Práctica 4

1) Dado un estado inicial de los s.s. bipartito $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$, y un op. evolución $U_{AB} = e^{-iH_{AB}t}$ derivar:

$$\rho_A' = Tr_B\left[U_{AB}\,\rho_{AB}\,U_{AB}^\dagger\right] = \sum_\alpha E_\alpha \rho_A E_\alpha^\dagger$$

Dando forma a E_α. Probar también $\sum_\alpha E_\alpha E_\alpha^\dagger = 1_A$

//

Antes, recordemos que la evolución temporal tiene como consecuencia $\rho \to U\rho U^\dagger$ donde U es el op. evolución temporal. Es decir si el sistema está inicialmente en el estado $|\psi_i\rangle$ con prob. p_i, cuando el sist. evolucione estará en el estado $U|\psi_i\rangle$ con prob. p_i

$$\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \xrightarrow{U} \sum_i p_i U|\psi_i\rangle\langle\psi_i|U^\dagger$$
$$= U\rho U^\dagger$$

Derivemos ahora la expresión

$$\rho_A \xrightarrow{U} \rho_A' = Tr_B\left[U_{AB}\,\rho_{AB}\,U_{AB}^\dagger\right]$$

Escribiendo a ρ_B en una BON de $\mathcal{H}_B$ $\{|l\rangle\}_l$

$$\rho_B = \sum_l p_l |\psi_l\rangle\langle\psi_l| \qquad U_{AB} = \sum_{\substack{l,n \\ l',n'}} u^{nl}_{n'l'} |\varphi_n \psi_l\rangle\langle\varphi_{n'}\psi_{l'}|$$

$$\rho_A = \sum_n q_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

$$\rho_{A'} = \mathrm{Tr}_B \Big[U_{AB} \sum_{n,l} p_l q_n |\alpha_n \varphi_l\rangle\langle \alpha_n \varphi_l| U_{AB}^\dagger \Big]$$

$$= \mathrm{Tr}_B \Big[\sum_{\substack{n,l \\ n',l'}} \mathcal{U}^{nl}_{n'l'} p_{l'} q_{n'} |\alpha_n \varphi_l\rangle\langle \alpha_{n'} \varphi_{l'}| U_{AB}^\dagger \Big]$$

$$= \mathrm{Tr}_B \Big[\sum_{\substack{n,l \\ n',l' \\ n'',l''}} \mathcal{U}^{nl}_{n'l'} p_{l'} q_{n'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n'l'}_{n''l''} |\alpha_n \varphi_l\rangle\langle \alpha_{n''} \varphi_{l''}| \Big]$$

$$U_{AB}^\dagger = \sum_{\substack{n',l' \\ n'',l''}} (\mathcal{U}^\dagger)^{n'l'}_{n''l''} |\alpha_{n'} \varphi_{l'}\rangle\langle \alpha_{n''} \varphi_{l''}|$$

$$= \sum_{l'''} \sum_{\substack{n,l \\ n',l' \\ n'',l''}} \mathcal{U}^{nl}_{n'l'} p_{l'} q_{n'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n'l'}_{n''l''} |\alpha_n\rangle\langle \alpha_{n''}| \delta_{l'''l} \delta_{l''l'''}$$

$$= \sum_{\substack{n,n',n'' \\ l,l'}} \mathcal{U}^{nl}_{n'l'} p_{l'} q_{n'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n'l'}_{n''l} |\alpha_n\rangle\langle \alpha_{n''}|$$

Definiendo $\quad K_{ll'} := \langle \varphi_l|_B U_{AB} |\varphi_{l'}\rangle_B \sqrt{p_{l'}}$

Not $\quad = \sum_{n,n'} \mathcal{U}^{nl}_{n'l'} \sqrt{p_{l'}} |\alpha_n\rangle\langle \alpha_{n'}|$

$$K_{ll'} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_A)$$

A estos, se los denomina op. de Kraus

$$(K_{\ell\ell'})^\dagger = \sum_{n,n'} \mathcal{U}^{*\,n'\,\ell}_{n\,\ell'} \sqrt{p_{\ell'}}\, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_{n'}|$$

$$= \sum_{n\,n'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n\,\ell'}_{n'\,\ell} \sqrt{p_{\ell'}}\, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_{n'}|$$

$$\rho_A' = \sum_{\substack{n,n',n''\\ \ell,\ell'}} \mathcal{U}^{n\,\ell}_{n'\,\ell'} \sqrt{p_{\ell'}}\, q_{n'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n'\,\ell'}_{n''\,\ell} \sqrt{p_{\ell'}}\, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_{n''}|$$

Por otro lado

$$\sum_{\ell,\ell'} K_{\ell\ell'}\rho_A (K_{\ell\ell'})^\dagger = \qquad \rho_A = \sum_{\tilde n} q_{\tilde n} |\varphi_{\tilde n}\rangle\langle\varphi_{\tilde n}|$$

$$= \sum_{\substack{\ell,\ell'\\ n,n'\\ n'',n'''\\ \tilde n}} \mathcal{U}^{n\,\ell}_{n'\,\ell'} \sqrt{p_{\ell'}}\, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_{n'}|\varphi_{\tilde n}\rangle q_{\tilde n} \langle\varphi_{\tilde n}|\varphi_{n''}\rangle\langle\varphi_{n'''}| \, (\mathcal{U}^\dagger)^{n''\,\ell'}_{n'''\,\ell} \sqrt{p_{\ell'}}$$

$$= \sum_{\substack{n,n',n'''\\ \ell,\ell'}} \mathcal{U}^{n\,\ell}_{n'\,\ell'}\, p_{\ell'}\, q_{n'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n'\,\ell'}_{n'''\,\ell} = \rho_A'$$

Por otro lado

$$\sum_{\ell,\ell'} K_{\ell\ell'}(K_{\ell\ell'})^\dagger = \sum_{\substack{n,n'\\ n'',n'''\\ \ell,\ell'}} \mathcal{U}^{n\,\ell}_{n'\,\ell'}\, p_{\ell'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n''\,\ell'}_{n'''\,\ell}\, \delta_{n'n''}$$

$$= \sum_{\ell,\ell'} p_{\ell'} \sum_{\substack{n,n'\\ n'''}} \mathcal{U}^{n\,\ell}_{n'\,\ell'} (\mathcal{U}^\dagger)^{n'\,\ell'}_{n'''\,\ell}\, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_{n'''}|$$

Por otro lado

$$\mathbb{1} = UU^{\dagger} = \sum_{\substack{n'l' \\ n,l \\ n'',l''}} u^{nl}_{n'l'} (u^{\dagger})^{n'l'}_{n''l''} |\varphi_n \psi_l \rangle\langle \varphi_{n''} \psi_{l''}|$$

$$\Rightarrow \sum_{n',l'} u^{nl}_{n'l'} (u^{\dagger})^{n'l'}_{n''l''} = \delta_{nn''} \delta_{ll''}$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_A = \langle \psi_l |_B \, UU^{\dagger} \, | \psi_{l''} \rangle_B$$

$$= \sum_{\substack{n',n,n'' \\ l'}} u^{nl}_{n'l'} (u^{\dagger})^{n'l'}_{n''l''} |\varphi_n \rangle\langle \varphi_{n''}|$$

Otra manera de verificarlo es usando la notación:

$$\sum_{ll'} K_{ll'} (K_{ll'})^{\dagger} = \sum_{ll'} \langle \psi_l |_B U_{AB} | \psi_{l'} \rangle_B \, p_{l'} \langle \psi_{l'} |_B U_{AB}^{\dagger} | \psi_l \rangle_B$$

$$= \sum_{l'} p_{l'} \langle \psi_{l'} |_B U_{AB}^{\dagger} \underbrace{\left(\sum_l | \psi_l \rangle_B \langle \psi_l |_B \right)}_{\mathbb{1}} U_{AB} | \psi_{l'} \rangle_B$$

$$= \underbrace{\sum_{l'} p_{l'}}_{1} \mathbb{1}_A$$

$$= \mathbb{1}_A$$

2] a) Mostrar que para el caso de la evolución por U de CNOT $U_A = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ de la ... $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |\psi_b\rangle\langle\psi_b|$ se obtiene

$$\rho_A' = (1-p)\rho_A + p Z \rho_A Z$$

//

$$\rho_{AB} \to \rho_{AB}' = U_{AB}\, \rho_{AB}\, U_{AB}^\dagger$$

$$= \left(|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes X\right)\left(\rho_A \otimes |\psi_b\rangle\langle\psi_b|\right)\left(|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes X\right)$$

$$= |0\rangle\langle 0|\rho_A|0\rangle\langle 0| \otimes |\psi_b\rangle\langle\psi_b|$$
$$+ |0\rangle\langle 0|\rho_A|1\rangle\langle 1| \otimes |\psi_b\rangle\langle\psi_b| X$$
$$+ |1\rangle\langle 1|\rho_A|0\rangle\langle 0| \otimes X|\psi_b\rangle\langle\psi_b|$$
$$+ |1\rangle\langle 1|\rho_A|1\rangle\langle 1| \otimes X|\psi_b\rangle\langle\psi_b| X$$

Tomando $|\psi_b\rangle = \underline{\alpha|+\rangle} + \beta\underline{|-\rangle}$ Autoestados de X

$$\Rightarrow X|\psi_b\rangle = \alpha|+\rangle - \beta|-\rangle$$

$$\Rightarrow \rho_A' = Tr_b\, \rho_{AB}' = \langle 0|\rho_A|0\rangle |0\rangle\langle 0| \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$$
$$+ \langle 0|\rho_A|1\rangle |0\rangle\langle 1| \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)$$
$$+ \langle 1|\rho_A|0\rangle |1\rangle\langle 0| \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)$$
$$+ \langle 1|\rho_A|1\rangle |1\rangle\langle 1| \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$$

Trabajando en rep. Matricial

$$Z\rho_A Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{00} & \rho_{10}\\ \rho_{01} & \rho_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_{00} & -\rho_{10}\\ -\rho_{01} & \rho_{11}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho_{A}' = |\alpha|^2 \rho_A + |\beta|^2 Z\rho_A Z$$

Escribiendo el estado final como

$$\rho_A' = (1-p)\,\rho_A + p\, Z\rho_A Z$$

tenemos identificar a $|\beta|^2 = 1-p$ y $p = |\alpha|^2$, condición de normalización de probabilidades, que coincide con la de la normalización de $|\psi_b\rangle$. Los op. de Kraus asociados a esta evolución serán

$$E_0 = \sqrt{1-p}\;\mathbb{1}_A = |\alpha|\,\mathbb{1}_A$$

$$E_1 = \sqrt{p}\,Z = |\beta| Z$$

Vemos ahora la rep. matricial de ρ_A'

$$\rho_A' = \begin{pmatrix}\rho^A_{00} & (1-2p)\rho^A_{01}\\ (1-2p)\rho^A_{10} & \rho^A_{11}\end{pmatrix}$$

Así, interpretamos la evolución como la [illegible] de elementos no diagonales, notando, por ejemplo, que para $|\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = |0\rangle$ ($\therefore p = \frac{1}{2}$) el sistema A no evolucionará, pues $\rho_A' = \rho_A$. Así mismo para $|\psi_b\rangle = |+\rangle$ ($\therefore p = 0$)

b) En el caso de que el estado sea el producto $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, la evolución de ρ_A está dada por los op. de Kraus.

Si $\rho_B = \sum_{l} p_l |\psi_l\rangle\langle\psi_l|$

$$\Rightarrow K_{ll'} = \langle\psi_l|_B\, U_{AB}\, |\psi_{l'}\rangle_B \sqrt{p_{l'}}$$

$$= |0\rangle\langle 0|\, \langle\psi_l|\psi_{l'}\rangle \sqrt{p_{l'}} + |1\rangle\langle 1|\, \langle\psi_l| X |\psi_{l'}\rangle \sqrt{p_{l'}}$$

Suponiendo un sistema de dos qubits, y usando la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ para B

$$K_{\pm l'} = \left(|0\rangle\langle 0|_A \pm |1\rangle\langle 1|_A\right) \langle\pm|\psi_{l'}\rangle \sqrt{p_{l'}}$$

Si $\rho_B = \frac{Id}{2}$ en la base computacional

$$\Rightarrow \rho_B = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle -|$$

$$\Rightarrow K_{\pm l'} = \left(|0\rangle\langle 0|_A \pm |1\rangle\langle 1|_A\right) \delta_{\pm l'} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3] Sean los op. de Kraus

$$E_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}\,|1\rangle\langle 1|$$

$$E_2 = \sqrt{p}\,|0\rangle\langle 1| \qquad p \in [0,1]$$

a) $$\sum_{i=1,2} E_i^+ E_i = E_1^+ E_1 + E_2^+ E_2$$

$$= \left(|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}\,|1\rangle\langle 1|\right)\left(|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}\,|1\rangle\langle 1|\right)$$

$$+\ p\,|1\rangle\langle 0|0\rangle\langle 1|$$

$$= |0\rangle\langle 0| + (1 \cancel{-p})|1\rangle\langle 1| + \cancel{p\,|1\rangle\langle 1|}$$

$$= id$$

Por otro lado

$$\sum_{i=1,2} E_i E_i^+ = E_1 E_1^+ + E_2 E_2^+$$

$$= |0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1| + p\,|0\rangle\langle 0|$$

$$= (1+p)|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$$

$$= id \iff p = 0.$$

b). Para dar una expresión de $\rho_A' = \sum_{i=1,2} E_i \rho_A E_i^+$ en una b.d. de un qubit, usamos la expresión general de ρ_A en forma de mat. de Pauli, dada en la práctica 1.

$$\rho_A = \frac{1}{2}\left(id + \vec{r}\cdot\vec{\sigma} \right)$$

$$E_1 \rho_A E_1^\dagger = \frac{1}{2}\left(E_1 E_1^\dagger + r_{x_i} E_1 \sigma_{x_i} E_1^\dagger\right)$$

Usando la not. matricial $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}$

y metiendo todo en el Mathematica

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1-p}\,(r_1 - i r_2) \\ \sqrt{1-p}\,(r_1 + i r_2) & (1-p)(1-r_3) \end{pmatrix}$$

Análogamente con $i=2$, y sumando, obtenemos

$$\rho_A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (1-r_3)p & (r_1 - i r_2)\sqrt{1-p} \\ (r_1 + i r_2)\sqrt{1-p} & (1-r_3)(1-p) \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ Consideremos un átomo de dos niveles con estados $|0\rangle$, $|1\rangle$ con energía respectiva 0 y ε. Este interactúa con un campo de estado $|0\rangle$ y $|1\rangle = a_\omega^\dagger |0\rangle$ con $\hbar\omega = \varepsilon$.

Suponemos una evolución unitaria del sistema total por $\rho_{AC} = \rho_{\text{Átomo}} \otimes \rho_{\text{Campo}}$ dada

$$U_{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suponiendo que el campo se encuentra en el estado inicial $|0\rangle\langle 0|$, queremos hallar los op. de Kraus que dan la evol. de ρ_A

$$\rho_B = |0\rangle\langle 0|$$

$$U_{AC} = |00\rangle\langle 00| + \cos\theta\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right) + \sin\theta\left(|01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01|\right) + |11\rangle\langle 11|$$

$$K_{00} = \langle 0|_c \, U_{AB} |0\rangle_c$$
$$= |0\rangle\langle 0| + \cos\theta \, |1\rangle\langle 1| = E_0$$

$$K_{10} = \langle 1|_c \, U_{AB} |0\rangle_c$$
$$= \operatorname{sen}\theta \, |0\rangle\langle 1| = E_1$$

Con ello, obtenemos ρ_A' como

$$\rho_A' = E_0 \rho_A E_0^\dagger + E_1 \rho_A E_1^\dagger$$
$$= \begin{pmatrix} c_{00} + c_{11}\operatorname{sen}^2\theta & c_{01}\cos\theta \\ c_{10}\cos\theta & c_{11}\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}$$

En el caso $\rho_A = \underbrace{p_0}_{c_{00}} |0\rangle\langle 0| + \underbrace{p_1}_{c_{11}} |1\rangle\langle 1|$, usando lo anterior:

$$\rho_A' = \begin{pmatrix} p_0 + (1-p_0)\operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & (1-p_0)\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Para hallar H_{AC} y un tiempo t tq

$$e^{-iH_{AC}t} = U_{AC}$$

proponemos un hamiltoniano de la forma:

$$H = \underbrace{\varepsilon\left(|10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|\right)}_{\text{t. cinética}} + \underbrace{\frac{g}{2}\left(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|\right)}_{\text{interacción}}$$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g}{2} & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{-iHt} = \text{[illegible]}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{gt}{2} \qquad t\varepsilon = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Parte 2

1) Sea $|B\rangle = \sum_{j/f(j)=1} \frac{1}{\sqrt{M}} |j\rangle$ donde $M = \#\{j / f(j)=1\}$

y $|A\rangle = \sum_{j/f(j)=0} \frac{1}{\sqrt{N-M}} |j\rangle$ el otro ortogonal, con $N = 2^n$ número de estados. Consideremos el estado inicial

$$|\phi\rangle = H^{\otimes n} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j |j\rangle = \sqrt{\frac{M}{N}} |B\rangle + \sqrt{\frac{N-M}{N}} |A\rangle$$

Sea O el oráculo (cuántico) definido como $O|j\rangle = (-1)^{f(j)}|j\rangle$ y la iteración de Grover como $(2|\phi\rangle\langle\phi| - I)\,O$. Luego, esto corresponde a la rotación antihoraria de ángulo 2θ con $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{M}{N}}$ en el plano generado por $|B\rangle$ y $|A\rangle$

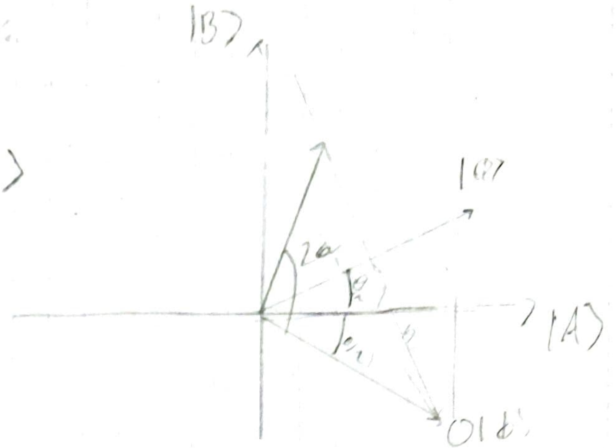
$$\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{M}{N}} = \sqrt{\frac{N-M}{N}}$$

$$\Rightarrow |\phi\rangle = \operatorname{sen}\theta\, |B\rangle + \cos\theta\, |A\rangle$$

$$O|\phi\rangle = -\operatorname{sen}\theta\, |B\rangle + \cos\theta\, |A\rangle$$

$$= \operatorname{sen}(-\theta)\, |B\rangle + \cos(-\theta)\, |A\rangle$$

De este modo podemos ver la acción del oráculo como una reflexión en el eje $|A\rangle$



Por otro lado, si $|\phi^{\perp}\rangle$ denota un estado ortogonal a $|\phi\rangle$

$$(2|\phi\rangle\langle\phi| - id)|\phi\rangle = |\phi\rangle \qquad (2|\phi\rangle\langle\phi| - id)|\phi^{\perp}\rangle = -|\phi^{\perp}\rangle$$

Se nota que $(2|\phi\rangle\langle\phi| - id)$ denota una reflexión respecto a $|\phi\rangle$. Por lo tanto, el op. de Grover, rota el vect. en 2θ en este plano.

Luego de n iteraciones, el estado resultante será

$$G^n|\phi\rangle = \operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)|A\rangle + \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)|B\rangle$$

Para que el estado resultante sea $|B\rangle$, debemos iterar

$$n / G^n|\phi\rangle = B \iff \theta\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \iff n = \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2}$$

Bajo la aprox $\theta << 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow n \sim \sqrt{\frac{N}{M}}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = O(\sqrt{N}).$$

$\angle$ Si $H = \hbar\omega\left(|B\rangle\langle B| + |\phi\rangle\langle\phi|\right)$ $\exists$ t [illegible]

independiente de $|B\rangle$ tq $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\phi\rangle = |B\rangle$

Luego el [illegible] se basa [illegible] la [illegible] de la [illegible]

[illegible] H

Trabajando en el subespacio de estados

$\{|A\rangle, |B\rangle\}$, $|\phi\rangle = \alpha|B\rangle + \beta|A\rangle$

$$\Rightarrow |\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = \hbar\omega\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

M:

$$= \hbar\omega\left(\mathrm{Id} + \alpha\left(\beta\sigma_x + \alpha\sigma_y\right)\right)$$

[illegible] de [illegible]

Usando las [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible] calculamos la exponencial de H

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{-i\omega t}\left[\cos(\omega\alpha t)\,\mathrm{Id} - i\sin(\omega\alpha t)\left(\beta\sigma_x + \alpha\sigma_y\right)\right]$$

Ignorando la fase global $e^{-i\omega t}$, tenemos:

$$U|\phi\rangle = \cos(\omega\alpha t)|\phi\rangle - i\sin(\omega\alpha t)|B\rangle$$

Luego: $U|\phi\rangle = |B\rangle \iff \omega\alpha t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{2\omega\alpha}}$