Problema 5

1] Consideremos la FT discreta de un conjunto de N números $\{f_j\}_{j\in\{0,\dots,N-1\}}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \, e^{-2\pi i \frac{jn}{N}}$$

a) $$F^{-1}(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \, e^{2\pi i \frac{nj}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} f_{n'} \, e^{2\pi i \left(\frac{nj}{N} - \frac{n'n}{N}\right)}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} f_{n'} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{2\pi i (j-n') \frac{1}{N}} \right]^n}$$

Si $j \neq n'$, puedo utilizar la geométrica, si:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i (j-n') \frac{1}{N}} \right)^n = \frac{1 - e^{2\pi i \overbrace{(j-n)\frac{N}{N}}^{\in \mathbb{Z}}}}{1 - e^{2\pi i (j-n) \frac{1}{N}}} = 0$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} f_{n'} \, N \delta_{n'j} = f_j$$

b) Si se extiende el valor posible de n $F_{n+lN} = F_n$ (ie, F_j es N-periódica)

$$F_{n+lN} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{j}{N}(n+lN)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{j}{N}} \underbrace{e^{-2\pi i \overbrace{jlN}^{\in \mathbb{Z}}}}_{1}$$

$$= F_n$$

c) Si $f_{j+r} = f_j \ \forall j$ (f es r-periódica) y $r \mid N \Rightarrow F_n \neq 0 \iff n$ múltiplo de $\frac{N}{r}$ (ie, $n = m\frac{N}{r}$ $m \in \{0, \dots, r-1\}$)

Sea n / $n = n' \left(\bmod \frac{N}{r}\right) \neq 0$

ie, $n = n' + m\frac{N}{r}$ con $0 < n' < \frac{N}{r}$

$$f_j = f_{j+r} \iff \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi \frac{nj}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi \frac{n}{N}(j+r)}$$

$$\iff \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi i \frac{nj}{N}} \underbrace{\left(1 - e^{2\pi i n \frac{r}{N}}\right)}_{=0 \text{ si } n \text{ múltiplo}} = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi i \frac{nj}{N}} \underbrace{\left(1 - e^{2\pi i \frac{nr}{N}}\right)}_{\neq 0} = 0$$

$\forall \ K \not\times \frac{N}{r}$

$\Rightarrow F_n = 0$ si $n \not\times \frac{N}{r}$

2]

a) Sea $f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{xj}{N}}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{xj}{N}} e^{2\pi i \frac{nj}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{j}{N}(x-n)}$$

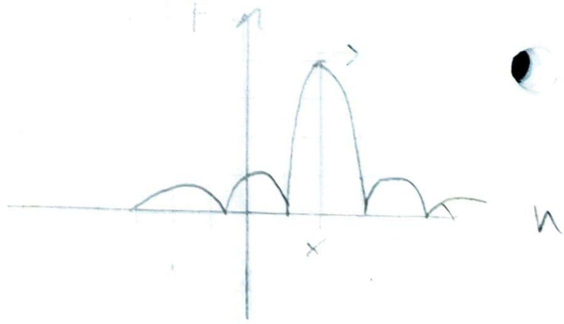
Si $x \neq n$, podemos usar la formula de una geometrica parcial

$$F_n = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{\frac{i2\pi}{N}(x-n)N}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-n)}} = \frac{1}{N} e^{\overbrace{\pi i (x-n)(1-\frac{1}{N})}^{\in \mathbb{R}}} \frac{\sin(\pi(x-n))}{\sin(\pi(x-n)\frac{1}{N})}$$

$$\Rightarrow |F_n| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(\pi(x-n))}{\sin(\frac{\pi}{N}(x-n))} \right|$$

b) Viendo a F_n como una función real y usando el mas bello de matemática, puedo ver que F_n alcanza su máximo para $n = x$

De modo, que el máximo de F_n lo alcanza en $n \in \mathbb{Z}$ más próximo a x.



3) Sea $\{|j\rangle\}_{j\in\{0,\dots,N-1\}}$ BON de V, luego,

a) los estados $|\tilde{n}\rangle = U|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i nj}{N}}|j\rangle$ forman una BON de V

✓ BVQ U es un op. unitario

$$\langle n|U^{+}U|n'\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j,j'=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(n'j'-nj)} \underbrace{\langle j|j'\rangle}_{\delta_{jj'}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}j(n'-n)} = \delta_{n'n}$$

Análogamente con UU^{+}, tenemos que U es un op. unitario

b) $|\psi\rangle = \sum_j c_j|j\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_n C_n|\tilde{n}\rangle$

con $C_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j} c_j\, e^{\frac{2\pi i jn}{N}}$

✓ Como $\{|\tilde{n}\rangle\}$ BON de V, debo poder escribir a $|\psi\rangle$ en función de esta base, luego:

$$C_n = \langle\tilde{n}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{jj'} e^{-2\pi i\frac{nj}{N}} c_{j'}\langle j|j'\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j} e^{-2\pi i\frac{nj}{N}} c_j$$

c) Sea $X, T, P \in \mathrm{Her}(V)$ definida como

$$X|j\rangle = j|j\rangle \qquad P = UXU^{+} \qquad T = e^{-2\pi i \frac{P}{N}}$$

i) $P|\tilde{n}\rangle = n|\tilde{n}\rangle$

d/

$$UXU^{+}|\tilde{n}\rangle = UXU^{+}U|n\rangle = n\,U|n\rangle = n|\tilde{n}\rangle$$

ii)

$$T|\tilde{n}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-2\pi i}{N}\right)^{n} P^{n}}{n!}|\tilde{n}\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-2\pi i}{N}\right)^{n}}{n!} n^{n}|\tilde{n}\rangle = e^{-\frac{2\pi i n}{N}}|\tilde{n}\rangle$$

iii)

$$T|j\rangle = T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{nj}{N}}|\tilde{n}\rangle\right)$$

$|j\rangle = U^{+}|\tilde{j}\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{n}{N}(1+j)}|\tilde{n}\rangle$$

$$= |j+1\rangle$$

4] La QFT puede escribirse como

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{jn}{2^n}} |j\rangle = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0_l\rangle + e^{\frac{2\pi i n}{2^l}} |1_l\rangle \right]$$

Sea $|\tilde{n}\rangle$ el resultado de aplicar la QFT donde $|j\rangle \in \{|l\rangle\}_{l \in 2^n-1}$ son estados de la base computacional de n qubits. Escribiendo a j en la representación binaria

$$j = \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l}$$

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{n}{2^n} \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l}} |j\rangle$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_n=0}^{1} \prod_{l=1}^{n} e^{2\pi i n j_l 2^{-l}} |j_1 \cdots j_n\rangle$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_n=0}^{1} \bigotimes_{l=1}^{n} e^{2\pi i n j_l 2^{-l}} |j_l\rangle$$

Armo qubit a qubit

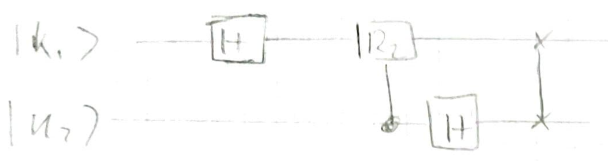
$$\rightarrow = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[\sum_{j_l=0}^{1} e^{2\pi i n j_l 2^{-l}} |j_l\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle + e^{2\pi i n 2^{-l}} |1\rangle \right]$$

Para la QFT de 2 qubits esto tiene

$$|\hat{n}\rangle = \frac{1}{2}\Big[|0\rangle + \underbrace{e^{\pi i n}}_{-1}|1\rangle\Big] \otimes \Big[|0\rangle + e^{\pi i \frac{n}{2}}|1\rangle\Big]$$

y esto se hace con el siguiente circuito



$$|k_1\rangle \to \frac{1}{2}\left(|0\rangle + e^{i\pi\frac{n}{2}}|1\rangle\right)$$

$$|k_2\rangle \to \frac{1}{2}\left(|0\rangle + e^{i\pi n}|1\rangle\right)$$

donde $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$

5] Los algoritmos cuánticos basados en QFT

a) Utilizando el esquema siguiente

$$|0\rangle|0\rangle \xrightarrow{H^{\otimes 2^t}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|j\rangle|0\rangle \xrightarrow{\hat{U}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|j\rangle|f(j)\rangle$$

$$\xrightarrow[FT^{-1}]{} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{n=0}^{2^n}|n\rangle\sum_{j=0}^{2^n} e^{-2\pi i n j 2^{-n}}|f(j)\rangle$$

donde $\hat{U}$ es la op. hace la salida cuántica que codifica la información de $f(j)$ y FT^{-1} la QFT inversa

b) En el caso de estimación de fase, $|f(j)\rangle = e^{2\pi i \frac{xj}{N}}|\phi\rangle$ con $0 \leq x < N = 2^n$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, el estado final del algoritmo será:

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{n=0}^{2^n-1}|n\rangle\sum_{j=0}^{2^n} e^{-2\pi i n j 2^{-n}}|f(j)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{n=0}^{2^n-1} |n\rangle \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{-2\pi i (n-m) j 2^{-n}} |\phi\rangle$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{n=0}^{2^n-1} |n\rangle\, 2^n \delta_{nm} |\phi\rangle$$

$$= |m\rangle |\phi\rangle$$

Si $x \notin \mathbb{Z}$, el estado también oscilará, con un máximo en medio de el [illegible] más [illegible] a x.

c) En el caso de determinación de período, con $f(x)$ r-periódica, tenemos que

$$|0\rangle|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle |f(x)\rangle$$

$$\xrightarrow{FT} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{nx}{N}} |x\rangle |f(n)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{r-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \frac{nN}{r} x} |n\rangle \right) |f(n)\rangle$$

$$\xrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{r-1} |n\tfrac{N}{r}\rangle |f(n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{\ell} |\ell\rangle |f(\ell \tfrac{r}{N})\rangle$$

Luego, por el corolario del ej. 1c ($n = \frac{mN}{r}$) sólo aparecerán en el [illegible] de calcular los que [illegible] múltiplos de $\frac{N}{r}$

6] Sea A mat. de $N \times N$ con elementos

$$A_{ij} = f(j-i) \qquad \text{con} \qquad f(j+N) = f(j) \quad \forall j$$

Luego:

$$A|\hat{n}\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle\langle j|A|\hat{n}\rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{nm}{N}} |j\rangle\langle j|A|m\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{nm}{N}} |j\rangle f(m-j)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i (m-j)\frac{n}{N}} e^{2\pi i \frac{jn}{N}} f(m-j)|j\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i l \frac{n}{N}} f(l) e^{2\pi i \frac{jn}{N}} |j\rangle$$

$$= \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{ln}{N}} f(l)}_{= F(n)} |\hat{n}\rangle$$

Siendo $F(n)$ el autovalor asociado al autovector $|\hat{n}\rangle$ de A.