}.$$

Las tres magnitudes físicas enunciadas se encuentran representadas gráficamente para este sistema en la figura 3.

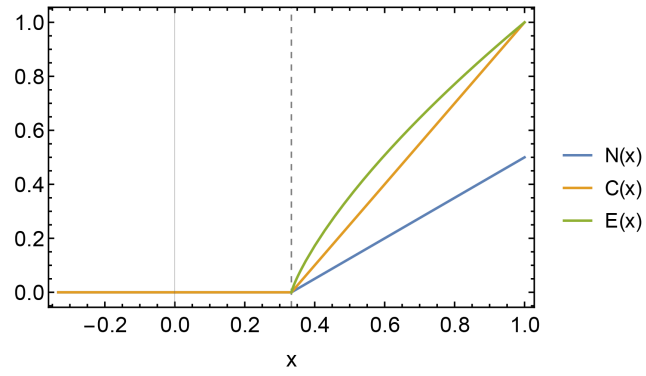


Figura 3: Negatividad, concurrencia y entrelazamiento de formación para un sistema de dos qubits en el estado  $\rho_{AB}$ .