Derivación de Ecuaciones de Movimiento para Proyectiles

Con Resistencia del Aire y Viento

Física Mecánica - Dinámica de Fluidos

26 de noviembre de 2025

1 Introducción

El siguiente documento detalla la derivación matemática paso a paso de las ecuaciones de movimiento para un proyectil bajo la influencia de fuerzas resistivas (arrastre lineal $F \propto v$) y factores ambientales como el viento. Se parte de la Segunda Ley de Newton y se utiliza cálculo integral.

2 Caso 1: Resistencia del Aire (Sin Viento)

En este modelo, la fuerza de arrastre es $\vec{F}_d = -b\vec{v}$.

2.1 1.1 Movimiento Horizontal (Eje X)

$$-bv_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

Separamos variables e integramos entre límites v_{0x} y $v_x(t)$:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

$$\ln v_x - \ln v_{0x} = -\frac{bt}{m} \implies \ln\left(\frac{v_x}{v_{0x}}\right) = -\frac{bt}{m}$$

Despejando v_x:

$$\boxed{v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{bt}{m}}} \tag{1}$$

Para la posición, integramos la velocidad:

$$x(t) = \int_0^t v_{0x}e^{-\frac{bt}{m}}dt = v_{0x}\left[-\frac{m}{b}e^{-\frac{bt}{m}}\right]_0^t$$

Evaluando límites (t y 0):

$$\boxed{x(t) = \frac{mv_{0x}}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)} \tag{2}$$

2.2 1.2 Movimiento Vertical (Eje Y)

$$-mg - bv_y = m\frac{dv_y}{dt} \implies \frac{m}{mg + bv_y}dv_y = -dt$$

Integramos (usando sustitución $u = mg + bv_y$):

$$\frac{1}{b}\ln(mg + bv_y)\Big|_{v_{0y}}^{v_y} = -\frac{t}{m}$$

$$\ln\left(\frac{mg + bv_y}{mg + bv_{0y}}\right) = -\frac{bt}{m}$$

Despejando $v_y(t)$:

$$\boxed{v_y(t) = \left(\frac{mg}{b} + v_{0y}\right)e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{mg}{b}} \tag{3}$$

Integrando para posición $y(t)$:

$$\boxed{y(t) = \frac{m}{b}\left(\frac{mg}{b} + v_{0y}\right)\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) - \frac{mg}{b}t} \tag{4}$$

2.3 1.3 Demostración: Tiempo de Subida (t_{sub})

El tiempo de subida ocurre cuando la velocidad vertical se anula ($v_y = 0$). Partimos de la ecuación de velocidad:

$$0 = \left(\frac{mg}{b} + v_{0y}\right)e^{-\frac{bt_{sub}}{m}} - \frac{mg}{b}$$

Pasamos $\frac{mg}{b}$ al otro lado:

$$\frac{mg}{b} = \left(\frac{mg}{b} + v_{0y}\right)e^{-\frac{bt_{sub}}{m}}$$

Dividimos por el término entre paréntesis:

$$\frac{\frac{mg}{b}}{\frac{mg+bv_{0y}}{b}} = e^{-\frac{bt_{sub}}{m}} \implies \frac{mg}{mg + bv_{0y}} = e^{-\frac{bt_{sub}}{m}}$$

Invertimos la fracción para eliminar el signo negativo del exponente:

$$\frac{mg + bv_{0y}}{mg} = e^{\frac{bt_{sub}}{m}} \implies 1 + \frac{bv_{0y}}{mg} = e^{\frac{bt_{sub}}{m}}$$

Aplicamos logaritmo natural y despejamos t_{sub}:

$$\boxed{t_{sub} = \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{bv_{0y}}{mg}\right)} \tag{5}$$

2.4 1.4 Demostración: Altura Máxima (H_{max})

Sustituimos t_{sub} en la ecuación de posición $y(t)$.

$$H_{max} = \frac{m}{b}\left(\frac{mg}{b} + v_{0y}\right)\left(1 - e^{-\frac{bt_{sub}}{m}}\right) - \frac{mg}{b}t_{sub}$$

Sabemos del paso anterior que $e^{-\frac{bt_{sub}}{m}} = \frac{mg}{mg+bv_{0y}}$. Sustituimos esto en el primer término:

$$\text{Término 1} = \frac{m}{b}\left(\frac{mg + bv_{0y}}{b}\right)\left(1 - \frac{mg}{mg + bv_{0y}}\right)$$

$$= \frac{m}{b^2}(mg + bv_{0y}) \left(\frac{mg + bv_{0y} - mg}{mg + bv_{0y}} \right)$$

$$= \frac{m}{b^2}(mg + bv_{0y}) \left(\frac{bv_{0y}}{mg + bv_{0y}} \right) = \frac{m}{b^2}(bv_{0y}) = \frac{mv_{0y}}{b}$$

Ahora sustituimos el Término 1 simplificado y la expresión de t_{sub} en la ecuación completa:

$$\boxed{H_{max} = \frac{mv_{0y}}{b} - \frac{mg}{b} \left[\frac{m}{b} \ln \left(1 + \frac{bv_{0y}}{mg} \right) \right]} \tag{6}$$

Simplificando:

$$H_{max} = \frac{mv_{0y}}{b} - \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(1 + \frac{bv_{0y}}{mg} \right) \tag{7}$$

3 Caso 2: Resistencia del Aire Y Viento

Introducimos un viento horizontal constante $\vec{W} = (V_w, 0)$. La fuerza depende de la velocidad relativa $v_x - V_w$.

3.1 2.1 Demostración: Movimiento Horizontal (Eje X)

$$m\frac{dv_x}{dt} = -b(v_x - V_w)$$

Separamos variables con cambio $u = v_x - V_w$, $du = dv_x$:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x - V_w} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

$$\ln(v_x - V_w)\Big|_{v_{0x}}^{v_x} = -\frac{bt}{m}$$

$$\ln\left(\frac{v_x - V_w}{v_{0x} - V_w}\right) = -\frac{bt}{m}$$

Aplicando exponencial y despejando v_x:

$$\boxed{v_x(t) = V_w + (v_{0x} - V_w)e^{-\frac{bt}{m}}} \tag{8}$$

Para la posición $x(t)$, integramos $v_x(t)$:

$$x(t) = \int_0^t \left[V_w + (v_{0x} - V_w)e^{-\frac{bt}{m}}\right] dt$$

Integramos término a término: 1. $\int V_w dt = V_w t$ 2. $\int (v_{0x} - V_w)e^{-\frac{bt}{m}} dt = (v_{0x} - V_w)\left(-\frac{m}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}\Big|_0^t$ Evaluando límites para el segundo término:

$$-\frac{m}{b}(v_{0x} - V_w)(e^{-\frac{bt}{m}} - 1) = \frac{m}{b}(v_{0x} - V_w)(1 - e^{-\frac{bt}{m}})$$

Sumando todo:

$$\boxed{x(t) = V_w t + \frac{m}{b}(v_{0x} - V_w)\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)} \tag{9}$$

3.2 2.2 Movimiento Vertical y Parámetros

Dado que el viento es horizontal, las fuerzas en Y no cambian.

- La demostración de **Tiempo de Subida** es idéntica a la Sección 1.3.
- La demostración de **Altura Máxima** es idéntica a la Sección 1.4.

3.3 2.3 Alcance Horizontal Total (Diferencia Clave)

El alcance total se obtiene evaluando $x(t)$ en el tiempo de vuelo total T.

$$X_{alcance} = x(T)$$

Sustituyendo T en la fórmula demostrada en 2.1:

$$\boxed{X_{alcance} = V_w T + \frac{m}{b}(v_{0x} - V_w)\left(1 - e^{-\frac{bT}{m}}\right)} \tag{10}$$

Esta fórmula demuestra que el alcance es la suma del desplazamiento que tendría sin viento, más (o menos) el desplazamiento provocado por el arrastre del viento ($V_w T$).

4 Consideraciones Físicas: Lanzamiento de Disco

El lanzamiento de disco es un problema aerodinámico complejo.

4.1 1. Aerodinámica: Sustentación y Arrastre

El disco actúa como un ala.

- **Fuerza de Sustentación (L):** Generada por Bernoulli ($P + \frac{1}{2}\rho v^2 =$ cte). Mayor velocidad arriba implica menor presión.
$$L = \frac{1}{2}\rho A v^2 C_L$$
- **Relación L/D:** Se busca maximizar el ángulo de ataque óptimo (típicamente $10^\circ - 15^\circ$).

4.2 2. Dinámica Rotacional

- **Estabilidad Giroscópica:** La conservación del momento angular ($\vec{L}$) impide que el disco se voltee (tumble).
- **Precesión:** El torque aerodinámico (centro de presión adelantado) causa precesión (giro lateral) en lugar de levantar la nariz, debido al efecto giroscópico.

4.3 3. La Paradoja del Viento en Contra

Un viento en contra puede aumentar la distancia.

- $L \propto v_{rel}^2$. Viento en contra aumenta v_{rel}.
- El aumento cuadrático en Sustentación compensa el aumento en Arrastre, manteniendo el disco en vuelo más tiempo ("efecto planeador").