Teoría de la Información Cuántica

Práctica 1 - Año 2020

BEAUCAMP, Jean Yves

1. Operador Densidad

1. Sea ρ un operador densidad. Queremos demostrar que

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \iff \rho^2 = \rho.$$

$\Longrightarrow$) Sea $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ (estado puro). Entonces

$$\rho^2 = |\psi\rangle \langle\psi|\psi\rangle \langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho.$$

$\Longleftarrow$) Sea un operador densidad ρ que cumpla $\rho^2 = \rho$, con $\rho = \sum_k s_k |k\rangle\langle k|$ en la base de Schmidt. Luego,

$$\rho^2 = \sum_{k,k'} s_k s_{k'} |k\rangle \left\langle k\middle|k'\right\rangle \left\langle k'\right| = \sum_k (s_k)^2 |k\rangle\langle k| \overset{\rho^2=\rho}{=} \sum_k s_k |k\rangle\langle k| \,.$$

Luego,

$$(s_k)^2 = s_k \iff s_k(s_k - 1) = 0 \implies s_k = 0, 1.$$

Pero por la condición de normalización $\mathrm{Tr}\{\rho\} = 1$, entonces

$$s_{\tilde{k}} = 1, \quad s_k = 0 \; \forall k \neq \tilde{k},$$

$$\therefore \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \,.$$

2. Sean ρ_i, $i = 1, \ldots, m$ operadores densidad, y definiremos

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i,$$

donde $\mathbf{p}_i \geq 0$, cumpliendo la condición de normalización $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Para ver que ρ es también un operador densidad, verificaremos que cumple las tres condiciones necesarias:

- ρ es un operador hermítico, ya que

$$\rho^\dagger = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i^\dagger = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i$$

- ρ se encuentra apropiadamente normalizado:

$$\mathrm{Tr}\{\rho\} = \sum_{i=1}^{m} p_i \,\mathrm{Tr}\{\rho_i\} = \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

- ρ es un operador positivo:

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{k=1}^{n_i} \left\langle \psi \middle| \phi_k^{(i)} \right\rangle \left\langle \phi_k^{(i)} \middle| \psi \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{k=1}^{n_i} \left| \left\langle \psi \middle| \phi_k^{(i)} \right\rangle \right|^2 \geq 0.$$

3. Sea $\rho = p\,|0\rangle\langle 0| + (1-p)\,|1\rangle\langle 1|$, con $p \in (1/2, 1)$. Buscamos un cambio de base tal que el operador densidad se encuentre definido como

$$\rho' = q\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q)\,|\beta\rangle\langle\beta|\,,$$

con $q \in [1-p, p]$ y $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ estados normalizados.

Queremos que en la nueva base $B = \{|\alpha\rangle\,, |\beta\rangle\}$ los autovalores del operador densidad diagonal ρ' resultes ordenados $q \leq 1-q$. Es trivial ver que, para los valores permitidos de p, $1-p \leq p$. Luego, por la definición de la relación de Majorización $\mathbf{q} \prec \mathbf{p}$, siendo $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ y $\mathbf{q} = (1-q, q)$ vectores de autovalores de ρ y ρ' en orden descendiente,

$$p \geq 1-q \iff q \geq 1-p.$$

Además,

$$1-q \geq q \geq 1-p \implies 1-q \geq 1-p \implies p \geq q.$$

Por lo tanto, $q \in [1-p, q]$. Además, los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ estarán relacionados por una matriz doble estocástica D:

$$\rho' = D\rho \implies \begin{pmatrix} 1-q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}.$$

4. Queremos expresar la matriz densidad de un sistema de dos qubits como

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \sigma),$$

es decir, como una combinación lineal de las matrices $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, siendo $\sigma_0 = \mathbb{1}$ y σ_k las matrices de Pauli. Sabemos que el conjunto σ_μ de las matrices de Pauli más la identidad son una base completa de las matrices de $2x2$, al ser linealmente independientes. Luego, como el operador densidad de un estado general de 1 qubit podrá ser identificado con una matriz de $2x2$ dado por

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\alpha\,|0\rangle\langle 0| + \beta\,|1\rangle\langle 1| + \xi\,|0\rangle\langle 1| + \zeta\,|1\rangle\langle 0|\right) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}}\begin{pmatrix} \alpha & \xi \\ \zeta & \beta \end{pmatrix},$$

con $\mathcal{N}$ una constante de normalización tal que siempre se cumpla $\operatorname{Tr}\rho = 1$. Luego, podremos escribir de forma generalizada

$$\rho = R_\mu \sigma_\mu = \frac{1}{2} r_\mu \sigma_\mu.$$

La condición de normalización eliminará uno de los grados de libertad del sistema, por lo que solo tendremos 3 parámetros libres que definan al estado. Eligiendo $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ con $|\mathbf{r}| \leq 1$, entonces utilizamos r_0 como la constante de normalización para obtener la traza unitaria:

$$\operatorname{Tr}\rho = \frac{1}{2}\left(r_0 \operatorname{Tr}\mathbb{1} + r_1 \cancel{\operatorname{Tr}\sigma_1} + r_2 \cancel{\operatorname{Tr}\sigma_2} + r_3 \cancel{\operatorname{Tr}\sigma_3}\right) = \frac{r_0}{2}2 = \underbrace{r_0 = 1}_{\text{Norm}}.$$

Luego,

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \sigma).$$

Para evaluar los autovalores de ρ, podemos rotar el sistema de referencia tal que $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = r\hat{\mathbf{z}}'$. Luego,

$$\rho' = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \sigma) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + r\sigma_z') = \begin{pmatrix} \frac{1+r}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-r}{2} \end{pmatrix},$$

por lo que $\lambda_\pm = (1 \pm r)/2$, y

$$\rho = \lambda_+ \left|0'\right\rangle\!\left\langle 0'\right| + \lambda_- \left|1'\right\rangle\!\left\langle 1'\right|$$

(base de Schmidth). Luego, para $r = 1$ el sistema corresponderá a un estado puro al anularse uno de los autovalores, siendo entonces

$$\rho = \lambda_+ \left|0'\right\rangle\!\left\langle 0'\right| + \cancel{\lambda_-} \left|1'\right\rangle\!\left\langle 1'\right| = \left|0'\right\rangle\!\left\langle 0'\right|.$$

Finalmente, como tenemos las identidades de trazas $\mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_n u) = 2\delta_{\mu\nu}$, entonces

$$\langle \sigma_k \rangle = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_k) = \frac{1}{2}\left(\cancel{\mathrm{Tr}(\sigma_0\sigma_k)} + r_j \,\mathrm{Tr}(\sigma_j\sigma_k)\right) = \frac{1}{2} r_j 2\delta_{jk} = r_k,$$

por lo que en términos vectoriales $\langle \sigma \rangle = \mathbf{r}$.

5. Para un sistema de dos qubits, es natural pensar que base de representación en términos de las matrices de Pauli contendrá a los elementos $\mathbb{1} = \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$, $\sigma_k \otimes \mathbb{1}$ y $\mathbb{1} \otimes \sigma_k$. Pero adicionalmente deberemos considerar también los términos $\sigma_j \otimes \sigma_k$. Por lo tanto, una base completa estará conformada por

$$B = \{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\} \otimes \{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}.$$

Un estado genérico para dos qubits podrá ser expresado como

$$\rho_{AB} = \alpha \mathbb{1} + \mathbf{r}_A \cdot \sigma \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma \cdot \mathbf{r}_B + \sum_{i,j=1}^{3} r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j.$$

Como $\mathrm{Tr}\{\rho_{AB}\} = \alpha \,\mathrm{Tr}\{\mathbb{1}\} = 4\alpha = 1$ por la condición de normalización (al ser $\mathrm{Tr}\{\sigma_k\} = 0$), entonces $\alpha = 1/4$. Podemos sacar a α como factor común de todo el operador densidad, resultando en

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \mathbf{r}_A \cdot \sigma \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma \cdot \mathbf{r}_B + \sum_{i,j=1}^{3} r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j\right).$$

Ahora, como

$$\mathrm{Tr}\big\{(\sigma_i \otimes \sigma_j)(\sigma_{i'} \otimes \sigma_{j'})\big\} = \mathrm{Tr}_A(\sigma_i\sigma_{i'})\,\mathrm{Tr}_B(\sigma_j\sigma_{j'}) = 2\delta_{ii'}\ 2\delta_{jj'} = 4\delta_{ii'}\delta_{jj'},$$

entonces

$$\langle \sigma_A \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\sigma \otimes \mathbb{1}) = \mathbf{r}_A,$$
$$\langle \sigma_B \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\mathbb{1} \otimes \sigma) = \mathbf{r}_B,$$

y

$$\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\sigma_i \otimes \sigma_j) = r_{ij}.$$

6. Sea un operador densidad $\rho = x\,|\Phi\rangle\langle\Phi| + (1-x)\mathbb{1}_d/d$, siendo $B = \{|\Phi\rangle\} \cup \{|\phi_k\rangle : k = 2, \dots, d\}$ una base ortonormal del sistema de dimensión d. Luego, los valores posibles de x estarán restringidos por la condición de normalización $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$:

$$\mathrm{Tr}\,\rho = x \underbrace{\mathrm{Tr}(|\Phi\rangle\langle\Phi|)}_{=1} + \frac{1-x}{d} \underbrace{\mathrm{Tr}\{\mathbb{1}_d\}}_{=d} = x + \frac{1-x}{d} d = x + 1 - x = 1.$$

Por lo tanto, ρ no presenta restricciones de x por la condición de normalización, exceptuando $x \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la hermiticidad del operador ($\rho^\dagger = \rho$).

La condición de positividad de ρ puede ser expresada dado un vector $|\psi\rangle$ arbitrario del espacio como

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = x|\langle\psi|\Phi\rangle|^2 + \frac{1-x}{d}\langle\psi|\psi\rangle = x\left(|\langle\psi|\Phi\rangle|^2 - \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{d} \geq 0.$$

Eligiendo $|\psi\rangle = |\Phi\rangle$ (todavía no me convence, me parece que falta una hipótesis adicional, ya que se rompe eligiendo $|\psi\rangle = \alpha\,|\Phi\rangle + \beta_k\,|k\rangle$, para $\alpha < 1$, $|k\rangle \neq |\Phi\rangle\, \forall k$ y $\langle\psi|\psi\rangle = 1$), entonces

$$x\left(|\langle\Phi|\Phi\rangle|^2 - \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{d} = x\left(1 - \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{d} \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{d\left(1-\frac{1}{d}\right)} = \frac{1}{1-d}.$$

Para $x = 1$, se tratará de un estado puro ($\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi|$). Por el contrario, para $x = 0$, el sistema se encontrará en un estado máximamente entrelazado ($\rho = \mathbb{1}_d/d$).

2. Estados de sistemas compuestos. Entrelazamiento.

1. Sea un sistema de dos qubits en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, con matrices densidad definidas por $\rho = |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|$.

   a) Dado $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$,

   $$\implies \rho = \frac{1}{2}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right)\left(\langle 00| \pm \langle 11|\right) = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| \pm |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right).$$

   En términos matriciales, identificando

   $$|\Phi_{AB}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

   entonces

   $$\rho \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Los autovalores correspondientes estarán dados en ambos casos por $\lambda \in (1, 0, 0, 0)$.

   b) Para

   $$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle}{2} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   por lo que

   $$\rho \equiv \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   con autovalores $\lambda \in (1, 0, 0, 0)$.

2. Las matrices de densidad reducidas estarán dadas por $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB}$.

   a) Teniendo que

   $$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| \pm |00\rangle\langle 11| \pm |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right),$$

   entonces

   $$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB} = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right).$$

   Luego, la entropía de entrelazamiento será

   $$S(\rho_A) = -\mathrm{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\left(\frac{1}{2^2}\log_2(\frac{1}{2^2}) + \frac{1}{2^2}\log_2(\frac{1}{2^2})\right) = \frac{1}{2}2\log_2(2) = 1.$$

   b) En este caso,

   $$\rho_{AB} = \frac{1}{4}\left(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |1\rangle\right)\left(\langle 00| + \langle 10| - \langle 01| - \langle 1|\right).$$

   Entonces,

   $$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB} = \frac{1}{4}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Luego, como $\operatorname{rank}\rho_A = n_S = 1$, entonces se trata de un estado puro, por lo que $S(\rho_A) = 0$.

3. La descomposición de Schmidt será tal que $|\psi_{AB}\rangle = \sum_k \sigma_k^2 |k\rangle_A |k\rangle_B$, con $\sigma_k \geq 0$, obtenidos a partir de la SVD de la matriz C definida como

$$
|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B .
$$

Mediante la SVD, escribiremos a C como $C = UDV^\dagger$, con U, V matrices unitarias y D matriz diagonal de autovalores σ_k.

a) En este caso, $\left|\Phi^{\pm}_{AB}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right)$, el sistema ya se encuentra en la descomposición de Schmidt. Para cumplir con la condición adicional de $\sigma_k \geq 0$, notamos que

$$
\left|\Phi^{+}_{AB}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A|1\rangle_B = \sum_{k=0}^{1}\sigma_k |k\rangle_A |k\rangle_B ,
$$

con $\sigma_0 = \sigma_1 = 1/\sqrt{2}$, y estados en una base $|k\rangle_A \in \{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ y $|k\rangle_B \in \{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$. Para el otro caso,

$$
\left|\Phi^{-}_{AB}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle_A)(i|1\rangle_B) = \sum_{k=0}^{1}\sigma_k |k\rangle_A |k\rangle_B ,
$$

siendo nuevamente $\sigma_0 = \sigma_1 = 1/\sqrt{2}$, pero esta vez con bases $|k\rangle_A \in \{|0\rangle_A, i|1\rangle_A\}$ y $|k\rangle_B \in \{|0\rangle_B, i|1\rangle_B\}$.

b) Para $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle\right)$, podemos construir la matriz C_{ij} como

$$
C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Luego, evaluando la SVD en Mathematica, obtenemos $C = UDV^\dagger$

$$
U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Los elementos de la nueva base estarán determinados como

$$
|k\rangle_A = \sum_i U_{ik}|i\rangle_A \implies |k=0\rangle_A = -\frac{|0\rangle_A + |1\rangle_A}{\sqrt{2}}, \quad |k=1\rangle_A = \frac{-|0\rangle_A + |1\rangle_A}{\sqrt{2}}
$$

y

$$
|k\rangle_B = \sum_j V^*_{jk}|j\rangle_B \implies |k=0\rangle_B = \frac{-|0\rangle_B + |1\rangle_B}{\sqrt{2}}, \quad |k=1\rangle_B = \frac{|0\rangle_B + |1\rangle_B}{\sqrt{2}}.
$$

Por lo tanto, en la base de Schmidt

$$
|\Phi_{AB}\rangle = 1\,|k=0\rangle_A |k=0\rangle_B .
$$

Reemplazando $|k=0\rangle_A$ y $|k=0\rangle_B$, podemos verificar el cálculo recuperando el resultado inicial:

$$
\begin{aligned}
|\Phi_{AB}\rangle = |k=0\rangle_A|k=0\rangle_B &= \frac{1}{2}\left(-|0\rangle_A - |1\rangle_A\right)\left(-|0\rangle_B + |1\rangle_B\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right).
\end{aligned}
$$

4. Sea un estado $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$, con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Su descomposición de Schmidt estará determinada por $C = UDV^\dagger$, con

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Podemos determinar VyD diagonalizando el producto

$$C^\dagger C = VD^\dagger U^\dagger UDV^\dagger = VD^\dagger DV^\dagger = VD^2V^{-1}.$$

En particular en este ejercicio,

$$\begin{aligned} C^\dagger C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha^*\beta + \beta^*\alpha \\ \alpha^*\beta + \beta^*\alpha & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \Gamma \\ \Gamma & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1-\Gamma}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\Gamma}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\implies V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1+\Gamma}{2}} \end{pmatrix}$$

Así mismo, como $CC^\dagger = C^\dagger C$, entonces también $U = V$. Por lo tanto, tendremos

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1-\Gamma}{2}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{1+\Gamma}{2}},$$

y la base de Schmidt estará dada por

$$\mathcal{B}_A = \left\{ |k=1\rangle_A = -|0\rangle_A + |1\rangle_A, |k=2\rangle_A = |0\rangle_A + |1\rangle_A \right\}$$

y

$$\mathcal{B}_B = \left\{ |k=1\rangle_B = -|0\rangle_B + |1\rangle_B, |k=2\rangle_B = |0\rangle_B + |1\rangle_B \right\}.$$

a) El estado será puro cuando

$$\Gamma = \alpha^*\beta + \beta^*\alpha = 2\,\mathrm{Re}\{\alpha\beta^*\} = \pm 1.$$

b) El estado será entrelazado cuando $-1 < \Gamma < 1$.

c) El sistema presentará entrelazamiento máximo cuando

$$\begin{aligned} S(\rho_A) &= -\operatorname{Tr}\{\rho_A \log \rho_A\} \\ &= -\left[\left(\sqrt{\frac{1+\Gamma}{2}}\right)^2 \log_2\left(\left(\sqrt{\frac{1+\Gamma}{2}}\right)^2\right) + \left(\sqrt{\frac{1-\Gamma}{2}}\right)^2 \log_2\left(\left(\sqrt{\frac{1-\Gamma}{2}}\right)^2\right)\right] \\ &= -\left[\frac{1+\Gamma}{2}\log_2(1+\Gamma) + \frac{1-\Gamma}{2}\log_2(1-\Gamma) - 1\right] \end{aligned}$$

sea máximo. Es decir,

$$\frac{\partial S(\rho_A)}{\partial \Gamma} = \frac{1}{2}\left(\log_2(1-\Gamma) - \log_2(1+\Gamma)\right) = 0 \implies 1 - \Gamma = 1 + \Gamma \implies \Gamma = 0.$$

5. Sea un sistema de 2 qubits en el estado de Bell $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$, cuya matriz densidad será

$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \frac{1}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10|\right).$$

Sea un segundo sistema en el estado representado por el operador densidad

$$\tilde{\rho}_{AB} = \frac{1}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right).$$

Luego,

$$\rho_{AB} = \tilde{\rho}_{AB} + \frac{1}{2}\left(|10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10|\right).$$

Además, $\tilde{\rho}_{AB}$ no será un estado puro, ya que

$$\tilde{\rho}_{AB}^2 = \frac{1}{4}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right)\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right) = \frac{1}{4}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right) = \frac{\tilde{\rho}_{AB}}{2} \neq \tilde{\rho}_{AB}.$$

Será posible distinguir los estados mediante un observable global $\hat{O} = \hat{O}_A \otimes \hat{O}_B$, pero no así mediante un observable local $\hat{O}_A \otimes \mathbb{1}_B$, ya que

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|\right) = \mathrm{Tr}_B(\tilde{\rho}_{AB}) = \tilde{\rho}_A,$$

y

$$\left\langle \hat{O}_A \right\rangle_A = \mathrm{Tr}\left(\hat{O}_A \rho_A\right) = \mathrm{Tr}\left(\hat{O}_A \tilde{\rho}_A\right) = \left\langle \hat{O}_A \right\rangle_{\tilde{A}}.$$