Teoría de la Información Cuántica

Práctica 2 - Año 2020

BEAUCAMP, Jean Yves

1. Traza Parcial, Entrelazamiento y Medidas

1. Consideraremos al sistema de n qubits dividido en dos subsistemas dados por una partición $(m, n-m)$, con $1 \leq m \leq n-1$.

   (I) $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\dots 0\rangle + |1\dots 1\rangle)$. Introducimos la partición del sistema como

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_1\dots 0_m\rangle\,|0_{m+1}\dots 0_n\rangle + |1_1\dots 1_m\rangle\,|1_{m+1}\dots 1_n\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_m\rangle\,|0_{n-m}\rangle + |1_m\rangle\,|1_{n-m}\rangle\right)\end{aligned}$$

   La matriz densidad estará dada por

$$\begin{aligned}\rho &= |\Phi\rangle\langle\Phi|\\ &= \frac{1}{2}\left(|0_m\rangle\,|0_{n-m}\rangle\,\langle 0_m|\,\langle 0_{n-m}| + |0_m\rangle\,|0_{n-m}\rangle\,\langle 1_m|\,\langle 1_{n-m}|\right.\\ &\qquad\left. + |1_m\rangle\,|1_{n-m}\rangle\,\langle 0_m|\,\langle 0_{n-m}| + |1_m\rangle\,|1_{n-m}\rangle\,\langle 1_m|\,\langle 1_{n-m}|\right).\end{aligned}$$

   Luego, el estado reducido será

$$\rho_m = \mathrm{Tr}_{n-m}\,\rho = \frac{1}{2}\left(|0_m\rangle\,\langle 0_m| + |1_m\rangle\,\langle 1_m|\right),$$

   con una entropía de entrelazamiento (estando ya en la base de Schmidth)

$$E(\rho) = S(\rho_m) = -\sum_k \sigma_k^2 \log_2 \sigma_k^2 = -\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

   Se trata, por lo tanto, del estado máximamente entrelazado.

   (II) $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}(|10\dots 0\rangle + |01\dots 0\rangle + \dots + |0\dots 01\rangle)$. Introducimos la partición del sistema como

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(|1_1 0_2\dots 0_m\rangle\,|0_{m+1}\dots 0_n\rangle + |0_1 1_2\dots 0_m\rangle\,|0_{m+1}\dots 0_n\rangle\right.\\ &\qquad + \dots + |0_1 0_2\dots 1_m\rangle\,|0_{m+1}\dots 0_n\rangle +\\ &\qquad\left. + |0_1\dots 0_m\rangle\,|1_{m+1}0_{m+2}\dots 0_n\rangle + \dots + |0_1\dots 0_m\rangle\,|0_{m+1}0_{m+2}\dots 1_n\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\sqrt{m}\left(\frac{|1_1 0_2\dots 0_m\rangle + |0_1 1_2\dots 0_m\rangle + \dots + |0_1 0_2\dots 1_m\rangle}{\sqrt{m}}\right)|0_{m+1}\dots 0_n\rangle\right.\\ &\qquad\left. + \sqrt{n-m}\,|0_1\dots 0_m\rangle\left(\frac{|1_{m+1}0_{m+2}\dots 0_n\rangle + \dots + |0_{m+1}0_{m+2}\dots 1_n\rangle}{\sqrt{n-m}}\right)\right\}\\ &= \sqrt{\frac{m}{n}}\,|\phi_m\rangle\,|0_{n-m}\rangle + \sqrt{\frac{n-m}{n}}\,|0_m\rangle\,|\phi_{n-m}\rangle.\end{aligned}$$

La matriz densidad estará dada por

$$\begin{aligned}\rho &= |\Phi\rangle\langle\Phi| \\ &= \frac{m}{n}\,|\phi_m\rangle\,|0_{n-m}\rangle\,\langle\phi_m|\,\langle 0_{n-m}| + \frac{\sqrt{m(n-m)}}{n}\,|0_m\rangle\,|\phi_{n-m}\rangle\,\langle\phi_m|\,\langle 0_{n-m}| \\ &\quad + \frac{\sqrt{m(n-m)}}{n}\,|\phi_m\rangle\,|0_{n-m}\rangle\,\langle 0_m|\,\langle\phi_{n-m}| + \frac{(n-m)}{n}\,|0_m\rangle\,|\phi_{n-m}\rangle\,\langle 0_m|\,\langle\phi_{n-m}|\,/\end{aligned}$$

Luego, el estado reducido será

$$\rho_m = \mathrm{Tr}_{n-m}\,\rho = \frac{m}{n}\,|\phi_m\rangle\,\langle\phi_m| + \frac{n-m}{n}\,|0_m\rangle\,\langle 0_m|\,,$$

con una entropía de entrelazamiento

$$E(\rho) = S(\rho_m) = -\sum_k \sigma_k^2 \log_2 \sigma_k^2 = -\left(\frac{m}{n}\log_2\frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\log_2\frac{n-m}{n}\right).$$

2. Dado el estado $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} C_{ij}\,|ij\rangle$, con $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$, y $|ij\rangle = |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$, su matriz densidad estará dada por

$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \sum_{ijkl} C_{ij}C_{kl}^*\,|ij\rangle\langle kl|\,.$$

   a) El estado reducido del subsistema A será

$$\begin{aligned}\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,\rho_{AB} = \sum_m\sum_{ijkl} C_{ij}C_{kl}^*\,|i\rangle\langle k|_A\,\langle m|j\rangle\,\langle l|m\rangle &= \sum_{ijklm} C_{ij}C_{kl}^*\,|i\rangle\langle k|_A\,\delta_{mj}\delta_{lm} \\ &= \sum_{ijk} C_{ij}C_{kj}^*\,|i\rangle\langle k|_A \\ &= \sum_{ijk} C_{ij}C_{jk}^\dagger\,|i\rangle\langle k|_A \\ &= \sum_{ik}(CC^\dagger)_{ik}\,|i\rangle\langle k|_A\,.\end{aligned}$$

   b) Realizando una medición local en B con operadores de medida $M_m = |m\rangle\langle m|_B$, el estado pos-medido del sistema estará dado por

$$\rho_{AB}^{(m)} = \frac{M_m\rho_{AB}M_m^\dagger}{\mathrm{Tr}\,M_m\rho_{AB}M_m^\dagger}.$$

   Evaluaremos primero el producto de operadores en el numerador.

$$\begin{aligned}M_m\rho_{AB}M_m^\dagger &= \sum_{ijkl} C_{ij}C_{lk}^\dagger\,|i\rangle\langle k|_A \otimes |m\rangle\,\langle m|j\rangle\,\langle l|m\rangle\,\langle m|_B \\ &= \sum_{ijkl} C_{ij}C_{lk}^\dagger\,|i\rangle\langle k|_A \otimes \delta_{mj}\delta_{lm}\,|m\rangle\langle m|_B \\ &= \sum_{ik} C_{im}C_{mk}^\dagger\,|i\rangle\langle k|_A \otimes |m\rangle\langle m|_B\,.\end{aligned}$$

   Luego, la traza de este producto será

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,M_m\rho_{AB}M_m^\dagger &= \sum_{pq}\sum_{ik} C_{im}C_{mk}^\dagger\,\langle p|i\rangle\,\langle k|p\rangle\,\langle q|m\rangle\,\langle m|q\rangle \\ &= \sum_{pq}\sum_{ik} C_{im}C_{mk}^\dagger\delta_{ip}\delta_{kp}\delta_{qm}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_p C_{pm} C^\dagger_{mp} \\
&= \sum_p C^\dagger_{mp} C_{pm} \\
&= (C^\dagger C)_{mm}.
\end{aligned}
$$

El estado pos-medido entonces corresponderá a la matriz densidad

$$
\rho^{(m)}_{AB} = \frac{M_m \rho_{AB} M^\dagger_m}{\operatorname{Tr} M_m \rho_{AB} M^\dagger_m} = \sum_{ik} \frac{C_{im} C^\dagger_{mk}}{(C^\dagger C)_{mm}} \left|i\middle\rangle\!\middle\langle k\right|_A \otimes \left|m\middle\rangle\!\middle\langle m\right|_B .
$$

Luego, el estado reducido del subsistema A será trivialmente

$$
\rho^{(m)}_{A} = \operatorname{Tr}_B \rho^{(m)}_{AB} = \sum_{ik} \frac{C_{im} C^\dagger_{mk}}{(C^\dagger C)_{mm}} \left|i\middle\rangle\!\middle\langle k\right|_A .
$$

c) El estado promedio luego de la medición será

$$
\begin{aligned}
\rho^{(avg)}_{AB} = \sum_m P(m) \rho^{(m)}_{AB} &= \sum_m \operatorname{Tr}\Big(M_m \rho_{AB} M^\dagger_m\Big) \rho^{(m)}_{AB} \\
&= \sum_m \cancel{(C^\dagger C)_{mm}} \sum_{ik} \frac{C_{im} C^\dagger_{mk}}{\cancel{(C^\dagger C)_{mm}}} \left|i\middle\rangle\!\middle\langle k\right|_A \otimes \left|m\middle\rangle\!\middle\langle m\right|_B \\
&= \sum_{ikm} C_{im} C^\dagger_{mk} \left|i\middle\rangle\!\middle\langle k\right|_A \otimes \left|m\middle\rangle\!\middle\langle m\right|_B .
\end{aligned}
$$

Para el subsistema A tendremos

$$
\begin{aligned}
\rho^{(avg)}_{A} = \operatorname{Tr}_B \rho^{(avg)}_{AB} = \sum_l \sum_{ikm} C_{im} C^\dagger_{mk} \left|i\middle\rangle\!\middle\langle k\right|_A \langle l|m\rangle \langle m|l\rangle &= \sum_{ikm} C_{im} C^\dagger_{mk} \left|i\middle\rangle\!\middle\langle k\right|_A \\
&= \sum_{ikm} (CC^\dagger)_{ik} \left|i\middle\rangle\!\middle\langle k\right|_A .
\end{aligned}
$$

3. Buscamos determinar M_3 y el valor máximo de p tal que el conjunto $\{M_1, M_2, M_3\}$, con $M_1 = \sqrt{p}\left|1\middle\rangle\!\middle\langle 1\right|$, $M_2 = \sqrt{p}\left|-\middle\rangle\!\middle\langle -\right|$, y $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ represente una medida generalizada de un qubit. Sabiendo que $M^\dagger_1 M_1 + M^\dagger_2 M_2 + M^\dagger_3 M_3 = \mathbb{1}$:

$$
M^\dagger_3 M_3 = \mathbb{1} - M^\dagger_1 M_1 - M^\dagger_2 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{p}{2} & -\frac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & 1 - \frac{3p}{2} \end{pmatrix}.
$$

Como $P(j) = \lambda_j = \langle \psi | M^\dagger_j M_j | \psi \rangle = \| M_j |\psi\rangle \|^2 \geq 0$, entonces los autovalores λ_j de la matriz $M^\dagger_j M_j$ deberán ser no negativos. Por lo tanto, $\left| M^\dagger_j M_j \right| > 0$. Estudiando en particular el caso para $M^\dagger_3 M_3$:

$$
\left| \begin{pmatrix} 1 - \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & 1 - \frac{3p}{2} \end{pmatrix} \right| = \left(1 - \frac{p}{2}\right)\left(1 - \frac{3p}{2}\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \Big(p - (2 + \sqrt{2})\Big)\Big(p - (2 - \sqrt{2})\Big) \geq 0.
$$

Luego, si queremos p acotado, la condición de no-negatividad resulta

$$
p - (2 \pm \sqrt{2}) \leq 0 \implies p \leq 2 - \sqrt{2}.
$$

Podemos expresar de forma genérica al conjunto de medida como $p\left|1\middle\rangle\!\middle\langle 1\right| + p\left|-\middle\rangle\!\middle\langle -\right| + q\left|\psi\middle\rangle\!\middle\langle \psi\right| = \mathbb{1}$, con

$$
|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \implies \left|\psi\middle\rangle\!\middle\langle \psi\right| = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.
$$

Luego,

$$p\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \frac{p}{2} + q\cos^2\theta = 1 \\ \frac{3p}{2} + q\sin^2\theta = 1 \end{cases} \implies 2p+q = 2.$$

Queremos ahora estudiar la capacidad de distinguir los estados $|0\rangle$ y $|+\rangle$ en el estado

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|+\rangle\langle +|.$$

Sobre el estado ρ,

$$P(M_1) = \mathrm{Tr}\Big(M_1^\dagger M_1 \rho\Big) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{p}{4} & \frac{p}{4} \end{pmatrix}\right) = \frac{p}{4} \geq 1,$$

y

$$P(M_2) = \mathrm{Tr}\Big(M_2^\dagger M_2 \rho\Big) = \mathrm{Tr}\left(\frac{p}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) = \frac{p}{2}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{p}{4} \geq 1.$$

Además, como M_3 es combinación de ambos, $|0\rangle\langle 0|$ y $|+\rangle\langle +|$, entonces $P(3)$ no distingue entre $|0\rangle\langle 0|$ y $|+\rangle\langle +|$.

2. Compuertas Lógicas Cuánticas

1. Sean $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_y$, $Z = \sigma_z$. Luego,

   a)

$$X \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b)

$$\mathbb{1} \otimes X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   c)

$$X \otimes X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   d)

$$\begin{aligned} U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Es trivial ver que $U_X|00\rangle = |00\rangle$, $U_X|01\rangle = |01\rangle$, $U_X|10\rangle = |11\rangle$ y $U_X|11\rangle = |10\rangle$, por lo que U_X corresponde a la compuesta lógica cuántica *Control Not*.

En todos los casos resulta trivial ver que $U^t U = U^\dagger U = \mathbb{1}_4$, por lo que las matrices de operadores lógicos son unitarias.

2. Sea $H = \frac{X+Z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ la compuerta de Hadamard, y sea $W = U_X(H \otimes \mathbb{1})$. Matricialmente,

$$W = U_X(H\otimes\mathbb{1}) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Luego, para estados en la base computacional

$$W\left|00\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \equiv \frac{\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle}{\sqrt{2}} = \left|\Phi_+\right\rangle,$$

$$W\left|01\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \equiv \frac{\left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle}{\sqrt{2}} = \left|\Psi_+\right\rangle,$$

$$W\left|10\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \equiv \frac{\left|00\right\rangle - \left|11\right\rangle}{\sqrt{2}} = \left|\Phi_-\right\rangle,$$

$$W\left|11\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \equiv \frac{\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle}{\sqrt{2}} = \left|\Psi_-\right\rangle.$$

En la base de Bell $B_{Bell} = \{\left|\Phi_\pm\right\rangle, \left|\Psi_\pm\right\rangle\}$, los operadores de medición serán proyectores $M_j^{(Bell)}$ diagonales. Por el contrario, los proyectores a estados en la base computacional $B_{Comp} = \{\left|00\right\rangle, \left|01\right\rangle, \left|10\right\rangle, \left|11\right\rangle\}$ no serán diagonales expresados en la base de Bell. Si identificamos a los estados de Bell con vectores columna

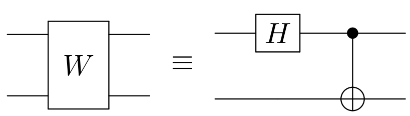
$$\left|\Phi_+\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \left|\Psi_+\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \left|\Phi_-\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \left|\Psi_-\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

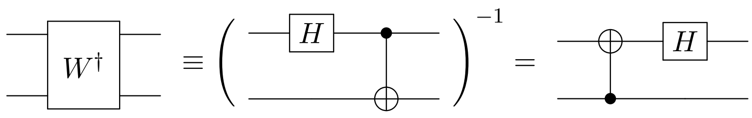
entonces por lo demostrado en la primera parte, W constituye la matriz de cambio de base $B_{Bell} \to B_{Comp}$. Y, como los proyectores en ambas bases serán ortogonales, es natural entonces escribir:

$$[M_j^B]_C = W[M_j^B]_B W^\dagger,$$

siendo M_j^B el operador de proyección de estados de Bell, $[M_j^B]_B$ su representación matricial (diagonal) en la base de Bell, y $[M_j^B]_C$ su representación matricial (no diagonal) en la base de Bell.

En términos de circuitos cuánticos,





3. Sea $U_S = U_X \bar{U}_X U_X$, con $\bar{U}_X = \mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$. Matricialmente,

$$\begin{aligned}
\bar{U}_X = \mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1| &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

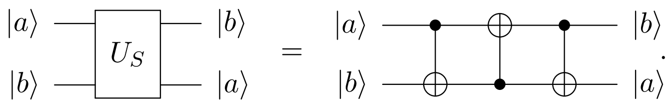
Luego,

$$\begin{aligned}
U_S = U_X \bar{U}_X U_X = U_X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $U_S|00\rangle = |00\rangle$, $U_S|11\rangle = |11\rangle$, $U_S|01\rangle = |10\rangle$ y $U_S|10\rangle = |01\rangle$. En general:

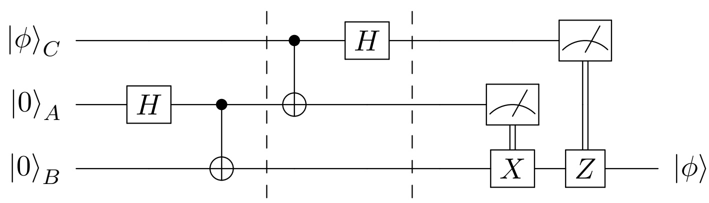
$$U_S|ab\rangle = |ba\rangle .$$

El circuito correspondiente será:



3. Teleportación Cuántica

1. Tenemos un proceso de teleportación, dado por el circuito:



En la primera barrera, el sistema se encuentra en un estado establecido de Bell entre A y B, y C en un estado arbitrario $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Por lo tanto,

$$|\Psi_{CAB}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right).$$

a) En la segunda sección,

$$\begin{aligned}
|\psi_{CAB}\rangle &\xrightarrow{U_X} \alpha|0\rangle\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta|1\rangle\left(\frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&\xrightarrow{H} \alpha\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\{|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)$$
$$+|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\}.$$

El último estado corresponderá al estado del sistema antes de que A realice la medida. La matriz reducida de B en ese instante entonces estará dada por:

$$\begin{aligned}
\rho_B = \frac{1}{4}\big\{&\left[\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\beta^2|1\rangle\langle 1|+\cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)}\right]\\
&+\left[\alpha^2|1\rangle\langle 1|+\beta^2|0\rangle\langle 0|-\cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)}\right]\\
&+\left[\alpha^2|1\rangle\langle 1|+\beta^2|0\rangle\langle 0|+\cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)}\right]\\
&+\left[\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\beta^2|1\rangle\langle 1|-\cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)}\right]\big\}\\
= \frac{1}{4}&\left\{2(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{=1})|0\rangle\langle 0|+2(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{=1})|1\rangle\langle 1|\right\}\\
= \frac{1}{2}&|0\rangle\langle 0|+\frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{\mathbb{1}}{2}.
\end{aligned}$$

Este resultado es completamente esperable, ya que en todo la segunda sección no se operó sobre el qubit B.

b) Luego de que A realice la medida (y se efectúe la correspondiente operación X en B), tendremos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\{|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\}\\
&\xrightarrow{U_{X,A\to B}}\frac{1}{2}\{|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|01\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\\
&\qquad\qquad+|11\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\}\\
&\quad=\left|\psi_{CAB}^{(A)}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Si conocemos el resultado de la medida, entonces:

$$\begin{aligned}
|\psi_A\rangle=|0\rangle \implies \left|\psi_{CAB}^{(A)}\right\rangle &= \frac{\sqrt{\mathcal{N}}}{2}\{|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\}\\
\implies \rho_B^{(A)} &= \frac{\mathcal{N}}{4}\left[(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)(\alpha\langle 0|+\beta\langle 1|)+(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)(\alpha\langle 0|-\beta\langle 1|)\right]\\
&= \frac{\mathcal{N}}{2}(\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\beta^2|1\rangle\langle 1|)\\
&= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\beta^2|1\rangle\langle 1|)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|\psi_A\rangle=|1\rangle \implies \left|\psi_{CAB}^{(A)}\right\rangle &= \frac{\sqrt{\mathcal{N}}}{2}\{|01\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|11\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\}\\
\implies \rho_B^{(A)} &= \frac{\mathcal{N}}{4}\left[(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)(\alpha\langle 0|+\beta\langle 1|)+(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)(\alpha\langle 0|-\beta\langle 1|)\right]\\
&= \frac{\mathcal{N}}{2}(\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\beta^2|1\rangle\langle 1|)\\
&= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\beta^2|1\rangle\langle 1|).
\end{aligned}$$

c) Si desconocemos el resultado de la medida, entonces el estado promedio reducido en B será:

$$\rho_B = \frac{1}{4}\big\{\left[\alpha^2|0\rangle\langle 0|+\beta^2|1\rangle\langle 1|+\cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\alpha^2 \left|1\middle\rangle\middle\langle 1\right| + \beta^2 \left|0\middle\rangle\middle\langle 0\right| - \cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)}\right] \\
&+ \left[\alpha^2 \left|1\middle\rangle\middle\langle 1\right| + \beta^2 \left|0\middle\rangle\middle\langle 0\right| + \cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)}\right] \\
&+ \left[\alpha^2 \left|0\middle\rangle\middle\langle 0\right| + \beta^2 \left|1\middle\rangle\middle\langle 1\right| - \cancel{\alpha\beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)}\right] \Big\} \\
= &\frac{1}{4}\left\{ 2\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{=1} |0\rangle\langle 0| + 2\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{=1} |1\rangle\langle 1| \right\} \\
= &\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{\mathbb{1}}{2}.
\end{aligned}
$$

2. A partir de los desarrollos del punto II.1, luego de la aplicación de la última medida y compuerta U_Z, vemos que el estado final del sistema será

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)\right\} \\
&\xrightarrow{U_{Z,C\to B}} \frac{1}{2}\left\{|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)|\phi\rangle \\
&= \left|\psi_{CAB}^{(Final)}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

La matriz densidad reducida ρ_B del en el estado final estará dada entonces trivialmente por

$$
\rho_B^{(F)} = |\phi\rangle\langle\phi|.
$$

a) Sea un estado no puro general $\rho_C = p_0 |\psi_0\rangle\langle\psi_0| + (1-p_0)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$. Como el proceso de teleportación está compuesto de operaciones lineales en cada uno de sus pasos, podemos aplicar el procedimiento a cada estado ψ_0 y ϕ_1 independientemente, conformados por las matrices densidad $\rho^0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ y $\rho^1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$:

$$
T\left\{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|_C \otimes |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|_{AB}\right\} = \frac{\mathbb{1}_{CA}}{2} \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|_B,
$$

$$
T\left\{|\psi_1\rangle\langle\psi_1|_C \otimes |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|_{AB}\right\} = \frac{\mathbb{1}_{CA}}{2} \otimes |\psi_1\rangle\langle\psi_1|_B.
$$

Luego, por ser operaciones lineales, la teleportación del estado $\rho_C = p_0\rho_C^{(0)} + (1-p_0)\rho_C^{(1)}$ resultará en

$$
\begin{aligned}
&T\left\{p_0|\psi_0\rangle\langle\psi_0|_C \otimes |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|_{AB} + (1-p_0)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|_C \otimes |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|_{AB}\right\} \\
&\quad = p_0 T\left\{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|_C \otimes |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|_{AB}\right\} + (1-p_0)T\left\{|\psi_1\rangle\langle\psi_1|_C \otimes |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|_{AB}\right\} \\
&\quad = p_0\frac{\mathbb{1}_{CA}}{2} \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|_B + (1-p_0)\frac{\mathbb{1}_{CA}}{2} \otimes |\psi_1\rangle\langle\psi_1|_B \\
&\quad = \frac{\mathbb{1}_{CA}}{2} \otimes \left[p_0|\psi_0\rangle\langle\psi_0|_B + (1-p_0)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|_B\right],
\end{aligned}
$$

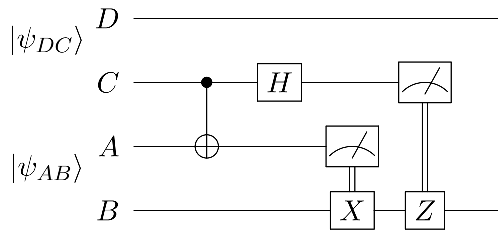
por lo que la matriz densidad reducida de B será

$$
\rho_B^{(F)} = p_0\rho^{(0)} + (1-p_0)\rho^{(1)}.
$$

b) Supongamos ahora que C está inicialmente entrelazado con un cuarto sistema D:

$$
|\psi_{DC}\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle_D|\psi_0\rangle_C + \sqrt{1-p_0}\,|1\rangle_D|\psi_1\rangle_C.
$$

Como podemos apreciar en el circuito correspondiente, las operaciones de teleportación de C a B se dan de manera independiente del qubit D:



Por lo tanto, la operación de teleportación T_2 puede definirse en términos del proceso de teleportación ya definido en III.1, obteniendo:

$$\begin{aligned}
T_2 \left|\psi_{DCAB}\right\rangle &= \sqrt{p_0} \left|0\right\rangle_D \otimes T\left\{\left|\psi_0\right\rangle_C \otimes \left|\Phi_+\right\rangle_{AB}\right\} + \sqrt{1-p_0} \left|1\right\rangle_D \otimes T\left\{\left|\psi_1\right\rangle_C \otimes \left|\Phi_+\right\rangle_{AB}\right\} \\
&= \sqrt{p_0} \left|0\right\rangle_D \otimes \left|\Omega\right\rangle_{CA} \otimes \left|\psi_0\right\rangle_D + \sqrt{1-p_0} \left|1\right\rangle_D \otimes \left|\Omega\right\rangle_{CA} \otimes \left|\psi_1\right\rangle_D \\
&= \left|\Omega\right\rangle_{CA} \otimes \left(\sqrt{p_0} \left|0\right\rangle_D \otimes \left|\psi_0\right\rangle_D + \sqrt{1-p_0} \left|1\right\rangle_D \otimes \left|\psi_1\right\rangle_D\right),
\end{aligned}$$

donde $|\Omega\rangle = (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)/2$. Luego,

$$\left|\psi_{DB}\right\rangle = \sqrt{p_0} \left|0\right\rangle_D \otimes \left|\psi_0\right\rangle_D + \sqrt{1-p_0} \left|1\right\rangle_D \otimes \left|\psi_1\right\rangle_D.$$

Podemos concluir que el proceso de teleportación “transfiere” el entrelazamiento con D de C a B.

c) Supondremos un estado puro $\left|\psi\right\rangle_C = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$ en el qubit a teleportar, utilizando ahora un estado de Bell $\left|\Psi_-\right\rangle_{AB} = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$ en los qubits A y B:

$$\left|\psi_{CAB}\right\rangle = \left(\alpha\left|0\right\rangle_C + \beta\left|1\right\rangle_C\right) \otimes \frac{\left|01\right\rangle_{AB} - \left|10\right\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}.$$

Luego de la aplicación del operador U_{CNOT} entre los qubits C y A, y el operador H en C, obtendremos el estado

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha\left|0\right\rangle_C + \beta\left|1\right\rangle_C\right) \otimes \frac{\left|01\right\rangle_{AB} - \left|10\right\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} \\
&\xrightarrow{U_{X,CA}} \alpha\left|0\right\rangle_C \otimes \left(\frac{\left|01\right\rangle_{AB} - \left|10\right\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left|1\right\rangle_C \otimes \left(\frac{\left|11\right\rangle_{AB} - \left|00\right\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}\right) \\
&\xrightarrow{H_C} \alpha\left(\frac{\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{\left|01\right\rangle_{AB} - \left|10\right\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{\left|11\right\rangle_{AB} - \left|00\right\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left|00\right\rangle_{CA} \otimes \left(\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle\right) + \left|11\right\rangle_{CA} \otimes \left(-\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\right) + \left|01\right\rangle_{CA} \otimes \left(-\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right)\right. \\
&\quad \left. + \left|10\right\rangle_{CA} \otimes \left(\alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\left|00\right\rangle_{CA} \otimes ZX\left|\psi\right\rangle_B - \left|11\right\rangle_{CA} \otimes \left|\psi\right\rangle_B - \left|01\right\rangle_{CA} \otimes Z\left|\psi\right\rangle_B + \left|10\right\rangle_{CA} \otimes X\left|\psi\right\rangle_B\right\}.
\end{aligned}$$

Luego, de haber obtenido el estado $\left|00\right\rangle_{CA}$, se deberán aplicar los operadores XZ al qubit B. Así mismo, si se obtuvieron $\left|01\right\rangle_{CA}$ o $\left|10\right\rangle_{CA}$, se deberán aplicar en B las operaciones Z o X respectivamente. En el caso de haber obtenido $\left|11\right\rangle_{CA}$, no se deberán realizar cambios al sistema.