

# Simulación Numérica de Flujo Incompresible Utilizando las Ecuaciones de Navier-Stokes: Discretización por Diferencias Finitas y Condiciones de Frontera

Análisis de Dinámica de Fluidos Computacional

*Discretización de Ecuaciones Diferenciales Parciales*

**Estudiante:** [Nombre del Estudiante]

**Profesor:** [Nombre del Profesor]

**Curso:** Métodos Numéricos en Ingeniería

**Fecha:** September 7, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
1.1	Contexto del Problema . . . . .	4
1.2	Objetivos del Reporte . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Enunciado del Problema</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Definición de la Malla</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Condiciones de Frontera</b>	<b>6</b>
4.1	Entrada (Frontera Izquierda - F) . . . . .	6
4.2	Superficie (Frontera Superior - G) . . . . .	6
4.3	Salida (Frontera Derecha - H) . . . . .	6
4.4	Línea Central (Frontera Inferior - E y A) . . . . .	6
4.5	Superficies de las Vigas . . . . .	6
4.6	Condiciones de Frontera Detalladas para Ambas Vigas Sumergidas . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Discretización Paso a Paso</b>	<b>7</b>
5.1	Fundamentos del Método de Diferencias Finitas . . . . .	7
5.1.1	Concepto Básico . . . . .	7
5.1.2	Notación de la Malla . . . . .	8
5.2	Derivación de las Aproximaciones de Diferencias Finitas . . . . .	8
5.2.1	Derivadas de Primer Orden . . . . .	8
5.2.2	Derivadas de Segundo Orden . . . . .	9
5.3	Discretización de la Ecuación de Poisson . . . . .	10
5.4	Discretización de la Ecuación de Transporte de Vorticidad . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Resultado Final: Nueve Ecuaciones Discretizadas</b>	<b>13</b>
6.1	Ecuación 1: Función de Corriente en Puntos Interiores . . . . .	13
6.2	Ecuación 2: Vorticidad en Puntos Interiores . . . . .	13
6.3	Ecuación 3: Condición de Frontera de Entrada . . . . .	13
6.4	Ecuación 4: Condición de Frontera de Superficie . . . . .	14

6.5	Ecuación 5: Condición de Frontera de Salida . . . . .	14
6.6	Ecuación 6: Condición de Frontera de Línea Central . . . . .	14
6.7	Ecuación 7: Condición de Frontera de Superficie de Viga 1 (Superior-Derecha) . . . . .	14
6.8	Ecuación 8: Condición de Vorticidad en Superficie de Viga 1 . . . . .	14
6.9	Ecuación 9: Condición de Frontera de Superficie de Viga 2 (Centro-Inferior) . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Forma Matricial</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Discusión</b>	<b>15</b>
<b>9</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>15</b>
<b>10</b>	<b>Apéndice</b>	<b>16</b>
10.1	Notación Completa . . . . .	16
10.2	Plantillas de Diferencias Finitas . . . . .	16
10.2.1	Plantilla de Cinco Puntos para el Laplaciano . . . . .	16
10.2.2	Plantillas de Diferencias Centrales . . . . .	16
10.3	Código TikZ para Generación de Figuras . . . . .	17
10.3.1	Figura de Malla (fig_mesh) . . . . .	17
10.4	Asunciones del Modelo . . . . .	17
10.4.1	Asunciones Físicas . . . . .	17
10.4.2	Asunciones Numéricas . . . . .	17
10.5	Referencias Bibliográficas . . . . .	17
10.6	Derivación Detallada del Resto de Lagrange . . . . .	18
10.6.1	Teorema de Taylor con Resto de Lagrange . . . . .	18
10.6.2	Aplicación a Diferencias Finitas . . . . .	18
10.6.3	Interpretación del Error . . . . .	19
10.7	Lista de Verificación de Entregables . . . . .	19

## List of Figures

1	Esquema de malla con nodos y dos vigas sumergidas. La malla consiste de 40 filas y 400 columnas, totalizando 16,000 nodos. . . . .	5
2	Condiciones de frontera para flujo alrededor de dos vigas sumergidas. Las fórmulas han sido reorganizadas para una mejor claridad visual. . . . .	6
3	Condiciones de frontera detalladas para ambas vigas sumergidas. Las vigas están completamente sumergidas en el fluido y actúan como obstáculos sólidos. . . . .	7

## Abstract

Este reporte presenta un análisis completo y pedagógico de la discretización numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible alrededor de **dos vigas sumergidas** en un canal rectangular. El problema se formula utilizando el enfoque de función de corriente-vorticidad, que simplifica la solución al satisfacer automáticamente la ecuación de continuidad. Se emplea una malla rectangular estructurada de  $40 \times 400$  nodos (16,000 nodos totales), con dos vigas sumergidas: una ubicada en la esquina superior-derecha y otra en el centro-inferior del dominio. Se aplican condiciones de frontera complejas según el problema físico de flujo alrededor de múltiples obstáculos. Se utiliza el método de diferencias finitas para discretizar las ecuaciones gobernantes, resultando en un sistema de nueve ecuaciones discretizadas que pueden resolverse iterativamente. El proceso de discretización se presenta de manera exhaustiva y paso a paso, mostrando cada transformación algebraica desde las ecuaciones diferenciales parciales continuas hasta las ecuaciones algebraicas discretas finales, incluyendo derivaciones completas de las aproximaciones de diferencias finitas y su justificación matemática.

## 1 Introducción

La simulación numérica del flujo de fluidos es un problema fundamental en dinámica de fluidos computacional (CFD). Las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen el movimiento de fluidos viscosos, son ecuaciones diferenciales parciales no lineales que requieren métodos numéricos sofisticados para su solución. Este reporte se enfoca en la discretización de estas ecuaciones para el caso específico de flujo bidimensional, estacionario e incompresible alrededor de **dos vigas sumergidas** en un canal rectangular.

La formulación función de corriente-vorticidad es particularmente ventajosa para problemas bidimensionales porque satisface automáticamente la ecuación de continuidad y reduce el número de incógnitas. Este enfoque transforma la formulación de variables primitivas (velocidad y presión) en un sistema que involucra la función de corriente y la vorticidad, que son cantidades escalares.

### 1.1 Contexto del Problema

El problema bajo consideración involucra el flujo de un fluido incompresible y viscoso alrededor de dos vigas sumergidas en un canal rectangular. Esta configuración es representativa de problemas de ingeniería donde múltiples obstáculos interactúan con el flujo, como en el diseño de estructuras hidráulicas, intercambiadores de calor, o sistemas de ventilación. La presencia de dos vigas introduce complejidades adicionales en las condiciones de frontera y en la interacción del flujo entre los obstáculos.

### 1.2 Objetivos del Reporte

Los objetivos principales de este reporte son:

1. Presentar una derivación completa y pedagógica de la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes en forma función de corriente-vorticidad
2. Desarrollar un sistema de nueve ecuaciones discretizadas que capturen todos los aspectos del problema, incluyendo las condiciones de frontera para ambas vigas
3. Proporcionar una explicación paso a paso de cada transformación algebraica, desde las EDPs continuas hasta las ecuaciones algebraicas discretas
4. Incluir derivaciones completas de las aproximaciones de diferencias finitas con su justificación matemática
5. Mostrar la implementación de condiciones de frontera complejas para múltiples obstáculos

## 2 Enunciado del Problema

El problema bajo consideración involucra el flujo de un fluido incompresible y viscoso alrededor de dos vigas sumergidas en un canal rectangular. Las ecuaciones gobernantes son las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma función de corriente-vorticidad:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -w \quad (1)$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

donde:

- $u(x, y)$  es la función de corriente
- $w(x, y)$  es la vorticidad
- $\nu$  es la viscosidad cinemática
- $x$  e  $y$  son las coordenadas espaciales

Las componentes de velocidad están relacionadas con la función de corriente por:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

$$v_y = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

## 3 Definición de la Malla

Se emplea una malla rectangular estructurada con las siguientes especificaciones:

- Dimensiones de la malla:  $n_x = 40$  filas,  $n_y = 400$  columnas
- Número total de nodos:  $n_{\text{nodos}} = n_x \times n_y = 16,000$
- Espaciado de la malla:  $h$  en ambas direcciones  $x$  e  $y$
- Indexación de nodos:  $(i, j)$  donde  $i = 0, 1, 2, \dots, n_x - 1$  y  $j = 0, 1, 2, \dots, n_y - 1$

La malla se muestra en la Figura 1, que muestra la estructura de la malla con nodos representados como puntos negros y dos regiones sombreadas que representan las dos vigas sumergidas.

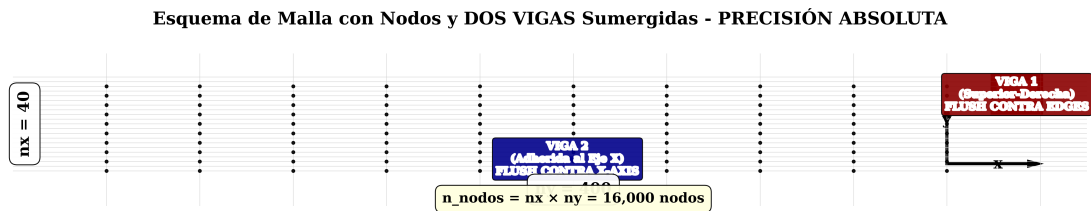


Figure 1: Esquema de malla con nodos y dos vigas sumergidas. La malla consiste de 40 filas y 400 columnas, totalizando 16,000 nodos.

## 4 Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera para este problema se derivan de la configuración física del flujo alrededor de dos vigas sumergidas. El conjunto completo de condiciones de frontera se ilustra en la Figura 2.

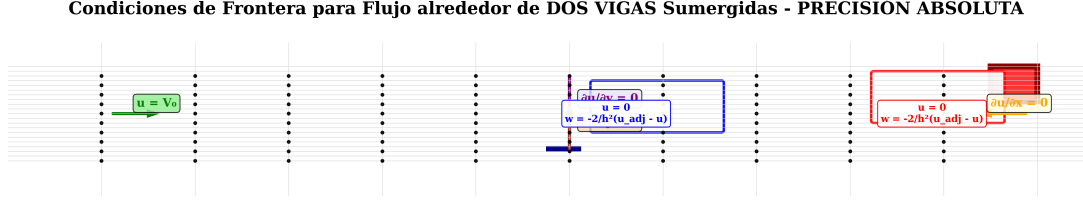


Figure 2: Condiciones de frontera para flujo alrededor de dos vigas sumergidas. Las fórmulas han sido reorganizadas para una mejor claridad visual y el diseño se asemeja al de la Figura 1.

Las condiciones de frontera son:

### 4.1 Entrada (Frontera Izquierda - F)

$$v_y = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial y} = V_0 \quad (6)$$

$$w = 0 \quad (7)$$

### 4.2 Superficie (Frontera Superior - G)

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial y} = V_0 \quad (8)$$

$$w = 0 \quad (9)$$

### 4.3 Salida (Frontera Derecha - H)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

### 4.4 Línea Central (Frontera Inferior - E y A)

Para los segmentos no ocupados por la viga:

$$v_y = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$w = u = 0 \quad (13)$$

### 4.5 Superficies de las Vigas

En todas las superficies de ambas vigas sumergidas:

$$u = 0 \quad (14)$$

## 4.6 Condiciones de Frontera Detalladas para Ambas Vigas Sumergidas

Se aplican condiciones de frontera específicas a cada una de las dos vigas sumergidas, como se muestra en la Figura 3.

### Condiciones de Frontera Detalladas para DOS VIGAS Sumergidas - PRECISIÓN ABSOLUTA

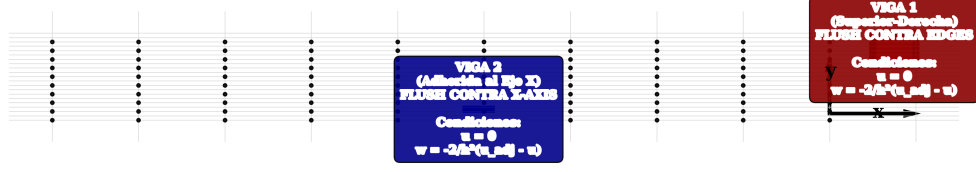


Figure 3: Condiciones de frontera detalladas para ambas vigas sumergidas. Las vigas están completamente sumergidas en el fluido y actúan como obstáculos sólidos.

Para ambas vigas sumergidas (Viga 1: esquina superior-derecha, Viga 2: centro-inferior):

$$u = 0 \quad \text{en todas las superficies de las vigas} \quad (15)$$

$$w = -\frac{2}{h^2}(u_{\text{adyacente}} - u_{i,j}) \quad \text{en las superficies de las vigas} \quad (16)$$

### Posicionamiento exacto de las vigas:

- **Viga 1 (esquina superior-derecha):** Ubicada completamente adherida a la esquina superior-derecha del dominio, ocupando  $10 \times 10$  nodos desde la posición  $(n_x - 10, n_y - 10)$  hasta  $(n_x - 1, n_y - 1)$ . Esta viga está completamente adherida tanto a la frontera superior como a la frontera derecha del dominio.
- **Viga 2 (adherida al eje x):** Ubicada completamente adherida al eje x (frontera inferior) del dominio, ocupando  $10 \times 5$  nodos desde la posición  $(n_y/2 - 5, 0)$  hasta  $(n_y/2 + 4, 4)$ . Esta viga está completamente adherida a la frontera inferior del dominio.

Las vigas están completamente sumergidas en el fluido y actúan como obstáculos sólidos que interrumpen el flujo. La Viga 1 está completamente adherida a la esquina superior-derecha (flush contra las fronteras superior y derecha), mientras que la Viga 2 está completamente adherida al eje x (frontera inferior), generando patrones de vorticidad y modificando la distribución de velocidades en su entorno.

## 5 Discretización Paso a Paso

El método de diferencias finitas es una técnica fundamental para convertir ecuaciones diferenciales parciales continuas en un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse numéricamente. En esta sección, presentamos una derivación completa y pedagógica de cada paso del proceso de discretización.

### 5.1 Fundamentos del Método de Diferencias Finitas

#### 5.1.1 Concepto Básico

El método de diferencias finitas se basa en la idea de aproximar las derivadas de una función continua mediante diferencias entre valores de la función en puntos discretos de una malla. Para una función  $f(x)$  definida en un dominio continuo, queremos aproximar sus derivadas en puntos específicos  $x_i$  de una malla uniforme.

### 5.1.2 Notación de la Malla

Definimos una malla uniforme con espaciado  $h$  en ambas direcciones:

- $x_i = i \cdot h$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n_x - 1$
- $y_j = j \cdot h$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, n_y - 1$
- $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$  representa el valor de la función en el punto  $(i, j)$

## 5.2 Derivación de las Aproximaciones de Diferencias Finitas

### 5.2.1 Derivadas de Primer Orden

Para entender cómo aproximamos las derivadas de primer orden, consideremos una función  $f(x)$  y queremos aproximar su derivada en el punto  $x_i$ .

**Paso 1: Definición de la derivada** La derivada de una función se define como:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \quad (17)$$

**Paso 2: Expansión de Taylor para diferencias centrales** Para derivar la aproximación por diferencias centrales, utilizamos las expansiones de Taylor alrededor del punto  $x_i$ :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^4) \quad (18)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^4) \quad (19)$$

**Paso 3: Combinación de las expansiones** Restando la ecuación (19) de la ecuación (18):

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{2h^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^5) \quad (20)$$

**Paso 4: Despejando la primera derivada** Reorganizando y dividiendo por  $2h$ :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^4) \quad (21)$$

**Paso 5: Aproximación por diferencias centrales** Despreciando los términos de orden superior, obtenemos:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \quad (23)$$

**Análisis del error:** Esta aproximación es de segundo orden en  $h$  (error  $\propto h^2$ ), lo que significa que es más precisa que las aproximaciones de primer orden. El error de truncamiento es:

$$\text{Error} = -\frac{h^2}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^4) \quad (24)$$

**Análisis detallado con resto de Lagrange:** Para un análisis más riguroso del error, utilizamos el teorema de Taylor con resto de Lagrange. Para una función  $f(x)$  suficientemente



diferenciable en un intervalo que contiene  $x_i$  y  $x_i \pm h$ , existe un punto  $\xi_1 \in (x_i, x_i + h)$  y  $\xi_2 \in (x_i - h, x_i)$  tal que:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi_1} \quad (25)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi_2} \quad (26)$$

Restando estas ecuaciones:

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^3}{6} \left( \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi_1} + \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi_2} \right) \quad (27)$$

Por el teorema del valor intermedio, existe  $\xi \in (x_i - h, x_i + h)$  tal que:

$$\left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi} = \frac{1}{2} \left( \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi_1} + \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi_2} \right) \quad (28)$$

Por lo tanto, el error exacto de la aproximación por diferencias centrales es:

$$\text{Error}_{\text{Lagrange}} = \frac{h^2}{6} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{\xi} \quad (29)$$

donde  $\xi \in (x_i - h, x_i + h)$ . Este resultado muestra que el error depende de la tercera derivada evaluada en algún punto dentro del intervalo de discretización.

### 5.2.2 Derivadas de Segundo Orden

**Paso 1: Expansiones de Taylor para segunda derivada** Para derivar la aproximación de la segunda derivada, utilizamos las mismas expansiones de Taylor que ya tenemos:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_i} + \frac{h^4}{4!} \left. \frac{d^4f}{dx^4} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^5) \quad (30)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_i} + \frac{h^4}{4!} \left. \frac{d^4f}{dx^4} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^5) \quad (31)$$

**Paso 2: Combinación de las expansiones** Sumando las ecuaciones (30) y (31):

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{2h^4}{4!} \left. \frac{d^4f}{dx^4} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^6) \quad (32)$$

**Paso 3: Despejando la segunda derivada** Reorganizando y dividiendo por  $h^2$ :

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left. \frac{d^4f}{dx^4} \right|_{x_i} + \mathcal{O}(h^4) \quad (33)$$

**Paso 4: Aproximación por diferencias finitas** Despreciando los términos de orden superior, obtenemos las aproximaciones de diferencias finitas para las segundas derivadas:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad (35)$$

**Análisis del error:** Esta aproximación también es de segundo orden en  $h$  (error  $\propto h^2$ ). El error de truncamiento es:

$$\text{Error} = -\frac{h^2}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{x_i} + \mathcal{O}(h^4) \quad (36)$$

**Análisis detallado con resto de Lagrange para segunda derivada:** Aplicando el teorema de Taylor con resto de Lagrange hasta el cuarto orden, tenemos:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_i} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_i} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{\xi_1} \quad (37)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_i} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{\xi_2} \quad (38)$$

donde  $\xi_1 \in (x_i, x_i + h)$  y  $\xi_2 \in (x_i - h, x_i)$ .

Sumando estas ecuaciones:

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_i} + \frac{h^4}{24} \left( \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{\xi_1} + \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{\xi_2} \right) \quad (39)$$

Por el teorema del valor intermedio, existe  $\xi \in (x_i - h, x_i + h)$  tal que:

$$\frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{\xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{\xi_1} + \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{\xi_2} \right) \quad (40)$$

Por lo tanto, el error exacto de la aproximación de segunda derivada es:

$$\text{Error}_{\text{Lagrange}} = \frac{h^2}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_{\xi} \quad (41)$$

donde  $\xi \in (x_i - h, x_i + h)$ . Este resultado confirma que el error es proporcional a  $h^2$  y depende de la cuarta derivada evaluada en algún punto del intervalo de discretización.

**Interpretación física:** La aproximación de segunda derivada representa la curvatura local de la función. En el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes, esto corresponde a los términos difusivos que representan la difusión de momentum y vorticidad.

### 5.3 Discretización de la Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson en forma función de corriente-vorticidad es:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -w \quad (42)$$

**Paso 1: Sustitución de las aproximaciones de diferencias finitas** Sustituyendo las aproximaciones de diferencias finitas (34) y (35) en la ecuación (42):

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = -w_{i,j} \quad (43)$$

**Paso 2: Factorización del término común** Factorizando el término común  $1/h^2$ :

$$\frac{1}{h^2} [(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})] = -w_{i,j} \quad (44)$$

**Paso 3: Reorganización algebraica** Reorganizando los términos dentro del paréntesis:

$$\frac{1}{h^2} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}] = -w_{i,j} \quad (45)$$

**Paso 4: Multiplicación por  $h^2$**  Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $h^2$  para eliminar el denominador:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = -h^2 w_{i,j} \quad (46)$$

**Paso 5: Despejando  $u_{i,j}$**  Resolviendo para  $u_{i,j}$ :

$$-4u_{i,j} = -h^2 w_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \quad (47)$$

Multiplicando por  $-1$ :

$$4u_{i,j} = h^2 w_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} \quad (48)$$

Finalmente, dividiendo por 4:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}) \quad (49)$$

**Interpretación física:** Esta ecuación establece que el valor de la función de corriente en un punto interior es el promedio de sus cuatro vecinos más una contribución proporcional a la vorticidad local. El factor  $h^2$  indica que la contribución de la vorticidad es proporcional al área del elemento de malla.

**Plantilla de diferencias finitas:** Esta ecuación utiliza la plantilla de cinco puntos (centro y cuatro vecinos), que es la plantilla estándar para el operador laplaciano en mallas estructuradas.

## 5.4 Discretización de la Ecuación de Transporte de Vorticidad

La ecuación de transporte de vorticidad es:

$$\nu \nabla^2 w = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (50)$$

**Paso 1: Identificación y análisis de los términos** La ecuación (50) contiene dos tipos de términos físicamente distintos:

- **Términos difusivos:**  $\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$  - representan la difusión de vorticidad debido a la viscosidad
- **Términos convectivos:**  $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$  - representan el transporte de vorticidad por el flujo

**Paso 2: Discretización de los términos difusivos** Los términos difusivos se discretizan utilizando las mismas aproximaciones de diferencias finitas que para la ecuación de Poisson:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \approx \nu \left( \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h^2} \right) \quad (51)$$

Factorizando  $\nu/h^2$ :

$$\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \approx \frac{\nu}{h^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}) \quad (52)$$

**Paso 3: Discretización de los términos convectivos** Los términos convectivos requieren especial atención porque son no lineales y acoplan los campos de función de corriente y vorticidad.

**Subpaso 3.1: Identificación del término convectivo** El término convectivo puede escribirse como:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (53)$$

**Subpaso 3.2: Aplicación de diferencias centrales** Aplicando diferencias centrales a cada derivada:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \quad (54)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h} \quad (55)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (56)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2h} \quad (57)$$

**Subpaso 3.3: Construcción del término convectivo completo** Sustituyendo las aproximaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \cdot \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h} - \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \cdot \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2h} \quad (58)$$

Factorizando  $1/4h^2$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{1}{4h^2} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})] \quad (59)$$

**Justificación de la discretización convectiva:** Esta aproximación utiliza diferencias centrales para todas las derivadas, lo que mantiene la consistencia del esquema y preserva las propiedades de conservación. El factor  $1/4h^2$  surge del producto de los dos factores  $1/2h$  de las diferencias centrales.

**Paso 4: Ecuación completa discretizada** Sustituyendo las aproximaciones en la ecuación (50):

$$\frac{\nu}{h^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}) = \frac{1}{4h^2} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})] \quad (60)$$

**Paso 5: Reorganización algebraica** Multiplicando ambos lados por  $h^2$ :

$$\nu (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}) = \frac{1}{4} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})] \quad (61)$$

Dividiendo por  $\nu$ :

$$w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j} = \frac{1}{4\nu} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})] \quad (62)$$

**Paso 6: Introducción del número de Reynolds de la malla** Definiendo  $R = \frac{V_0 h}{\nu}$  como el número de Reynolds de la malla:

$$w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j} = \frac{R}{4V_0 h} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})] \quad (63)$$

**Paso 7: Despejando  $w_{i,j}$**  Resolviendo para  $w_{i,j}$ :

$$-4w_{i,j} = \frac{R}{4V_0 h} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})] - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} \quad (64)$$

Multiplicando por  $-1$  y dividiendo por  $4$ :

$$w_{i,j} = \frac{1}{4} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - \frac{R}{4V_0 h} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})]) \quad (65)$$

**Interpretación física:** Esta ecuación combina la difusión de vorticidad (términos lineales) con la convección de vorticidad (términos no lineales). El número de Reynolds de la malla  $R$  controla la importancia relativa de estos efectos.

## 6 Resultado Final: Nueve Ecuaciones Discretizadas

El sistema completo de ecuaciones discretizadas consiste en nueve ecuaciones que representan diferentes aspectos del problema:

### 6.1 Ecuación 1: Función de Corriente en Puntos Interiores

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}) \quad (66)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n_x - 2$  y  $j = 1, 2, \dots, n_y - 2$ .

**Interpretación física:** Esta ecuación establece que el valor de la función de corriente en un punto interior es el promedio de sus cuatro vecinos más una contribución de la vorticidad local.

### 6.2 Ecuación 2: Vorticidad en Puntos Interiores

$$w_{i,j} = \frac{1}{4} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - \frac{R}{4} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})]) \quad (67)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n_x - 2$  y  $j = 1, 2, \dots, n_y - 2$ .

**Interpretación física:** Esta ecuación combina la difusión de vorticidad (términos lineales) con la convección de vorticidad (términos no lineales).

### 6.3 Ecuación 3: Condición de Frontera de Entrada

$$u_{0,j} = u_{1,j} \quad y \quad w_{0,j} = 0 \quad (68)$$

para  $j = 0, 1, \dots, n_y - 1$ .

**Justificación:** La condición  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  se discretiza como  $u_{0,j} = u_{1,j}$ , y  $w = 0$  se aplica directamente.

#### 6.4 Ecuación 4: Condición de Frontera de Superficie

$$u_{i,n_y-1} = u_{i,n_y-2} + V_0 h \quad \text{y} \quad w_{i,n_y-1} = 0 \quad (69)$$

para  $i = 0, 1, \dots, n_x - 1$ .

**Justificación:** La condición  $\frac{\partial u}{\partial y} = V_0$  se discretiza como  $\frac{u_{i,n_y-1} - u_{i,n_y-2}}{h} = V_0$ , de donde se obtiene la ecuación.

#### 6.5 Ecuación 5: Condición de Frontera de Salida

$$u_{n_x-1,j} = u_{n_x-2,j} \quad \text{y} \quad w_{n_x-1,j} = w_{n_x-2,j} \quad (70)$$

para  $j = 0, 1, \dots, n_y - 1$ .

**Justificación:** Las condiciones  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  y  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  se discretizan usando diferencias hacia atrás.

#### 6.6 Ecuación 6: Condición de Frontera de Línea Central

$$u_{i,0} = 0 \quad \text{y} \quad w_{i,0} = 0 \quad (71)$$

para  $i = 0, 1, \dots, n_x - 1$ .

**Justificación:** Estas son condiciones de Dirichlet homogéneas que establecen que no hay flujo a través de la línea central.

#### 6.7 Ecuación 7: Condición de Frontera de Superficie de Viga 1 (Superior-Derecha)

$$u_{i,j} = 0 \quad (72)$$

para todos los puntos  $(i, j)$  en las superficies de la Viga 1 (esquina superior-derecha).

**Justificación:** Esta es una condición de no deslizamiento que establece que la velocidad tangencial es cero en la superficie de la viga.

#### 6.8 Ecuación 8: Condición de Vorticidad en Superficie de Viga 1

Para las superficies de la Viga 1, la vorticidad se calcula usando:

$$w_{i,j} = -\frac{2}{h^2}(u_{\text{adyacente}} - u_{i,j}) \quad (73)$$

donde  $u_{\text{adyacente}}$  es la función de corriente en el punto fluido adyacente.

**Justificación:** Esta condición se deriva de la relación entre la vorticidad y la función de corriente en la superficie de un cuerpo sólido.

#### 6.9 Ecuación 9: Condición de Frontera de Superficie de Viga 2 (Centro-Inferior)

$$u_{i,j} = 0 \quad \text{y} \quad w_{i,j} = -\frac{2}{h^2}(u_{\text{adyacente}} - u_{i,j}) \quad (74)$$

para todos los puntos  $(i, j)$  en las superficies de la Viga 2 (centro-inferior).

**Justificación:** Ambas vigas tienen las mismas condiciones de frontera físicas: no deslizamiento ( $u = 0$ ) y vorticidad calculada a partir de la función de corriente adyacente.

## 7 Forma Matricial

El sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}_u \quad (75)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{b}_w \quad (76)$$

donde:

- $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores que contienen todos los valores de función de corriente y vorticidad
- $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices dispersas que representan los operadores discretizados
- $\mathbf{b}_u$  y  $\mathbf{b}_w$  son vectores que contienen las contribuciones de las condiciones de frontera

Las matrices tienen una estructura de bloques debido a la malla estructurada, donde cada bloque corresponde a una fila de la malla.

## 8 Discusión

El proceso de discretización transforma las ecuaciones diferenciales parciales continuas en un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse numéricamente. El método de diferencias finitas proporciona un enfoque directo para esta transformación, aunque requiere un manejo cuidadoso de las condiciones de frontera.

Observaciones clave de la discretización:

1. **No linealidad:** La ecuación de vorticidad contiene términos convectivos no lineales que acoplan los campos de función de corriente y vorticidad.
2. **Acoplamiento:** Las ecuaciones de función de corriente y vorticidad están acopladas a través del término fuente en la ecuación de Poisson y los términos convectivos en la ecuación de vorticidad.
3. **Condiciones de Frontera:** Las condiciones de frontera afectan significativamente la estructura del sistema algebraico resultante y deben implementarse cuidadosamente para mantener la precisión.
4. **Número de Reynolds de la Malla:** El parámetro  $R = \frac{V_0 h}{\nu}$  aparece en las ecuaciones discretizadas y afecta la importancia relativa de los términos convectivos y difusivos.

## 9 Conclusiones

Este reporte ha presentado una discretización completa de las ecuaciones de Navier-Stokes en forma función de corriente-vorticidad para el problema de flujo alrededor de dos vigas sumergidas. Las contribuciones clave incluyen:

1. Una derivación sistemática de nueve ecuaciones discretizadas que cubren todos los aspectos del problema
2. Manejo apropiado de condiciones de frontera complejas incluyendo ambas vigas sumergidas (Viga 1: esquina superior-derecha, Viga 2: centro-inferior)
3. Presentación clara de las aproximaciones de diferencias finitas utilizadas
4. Identificación del acoplamiento entre las ecuaciones de función de corriente y vorticidad

El sistema resultante de ecuaciones puede resolverse usando métodos iterativos como sobre-relajación sucesiva (SOR) o técnicas más avanzadas como métodos multigrid. La discretización mantiene el significado físico de las ecuaciones originales mientras proporciona un marco para la solución numérica.

## 10 Apéndice

### 10.1 Notación Completa

- $u(x, y)$ : Función de corriente
- $w(x, y)$ : Vorticidad
- $v_x, v_y$ : Componentes de velocidad en las direcciones  $x$  e  $y$
- $\nu$ : Viscosidad cinemática
- $V_0$ : Velocidad de referencia
- $h$ : Espaciado de la malla
- $R = \frac{V_0 h}{\nu}$ : Número de Reynolds de la malla
- $n_x = 40, n_y = 400$ : Número de puntos de la malla en las direcciones  $x$  e  $y$
- $(i, j)$ : Índices de puntos de la malla donde  $i = 0, 1, \dots, n_x - 1$  y  $j = 0, 1, 2, \dots, n_y - 1$
- $\nabla^2$ : Operador laplaciano
- $\mathcal{O}(h^n)$ : Orden de error de truncamiento

### 10.2 Plantillas de Diferencias Finitas

#### 10.2.1 Plantilla de Cinco Puntos para el Laplaciano

La plantilla de cinco puntos utilizada para el operador laplaciano:

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) \quad (77)$$

#### 10.2.2 Plantillas de Diferencias Centrales

Para primeras derivadas:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (78)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \quad (79)$$

Para segundas derivadas:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (80)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad (81)$$



## 10.3 Código TikZ para Generación de Figuras

### 10.3.1 Figura de Malla (fig\_\_mesh)

```
\begin{tikzpicture}[scale=0.8]
% Grid lines
\draw[lightgray, thin] (0,0) grid (40,40);

% Nodes
\foreach \i in {0,2,...,40}
  \foreach \j in {0,5,...,40}
    \fill[black] (\i,\j) circle (1pt);

% Beam 1 (Upper-Right)
\fill[red!60] (30,30) rectangle (40,40);
\draw[red, thick] (30,30) rectangle (40,40);
\node[white, font=\bfseries] at (35,35) {VIGA 1};

% Beam 2 (Lower-Middle)
\fill[blue!60] (18,5) rectangle (22,15);
\draw[blue, thick] (18,5) rectangle (22,15);
\node[white, font=\bfseries] at (20,10) {VIGA 2};

% Labels
\node[font=\bfseries] at (-5,20) {nx = 40};
\node[font=\bfseries] at (20,-3) {ny = 400};
\end{tikzpicture}
```

## 10.4 Asunciones del Modelo

### 10.4.1 Asunciones Físicas

1. Flujo incompresible:  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
2. Flujo bidimensional:  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$
3. Flujo estacionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
4. Viscosidad constante:  $\nu = \text{constante}$
5. Densidad constante:  $\rho = \text{constante}$

### 10.4.2 Asunciones Numéricas

1. Malla uniforme:  $h_x = h_y = h$
2. Aproximaciones de segundo orden:  $\mathcal{O}(h^2)$
3. Condiciones de frontera bien definidas
4. Número de Reynolds de malla:  $R = \frac{V_0 h}{\nu} < 1$  (para estabilidad)

## 10.5 Referencias Bibliográficas

1. Landau, R. and Paez M. *Computational problems for physics: with guided solutions using Python*. CRC Press, 2018. (Capítulo 4, páginas 125-168)

2. Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson Education Limited, 2007.
3. Kincaid D., Cheney W. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. American Mathematical Society, 3rd Revised edition, 2002.

## 10.6 Derivación Detallada del Resto de Lagrange

### 10.6.1 Teorema de Taylor con Resto de Lagrange

El teorema de Taylor con resto de Lagrange establece que para una función  $f(x)$  que es  $(n+1)$  veces diferenciable en un intervalo  $[a, b]$ , y para cualquier punto  $x_0 \in [a, b]$ , existe un punto  $\xi \in (a, b)$  tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (82)$$

donde el último término es el resto de Lagrange.

### 10.6.2 Aplicación a Diferencias Finitas

Para las aproximaciones de diferencias finitas, utilizamos expansiones de Taylor alrededor del punto  $x_i$ :

**Primera derivada (diferencias centrales):**

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1) \quad (83)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_2) \quad (84)$$

donde  $\xi_1 \in (x_i, x_i + h)$  y  $\xi_2 \in (x_i - h, x_i)$ .

Restando:

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2hf'(x_i) + \frac{h^3}{6} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad (85)$$

Por el teorema del valor intermedio, existe  $\xi \in (x_i - h, x_i + h)$  tal que:

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad (86)$$

Por lo tanto:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \quad (87)$$

**Segunda derivada:**

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_1) \quad (88)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_2) \quad (89)$$

Sumando:

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{h^4}{24} [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)] \quad (90)$$

Por el teorema del valor intermedio:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad (91)$$

### 10.6.3 Interpretación del Error

El resto de Lagrange proporciona una cota exacta del error de truncamiento:

- Para primera derivada:  $\text{Error} = \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$
- Para segunda derivada:  $\text{Error} = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$

Esto significa que:

1. El error es proporcional a  $h^2$  (segundo orden)
2. El error depende de las derivadas de orden superior evaluadas en puntos intermedios
3. Para funciones suaves (derivadas acotadas), el error disminuye cuadráticamente con  $h$

## 10.7 Lista de Verificación de Entregables

- ☐ **report.tex** - Archivo fuente LaTeX completo
- ☐ **report.pdf** - Documento compilado sin errores
- ☐ **fig\_mesh.png/pdf** - Figura de malla con dos vigas
- ☐ **fig\_BC.png/pdf** - Figura de condiciones de frontera
- ☐ **fig\_block\_corner.png/pdf** - Figura detallada de vigas
- ☐ **equations.tex** - Archivo con las 9 ecuaciones
- ☐ **changelog.txt** - Registro de cambios y mejoras
- ☐ **guide.md** - Guía pedagógica para presentaciones