Teoría de la Información Cuántica

Práctica 5 - Año 2020

Beaucamp, Jean Yves

1. Transformada de Fourier Cuántica

1. Consideremos la transformada de Fourier discreta de un conjunto de N números ($f_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$), dada por

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}.$$

   a) La transformada de Fourier discreta inversa se encuentra determinada por

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}jk}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

   satisfaciendo la identidad $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[F_{k'}]]_k = F_k$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_j]_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'=0}^{N-1} F_{k'} e^{i\frac{2\pi}{N}jk'} \right] e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} F_{k'} e^{i\frac{2\pi}{N}jk'} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} F_{k'} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k-k')}.
\end{aligned} \tag{1}$$

   Luego, si $k = k'$, entonces

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}j0} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N,$$

   mientras que para $k \neq k'$, como $k - k' = m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}j(k-k')} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2m\pi}{N}} \right)^j = \frac{1 - e^{i\frac{2m\pi}{N}N}}{1 - e^{i\frac{2m\pi}{N}}} = \frac{1 - e^{i2m\pi}}{1 - e^{i\frac{2m\pi}{N}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{2m\pi}{N}}} = 0.$$

   Podemos escribir estos resultados de manera compacta como,

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}j(k-k')} = N\delta_{kk'},$$

   con lo que (1) resulta en

$$\mathcal{F}[f_j]_k = \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} F_{k'} N \delta_{kk'} = F_k.$$

b) Si extendemos el conjunto de posibles valores de k a todo $k \in \mathbb{Z}$ en la definición de la TF discreta, es fácil ver que

$$F_{k+lN} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k+lN)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} e^{-i2\pi jl} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = F_k.$$

c) Si f_j es una función periódica con período r, tal que $f_{j+r} = f_j$, con $r|N$ (r divisor de N), entonces escribiendo a f_j como la anti-transformada de Fourier de F_k vemos que

$$f_j = f_{j+r} \iff \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}jk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}(j+r)k}$$

$$\implies F_k = 0 \forall k = 0, \dots N-1, \quad \vee e^{i\frac{2\pi}{N}rk}.$$

El segundo caso se reduce fácilmente a la condición

$$\frac{rk}{N} = m \in \mathbb{Z} \implies k = m\frac{N}{r} \iff \frac{N}{r}|k.$$

Más aún, si $k = mN/r$, entonces

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j\frac{mN}{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi\frac{jm}{r}}.$$

Siguiendo los pasos de 1.b, es fácil ver que la exponencial con su argumento así definido resulta periódica en r, con lo que considerando que f_j es también de período r, podemos concluir que todo el sumando es una función periódica de período r. Por lo tanto, como $r|N$, entonces podremos separar la sumatoria en N/r partes iguales, resultando en

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi\frac{jm}{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{N}{r} \sum_{j=0}^{r-1} f_j e^{-i2\pi\frac{jm}{r}} = \frac{\sqrt{N}}{r} \sum_{j=0}^{r-1} f_j e^{-i2\pi\frac{jm}{r}}.$$

2. Sea $f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}xj}$. Su transformada discreta de Fourier resultará en

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}xj} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(x-k)j}.$$

Suponiendo que $x \neq k$, entonces aplicando la fórmula de suma de una serie parcial geométrica,

$$\begin{aligned} F_k = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}(x-k)N}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}(x-k)}} &= \frac{1}{N} \frac{e^{i\pi(x-k)}}{e^{i\frac{\pi}{N}(x-k)}} \frac{e^{-i\pi(x-k)} - e^{i\pi(x-k)}}{e^{-i\frac{\pi}{N}(x-k)} - e^{i\frac{\pi}{N}(x-k)}} \\ &= \frac{1}{N} e^{i\pi(x-k)(1-1/N)} \frac{\sin[\pi(x-k)]}{\sin[\pi(x-k)/N]}. \end{aligned}$$

Luego, como el argumento de la exponencial remanente en el último término de la igualdad es un número puramente imaginario,

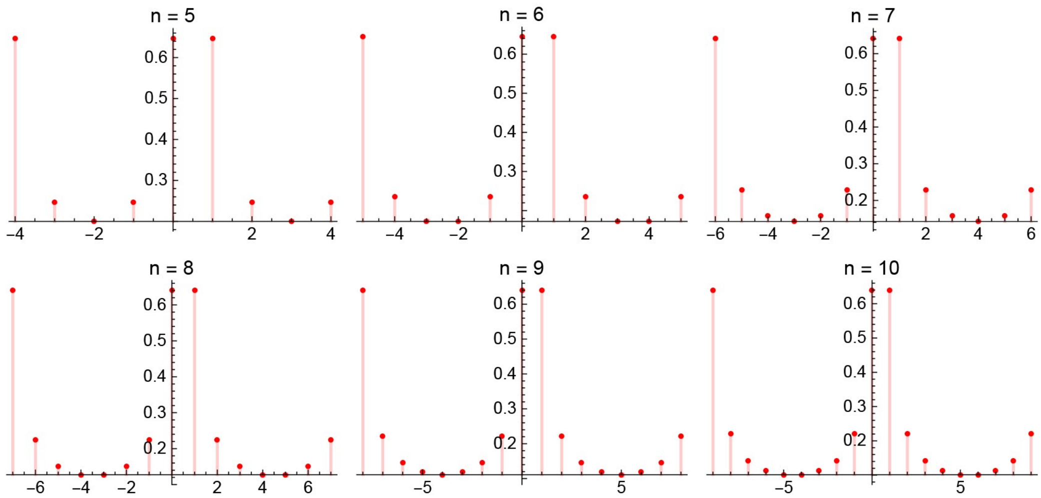
$$|F_k| = \left| \frac{\sin[\pi(x-k)]}{N \sin[\pi(x-k)/N]} \right| = \left| \frac{\text{sinc}[\pi(x-k)]}{\text{sinc}[\pi(x-k)/N]} \right|. \tag{2}$$

Si $x \in \mathbb{Z}$, para $0 \neq |k - x| < N$, el denominador de (2) resulta no-nulo, mientras que el argumento de la función seno cardinal del numerador resulta un múltiplo entero de π, por lo que $F_k = 0$.

```
In[2]:= F[k_, n_, x_] := Abs[Sinc[π (k - x)] / Sinc[π (k-x)/n]];

Grid[ArrayReshape[Table[DiscretePlot[F[k, n, 0.5],
    {k, -(n - 1), n - 1}, PlotLabel → StringForm["n = `1`", n], PlotStyle → Red,
    PlotMarkers → Style["•", FontSize -> 12], PlotRange → Full], {n, 5, 10, 1}], {2, 3}]]
```

Out[3]=




```
In[4]:= Grid[{Table[Plot[F[x, 10, t], {x, -9, 9},
    PlotRange → Full, PlotLabel → StringForm["x = `1`", t]], {t , {0, 0.5}}]}]
```

Out[4]=

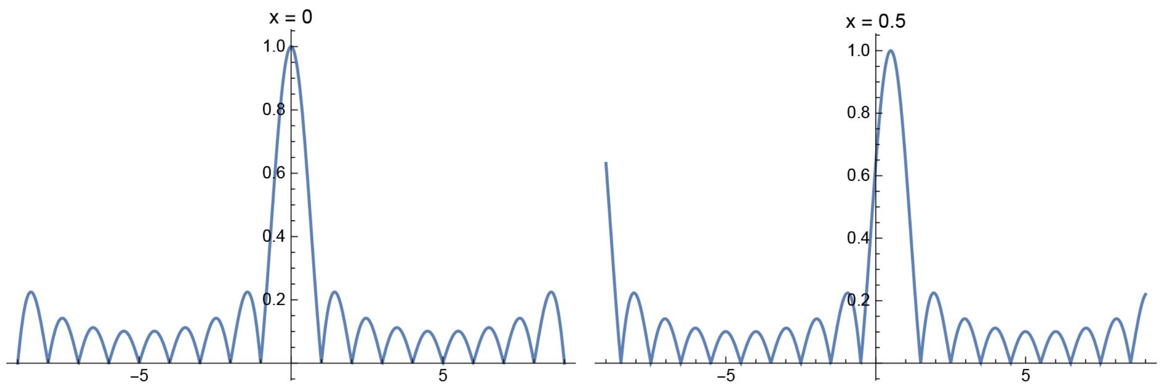


Figura 1

Por el contrario, para $k = x$, $F_x = 1$. El caso en que $k - x = \pm N$, evaluando la función en el límite (extendiendo F_k al dominio continuo, como $F(k)$) obtenemos

$$\lim_{k-x \to N} F_k = 1.$$

Por lo tanto, para $x \in \mathbb{Z}$, $F_k = \delta_{(k-x) \mod N = 0}$, reduciéndose para $|k| < N$ a $F_k = \delta_{kx}$.

Si, por el contrario, permitimos $x \notin \mathbb{Z}$, entonces F_k presentará un comportamiento asintótico a $\delta_{(k-x) \mod N=0}$ en el límite $N \to \infty$, aunque resultará no nula para $(k - x) \mod N \neq 0$, intersectando las oscilaciones de la función continua $F(k)$, como podemos observar en la fig. 1.

Es claro que, como $F(k)$ posee un máximo en $k - x \mod N = 0$ (en el intervalo $0 < k < N - 1$), por lo que F_k tendrá un máximo en el entero $k \in \mathbb{Z}$ más próximo a x.

3. *a*) Sea $\{|j\rangle, j = 0, \ldots, N-1\}$ una base ortonormal de un espacio V. Definimos la Transformada

de Fourier cuántica de $|k\rangle$ como la operación $\hat{U}$:

$$\left|\tilde{k}\right\rangle = \hat{U}\left|k\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}kj}\left|j\right\rangle, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Es fácil ver que los estados $\{\left|\tilde{k}\right\rangle\}$ forman también una base ortonormal, escribiendo

$$\left\langle\tilde{k}\middle|\tilde{k}'\right\rangle = \left\langle k'\middle|\hat{U}^{\dagger}\hat{U}\middle|k\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j,j'=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(kj-k'j')}\left\langle j'\middle|j\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j,j'=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}j(k-k')} = \delta_{kk'},$$

$$\implies \hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \mathbb{1}.$$

Por un tratamiento análogo con las transformadas de Fourier cuánticas inversas se puede probar también que $\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \mathbb{1}$, quedando demostrado que la operación $\hat{U}$ es unitaria.

b) Sea un estado $|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} c_j\left|j\right\rangle$. Al ser $\{\left|\tilde{k}\right\rangle\}$ también una base ortonormal de V, podremos describir a $|\psi\rangle$ también en términos de $\left|\tilde{k}\right\rangle$ como $\psi = \sum_{k=0}^{N-1} C_k\left|\tilde{k}\right\rangle$. La relación entre c_j y C_k puede ser determinada a partir de las condiciones de ortonormalidad de las bases, como

$$\left\langle\tilde{k}\middle|\psi\right\rangle = \sum_{k'=0}^{N-1} C_{k'}\left\langle\tilde{k}\middle|\tilde{k}'\right\rangle = C_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j'=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}j'k}\left\langle j'\right|\right)\left|j\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}$$

$$\therefore C_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}.$$

c) Sean $\hat{X}$, $\hat{P}$, y $\hat{T}$ operadores definidos por $\hat{X}\left|j\right\rangle = j\left|j\right\rangle$, $\hat{P} = \hat{U}\hat{X}\hat{U}^{\dagger}$, y $\hat{T} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\hat{P}}$. Entonces,

$$\hat{P}\left|\tilde{k}\right\rangle = \hat{U}\hat{X}\hat{U}^{\dagger}\left|\tilde{k}\right\rangle = \hat{U}\hat{X}\underbrace{\hat{U}^{\dagger}\hat{U}}_{=\mathbb{1}}\left|k\right\rangle = \hat{U}\hat{X}\left|k\right\rangle = k\hat{U}\left|k\right\rangle = k\left|\tilde{k}\right\rangle,$$

$$\hat{T}\left|\tilde{k}\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i\frac{2\pi}{N}\right)^n}{n!}\hat{P}^n\left|\tilde{k}\right\rangle == \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i\frac{2\pi}{N}\right)^n}{n!}k^n\left|\tilde{k}\right\rangle = e^{-i\frac{2\pi}{N}k}\left|\tilde{k}\right\rangle,$$

y

$$\hat{T}\left|j\right\rangle = \hat{T}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}\left|\tilde{k}\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}e^{-i\frac{2\pi}{N}k}\left|\tilde{k}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j+1)k}\left|\tilde{k}\right\rangle$$

$$= \left|j+1\right\rangle.$$

4. Sea $\left|\tilde{k}\right\rangle$ el estado transformado en Fourier de $|j\rangle$. En un sistema de n qubits, $N = 2^n$, pudiendo describir a los estados $|j\rangle$ en términos de su descomposición en dígitos binaria como

$$j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{2-2} + \ldots j_n 2^0 = \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left|\tilde{k}\right\rangle &= \frac{1}{2^{n/2}}\sum_{j=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi}{2^n}kj}\left|j\right\rangle \\ &= \frac{1}{2^{n/2}}\sum_{j=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi}{2^n}k\sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l}}\left|j\right\rangle\end{aligned}$$

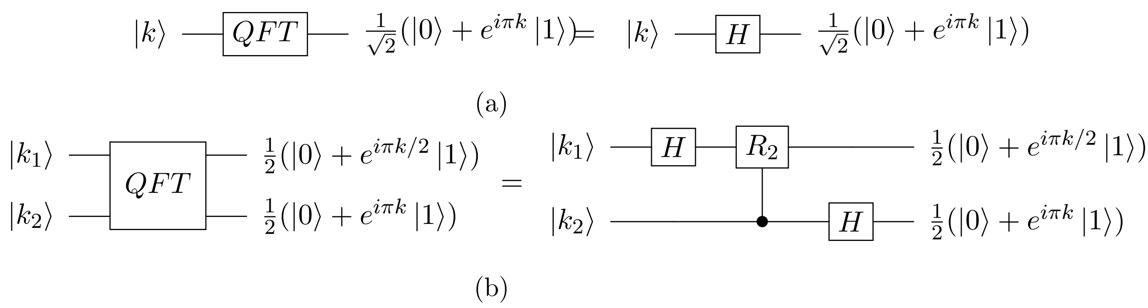


Figura 2: Circuitos del algoritmo de Transformada de Fourier Cuántica para un estado de (a) 1 qubit y (b) 2 qubits.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_n=0}^{1} e^{i2\pi k \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{-l}} |j_1 j_2 \dots j_n\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_n=0}^{1} \bigotimes_{l=1}^{n} e^{i2\pi k j_l 2^{-l}} |j_l\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[\sum_{j_l=0}^{1} e^{i2\pi k j_l 2^{-l}} |j_l\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle + e^{i2\pi k/2^l} |1\rangle \right].
\end{aligned}
$$

Para un sistema de 1 qubit, esta resulta en

$$
\left|\tilde{k}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle + e^{i\pi k} |1\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle + (-1)^k |1\rangle \right],
$$

siendo equivalente a la acción de una compuerta Haddamard

$$
H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

sobre el qubit original, representado por el circuito en la figura 2a.

Para un sistema de 2 qubits, la transformada de Fourier será

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{k}\right\rangle &= \frac{1}{2} \left[|0\rangle + e^{i\pi k} |1\rangle \right] \otimes \left[|0\rangle + e^{i\pi k/2} |1\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[|0\rangle + (-1)^k |1\rangle \right] \otimes \left[|0\rangle + e^{i\pi k/2} |1\rangle \right],
\end{aligned}
$$

siendo representado por el circuito cuántico de la fig. 2b, donde la operación sobre el segundo qubit consiste en la composición de una compuerta Haddamard, y una rotación R_2 dada por

$$
R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.
$$

5. *a*) En general, los algoritmos cuánticos basados en la transformada de Fourier se componen del siguiente esquema:

$$
\begin{aligned}
|0\rangle |0\rangle &\xrightarrow{\hat{H}^{\otimes 2^t}} \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle |0\rangle \\
&\xrightarrow{\hat{U}} \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle |f(j)\rangle
\end{aligned}
$$

$$\xrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle\sum_{j=0}^{2^n-1}e^{-i\frac{2\pi}{2^n}kj}|f(j)\rangle\,,$$

donde $\hat{U}$ es una operación sobre el último qubit (o conjunto de qubits, tal que contengan la información del sistema), controlada sobe el primer conjunto de n-qubits, y FT^{-1} representa a la transformada de Fourier inversa.

b) En el caso de estimación de fase, el estado transformado del segundo conjunto de qubits se encuentra descrito por $|f(j)\rangle = e^{i\frac{2\pi}{2^n}xj}|\Phi\rangle$, con $0 \le x \le 2^n$. Si $x = m \in \mathbb{Z}$, con $0 \le m \le N-1$, entonces el estado final del algoritmo de estimación de fase resultará en

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle\sum_{j=0}^{2^n-1}e^{-i\frac{2\pi}{2^n}kj}|f(j)\rangle &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle\sum_{j=0}^{2^n-1}e^{-i\frac{2\pi}{2^n}kj}e^{i\frac{2\pi}{2^n}mj}|\Phi\rangle\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle\sum_{j=0}^{2^n-1}e^{-i\frac{2\pi}{2^n}(k-m)j}|\Phi\rangle\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle\,2^n\delta_{km}|\Phi\rangle\\
&= |m\rangle|\Phi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Si $x \notin \mathbb{Z}$, entonces, como fue demostrado en el ejercicio 2, el estado final presentará oscilaciones , aunque con un máximo en módulo en el entero más próximo a x.

c) En el algoritmo de determinación del período, donde la función $f(j)$ es periódica de período r ($f(j) = f(j+r)\forall j$), podemos ver que, a partir del estado inicial $|0\rangle|0\rangle$,

$$\begin{aligned}
|0\rangle|0\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}|x\rangle|f(x)\rangle\\
&\xrightarrow{FT} \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{r-1}e^{i\frac{2\pi}{r}kx}|x\rangle|f(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}\frac{kN}{r}x}|x\rangle\right)|f(k)\rangle\\
&\xrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{r-1}\left|k\frac{N}{r}\right\rangle|f(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{u}|u\rangle\left|f\left(u\frac{r}{N}\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

para $N = 2^n$, donde se han utilizado los resultados del ej. 1. En particular, por el corolario demostrado en 1.c, $k = mN/r$, con $m \in \mathbb{Z}$, verificando que solo aparecerán en el primer conjunto de qubits del estado final los estados con u múltiplo de N/r ($u = kN/r$).

6. Sea $\hat{A}$ un operador representado por la matriz A de $N \times N$, con elementos $A_{ij} = f(j-i)$, siendo $f(j+N) = f(j),\ \forall j$. Luego,

$$\begin{aligned}
\hat{A}\left|\tilde{k}\right\rangle = \sum_{j=0}^{N-1}|j\rangle\left\langle j\middle|\hat{A}\middle|\tilde{k}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}mk}|j\rangle\langle j|\hat{A}|m\rangle\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}mk}|j\rangle f(m-j)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}(m-j)k}e^{i\frac{2\pi}{N}jk}|j\rangle f(m-j)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}lk}f(l)e^{i\frac{2\pi}{N}jk}|j\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}lk} f(l) \left|\tilde{k}\right\rangle \\
&= F(k) \left|\tilde{k}\right\rangle,
\end{aligned}
$$

siendo

$$F(k) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}lk} f(l)$$

el autovalor asociado al autovector $\left|\tilde{k}\right\rangle$ de la matriz A.