Introducción a la Arquitectura de Computadoras Cuánticas

Práctica I: (Curso 2025)

Verificar en el caso de ser posible las cuentas con Mathematica, Jupyter notebook o algún software similar.

I. Notación de Dirac.

1) Determine cuales de los siguientes estados son estados posibles de un qubit:

a) $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$
b) $(\sqrt{3}\,|0\rangle - |1\rangle)/2$
c) $0.7\,|0\rangle + 0.3\,|1\rangle$
d) $0.8\,|0\rangle + 0.6\,|1\rangle$
e) $\cos(\theta)\,|0\rangle + i\,\mathrm{sen}(\theta)\,|1\rangle$
f) $\cos^2(\theta)\,|0\rangle - \mathrm{sen}^2(\theta)\,|1\rangle$

Para cada uno de los estados físicos, calcule las probabilidades de obtener $|0\rangle$ y $|1\rangle$ cuando se mide en la base estándar y las probabilidades de obtener $|+\rangle$ y $|-\rangle$ cuando se mide en la base $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$.

2) Escriba el estado: $|\psi\rangle = \frac{3}{5}\,|0\rangle + \frac{4}{5}\,|1\rangle$ como una superposición de los estados $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$. Es decir, encuentre $\alpha, \beta \in C$ tal que $|\psi\rangle = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$.

II. Compuertas Lógicas Cuánticas de un qubit

1) Dada la matriz $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

a) Probar que B es unitaria.
b) Encontrar la unitaria global que corresponde al siguiente circuito:

$$|0\rangle \;—\boxed{B}—\boxed{S}—\boxed{H}—\; |1\rangle$$

donde $S = P(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ es la compuerta que aplica una fase de $\pi/2$ y H denota el gate de Hadamard, $H = (X + Z)/\sqrt{2}$.

2) Un operador actúa sobre la base estándar de un qubit de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \\ |1\rangle &\mapsto \beta^\star\,|0\rangle - \alpha^\star\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

a) Probar que este operador lineal es igual a

$$M = \big(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,\big)\,\langle 0| + \big(\beta^\star\,|0\rangle - \alpha^\star\,|1\rangle\,\big)\,\langle 1|$$

calculando su aplicación a los estados de la base estándar, $M\,|0\rangle$ y $M\,|1\rangle$.
b) Determinar la representación matricial de M en la base estándar.
c) Verificar que M es unitaria.

III. Compuertas Lógicas Cuánticas de dos qubits

1) Siendo las matrices de Pauli:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

escribir las matrices que representan, en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$), los operadores

$$a)\ X \otimes I, \quad b)\ I \otimes X, \quad c)\ X \otimes X, \quad d)\ U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

Verificar que U_X es el Control Not cuántico en la base estándar. Verificar también que todos los operadores anteriores son unitarios y determinar sus inversas.

2) Mostrar que $U_S = U_X \bar{U}_X U_X$, con $U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ y $\bar{U}_X = I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$, es el operador de "swap", que satisface

$$U_S|ab\rangle = |ba\rangle$$

para todo estado producto $|ab\rangle = |a\rangle|b\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Escribir la matriz que representa a U_S en la base computacional y dibujar el circuito correspondiente.

3) Comprobar que $W = U_X(H \otimes I)$, con $H = (X + Z)/\sqrt{2}$ la compuerta de Hadamard, transforma la base computacional en la base de Bell, determinando su representación matricial. Concluir que una medición en la base de Bell (es decir, basada en proyectores ortogonales sobre estos estados) es equivalente a aplicar $W^\dagger = (H \otimes I)U_X$ seguido de una medición en la base computacional (y una nueva aplicación de W). Representar mediante un circuito la anterior equivalencia.