Teoría de la Información Cuántica

Práctica 4 - Año 2020

BEAUCAMP, Jean Yves

1. Evolución de sistemas cuánticos abiertos

1. Dado un estado inicial producto $\rho_{AB} = \rho_a \otimes \rho_B$ de un sistema bipartito, y un operador evolución $U_{AB} = \exp\{-iH_{AB}t\}$, el estado reducido final ρ'_A estará dado por

$$\rho'_A = \mathrm{Tr}_B\, U_{AB}\rho_A \otimes \rho_B U^\dagger_{AB} = \sum_j \langle j|_B\, U_{AB}\rho_A \otimes \rho_B U^\dagger_{AB}\, |j\rangle_B\,.$$

Suponiendo un estado mezcla general para B, dado por $\rho_B = \sum_l |l\rangle\langle l|_B\, P_l$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho'_A &= \sum_j \langle j|_B\, U_{AB}\ \rho_A \otimes \rho_B\ U^\dagger_{AB}\, |j\rangle_B \\
&= \sum_{j,k} \underbrace{\langle j|_B\, U_{AB}\, |l\rangle_B \sqrt{P_l}}_{K_{jl}}\, \rho_A\, \underbrace{\sqrt{P_l}\, \langle l|_B\, U^\dagger_{AB}\, |j\rangle_B}_{K^\dagger_{jl}} \\
&= \sum_{j,k} K_{jl}\rho_A K^\dagger_{jl}.
\end{aligned}$$

Luego, los operadores de Kraus

$$K_{jl} = \langle j|_B\, U_{AB}\, |l\rangle_B \sqrt{P_l} \tag{1}$$

darán la evolución del subsistema A. Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{j,l} K^\dagger_{jl}K_{jl} = \sum_{j,l} \sqrt{P_l}\, \langle l|_B\, \rho_B U^\dagger_{AB}\, |j\rangle_B \langle j|_B\, U_{AB}\, |l\rangle_B \sqrt{P_l} &= \sum_l P_l\, \langle l|_B\, U^\dagger_{AB} U_{AB}\, |l\rangle_B \\
&= \sum_l P_l\, \langle l|l\rangle_B\, \mathbb{1}_A \\
&= \sum_l P_l \mathbb{1}_A \\
&= \mathbb{1}_A.
\end{aligned}$$

En el caso particular en que se trata de un estado inicial puro $\rho_B = |\psi\rangle\langle\psi|$, entonces los operadores de Kraus tomarán la forma explícita

$$E_\alpha = \langle \alpha|_B\, U_{AB}\, |\psi\rangle_B\,.$$

2. a) Para el caso de una evolución por un operador Control-NOT, dada por $U_{AB} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes X$, aplicada a un estado producto de dos qubits $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |\psi\rangle\langle\psi|_B$, el estado parcial final de el subsistema A será

$$\begin{aligned}
\rho'_{AB} = U_{AB}\ \rho_{AB}\ U^\dagger_{AB} = &\ |0\rangle\langle 0|\, \rho_A\, |0\rangle\langle 0| \otimes |\psi\rangle\langle\psi|_B + |0\rangle\langle 0|\, \rho_A\, |1\rangle\langle 1| \otimes X\, |\psi\rangle\langle\psi|_B \\
&+ |1\rangle\langle 1|\, \rho_A\, |0\rangle\langle 0| \otimes X\, |\psi\rangle\langle\psi|_B + |1\rangle\langle 1|\, \rho_A\, |1\rangle\langle 1| \otimes X^2\, |\psi\rangle\langle\psi|_B
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |0\rangle\langle 0|\, \rho_A\, |0\rangle\langle 0| \otimes |\psi\rangle\langle\psi|_B \\
&\quad + |0\rangle\langle 0|\, \rho_A\, |1\rangle\langle 1| \otimes X\, |\psi\rangle\langle\psi|_B \\
&\quad + |1\rangle\langle 1|\, \rho_A\, |0\rangle\langle 0| \otimes X\, |\psi\rangle\langle\psi|_B \\
&\quad + |1\rangle\langle 1|\, \rho_A\, |1\rangle\langle 1| \otimes |\psi\rangle\langle\psi|_B\,.
\end{aligned}
$$

Si $|\psi\rangle_B = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$, entonces $X\,|\psi\rangle_B = \alpha\,|+\rangle - \beta\,|-\rangle$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\rho'_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho'_{AB} &= |0\rangle\langle 0|\, \rho_A\, |0\rangle\langle 0| \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) \\
&\quad + |0\rangle\langle 0|\, \rho_A\, |1\rangle\langle 1| \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right) \\
&\quad + |1\rangle\langle 1|\, \rho_A\, |0\rangle\langle 0| \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right) \\
&\quad + |1\rangle\langle 1|\, \rho_A\, |1\rangle\langle 1| \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) \\
&= \left|\alpha^2\right| \rho_A + |\beta|^2 Z \rho_A Z,
\end{aligned}
$$

utilizando que

$$
Z\rho_A Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & \rho^A_{01} \\ \rho^A_{10} & \rho^A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & -\rho^A_{01} \\ \rho^A_{10} & -\rho^A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & -\rho^A_{01} \\ -\rho^A_{10} & \rho^A_{11} \end{pmatrix}.
$$

Escribiendo el estado final como

$$
\rho'_A = (1-p)\rho_A + pZ\rho_A Z = \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & (1-2p)\ \rho^A_{01} \\ (1-2p)\ \rho^A_{10} & \rho^A_{11} \end{pmatrix}, \tag{2}
$$

podemos identificar $p = |\beta|^2$ y $1-p = |\alpha|^2$, consistente con la condición de normalización de $|\psi\rangle_B$. Además, los operadores de Kraus asociados a la evolución no-unitaria serán

$$
E_0 = \sqrt{1-p}\mathbb{1}_A = |\alpha|\mathbb{1}_A, \quad E_1 = \sqrt{p}Z = |\beta| Z.
$$

Observando la representación matricial del estado ρ'_A exhibida en (2), interpretamos la evolución del sistema como la disminución de los elementos no-diagonales. Para el estado inicial $|\psi\rangle_B = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle$, $p = 1/2$ y el sistema presentará decoherencia completa. Así mismo, para $|\psi\rangle_B = |+\rangle$, $p = 0$ y el subsistema A no evolucionará, siendo $\rho'_A = \rho_A$. La entropía asociada a ρ_A tenderá solo a aumentar, al estar eliminando información del sistema conforme $p \to 1/2$.

b) Para un estado inicial producto general $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, con $\rho_B = \sum_l P_l\, |l\rangle\langle l|_B$, la evolución del subsistema A estará determinada por los operadores de Kraus (1):

$$
K_{jl} = \langle j|U_{AB}|l\rangle_B \sqrt{P_l} = |0\rangle\langle 0|_A\, \langle j|l\rangle_B \sqrt{P_l} + |1\rangle\langle 1|_A\, \langle j|X|l\rangle_B \sqrt{P_l}.
$$

Suponiendo un sistema de dos qubits, y utilizando la base $\{|\pm\rangle\}$ para $|j\rangle$,

$$
\begin{aligned}
K_{\pm l} = \langle \pm|U_{AB}|l\rangle_B \sqrt{P_l} &= |0\rangle\langle 0|_A\, \langle \pm|l\rangle_B \sqrt{P_l} + |1\rangle\langle 1|_A\, \langle \pm|X|l\rangle_B \sqrt{P_l} \\
&= |0\rangle\langle 0|_A\, \langle \pm|l\rangle_B \sqrt{P_l} \pm |1\rangle\langle 1|_A\, \langle \pm|l\rangle_B \sqrt{P_l} \\
&= \left(|0\rangle\langle 0|_A \pm |1\rangle\langle 1|\right) \langle \pm|l\rangle_B \sqrt{P_l}.
\end{aligned}
$$

Si $\rho_B = \mathbb{1}/2$ en la base computacional, entonces

$$
\begin{aligned}
K_{jl} = \langle j|U_{AB}|l\rangle_B \frac{1}{\sqrt{2}} &= |0\rangle\langle 0|_A\, \langle j|l\rangle_B \frac{1}{\sqrt{2}} + |1\rangle\langle 1|_A\, \langle j|X|l\rangle_B \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= |0\rangle\langle 0|_A\, \delta_{jl} \frac{1}{\sqrt{2}} + |1\rangle\langle 1|_A\, (\delta_{j0}\delta_{l1} + \delta_{j1}\delta_{l0}) \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore K_{00} = K_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, |0\rangle\langle 0|_A\,, \qquad K_{01} = K_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, |1\rangle\langle 1|_A\,.
$$

3. Sean los operadores de Kraus $E_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}\,|1\rangle\langle 1|$ y $E_2 = \sqrt{p}\,|0\rangle\langle 1|$, con $p \in [0,1]$.

a) Los operadores $\{E_1, E_2\}$ satisfacen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,2} E_i^\dagger E_i &= E_1^\dagger E_1 + E_2^\dagger E_2 \\
&= |0\rangle\langle 0|0\rangle\langle 0| + (1-p)\,|1\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1| + p\,|1\rangle\langle 0|0\rangle\langle 1| \\
&= |0\rangle\langle 0| + (1-\cancel{p})\,|1\rangle\langle 1| + \cancel{p}\,|1\rangle\langle 1| \\
&= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

para todo $p \in [0,1]$, pero no se trata de operadores unitales, ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,2} E_i E_i^\dagger &= E_1 E_1^\dagger + E_2 E_2^\dagger \\
&= |0\rangle\langle 0|0\rangle\langle 0| + (1-p)\,|1\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1| + p\,|0\rangle\langle 1|1\rangle\langle 0| \\
&= |0\rangle\langle 0| + (1-p)\,|1\rangle\langle 1| + p\,|0\rangle\langle 0| \\
&= (1+p)\,|0\rangle\langle 0| + (1-p)\,|1\rangle\langle 1|\,,
\end{aligned}$$

siendo iguales a la identidad $\mathbb{1}$ si y solo si $p = 0$.

b) Como se ha demostrado en la práctica 1, un operador densidad ρ_A general de 1 qubit puede ser representado en términos de las matrices de Pauli como

$$\rho_A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}).$$

Luego, la evolución del subsistema cuántico ρ_A dada por los operadores de Kraus E_1 y E_2 antes definidos resultará en

$$\rho_A' = E_1\rho_A E_1^\dagger + E_2\rho_A E_2^\dagger = E_1\rho_A E_1 + E_2\rho_A E_2^\dagger.$$

A continuación, evaluaremos individualmente los elementos de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
E_1\rho_A E_1 &= \frac{1}{2}\left(E_1E_1 + r_x\ E_1\sigma_x E_1 + r_y\ E_1\sigma_y E_1 + r_z\ E_1\sigma_z E_1\right) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix} \\
&\qquad + r_x \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix} \\
&\qquad + r_y \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix} \\
&\qquad + r_z \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p\end{pmatrix} \\
&\qquad + r_x \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{1-p}\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\
&\qquad + ir_y \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{1-p}\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\
&\qquad + r_z \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\sqrt{1-p}\end{pmatrix}\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+r_x \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-p} \\ \sqrt{1-p} & 0 \end{pmatrix} \\
&+ir_y \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1-p} \\ \sqrt{1-p} & 0 \end{pmatrix} \\
&+r_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1-p) \end{pmatrix} \Bigg) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & (r_x - ir_y)\sqrt{1-p} \\ (r_x + ir_y)\sqrt{1-p} & (1-r_z)(1-p) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2 \rho_A E_2 &= \frac{1}{2}\left(E_2 E_2^\dagger + r_x \; E_2 \sigma_x E_2^\dagger + r_y \; E_2 \sigma_y E_2^\dagger + r_z \; E_2 \sigma_z E_2^\dagger \right) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +r_x \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +r_y \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +r_z \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +r_x \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +ir_y \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +r_z \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + r_z \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-r_z)p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \rho'_A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & (r_x - ir_y)\sqrt{1-p} \\ (r_x + ir_y)\sqrt{1-p} & (1-r_z)(1-p) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-r_z)p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (1-r_z)p & (r_x - ir_y)\sqrt{1-p} \\ (r_x + ir_y)\sqrt{1-p} & (1-r_z)(1-p) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. Consideremos un átomo de 2 niveles, con estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de energías 0 y $\varepsilon = \hbar\omega$ respectivamente, y estados de campo $|0\rangle$ t $|1\rangle = a_\omega^\dagger |0\rangle$. Supondremos una evolución unitaria del sistema $\rho_{AC} = \rho_{\text{Átomo}} \otimes \rho_{\text{Campo}}$ dada por

$$
U_{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

en la base estándar. Supondremos que el campo se encuentra inicialmente en el estado $\rho_C = |0\rangle\langle 0|$. Luego, el estado evolucionado del sistema Átomo-Campo estará dado por

$$
\rho'_{AC} = U_{AC} \; \rho_{AC} \; U_{AC}^\dagger = U_{AC} \begin{pmatrix} \rho_{00}^A & \rho_{01}^A \\ \rho_{10}^A & \rho_{11}^A \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_{AC}^\dagger = U_{AC} \begin{pmatrix} \rho_{00}^A & 0 & \rho_{01}^A & 0 \\ 0 & 0 & 00 & \\ \rho_{10}^A & 0 & \rho_{11}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_{AC}^\dagger
$$

$$= \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & \rho^A_{01}\sin\theta & \rho^A_{01}\cos\theta & 0 \\ \rho^A_{10}\sin\theta & \rho^A_{11}\sin^2\theta & \rho^A_{11}\cos\theta\sin\theta & 0 \\ \rho^A_{10}\cos\theta & \rho^A_{11}\cos\theta\sin\theta & \rho^A_{11}\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se ha evaluado el último producto en Mathematica.
El estado parcial evolucionado del Átomo se encuentra determinado por la traza parcial de ρ'_{AC}:

$$\rho'_A = \mathrm{Tr}_B\,\rho'_{AC} = \begin{pmatrix} \rho^A_{00} + \rho^A_{11}\sin^2\theta & \rho^A_{01}\cos\theta \\ \rho^A_{10}\cos\theta & \rho^A_{11}\cos^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Escribiendo el operador de evolución como

$$\begin{aligned} U_{AC} = {} & |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \\ & + \cos\theta(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|) \\ & + \sin\theta(|0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1|), \end{aligned}$$

podemos calcular los operadores de Kraus asociados a la evolución parcial del Átomo

$$E_\alpha = \langle\alpha|_C\, U_{AC}\, |0\rangle_C = |0\rangle\langle 0|_A\, \langle\alpha|0\rangle_C + \cos\theta\, |1\rangle\langle 1|_A\, \langle\alpha|0\rangle_C + \sin\theta\, |0\rangle\langle 1|_A\, \langle\alpha|1\rangle_C$$

$$\implies \begin{cases} E_0 = |0\rangle\langle 0| + \cos\theta\,|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ E_1 = \sin\theta\,|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Luego, recuperamos la expresión (3) mediante

$$\begin{aligned} \rho'_A &= E_0\rho_A E_0^\dagger + E_1\rho_A E_1^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & \rho^A_{01} \\ \rho^A_{10} & \rho^A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & \rho^A_{01} \\ \rho^A_{10} & \rho^A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & \rho^A_{01}\cos\theta \\ \rho^A_{10} & \rho^A_{11}\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^A_{01}\sin\theta & 0 \\ \rho^A_{11}\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho^A_{00} & \rho^A_{01}\cos\theta \\ \rho^A_{10}\cos\theta & \rho^A_{11}\cos^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho^A_{11}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho^A_{00} + \rho^A_{11}\sin^2\theta & \rho^A_{01}\cos\theta \\ \rho^A_{10}\cos\theta & \rho^A_{11}\cos^2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Parar $\rho_A = p_0\,|0\rangle\langle 0| + p_1\,|1\rangle\langle 1| = p_0\,|0\rangle\langle 0| + (1-p_0)\,|1\rangle\langle 1|$, el estado evolucionado será

$$\rho'_A = \begin{pmatrix} p_0 + p_1\sin^2\theta & 0 \\ 0 & p_1\cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + (1-p_0)\sin^2\theta & 0 \\ 0 & (1-p_0)\cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

El Hamiltoniano asociado a este proceso será

$$\begin{aligned} H_{AC} &= \varepsilon(|1_A0_C\rangle\langle 1_A0_C| + |0_A1_C\rangle\langle 0_A1_C|) + \frac{g}{2}(|0_A1_C\rangle\langle 1_A0_C| + |1_A0_C\rangle\langle 0_A1_C|) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g}{2} & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Encontramos la relación entre constantes exponenciando H, observando que

$$U = e^{-iHt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\epsilon t}\cos\left(\frac{gt}{2}\right) & -ie^{-i\epsilon t}\sin\left(\frac{gt}{2}\right) & 0 \\ 0 & -ie^{-i\epsilon t}\sin\left(\frac{gt}{2}\right) & e^{-i\epsilon t}\cos\left(\frac{gt}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, las dos condiciones serán

$$\frac{gt}{2} = \theta, \quad t\epsilon = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}.$$

2. Algoritmo de Búsqueda de Grover

1. Consideremos el estado buscado $|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{f(j)=1}|j\rangle$ -donde M denota el número de estados $|j\rangle$ tal que $f(j)=1$-, y el estado ortogonal $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}}\sum_{f(j)=0}|j\rangle$. Supongamos que el sistema de n qubits, con $N=2^n$, se encuentra inicialmente en el estado

$$|\Phi\rangle = H^{\otimes n}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j |j\rangle = \sqrt{\frac{M}{N}}|B\rangle + \sqrt{\frac{N-M}{N}}|A\rangle .$$

Sea O un oráculo, definido por $O|j\rangle = (-1)^{f(j)}|j\rangle$, y el operador de Grover $G = (2|\Phi\rangle\langle\Phi| - \mathbb{1})O$. Escribiendo el estado inicial del sistema como

$$|\Phi\rangle = \sin\theta\,|B\rangle + \cos\theta\,|A\rangle ,$$

con $\sin\theta = \sqrt{M/N}$, entonces podemos identificar el accionar del oráculo O como una reflexión en el eje $|A\rangle$, ya que

$$O|\Phi\rangle = \sin\theta O|B\rangle + \cos\theta O|A\rangle = -\sin\theta O|B\rangle + \cos\theta O|A\rangle = \sin(-\theta)|B\rangle + \cos(-\theta)|A\rangle .$$

Más aún, si $|\Phi_\perp\rangle$ denota el subespacio ortogonal a $|\Phi\rangle$, entonces

$$(2|\Phi\rangle\langle\Phi| - \mathbb{1})|\Phi\rangle = |\Phi\rangle , \quad (2|\Phi\rangle\langle\Phi| - \mathbb{1})|\Phi_\perp\rangle = -|\Phi_\perp\rangle ,$$

constituyendo una reflexión respecto a $|\Phi\rangle$. Por lo tanto, el operador de Grover sobre $|\Phi\rangle$ representará una rotación en un ángulo 2θ, como podemos apreciar en el diagrama representado en la fig. 1.

Luego de k iteraciones de la aplicación de G, el estado resultante será

$$G^k|\Phi\rangle = \sin(\theta + k\ 2\theta)|B\rangle + \cos(\theta + k\ 2\theta)|A\rangle .$$

Para alcanzar el estado buscado, $G^k|\Phi\rangle = |B\rangle$, por lo que

$$\theta + 2k\theta = \theta(1+2k) = \frac{\pi}{2} \implies k = \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2}.$$

Bajo la suposición $\theta \ll 1$, $\theta \approx \sin\theta = \sqrt{\frac{M}{N}}$. Por lo tanto,

$$k \approx \sqrt{\frac{N}{M}}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{N}\right).$$

2. Si $H = \hbar\omega(|B\rangle\langle B| + |\Phi\rangle\langle\Phi|)$, es posible generar un operador de evolución unitaria del sistema tal que $U|\Phi\rangle = \exp\{-iHt/\hbar\}|\Phi\rangle = |B\rangle$, es decir, tal que obtengamos el estado buscado $|B\rangle$ en un solo paso. En la base de los estados $\{|B\rangle, |A\rangle\}$,

$$|\Phi\rangle = \alpha|B\rangle + \beta|A\rangle \implies |\Phi\rangle\langle\Phi| = \begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix},$$

por lo que entonces el Hamiltoniano enunciado podrá ser representado matricialmente como

$$\begin{aligned} H = \hbar\omega(|B\rangle\langle B| + |\Phi\rangle\langle\Phi|) &= \hbar\omega\left[\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] \\ &= \hbar\omega\begin{pmatrix}1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix} \\ &= \hbar\omega\begin{pmatrix}1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1-\alpha^2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

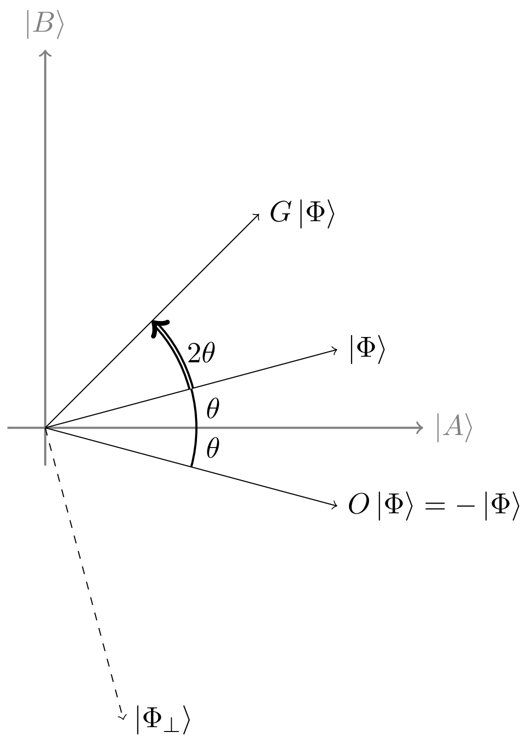

Figura 1: Representación gráfica del accionar de una iteración del operador de Grover.

$$
\begin{aligned}
&= \hbar\omega \left[\mathbb{1} + \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & -\alpha^2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \hbar\omega \left[\mathbb{1} + \alpha^2 \sigma_z + \alpha\beta\sigma_x \right]. \qquad &= \hbar\omega \mathbb{1} + \hbar\omega\alpha \left[\beta\sigma_x + \alpha\sigma_z \right].
\end{aligned}
$$

Luego, utilizando los resultados obtenidos para un operador de rotación en la práctica 3,

$$U = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = e^{-i\omega t} \left[\cos(\omega\alpha t)\mathbb{1} - i\sin(\omega\alpha t)(\beta\sigma_x + \alpha\sigma_z) \right].$$

Ahora, estudiando la evolución temporal particular del estado inicial $|\Phi\rangle$, e ignorando la fase global $e^{-i\omega t}$,

$$U|\Phi\rangle \sim \cos(\omega\alpha t)|\Phi\rangle - i\sin(\omega\alpha t)(\beta\sigma_x + \alpha\sigma_z)|\Phi\rangle.$$

Evaluando el producto final de matrices,

$$(\beta\sigma_x + \alpha\sigma_z)|\Phi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 \\ \beta\alpha - \alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |B\rangle,$$

entonces

$$U|\Phi\rangle \sim \cos(\omega\alpha t)|\Phi\rangle - i\sin(\omega\alpha t)|B\rangle.$$

Por lo tanto, para que resulte en el estado deseado $|B\rangle$,

$$\omega\alpha t = \frac{\pi}{2} \implies t = \frac{\pi}{2\omega\alpha}.$$

El problema de búsqueda se reduce entonces al problema de simular el Hamiltoniano H, siguiendo el algoritmo de Trotter:

$$U = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = \left(e^{\frac{-iHt}{\hbar k}} \right)^k \approx \left(e^{-i\omega\alpha\frac{t}{k}|\Phi\rangle\langle\Phi|} \; e^{-i\omega\alpha\frac{t}{k}|B\rangle\langle B|} \right)^k, \quad k \gg 1.$$

$$\implies k \sim \mathcal{O}(N).$$