Práctica 1

1) ρ op. densidad describe un estado puro sii $\rho^2 = \rho$

d/ $\Rightarrow$) Si ρ describe un estado puro, $\exists\, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ / $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Luego $\rho^2 = |\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}\langle\psi| = \rho$

$\Leftarrow$) Un op. densidad es $\rho \in \text{Hom}(\mathcal{H})$ tq $\text{Tr}(\rho) = 1$ y ρ op. positivo. En particular existe una descomposición espectral $\rho = \sum \lambda_i |i\rangle\langle i|$, $\{|i\rangle\}$ BON de $\mathcal{H}$. Luego

$$\sum \lambda_i |i\rangle\langle i| = \rho = \rho^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j|$$

$$= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \delta_{ij} |i\rangle\langle j|$$

$$= \sum_{ij} \lambda_i^2 |i\rangle\langle i|$$

Multiplicando a derecha y izquierda por un $|i\rangle$, $i \in I$, obtenemos

$$\lambda_i = \lambda_i^2 \quad \forall\, i \in I \Rightarrow \lambda_i \in \{0, 1\}$$

Como $\sum \lambda_i = \text{Tr}(\rho) = 1$ $\exists!\, i \in I$ / $\lambda_i = 1$

$\Rightarrow \rho = |i\rangle\langle i|$

///

2] $\{\rho_i\}_{i\in[m]} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathcal{H})$ op. densidad, luego

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i \quad \text{con } p_i \geq 0 \;/\; \sum p_i = 1$$

es un op. densidad

D/ Es evidente que $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H})$, así como

$$Tr(\rho) = \sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{Tr(\rho_i)}_{1} = \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Solo bvq ρ es un op. positivo. Dado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{p_i}_{\geq 0} \underbrace{\langle\psi|\rho_i|\psi\rangle}_{\geq 0} \geq 0$$

///

3] Dado $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$ $\quad p \in (\frac{1}{2}, 1)$

$\exists$ $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ normalizados y $q \in [1-p, p]$ $\quad$ Aq

$$\rho = q|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q)|\beta\rangle\langle\beta|$$

Tomando $q = 1-p \in [1-p, p]$

$$\rho = (1-q)|\alpha\rangle\langle\alpha| + q|1\rangle\langle 1|$$

4] Mostrar que la matriz densidad más general para un qubit puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma})$$

Donde $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ con $|\vec{r}| \leq 1$ y $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

D/ Consideremos el conjunto $\sigma_\mu = \{\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

Siendo $\sigma_0 = I_d$. Sabemos que esta es parte de la conjunto σ_i de $\mathrm{Her}(\mathcal{H})$, y siendo $4 = \dim(\mathrm{Her}(\mathcal{H}))$, verifica ser base. Luego, $\exists\ r_i \in \mathbb{C}$ tq

$$\rho = \frac{1}{2}\left(r_0 I_d + \bar{r} \cdot \bar{\sigma} \right)$$

Luego, tomando la condición de normalización de ρ:

$$1 = \mathrm{Tr}(\rho) = \frac{1}{2}\Big(r_0 \underbrace{\mathrm{Tr}(I_d)}_{2} + r_i \underbrace{\mathrm{Tr}(\sigma_i)}_{0} \Big) = r_0$$

Por otro lado, tomemos los valores de r_i calculando

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathrm{Tr}(\rho\, \sigma_i) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(\sigma_i) + r_j \mathrm{Tr}(\underbrace{\sigma_j \sigma_i}_{\delta_{ij} I_d + i \epsilon_{jin} \sigma_n}) \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + 2 r_i \right)$$

$$= r_i$$

De este modo, nos queda

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I_d + r_i \sigma_i \right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r_3 & r_1 - i r_2 \\ r_1 + i r_2 & 1 - r_3 \end{pmatrix}$$

$\underset{\text{Mathematica}}{\Rightarrow}$ $$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm |\bar{r}| \right)$$

De este modo, ρ será un estado puro cuando se anule uno de los autovalores, que corresponde al caso $|\bar{r}| = 1$

5] Para obtener la misma representación en el sistema de dos qubits, necesitamos $\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})) = 4 \cdot 4 = 8$ elementos l.i.

La opción más natural es considerar elementos de la forma $\{\sigma_i \otimes \sigma_j\}_{0\leq i,j\leq 3}$ con $\sigma_0 = id$. De este modo, se tiene la siguiente escritura en esta base:

$$\rho = \sum_{i,j=0}^{3} r_{ij}\, \sigma_i \otimes \sigma_j = r_{00} \underbrace{id_2 \otimes id_2}_{= id_4} + r_{A_i}\, \sigma_i \otimes id_2 + r_{B_i}\, id_2 \otimes \sigma_i + \sum_{i,j=1}^{3} r_{ij}\, \sigma_i \otimes \sigma_j$$

donde denotamos $r_{A_i} = r_{i0}$, $r_{B_i} = r_{0i}$.

Usando que $\mathrm{Tr}(A\otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ (en $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$) tenemos:

$$1 = \mathrm{Tr}(\rho) = r_{00}\, \mathrm{Tr}(id_4) + \underline{0}$$

Todo el resto se anula, pues $\mathrm{Tr}(\sigma_i \otimes \sigma_j) = \mathrm{Tr}(\sigma_i)\,\mathrm{Tr}(\sigma_j) = 0$

$$\Rightarrow r_{00} = \frac{1}{4}$$

Para relacionar las componentes con valores medios, calculamos previamente

$$\mathrm{Tr}\big((\sigma_i \otimes \sigma_j)(\sigma_{i'} \otimes \sigma_{j'})\big) = \mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_{i'})\, \mathrm{Tr}(\sigma_j \sigma_{j'}) = 4\, \delta_{ii'}\, \delta_{jj'}$$

Luego

$$\langle \sigma_i \otimes id \rangle = \mathrm{Tr}(\rho\, \sigma_i \otimes id) =$$

$$= Tr\left(\tfrac{1}{4}\sigma_{i'}\otimes id + r_A^i\,\sigma_{i'}\sigma_i \otimes id + r_B^i\,\sigma_{i'}\otimes\sigma_i + r^{ij}\,\sigma_{i'}\sigma_i\otimes\sigma_j\right)$$

$$= r_A^i\, 2\delta_{ii'}\, 2 = 4 r_A^{i'}$$

$Tr(A\otimes B) = Tr(A)\,Tr(B)$

$$\langle id\otimes\sigma_{i'}\rangle \overset{\text{Análogo}}{=} 4 r_B^{i'}$$

$$\langle \sigma_{i'}\otimes\sigma_{j'}\rangle = Tr\left(\tfrac{1}{4}\sigma_{i'}\otimes\sigma_{j'} + r_A^i\,\sigma_{i'}\sigma_i\otimes\sigma_{j'} + r_B^j\,\sigma_{i'}\otimes\sigma_j\sigma_{j'} + r^{ij}\,\sigma_{i'}\sigma_i\otimes\sigma_{j'}\sigma_j\right)$$

$$= 4 r^{ij}\,\delta_{ii'}\,\delta_{jj'} = 4 r^{i'j'}$$

6) $\rho = x|\psi\rangle\langle\psi| + (1-x)\dfrac{id}{d}$

Con $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ normalizado y $d = \dim(\mathcal{H})$. Determinar los valores de x tq ρ es densidad.

- $Tr(\rho) = x\,Tr(|\psi\rangle\langle\psi|) + (1-x)\,Tr\left(\dfrac{id}{d}\right) = 1$ ✓
- ρ es positivo.

$$0 \leq \langle\psi|\rho|\psi\rangle = x + \frac{1-x}{d} = x\left(1-\frac{1}{d}\right) + \frac{1}{d}$$

$$\Rightarrow \quad x \geq \frac{-1}{d\left(1-\frac{1}{d}\right)} = \frac{1}{1-d}$$

Sin embargo, la positividad debe verificarse $\forall\, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\phi|\phi\rangle = 1$, veamos que ocurre

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = x\,|\langle\psi|\phi\rangle|^2 + \frac{(1-x)}{d} \geq \frac{1-x}{d}$$

Parte II. entrelazamiento

1] Escribir explícitamente $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ en la base $B = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ para

a) $|\phi\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}} \underset{B}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\pm1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \pm1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\pm1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \pm1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\\pm1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobando con el Mathematica, los autovalores son $\{0,1\}$ en ambos casos

b) $|\phi\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}00 & 01 & 10 & 11\end{array}\\\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Nuevamente, el Mathematica nos dice $\lambda_i = \{0,1\}$

2] Calcular la mat. de densidad reducida de los estados de entrelazamiento de cada estado

Previamente se define la traza parcial en un espacio producto $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ como un op.

$$Tr_B : Hom(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \rightarrow Hom(\mathcal{H}_B)$$

$$\rho^{AB} \mapsto Tr_B\, \rho^{AB} = \sum_{aa'} |a\rangle\langle a'| \left(\sum_b \rho_{aba'b}\right)$$

traza parcial B

$$\rho^{AB} = \sum_{aba'b'} \rho_{aba'b'} |ab\rangle\langle a'b'|$$

Def: Definimos la entropía Von Neumann de la matriz ρ como

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log_2 \rho)$$

y definimos la entropía de entrelazamiento de un est. conjunto $\rho = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ como la entropía de V.N de uno de los subsistemas, ie:

$$S_{ent} = S(\rho_A)$$

Con esta definiciones dadas, continuamos con el problema:

a) $\rho = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| \pm |00\rangle\langle 11| \pm |11\rangle\langle 00| \right)$

$$\Rightarrow \rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho = |0\rangle\langle 0|\left(\rho_{0000} + \cancel{\rho_{0101}}\right) + |1\rangle\langle 1|\left(\cancel{\rho_{1010}} + \rho_{1111}\right) + |0\rangle\langle 1|\left(\cancel{\rho_{0010}} + \cancel{\rho_{0111}}\right) + |1\rangle\langle 0|\left(\cancel{\rho_{1000}} + \cancel{\rho_{1101}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right)$$

$$\Rightarrow S(\rho_A) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\, l_{n_2}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$$

b) $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho = \frac{1}{4}\Big[|0\rangle\langle 0|(1+1) + |1\rangle\langle 1|(1+1) + |0\rangle\langle 1|(1+1) + |1\rangle\langle 0|(1+1) \Big]$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

$$S(\rho_A) = -(1 \log 1 + 0 \log 0) = 0$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

3] Consideremos los estados producto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

Dado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ existen conjuntos ortonormales $\{|i_A\rangle\} \subseteq \mathcal{H}_A$ y $\{|i_B\rangle\} \subseteq \mathcal{H}_B$ tq

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle$$

$\lambda_i \geq 0$ tq $\sum_i \lambda_i^2 = 1$. A esto se le conoce como descomposición de Schmidt.

D/ Dado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle = \sum_{jk} a_{jk} |j\rangle \otimes |k\rangle$ con $\{|j\rangle\}$ $\{|k\rangle\}$ bases de $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ resp.

La idea es aplicar la descomp. SVD en $a = udv$ con u y v mat. unitarias, y d mat. diagonal

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_{ijk} u_{ji} d_{ii} v_{ik} |j\rangle \otimes |k\rangle$$

$$= \sum_i d_{ii} \underbrace{\left(\sum_j u_{ji} |j\rangle\right)}_{|i_A\rangle} \otimes \underbrace{\left(\sum_k v_{ik} |k\rangle\right)}_{|i_B\rangle}$$

///

Lo mismo, nos permite ver fácilmente si un estado está entrelazado o no, pues si $\# I = 1$, se trata de un estado puro

a) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right)$

Notar que la solución de Schmidt es ella misma

b) $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle \right)$

Tomando $B = \{ |0\rangle, |1\rangle \}$

$$= \sum_{j,k \in \{0,1\}} a_{jk} |j\rangle |k\rangle \quad \text{con}$$

$$a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{SVD}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{+}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - |0\rangle - |1\rangle \right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - |0\rangle - |1\rangle \right)$$

$$= 1 \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$\boxed{4}$ Para $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, hallar la solución de Schmidt de

$$|\psi\rangle = \alpha \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \sum_{j,k} a_{jk} |j\rangle |k\rangle$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} V^{+}$$

Como únicamente nos interesa en la matriz singular, podemos, alternativamente considerar

$$A^{+}A = (UDV^{+})^{+}UDV^{+} = V^{+}D^{+}\underbrace{U^{+}U}_{1}DV$$

$$= V\,D^{+}D\,V^{+}$$

De esta modo, podemos obtener D siguiendo

AA^{+}

$$A^{+}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^{+} & \beta^{+} \\ \beta^{+} & \alpha^{+} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overbrace{|\alpha|^2+|\beta|^2}^{=1} & \overbrace{\alpha^{+}\beta+\beta^{+}\alpha}^{=\Gamma} \\ \beta^{+}\alpha+\alpha^{+}\beta & \underbrace{|\alpha|^2+|\beta|^2}_{1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \Gamma \\ \Gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\Gamma}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\Gamma}{2} \end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1+\Gamma}{2}} \end{pmatrix}$$

a) El estado será separable (o puro) cuando

$\Gamma = \pm 1$

b) En cambio, el ket estará entrelazado cuando

$1 < \Gamma < 1$

c) $$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1-\Gamma}{2}}\,|i_1\rangle|j_1\rangle + \sqrt{\frac{1+\Gamma}{2}}\,|i_2\rangle|j_2\rangle$$

$$\Rightarrow Tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = Tr_B\Big(\left(\frac{1-\Gamma}{2}\right)|i_1 j_1\rangle\langle i_1 j_1| + \sqrt{\frac{1-\Gamma}{2}}\sqrt{\frac{1+\Gamma}{2}}\big(|i_1 j_1\rangle\langle i_2 j_2| + |i_2 j_2\rangle\langle i_1 j_1|\big) + \left(\frac{1+\Gamma}{2}\right)|i_2 j_2\rangle\langle i_2 j_2|\Big)$$

$$= \frac{1-r}{2} |i_1\rangle\langle i_1| + \frac{1+r}{2} |i_2\rangle\langle i_2|$$

$$\Rightarrow S(\rho_A) = \frac{1+r}{2} \log_2\left(\frac{1+r}{2}\right) + \frac{1-r}{2} \log_2\left(\frac{1-r}{2}\right)$$

Para maximizar la entropía de entrelazamiento, buscamos r / $0 = \frac{\partial S}{\partial r} \Rightarrow \quad r = 0$

5] Sean un sistema de dos qubits, y dos estados representados por

$$\rho_1 = \underbrace{\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)}_{|\psi_{AB}\rangle \text{ est. de Bell}}\left(\frac{\langle 01| + \langle 10|}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Para ver si puede distinguirse mediante op de la forma $O_A \otimes I_b$, calculamos las mat. densidad reducida a A (pues $\langle O_A \otimes I_b \rangle = \langle O_A \rangle_A$

$$Tr_B(\rho_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo, que la respuesta es no

$$Tr_B(\rho_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Puede utilizar op como $\sigma_x \otimes \sigma_x$