Práctica 2

Parte 1

1] Hallar el estado reducido del estado de los primeros qubits, y calcular la entropía de entrelazamiento para la partición $(m, n-m)$ con $1 \le m \le n-1$ para

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\ldots0\rangle + |1\ldots1\rangle\right)$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(|10\ldots\rangle + |01\ldots\rangle + \ldots |0\ldots1\rangle\right)$$

Antes de calcular la mat. densidad, particionamos el espacio como $\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^m \otimes \mathcal{H}^{n-m}$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\underbrace{0\ldots}_{m}\rangle|\underbrace{0\ldots}_{n-m}\rangle + |\underbrace{1\ldots1}_{m}\rangle|\underbrace{1\ldots1}_{n-m}\rangle\right)$$

Calculamos la mat. densidad:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\Big[\,|0_m\rangle|0_{n-m}\rangle\langle 0_m|\langle 0_{n-m}| +$$

Not: $|0_m\rangle = |\underbrace{0\ldots0}_{m \text{ veces}}\rangle$

$$+ |0_m\rangle|0_{n-m}\rangle\langle 1_m|\langle 1_{n-m}| +$$

$$|1_m\rangle|1_{n-m}\rangle\langle 0_m|\langle 0_{n-m}| +$$

$$+ |1_m\rangle|1_{n-m}\rangle\langle 1_m|\langle 1_{n-m}|\Big]$$

De modo, que el estado reducido será:

$$\rho_m = Tr_{n-m}\, \rho \underset{\substack{\downarrow \\ \text{solo acopla con} \\ |0_{n-m}\rangle \text{ y } |1_{n-m}\rangle}}{=} \frac{1}{2}\left[|0_m\rangle\langle 0_m| + |1_m\rangle\langle 1_m| \right]$$

$$\Rightarrow E[\rho] = S(\rho_m) = -Tr(\rho_m \log_2 \rho_m)$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right]$$

$$= 1$$

Para $|\phi\rangle$, intentemos hacer la misma partición

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(|1_1 0_2 \dots 0_m\rangle|0_{n-m}\rangle + |0_1 1_2 \dots 0_m\rangle|0_{n-m}\rangle + \dots + |0_m\rangle|1_{m+1} \dots 0_n\rangle + \dots\right)$$ (*)

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}}\underbrace{\left(|1_1 \dots 0_m\rangle + \dots |0_1 \dots 1_m\rangle\right)}_{|\chi\rangle}|0_{n-m}\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{n-m}}|0_m\rangle\underbrace{\left(|1_{m+1} 0 \dots\rangle + \dots + |0_{m+1} \dots 1_n\rangle\right)}_{|\psi\rangle}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{m}\,|\chi_m\rangle|0_{n-m}\rangle + \sqrt{n-m}\,|0_m\rangle|\psi_{n-m}\rangle\right)$$

Donde $|\chi_m\rangle \in \mathcal{H}^m$, $|\psi_{n-m}\rangle \in \mathcal{H}^{n-m}$ vectores de norma 1. Con ello, calculo el op. reducido

---

(*) Not: $|i_1 j_2 k_3 \dots\rangle = |i\, j\, k \dots\rangle$

$$\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{m}{n}\,|x_m\rangle|0_{n-m}\rangle\langle x_m|\langle 0_{n-m}| + \frac{\sqrt{m(n-m)}}{n}\,|x_m\rangle|0_{n-m}\rangle\langle 0_m|\langle\psi_{n-m}| + \frac{\sqrt{m(n-m)}}{n}\,|0_m\rangle|\psi_{n-m}\rangle\langle x_m|\langle 0_{n-m}| + \frac{n-m}{n}\,|0_m\rangle|\psi_{n-m}\rangle\langle 0_m|\langle\psi_{n-m}|$$

Para tomar traza parcial, necesitamos una BON de $\mathcal{H}^{n-m}$. Como $\langle\psi_{n-m}|0_{n-m}\rangle = 0$, puedo extender esto a una base, y tomar traza parcial sobre esta. Con esa elección es inmediato que

$$\rho_m = \mathrm{Tr}_{n-m}\,\rho = \frac{m}{n}|x_m\rangle\langle x_m| + \frac{n-m}{n}|0_m\rangle\langle 0_m|$$

Como $\langle 0_m|x_m\rangle = 0$, es inmediato que

$$E(\rho_m) = S(\rho_m) = -\mathrm{Tr}(\rho_m \log_2 \rho_m)$$

$$= -\left[\frac{m}{n}\log_2\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{n-m}{n}\log_2\left(\frac{n-m}{n}\right)\right]$$

2) $|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |ij\rangle \qquad \langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$

$|ij\rangle = |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$

a) determinar ρ_A

$\rho = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{i,j,i',j'} c_{ij} c^*_{i'j'} |ij\rangle\langle i'j'|$

$\Rightarrow \rho_A = Tr_B\, \rho = \sum_n \sum_{i,j,i',j'} c_{ij} c^*_{i'j'} |i\rangle\langle i'| \underbrace{\langle n|j\rangle\langle j'|n\rangle}_{\delta_{jn}\delta_{j'n}}$

$= \sum_{i,i',n} c_{in} c^*_{i'n} |i\rangle\langle i'|$

b) Sup. que se realiza una medición en el s.A. B en la base $\{|j_B\rangle\}$, obteniendo j. Deter. el estado reducido de A

El op. de medida asociado a medir l en B es

$M_l = id \otimes |l\rangle\langle l|$

$\Rightarrow \rho^{(l)}_{AB} = \dfrac{M_l \rho_{AB} M_l^+}{Tr(M_l \rho_{AB} M_l^+)}$

Calculamos primero el numerador

$M_l \rho_{AB} M_l^+ = \sum_{i,j,i',j'} c_{ij} c^*_{i'j'} |i\rangle \otimes |l\rangle\underbrace{\langle l|j\rangle}_{\delta_{lj}} \langle i'| \otimes \underbrace{\langle j'|l\rangle}_{\delta_{lj'}}\langle l|$

$= \sum_{i,i'} c_{il} c^*_{i'l} |il\rangle\langle i'l|$

$\delta_{r_1 i}\,\delta_{1\ell} \qquad \delta_{i' r_1}\,\delta_{\ell 1}$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left(M_\ell \rho_{AB} M_\ell^\dagger\right) = \sum_{i,i',r_1} c_{i\ell}\, c_{i'\ell}^*\, \langle r_1 | i\ell \rangle \langle i'\ell | r_1 \rangle$$

traceando sobre $\{|ij\rangle\}_{ij}$

$$= \sum_i c_{i\ell}\, c_{i\ell}^* = \sum_i c_{i\ell}\, c_{\ell i}^\dagger$$

$$= (C^\dagger C)_{\ell\ell}$$

Con ello:

$$\rho_{AB}^{(\ell)} = \frac{\sum_{i,i'} c_{i\ell}\, c_{i'\ell}^*\, |i\ell\rangle\langle i'\ell|}{(C^\dagger C)_{\ell\ell}}$$

$$\Rightarrow \rho_A^{\ell} = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB}^{(\ell)} = \sum_{i,i'} \frac{c_{i\ell}\, c_{i'\ell}^*\, |i\rangle\langle i'|}{(C^\dagger C)_{\ell\ell}}$$

c) El estado promedio luego de la medición está dado por

$$\rho_{AB}^{(\text{avg})} = \sum_\ell P(M=\ell)\, \rho_{AB}^{(\ell)}$$

$$= \sum_\ell \underbrace{\mathrm{Tr}\left(M_\ell^\dagger M_\ell \rho_{AB}\right)}_{=\,\mathrm{Tr}\left(M_\ell \rho_{AB} M_\ell^\dagger\right)} \rho_{AB}^{(\ell)}$$

$$= \sum_\ell M_\ell\, \rho_{AB}\, M_\ell^\dagger = \sum_{i,i',\ell} c_{i\ell}\, c_{i'\ell}^*\, |i\ell\rangle\langle i'\ell|$$

calculado ant

Para el subsistema A:

$$\rho_A^{(A,g)} = \mathrm{Tr}_B \left(\sum_{i,i',l} c_{il} c^*_{i'l} |il\rangle\langle i'l| \right)$$

$$= \sum_{i,i',l} c_{il} c^*_{i'l} |i\rangle\langle i'|$$

trazeando sobre $\{|l\rangle\}$

$$= \sum_{i,i'} (CC^\dagger)_{ii'} |i\rangle\langle i'|$$

3] Determinar M_3 y el valor máximo de p tq el conjunto $\{M_1, M_2, M_3\}$ verifique una medida generalizada de un qubit útil para distinguir $|+\rangle$ y $|0\rangle$ y comparar su eficiencia con la medida proyectiva óptima

$$M_1 = \sqrt{p}\,|1\rangle\langle 1|$$

$$M_2 = \sqrt{p}\,|-\rangle\langle -| \qquad \left(|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)\right)$$

Para que un conjunto de op. se trate de una medida generalizada, estos deben satisfacer:

· $\{M_i\}$ satisfacen rel de completitud $\sum M_i^\dagger M_i = id$

$$1 = \sum M_i^\dagger M_i \Rightarrow M_3^\dagger M_3 = 1 - M_2^\dagger M_2 - M_1^\dagger M_1$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix} \Rightarrow M_1^\dagger M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \sqrt{p}\,|-\rangle\langle -| = \frac{\sqrt{p}}{2}\left(|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_2^{\dagger} M_2 = \frac{p}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{p}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_3^{\dagger} M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \frac{p}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & 1-\frac{3}{2}p \end{pmatrix}$$

Por otro lado, sabemos que $M_3^{\dagger} M_3$ es una mat positiva. En particular, sus autovalores deben ser positivos:

$$0 \le \lambda_{1,2} = 1 - p \pm \frac{p}{\sqrt{2}} = 1 - \underbrace{\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{>0} p$$

$$\Rightarrow p \le \frac{1}{1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \Rightarrow \quad p \le \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Veamos ahora la capacidad de distinguir entre $|0\rangle$ y $|+\rangle$. Para ello considero

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$P(M_1) = \mathrm{Tr}\left(M_1^{\dagger} M_1 \rho\right) = \frac{p}{4}$$

$$P(M_2) = \mathrm{Tr}\left(M_2^{\dagger} M_2 \rho\right) = \frac{p}{4}$$

$$P(M_3) = \mathrm{Tr}\left(M_3^{\dagger} M_3 \rho\right) = 1 - \frac{3}{4}p$$

Parte 2: Compuertas lógicas cuánticas

1] Usando la not $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_y$, $Z = \sigma_z$
y la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$
calcular las op.

a)

$$X \otimes id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que es unitaria y hermítica

$|00\rangle \to |10\rangle$
$|01\rangle \to |11\rangle$
$|10\rangle \to |00\rangle$
$|11\rangle \to |01\rangle$

b)

$$id \otimes X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

idem anterior

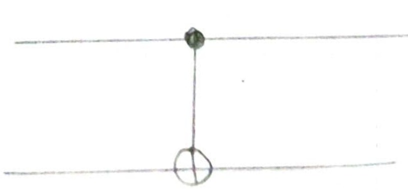
$|00\rangle \to |01\rangle$
$|01\rangle \to |00\rangle$
$|10\rangle \to |11\rangle$
$|11\rangle \to |10\rangle$

c)

$$U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes id + |1\rangle\langle 1| \otimes X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|00\rangle \to |00\rangle$
$|01\rangle \to |01\rangle$
$|10\rangle \to |11\rangle$
$|11\rangle \to |10\rangle$

Que corresponde a



2] Comprobar que $W = U_x(H \otimes id)$ siendo $H = (X+Z)\frac{1}{\sqrt{2}}$ la puerta de Hadamard pasa la base computacional en la base de Bell

d/

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|00\rangle \xrightarrow{H\otimes id} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\otimes|0\rangle \xrightarrow{U_x} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|01\rangle \xrightarrow{H\otimes id} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\otimes|1\rangle \xrightarrow{U_x} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|10\rangle \xrightarrow{H\otimes id} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\otimes|0\rangle \xrightarrow{U_x} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|11\rangle \xrightarrow{H\otimes id} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\otimes|1\rangle \xrightarrow{U_x} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

que justamente corresponden a $\{B_{00}, B_{01}, B_{10}, B_{11}\}$

De este modo, W corresponde a la mat. de cambio de base de la base de Bell a la computacional. En forma de circuito

3] Mostrar que $U_S = U_X \bar{U}_X U_X$ con

$U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes id + |1\rangle\langle 1| \otimes X$

$\bar{U}_X = id \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$

es el op "Swap" definido como $U_S|ab\rangle = |ba\rangle$

d/ Veamos la forma mat. de $\bar{U}_X$ (la otra ya la tenemos)

$|00\rangle \to |00\rangle$
$|01\rangle \to |11\rangle$
$|10\rangle \to |10\rangle$
$|11\rangle \to |01\rangle$

$$\bar{U}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_X \bar{U}_X U_X \underset{\text{matemática}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

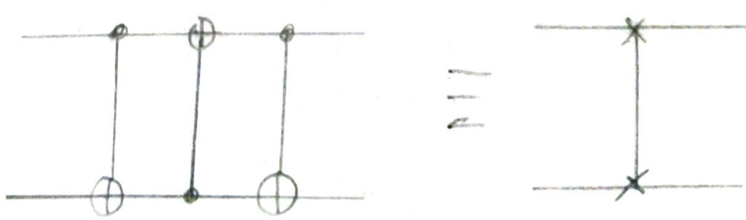
Luego $|00\rangle \to |00\rangle$

$|01\rangle \to |10\rangle \quad \Rightarrow U_S|ab\rangle = |ba\rangle$

$|10\rangle \to |01\rangle$

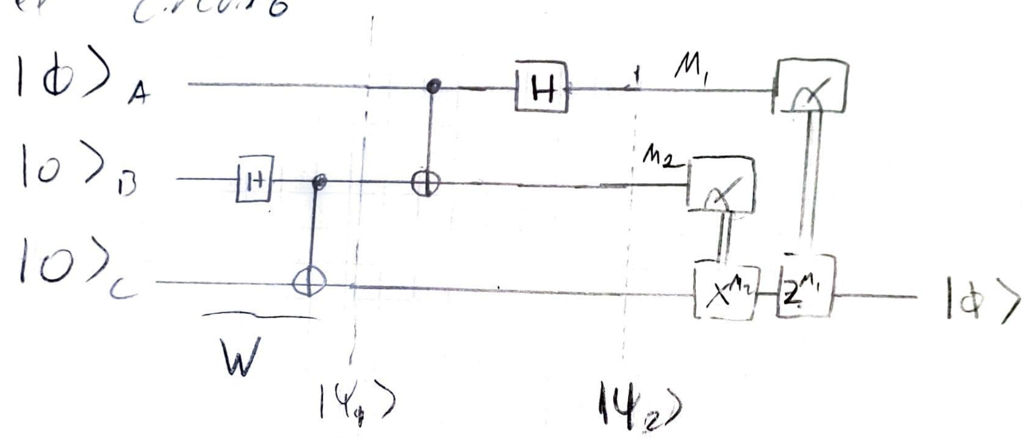
$|11\rangle \to |11\rangle$

a nivel de circuitos



Parte 3: Teletransportación cuántica

1] El proceso de teletransportación cuántica consiste en el envío de un estado $|\psi\rangle$ a otro lugar mediante un canal de comunicación clásico y un estado de Bell $|\beta_{00}\rangle$. Considera el circuito



El estado a teletransportar es $|\phi\rangle_A = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ con α, β amplitudes desconocidas. En primer lugar, W transforma los últimos 2 qubits en el 1° estado de Bell, teniendo como punto de partida

$$|\psi_1\rangle = |\phi\rangle|\beta_{00}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha|0\rangle(|00\rangle+|11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle+|11\rangle)\right]$$

Aplicando el 1° CNOT

$$U_{xor}|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha|0\rangle(|00\rangle+|11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle+|01\rangle)\right]$$

Aplicando H al 1° qubit

$$= \frac{1}{2}\left[\alpha(|0\rangle+|1\rangle)(|00\rangle+|11\rangle) + \beta(|0\rangle-|1\rangle)(|10\rangle+|01\rangle)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[|00\rangle \underbrace{(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)}_{|\phi_{00}\rangle} + |01\rangle\underbrace{(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)}_{|\phi_{01}\rangle}$$

$$+ |10\rangle\underbrace{(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)}_{|\phi_{10}\rangle} + |11\rangle\underbrace{(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)}_{|\phi_{11}\rangle}\Big]$$

De este modo, la gracia de la teleportación, es que si en el sistema AB se mide $|00\rangle$, en C se tiene el qubit $|\phi\rangle$. En cambio, si sale otro de los 3 estados, puede recuperar el estado aplicando X y Z dependiendo de lo medido en AB.

c) Mat. reducida en C antes de realizar la medida

$$\rho_C = Tr_{AB}\, |\psi_2\rangle\langle\psi_2| =$$

$$= Tr_{AB}\Big\{ \frac{1}{4}\Big[|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\langle 00|(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)$$

+ todos otros términos (solo me importan los diagonales, ya que tomaré traza)

$$= \frac{1}{4}\Big[(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) +$$

$$+ (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| + \beta^*\langle 0|)$$

$$+ (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|)$$

$$+ (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| - \beta^*\langle 0|)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[|0\rangle\langle 0|(2\alpha\alpha^* + 2\beta\beta^*) + |1\rangle\langle 0|(\cancel{\beta\alpha^*} + \cancel{\alpha\beta^*} - \cancel{\beta\alpha^*} - \cancel{\alpha\beta^*}) + |0\rangle\langle 1|(\cancel{\alpha\beta^*} + \cancel{\beta\alpha^*} - \cancel{\alpha\beta^*} - \cancel{\beta\alpha^*}) + |1\rangle\langle 1|(2\beta\beta^* + 2\alpha\alpha^*)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right)$$

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = \langle \phi|\phi\rangle = 1$$

ii) Si conocemos la medida en AB, la cual da de resultado 00 ($M_{ij} = |ij\rangle\langle ij| \otimes I_d$)

$$M_{00}\,\rho\, M_{00} = |00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\langle 00|(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)$$

$$= \alpha\alpha^* |000\rangle\langle 000| + \beta\alpha^* |001\rangle\langle 000| + \beta\alpha^* |001\rangle\langle 000| + \beta\beta^* |001\rangle\langle 001|$$

$$\Rightarrow Tr(M_{00}\,\rho\, M_{00}) = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$$

$$\Rightarrow \rho^{(00)}_C = Tr_{AB}\, \rho^{(00)}_{ABC} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)$$

$$= |\phi\rangle\langle\phi|$$

Lo mismo se tendría en cualquiera de los otros 3 casos, luego se aplican las gates correspondientes basadas en el resultado de la medición. Así que ocurre con C tras medir A y B

¿Son como es el resultado de la misma?

$$\rho_{ADC}^{(Any)} = \sum_{l} P(M=l)\, \rho_{ADC}^{l}$$

$M = \{ |00\rangle\langle 00|_{BN}, |01\rangle\langle 01|_{BN}, |10\rangle\langle 10|_{BN}, |11\rangle\langle 11| \}$

$$\rho_{ADC}^{(Any)'} = \sum_{l} \cancel{Tr(M_l^+ M_l \rho)} \frac{M_l \rho M_l^+}{\cancel{Tr(M_l \rho M_l^+)}}$$

$$= \sum_{l} M_l \rho M_l^+$$

$$= \sum_{l \in \{00,01,10,11\}} |l\rangle |\phi_l\rangle\langle l| \langle \phi_l|$$

Al calcular $\rho_C^{(Any)}$ queda

$$\rho_C^{(Any)} = Tr_{AD}\, \rho_{ADC}^{(Any)} = \sum_{l} |\phi_l\rangle\langle\phi_l|$$

$$= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)$$
$$+ (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| + \beta^*\langle 0|)$$
$$+ (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|)$$
$$+ (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| - \beta^*\langle 0|)$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

$\uparrow$

Cuida con algo

$\cup$

2] Veamos ahora como escribir la mat. densidad del sistema antes de la medición. Del ejercicio anterior, tenemos

$$\rho_{ABC} = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

donde $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\big[|00\rangle|\phi\rangle + |01\rangle X|\phi\rangle + |10\rangle Z|\phi\rangle + |11\rangle XZ|\phi\rangle\big]$

Como la teleportación es lineal, puedo utilizar el mismo proceso de teleportar a $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$ dados del problema, conservando sus probabilidades. De este modo

$$\rho_{ABC} = p\,|\psi_0'\rangle\langle\psi_0'| + (1-p)\,|\psi_1'\rangle\langle\psi_1'|$$

donde $|\psi_i'\rangle = \frac{1}{2}\big[|00\rangle|\psi_i\rangle + |01\rangle X|\psi_i\rangle + |10\rangle Z|\psi_i\rangle + |11\rangle XZ|\psi_i\rangle\big]$

b) Supongamos ahora que el est. inicial está entrelazado con otro sistema A',

$$|\psi_{A'A}\rangle = \sqrt{p}\,|0\rangle|\psi_0\rangle + \sqrt{1-p}\,|1\rangle|\psi_1\rangle$$

El proceso de teleportación $T|\psi_{ABC}\rangle \rightarrow |\psi_{ABC}'\rangle$ puede describirse en este estado como $id\otimes T$

El resultado será

$$|\psi^{out}\rangle = \sqrt{p}\,|0\rangle|\psi_0'\rangle + \sqrt{1-p}\,|1\rangle|\psi_1'\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{2}|0\rangle\Big[|00\rangle|\psi_0\rangle + |01\rangle X|\psi_0\rangle$$
$$+ |10\rangle Z|\psi_0\rangle + |11\rangle XZ|\psi_0\rangle\Big]$$

+ idem $|\psi_1'\rangle$

de modo que el modelo de teletransportación para desentrelazar $A' \leftrightarrow A$ a entrelazar $A' \leftrightarrow D$.

c) Apliquemos el proceso de teletransportación, solamente que en lugar de usar el estado de Bell 00 $(|\psi_1\rangle = |\phi\rangle|\beta_{00}\rangle)$ tenemos $|\psi_1\rangle = |\phi\rangle|\beta_{11}\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|0\rangle(|01\rangle - |10\rangle) + \beta|1\rangle(|01\rangle - |10\rangle)\Big]$$

$$\xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|0\rangle(|01\rangle - |10\rangle) + \beta|1\rangle(|11\rangle - |00\rangle)\Big]$$

$$\xrightarrow{H\otimes I_2} \frac{1}{2}\Big[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|01\rangle - |10\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|11\rangle - |00\rangle)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[|00\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + |01\rangle(\beta|1\rangle - \alpha|0\rangle)$$
$$+ |10\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |11\rangle(-\beta|1\rangle - \alpha|0\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[|00\rangle XZ|\phi\rangle + |01\rangle XZX|\phi\rangle + XZZ|\phi\rangle + XZXZ|\phi\rangle\Big]$$