Teoría de la Información Cuántica

Práctica II (Curso 2019)

I. **Traza Parcial, Entrelazamiento y Medidas**

1) Hallar el estado reducido del subsistema de los primeros m qubits y evaluar la entropía de entrelazamiento de la correspondiente partición $(m, n-m)$, con $1 \leq m \leq n-1$, para los estados siguientes:

$$|\Psi\rangle = (|0\dots0\rangle + |1\dots1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|\Phi\rangle = (|10\dots0\rangle + |010\dots\rangle + \dots|0\dots01\rangle)/\sqrt{n}$$

2) Sea b_i, $b_i^\dagger$ operadores de aniquilación y creación de un bosón en estados ortonormales $|i\rangle$ ($[b_i, b_j] = 0$, $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$), con $b_i|0\rangle = 0 \ \forall \ i$ ($|0\rangle \equiv |0\dots0\rangle$). Determinar el estado reducido de cada modo y la entropía de entrelazamiento entre ellos en los estados

$$|\Psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(b_i^\dagger - b_j^\dagger)|0\rangle\,, \quad |\Phi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1 - b_i^\dagger - b_j^\dagger)|0\rangle\,, \quad |\Gamma\rangle = \sqrt{1-|\alpha|^2}\exp[\alpha b_1^\dagger b_2^\dagger]|0\rangle$$

El estado $|\Gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}}\exp[\alpha b_1^\dagger b_2^\dagger]|0\rangle$, se puede escribir como

$$|\Gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}}\sum_n \frac{(\alpha b_1^\dagger b_2^\dagger)^n}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}}|0\rangle$$

y como $\frac{b^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle = |n\rangle$ queda

$$|\Gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}}\sum_n \alpha^n |nn\rangle,$$

que como los estados $|n\rangle$ son ortogonales es directamente la descomposición de Schmidt. Para chequear la normalización vemos que

$$\langle\Gamma|\Gamma\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n,n'}(\alpha^*)^{n'}\alpha^n\langle n'n'|nn\rangle = \frac{1}{Z}\sum_n (|\alpha|^2)^n = \frac{1}{Z}\frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

por lo que para que este normalizado $\frac{1}{Z} = 1 - |\alpha|^2$.

El estado reducido sale a simple vista viendo la descomposición de Schmidt o tomando traza parcial:

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_{resto}|\Gamma\rangle\langle\Gamma| = \frac{1}{Z}\sum_n (|\alpha|^2)^n |n\rangle\langle n|$$

que, llamado $|\alpha|^2 = e^{-\hbar\beta\omega}$, Z pasa a ser la función de partición $Z = tr\left\{e^{-\hbar\beta\omega a^\dagger a}\right\} = \sum_{n=0} e^{-n\beta\hbar\omega} = \frac{1}{1-e^{-\hbar\beta\omega}}$ y el estado se puede escribir como un estado térmico a temperatura T:

$$\rho_1 = \frac{1}{Z}\sum_{n=0} e^{-n\hbar\beta\omega}|n\rangle\langle n|,$$

Para calcular el entrelazamiento podemos definir $P_n = \frac{e^{-n\hbar\beta\omega}}{Z}$ por lo que va a ser simplemente

$$-\sum_n P_n \log P_n,$$

(tomando $K_B = 1$, si no se pone adelante de la sumatoria), se ve que para $T \to 0$ tiende al estado fundamental

$$\lim_{T\to 0} \rho_1 \to |0\rangle\langle 0|$$

observando que $\frac{P_0}{P_n} \equiv e^{-\beta(\hbar\omega - \hbar\omega n)} \gg 1$ (P_0 "le gana por mucho" al resto). Por lo tanto si no es degenerado queda en un estado puro ($P_0 \to 1$) y su entropía es cero, si hubiera g estados en el fundamental ($P_0 \to 1/g$) y

$$\lim_{T\to 0} S(\rho_1) = \log g,$$

que sigue siendo un valor muy chico. Por otro lado, a medida que aumenta la temperatura, las probabilidades se empiezan "desparramar" en el resto de los estados, por lo que en el límite $T \to \infty$, si el sistema es dimensión $d = 2^n$, $P_n \to 1/d$ y

$$\lim_{T\to\infty} \rho_1 = \frac{\mathbb{1}_d}{d}$$

con

$$\lim_{T\to\infty} S(\rho_1) \log d = n,$$

máxima.

Recordar que $S(|\Gamma\rangle\langle\Gamma|) = 0$ por ser puro.

---

3) Dado el estado $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} |ij\rangle$, con $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$ y $|ij\rangle \equiv |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$,
a) Determine el estado reducido del sistema A.
b) Supongamos que se realiza una medida local en el sistema B, en la base $\{|j_B\rangle\}$. Determine el estado conjunto del sistema y el estado reducido del sistema A luego de la medición, si se obtiene el resultado j.
c) Determinar el estado promedio del sistema conjunto y del sistema A luego de la medición.

4) a) Mostrar que $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$, siendo $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$, pero que $\rho_{01} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \neq \rho_{+-} = \frac{1}{2}(|++\rangle\langle ++| + \frac{1}{2}|--\rangle\langle --|)$.
Hallar un observable que logre distinguir ρ_{01} de ρ_{+-}. Es posible distinguirlos localmente?
b) Reescribir en términos de los estados $|\pm\rangle$ i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ y ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$. Indicar observables que distingan estos tres estados.

II. **Compuertas Lógicas Cuánticas**

1) Utilizando la notación $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_Y$, $Z = \sigma_z$, escribir las matrices que representan, en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$), los operadores

$$a)\ X \otimes I, \quad b)\ I \otimes X, \quad c)\ X \otimes X, \quad d)\ U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

Verificar que U_X es el Control Not cuántico en la base std. Verficar también que todos los operadores anteriores son unitarios y determinar sus inversas.

2) Comprobar que $W = U_X(H \otimes I)$, con $H = (X + Z)/\sqrt{2}$ la compuerta de Hadamard, transforma la base computacional en la base de Bell, determinando su representación matricial. Concluir que una medición en la base de Bell (es decir, basada en proyectores ortogonales sobre estos estados) es equivalente a aplicar $W^\dagger = (H \otimes I)U_X$ seguido de una medición en la base computacional (y una nueva aplicación de W). Representar mediante un circuito la anterior equivalencia.

3) Mostrar que $U_S = U_X \bar{U}_X U_X$, con $U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ y $\bar{U}_X = I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$, es el operador de "swap", que satisface

$$U_S|ab\rangle = |ba\rangle$$

para todo estado producto $|ab\rangle = |a\rangle|b\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Escribir la matriz que representa a U_S en la base computacional y dibujar el circuito correspondiente.