Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la información cuántica

Práctica II (Curso 2020)

I. **Traza Parcial, Entrelazamiento y Medidas**

1) Hallar el estado reducido del subsistema de los primeros m qubits y evaluar la entropía de entrelazamiento de la correspondiente partición $(m, n-m)$, con $1 \leq m \leq n-1$, para los estados siguientes:

$$|\Psi\rangle = (|0\ldots 0\rangle + |1\ldots 1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|\Phi\rangle = (|10\ldots 0\rangle + |010\ldots\rangle + \ldots |0\ldots 01\rangle)/\sqrt{n}$$

2) Dado el estado $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} C_{ij}|ij\rangle$, con $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$ y $|ij\rangle \equiv |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$,
a) Determine el estado reducido del sistema A.
b) Supongamos que se realiza una medida local en el sistema B, en la base $\{|j_B\rangle\}$. Determine el estado conjunto del sistema y el estado reducido del sistema A luego de la medición, si se obtiene el resultado j.
c) Determinar el estado promedio del sistema conjunto y del sistema A luego de la medición.

3) Determinar M_3 y el valor máximo de p tal que el conjunto $\{M_1, M_2, M_3\}$ con $M_1 = \sqrt{p}|1\rangle\langle 1|$, $M_2 = \sqrt{p}|-\rangle\langle -|$ y $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, represente una medida (generalizada) de un qubit. Utilizar esta medida para distinguir estados $|0\rangle$ y $|+\rangle$, y comparar su eficiencia con una medida proyectiva estándar de un qubit.

II. **Compuertas Lógicas Cuánticas**

1) Utilizando la notación $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_Y$, $Z = \sigma_z$, escribir las matrices que representan, en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$), los operadores

$$a)\ X \otimes I, \quad b)\ I \otimes X, \quad c)\ X \otimes X, \quad d)\ U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

Verificar que U_X es el Control Not cuántico en la base estándar. Verificar también que todos los operadores anteriores son unitarios y determinar sus inversas.

2) Comprobar que $W = U_X(H \otimes I)$, con $H = (X+Z)/\sqrt{2}$ la compuerta de Hadamard, transforma la base computacional en la base de Bell, determinando su representación matricial. Concluir que una medición en la base de Bell (es decir, basada en proyectores ortogonales sobre estos estados) es equivalente a aplicar $W^\dagger = (H \otimes I)U_X$ seguido de una medición en la base computacional (y una nueva aplicación de W). Representar mediante un circuito la anterior equivalencia.

3) Mostrar que $U_S = U_X \bar{U}_X U_X$, con $U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ y $\bar{U}_X = I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$, es el operador de "swap", que satisface

$$U_S|ab\rangle = |ba\rangle$$

para todo estado producto $|ab\rangle = |a\rangle|b\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Escribir la matriz que representa a U_S en la base computacional y dibujar el circuito correspondiente.

III **Teleportación Cuántica**

1) En el proceso de teleportación, hallar la matriz reducida de B en las siguientes etapas:
a) Antes de que A realice la medida
b) Luego de que A realice la medida, conociendo el resultado de esta.
c) El estado promedio luego de que A realice la medida, sin conocer el resultado de esta.

2) a) Aplicar el proceso de teleportación a un estado no puro general

$$\rho_C = p_0\,|\psi_0\rangle\langle\psi_0| + (1-p_0)\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$$

indicando si el esquema estándar puede transmitir este estado.
b) Supongamos ahora que C está inicialmente entrelazado con un cuarto sistema D,

$$|\Psi_{DC}\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle|\psi_0\rangle + \sqrt{1-p_0}\,|1\rangle|\psi_1\rangle$$

¿Es posible realizar la teleportación cuántica? Interpretar.
c) Realizar el proceso de teleportación estándar para un estado puro en C con un estado de Bell $|\Psi_{AB}\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$, indicando las operaciones a realizar en B luego de las operaciones usuales en (C, A).