Presentación TFM de Ingeniería Matemática y Computación

El problema de los tres cuerpos en la geometría intrínseca del plano

Autor: Juan Francisco Alférez Muñoz

Director: Dr. Rodrigo Gonçalves Schaefer

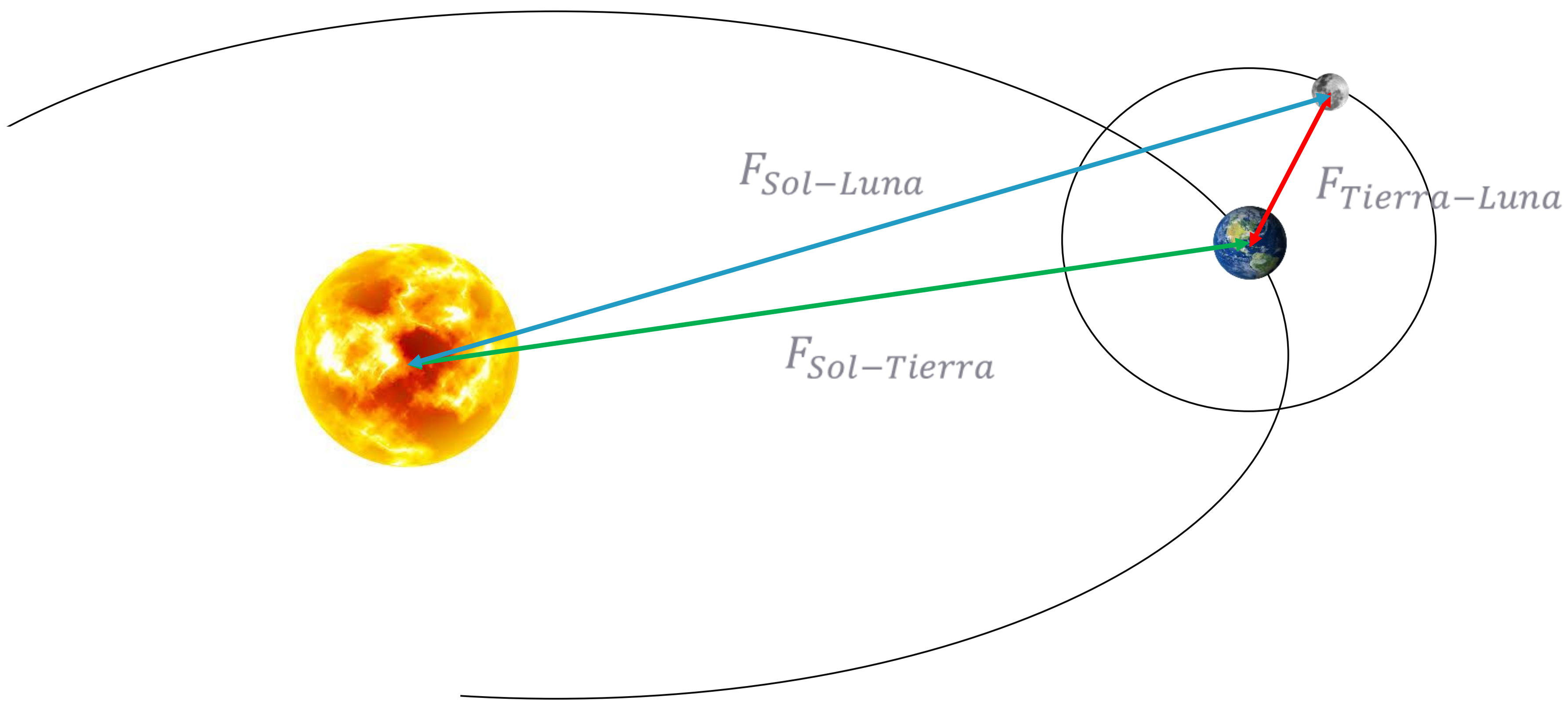
15/11/2022

unir LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

ÍNDICE

01 - Introducción
Problema general

El problema de los tres cuerpos es uno de los sistemas dinámicos mas estudiados – Un ejemplo es el sistema Sol-Tierra-Luna



- Misiones espaciales
- Trayectorias
- Descubrimiento de nuevos astros

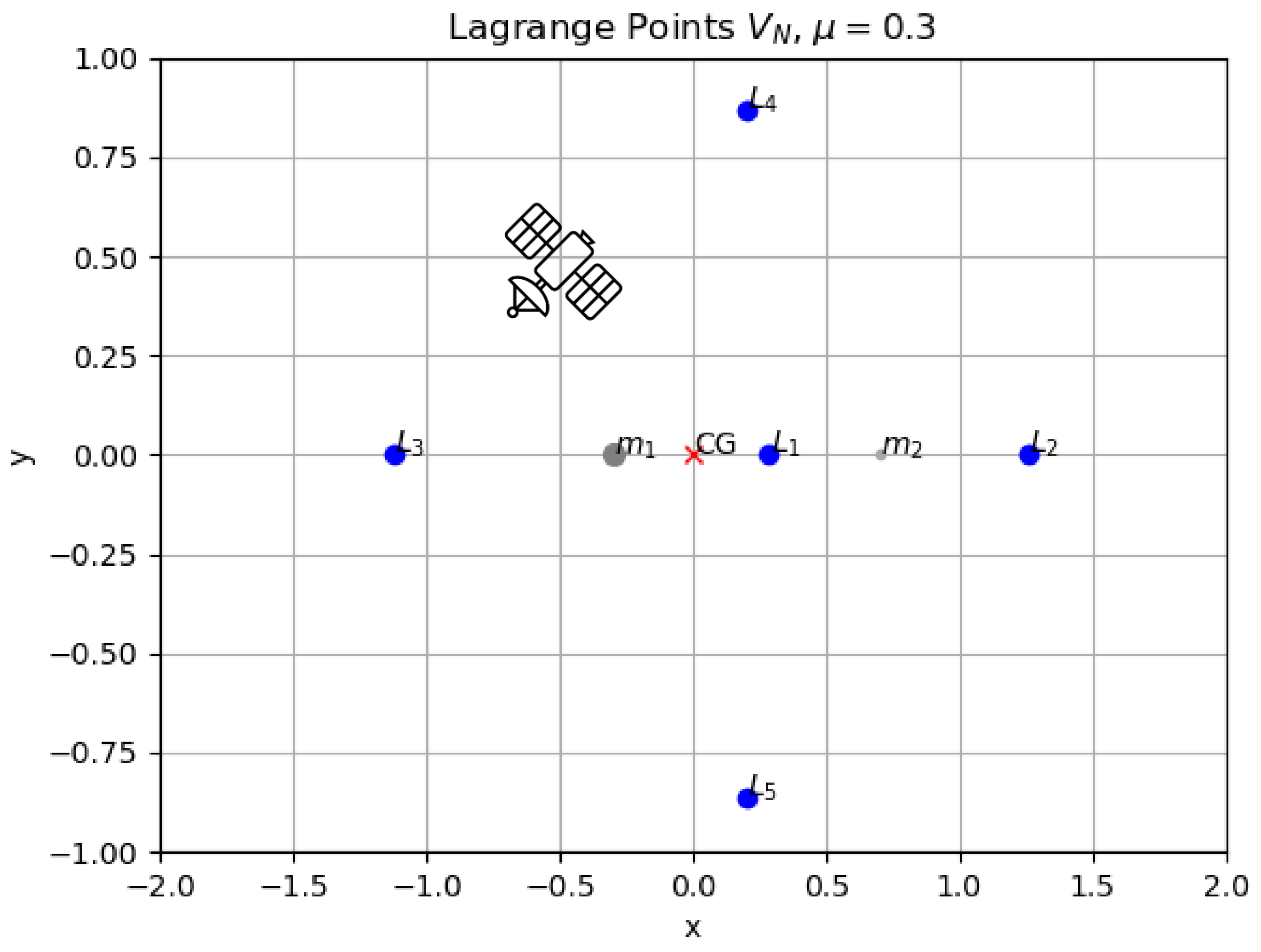
Problema estudiado

Problema circular restringido de los tres cuerpos: CR3BP (Circular Restricted Three Bodies Problem) – Problema de los tres cuerpos con simplificaciones

- Órbitas **coplanarias** (movimiento en el plano).
- La masa del **tercer cuerpo despreciable** respecto a los otros dos.
- **Órbitas circulares** respecto al centro de masas del Sistema de los **cuerpos principales**.
- Los cuerpos se simulan como **masas puntuales**.

02 - Objetivo
Problema estudiado

Interesante aplicación en el espacio – Órbitas de satélites artificiales en sistemas con dos cuerpos principales



- **Puntos de equilibrio** o puntos de Lagrange (L1, L2, L3, L4, L5)
- **Cuerpos principales** (m1, m2)

- ¿Estabilidad?
- ¿Órbitas acotadas?

02 - Objetivo
Comparación Potenciales

El objetivo de este trabajo es el estudio y la comparación de un modelo CR3BP utilizando dos modelos de potenciales: Newtoniano vs logarítmico

Newtoniano: modelo clásico

$$V_N \approx \frac{1}{r} \rightarrow F_N \approx \frac{1}{r^2}$$

Logarítmico: modelo utilizado más para el estudio de galaxias

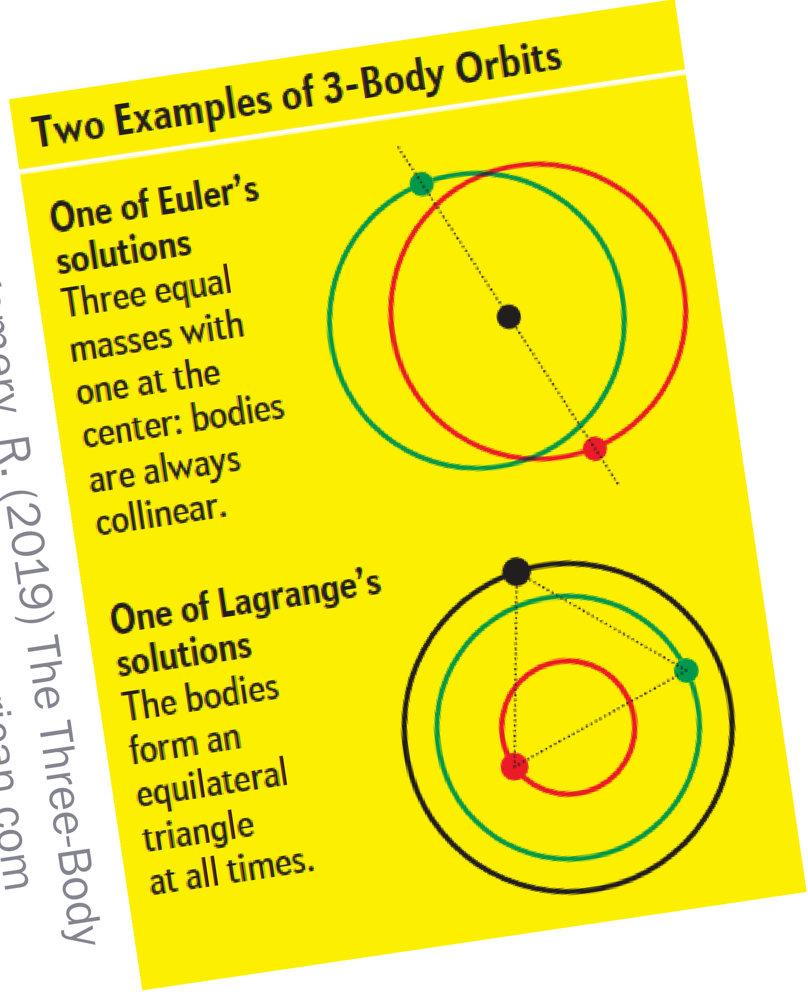
$$V_L \approx \log r \rightarrow F_L \approx \frac{1}{r}$$

03 - Estado del arte
Un poco de historia

1687 — **Newton**
Principia.
Planteamiento CR3BP

1767 — **Euler**

1772 — **Lagrange**

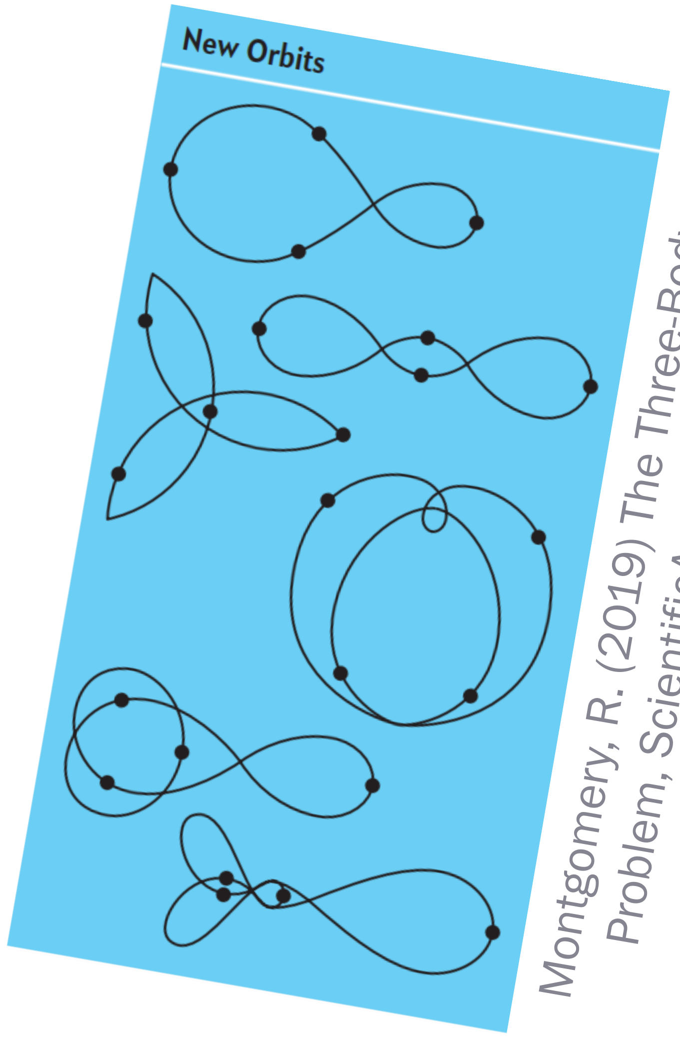


Montgomery, R. (2019) The Three-Body Problem, ScientificAmerican.com

1892 — **Poincaré**
CR3BP - Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.

1912 — **Sundman**
Expansión de series de potencias

1990's — **Otros**



Montgomery, R. (2019) The Three-Body Problem, ScientificAmerican.com

Potencial gravitatorio

Definiendo un campo potencial del que bien la fuerza gravitacional.

- Campo de fuerzas atractor: $\nabla \cdot \mathbf{E_g} = -c\rho_g$
- Potencial irrotacional: $\nabla \times \mathbf{E_g} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E_g} &= -c\rho_g \\ \nabla \times \mathbf{E_g} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{E_g} = -\nabla\varphi_g$$

- El potencial gravitatorio, resulta finalmente de resolver la **ecuación de Poisson**:

$$\nabla \cdot (-\nabla\varphi_g) = -c\rho_g$$

$$\Rightarrow \triangle\varphi_g = c\rho_g$$

- Condiciones de contorno de desvanecimiento: $\nabla\varphi \to 0 \quad cuando \quad ||r|| \to \infty$

- Buscando la solución fundamental y resolviendo se obtiene:

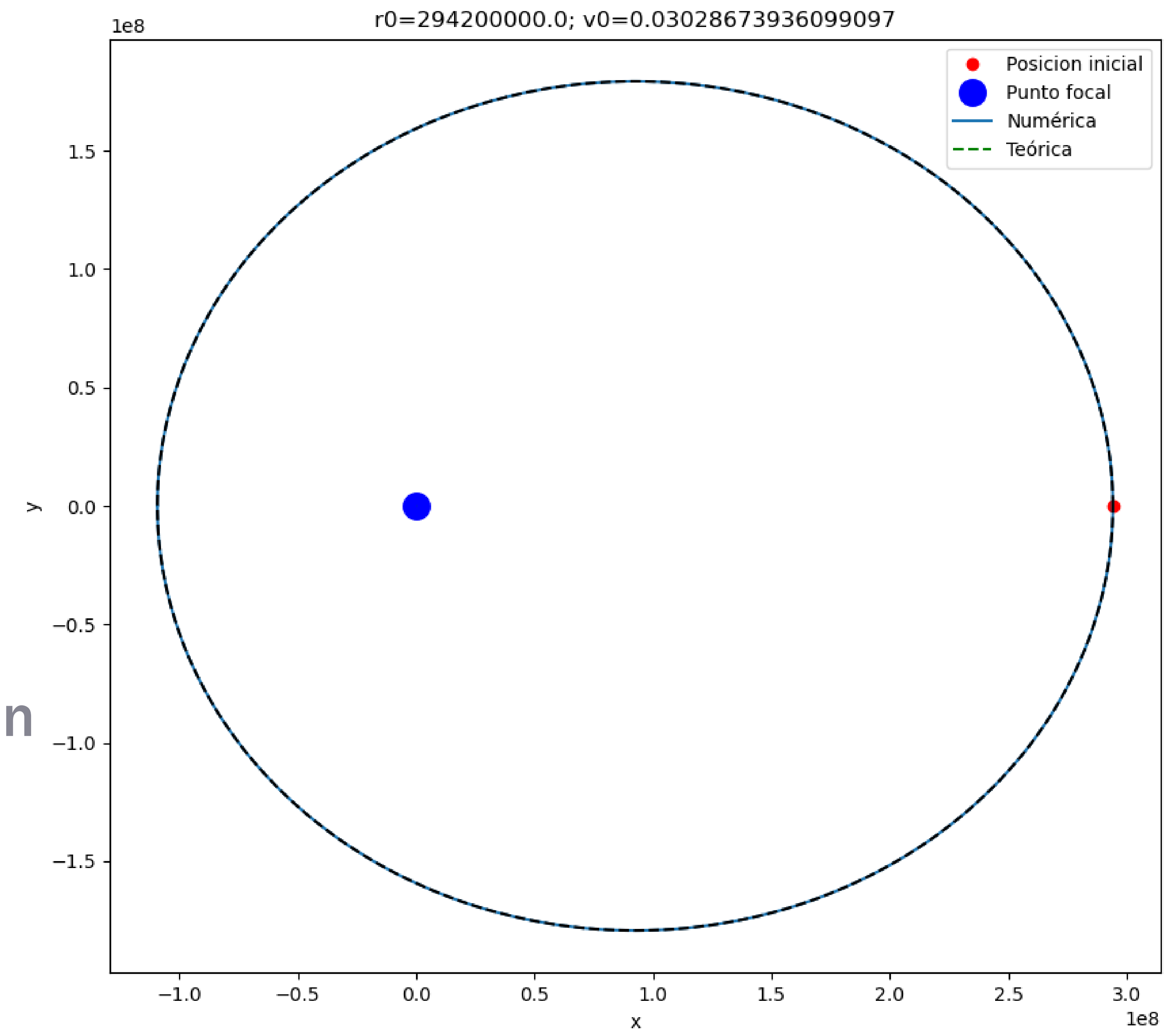
$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma(r, r_0) &= -\frac{1}{2\pi} log(||r - r_0||) \quad cuando \quad n = 2 \\ &= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{||r - r_0||^{n-2}} \quad cuando \quad n \geqslant 3 \end{aligned}}$$

Problema de los dos cuerpos

Problema clásico del movimiento de dos cuerpos en el espacio – Sólo les afecta la fuerza de la gravedad entre ellos.

- Sólo les afecta la fuerza gravitacional
- Se conserva la cantidad de movimiento y el momento angular -> movimiento en el plano

- Cuenta con solución analítica
- Las soluciones numéricas se pueden validar con la solución analítica



Problema de los tres cuerpos

Problema que estudia el movimiento de tres cuerpos en el espacio– Sólo les afecta la fuerza de la gravedad entre ellos.

- Sólo les afecta la **fuerza gravitacional**.
- Se han descubierto muchas **órbitas periódicas** bajo ciertas condiciones, y se espera que haya muchas mas.

- Por el momento, **no** cuenta con **solución analítica**.
- Actualmente se resuelve **numéricamente**.

CR3BP, Problema de los tres cuerpos simplificado

Problema que estudia el movimiento de tres cuerpos en el espacio con ciertas restricciones – Dada la complejidad del sistema, se estudia en un caso concreto, conocido como problema circular restringido de los tres cuerpos, CR3BP (Circular Restricted Three body Problem).

- Asumimos que hay un **tercer cuerpo** de **masa despreciable**, llamamos a los otros dos “**principales**”.
- Los cuerpos principales se mueven en **órbitas circulares** alrededor del centro de masa del sistema.

- Dado que la masa del tercer cuerpo es despreciable, éste no afecta al movimiento de los principales.
- El tercer cuerpo está a merced del campo potencial que describen los cuerpos principales.

04 - Desarrollo
Adimensionalización y ejes rotativos

Variables:

$$G = 1 \qquad t' = \sqrt{\frac{d^3}{G\ M_{TOTAL}}}$$

Masas:

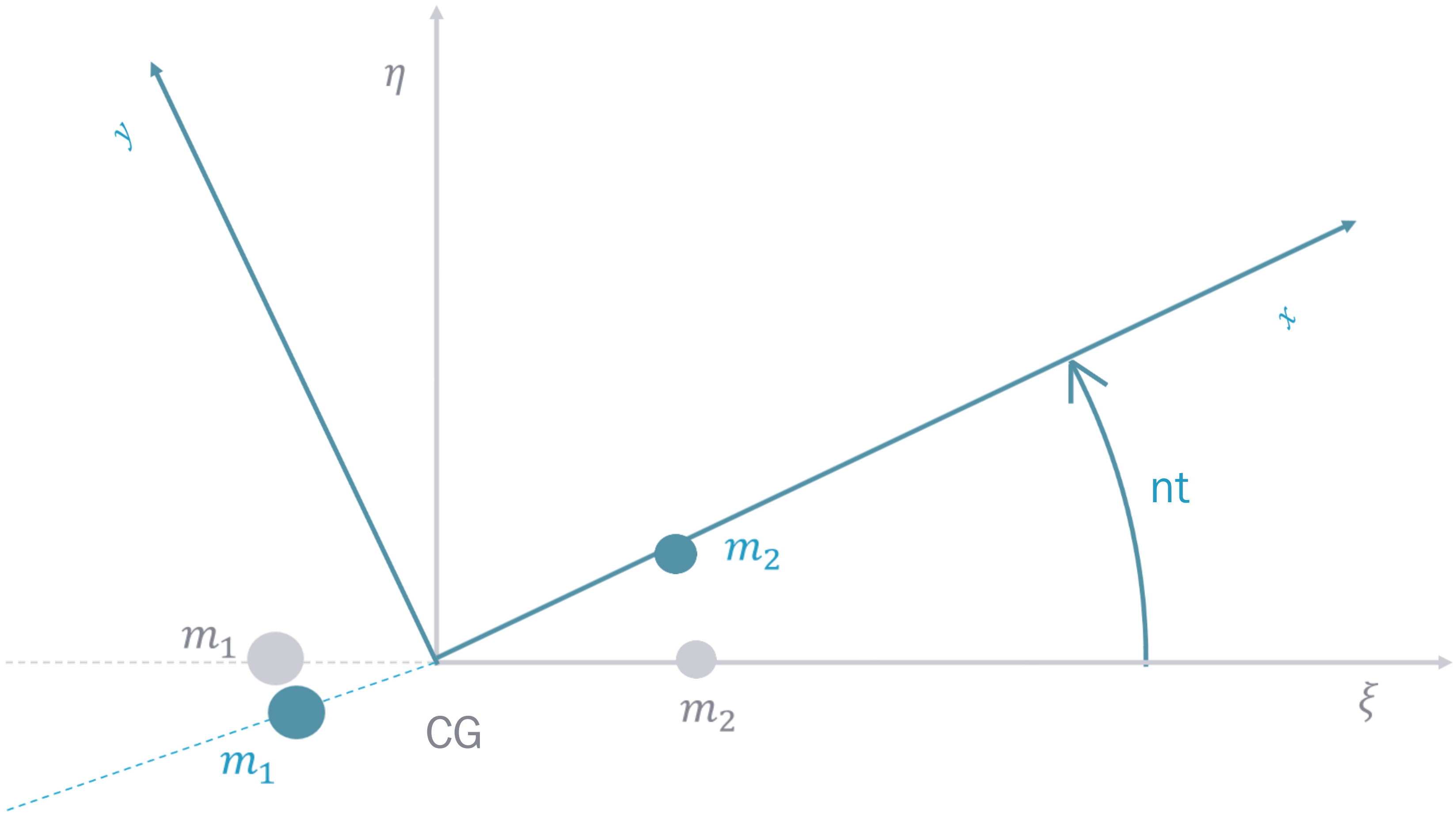
$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} < \frac{1}{2}$$

$$\mu_1 = 1 - \mu \qquad \mu_2 = \mu$$

Posiciones:

$$(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$$



04 - Desarrollo
Ecuaciones del movimiento

Sistema dinámico:

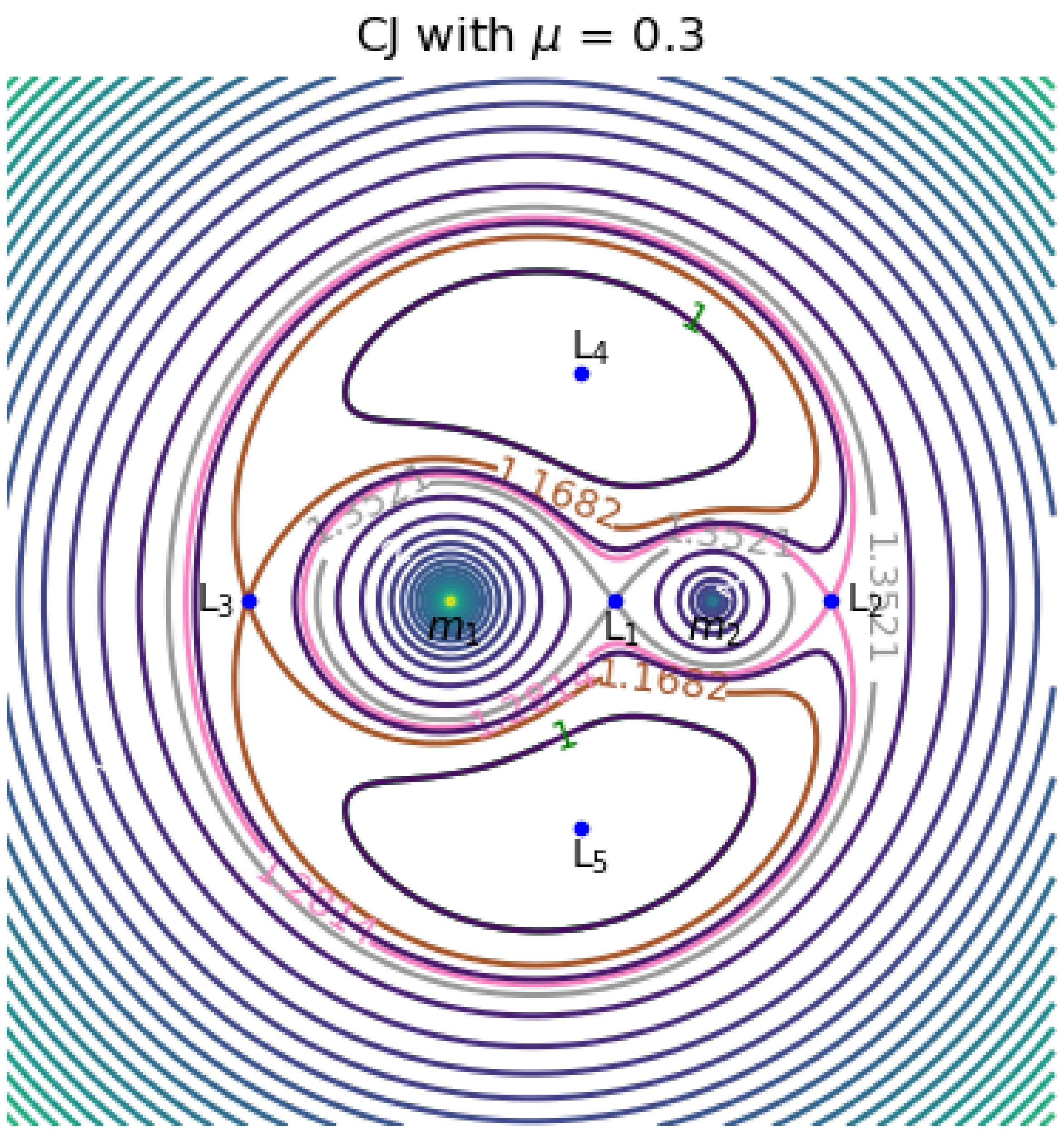
Pseudo-potencial

Constante de Jacobi

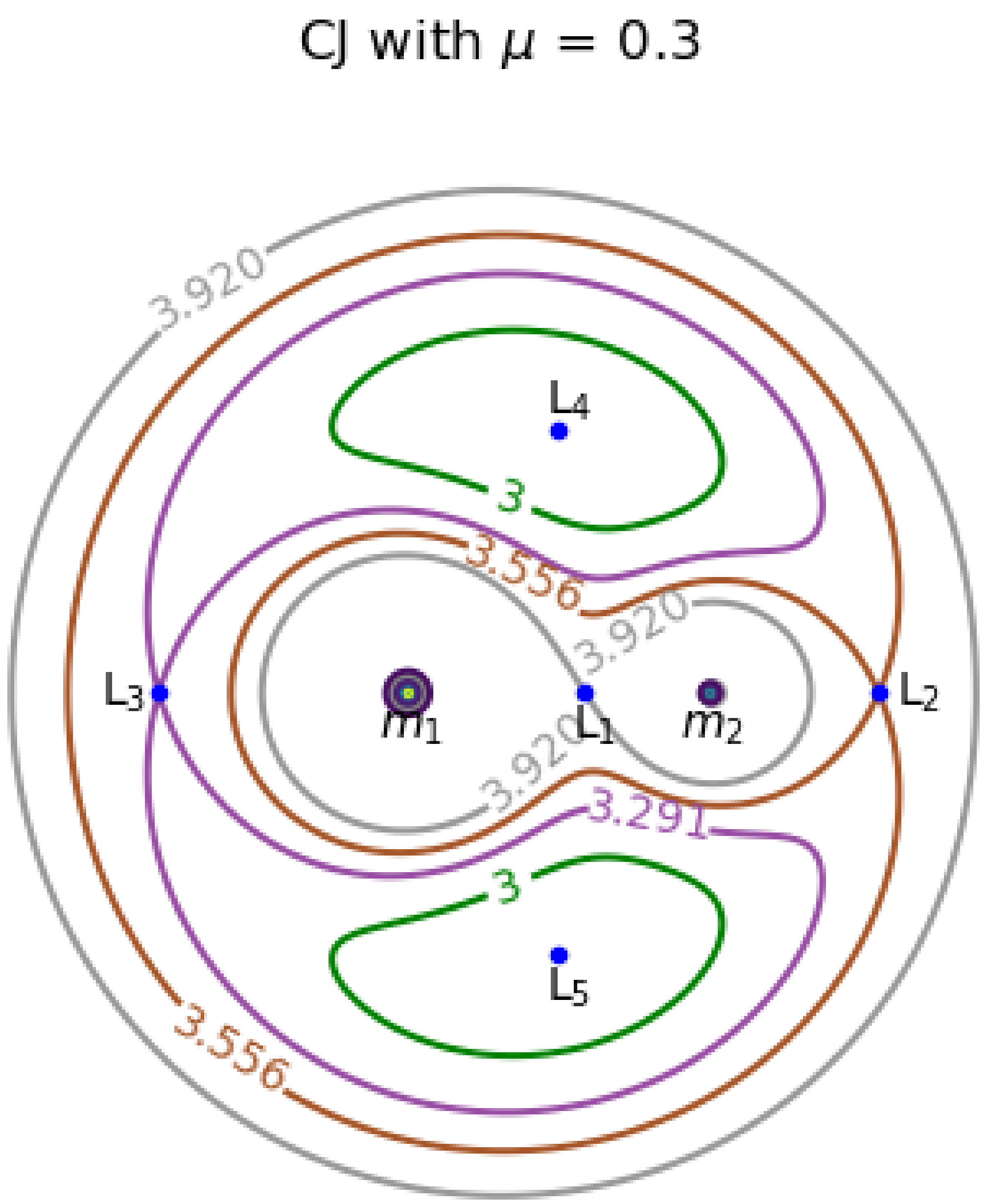
$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \longrightarrow \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial V'}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V'}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V'}{\partial z}\dot{z} \longrightarrow v^2 = 2V' - C_J$$

Como $v \geq 0$ la constante de Jacobi define unas regiones, niveles de energía, por donde es posible el movimiento.

04 - Desarrollo
Regiones de Hill



Log, $C_J \in [1,2]$



Newton, $C_J \in [3,5]$

Estabilidad según el potencial

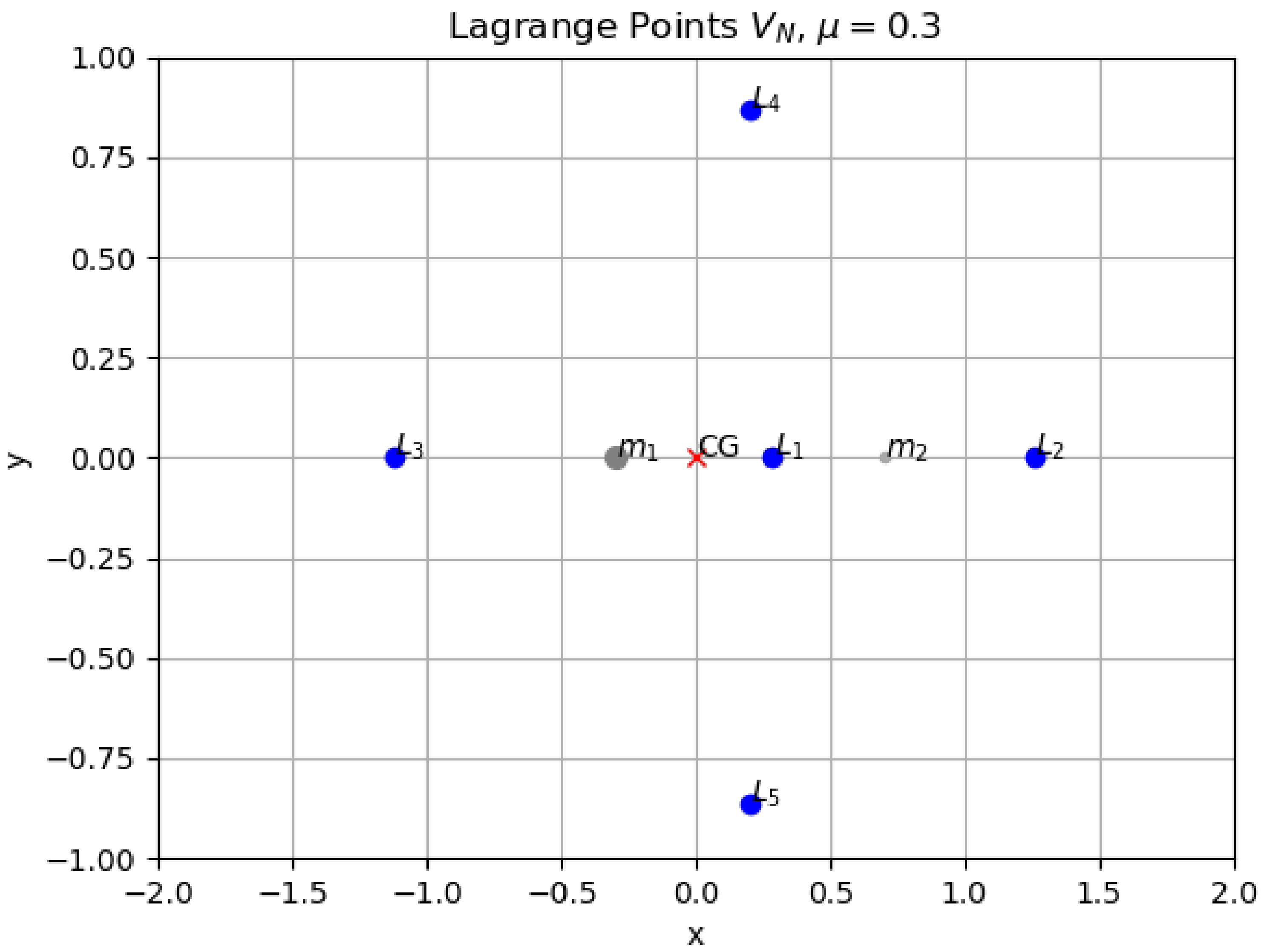
El potencial resultante cuenta con puntos de equilibrio– Los puntos de estabilidad o inestabilidad.

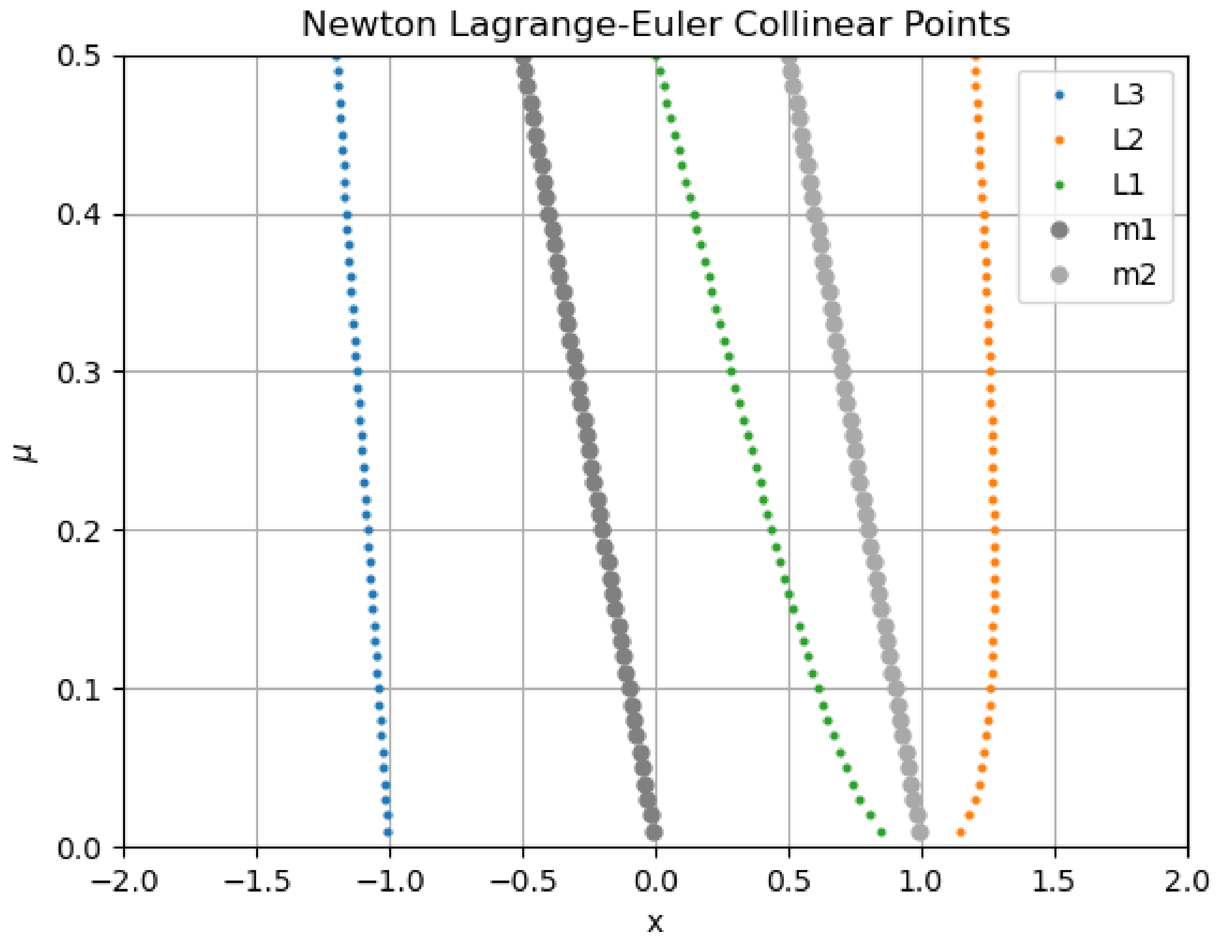
- El tercer cuerpo será atraído por las zonas de estabilidad, mientras que será repelido por las de inestabilidad.
- Los puntos de equilibrio los buscamos como zonas donde la variación del potencial sea cero.

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

Puntos de Lagrange

Puntos de equilibrio del potencial clásico – Dependerán del potencial y de la relación entre las masas, μ.





Estabilidad

Estabilidad cercana a los puntos de equilibrio – Dependerán del potencial y de la relación entre las masas, μ.

$$V(x,y) = V(x_e,y_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_e (x-x_e)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_e (x-x_e)(y-y_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_e (y-y_e)^2$$

$$\xi = x - x_e, \; \eta = y - y_e \qquad \nabla \mathbf{V} \approx (V_{xx}\xi + V_{xy}\eta)\mathbf{e_x} + (V_{yy}\eta + V_{xy}\xi)\mathbf{e_y}$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = V_{xx}\xi + 2\dot{\eta} + V_{xy}\eta \\ \ddot{\eta} = V_{yy}\eta - 2\dot{\xi} + V_{xy}\xi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \xi = \xi_0 e^{\lambda t} \\ \eta = \eta_0 e^{\lambda t} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda^2 - V_{xx} & -2\lambda - V_{xy} \\ 2\lambda - V_{xy} & \lambda^2 - V_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 + (4 - V_{xx} - V_{yy})\lambda^2 + (V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2) = 0$$

$$\boxed{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 > 0} \quad \text{(cond 1)}$$

$$\boxed{4(V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2) < (4 - V_{xx} - V_{yy})^2} \quad \text{(cond 2)}$$

04 - Desarrollo
Estabilidad Potencial Clásico

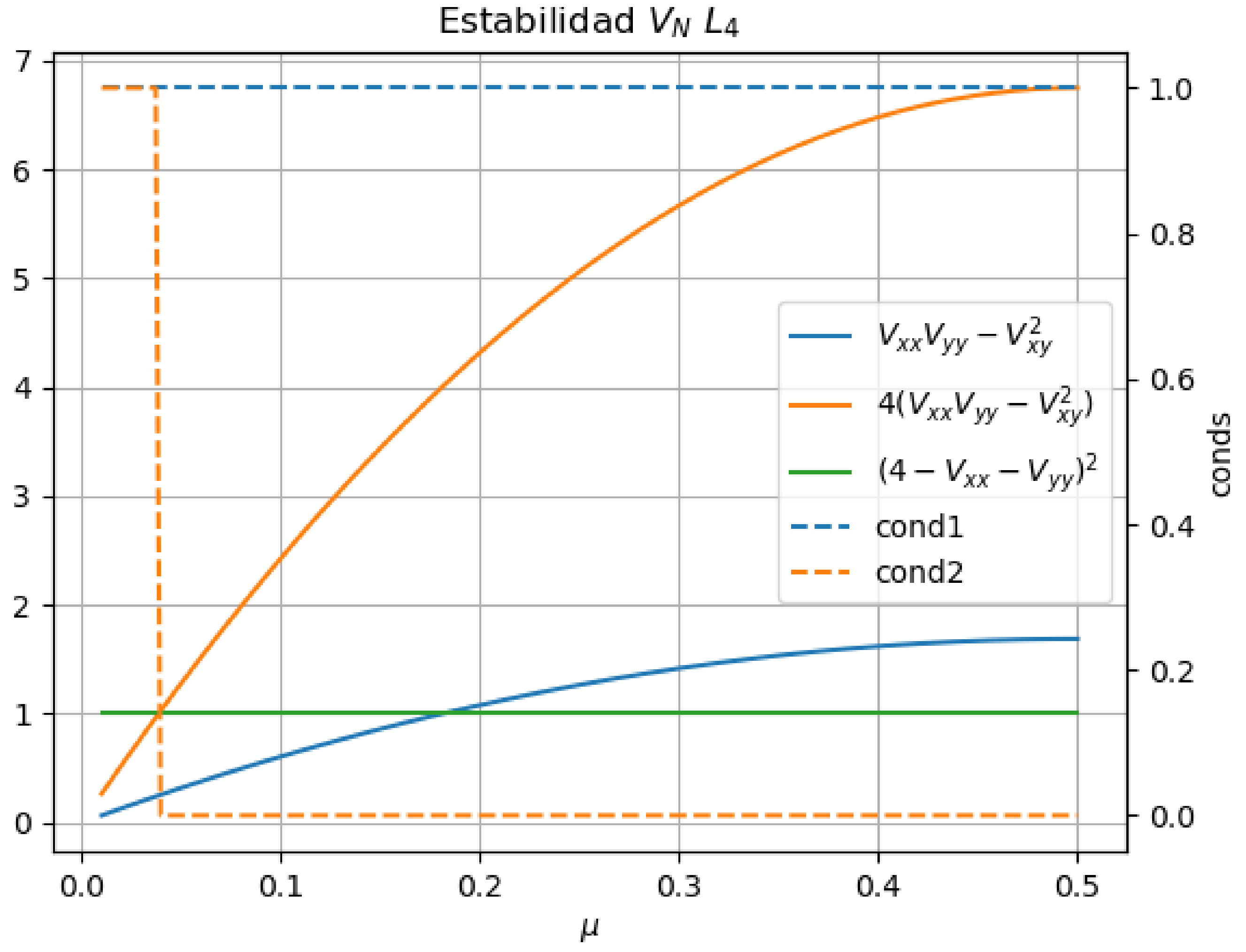
Puntos colineales: L_1, L_2, L_3

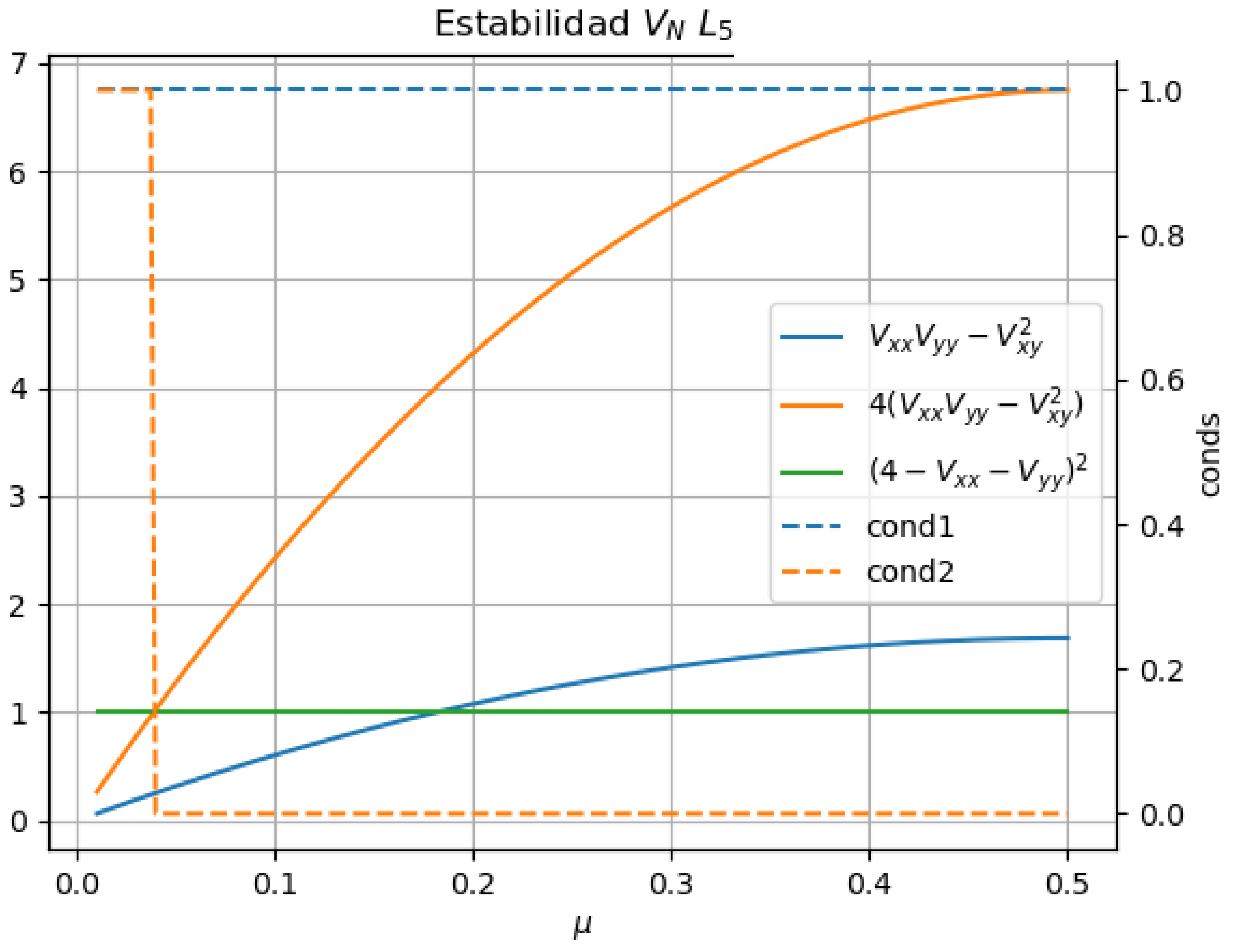
No son puntos estables.

Puntos no colineales: L_4, L_5

Su estabilidad depende de μ.

$$\mu < \frac{9 - \sqrt(69)}{18} \approx 0{,}038$$

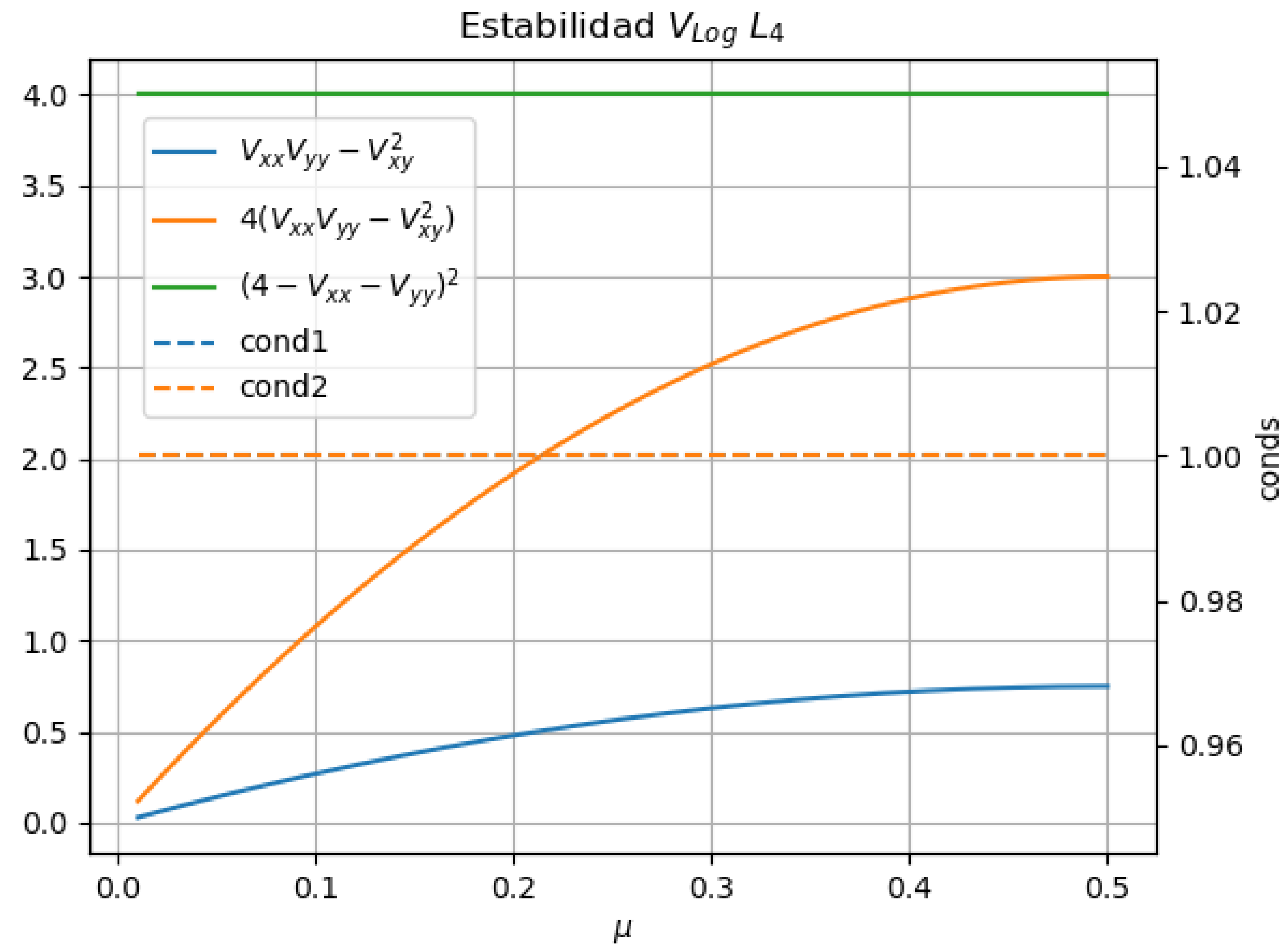


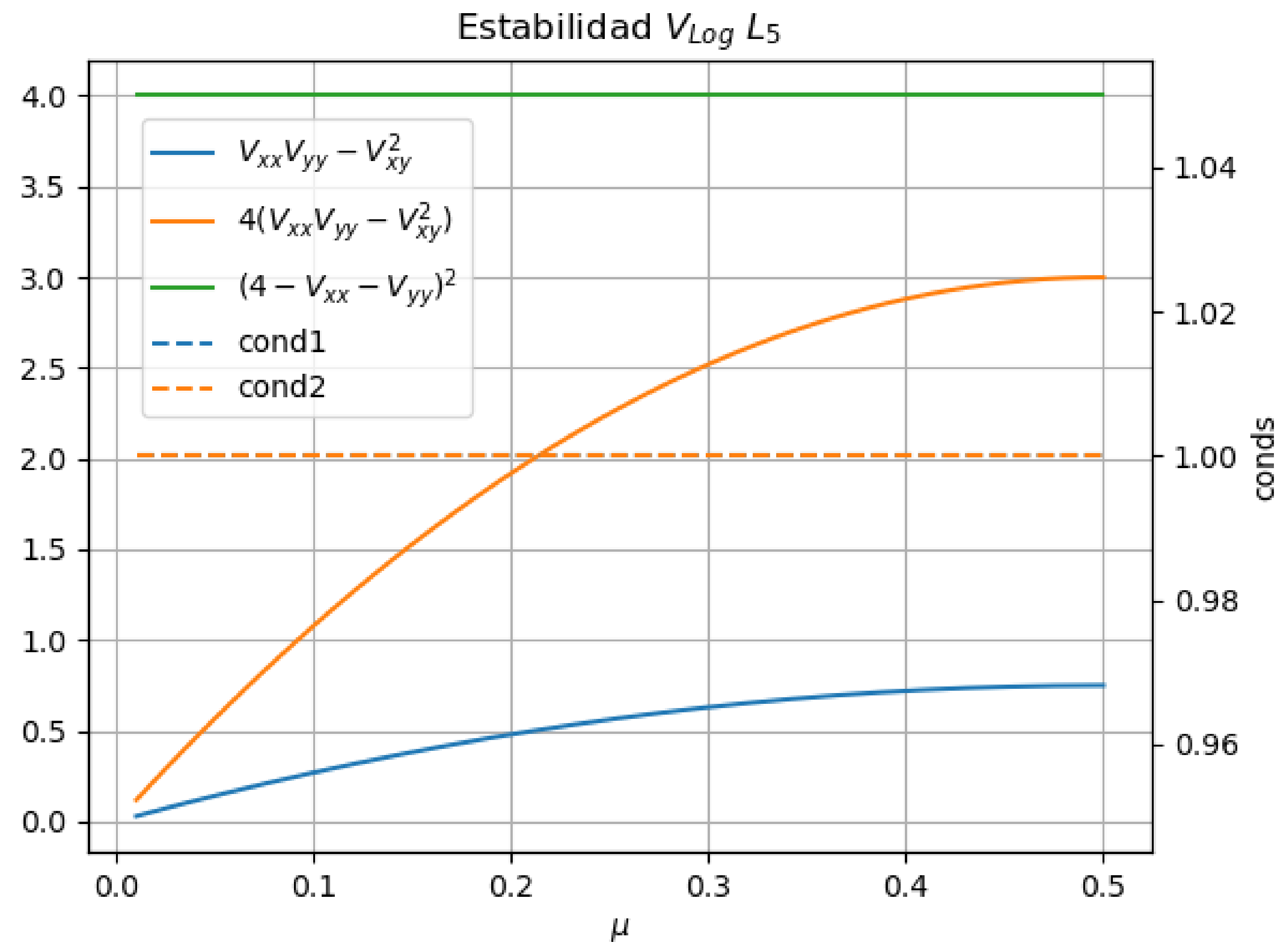


Estabilidad Potencial logarítmico

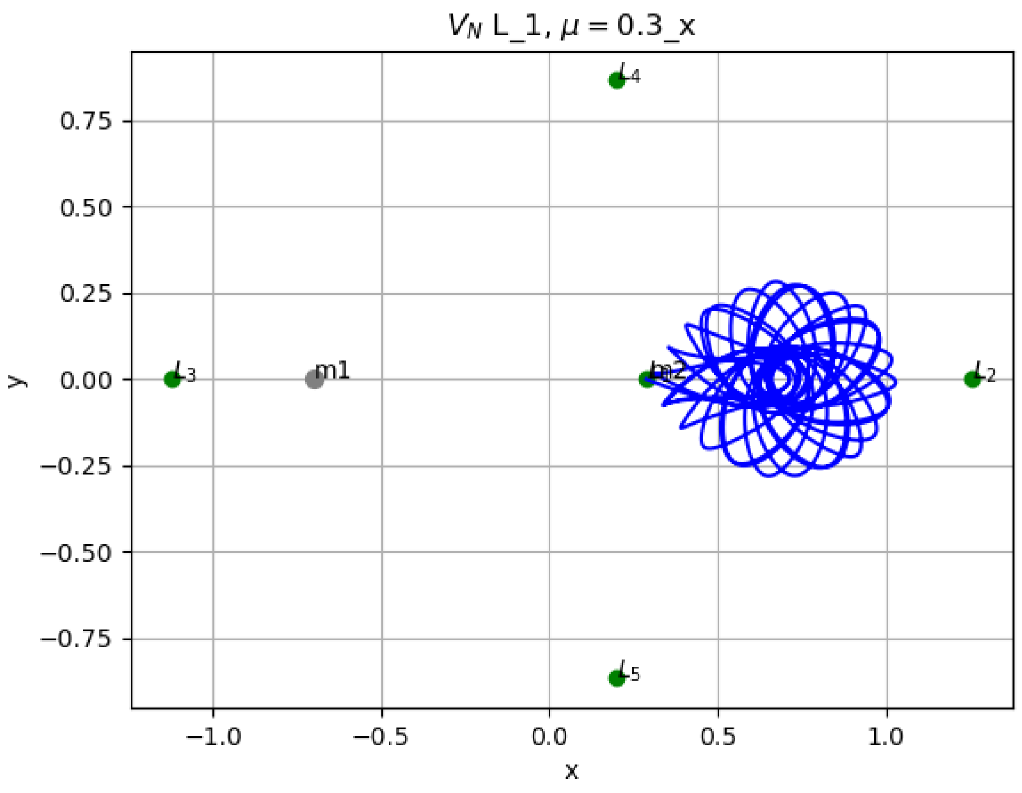
Puntos colineales: L_1, L_2, L_3 No son puntos estables.

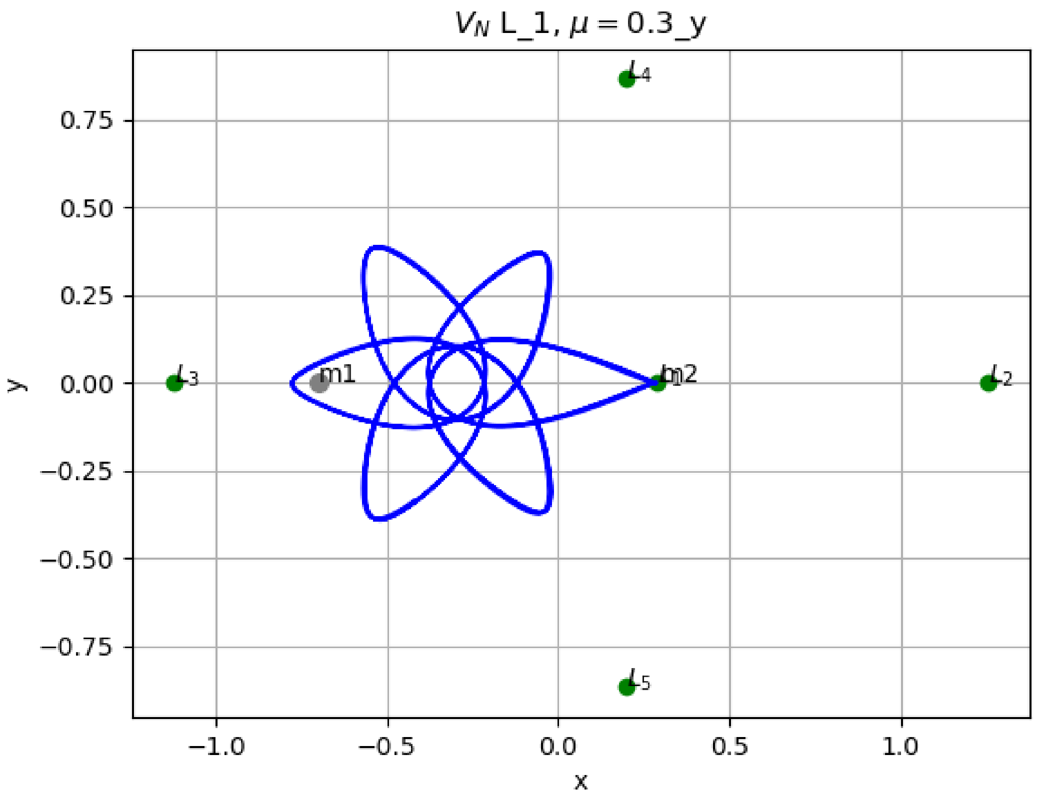
Puntos no colineales: L_4, L_5 Son puntos estables.

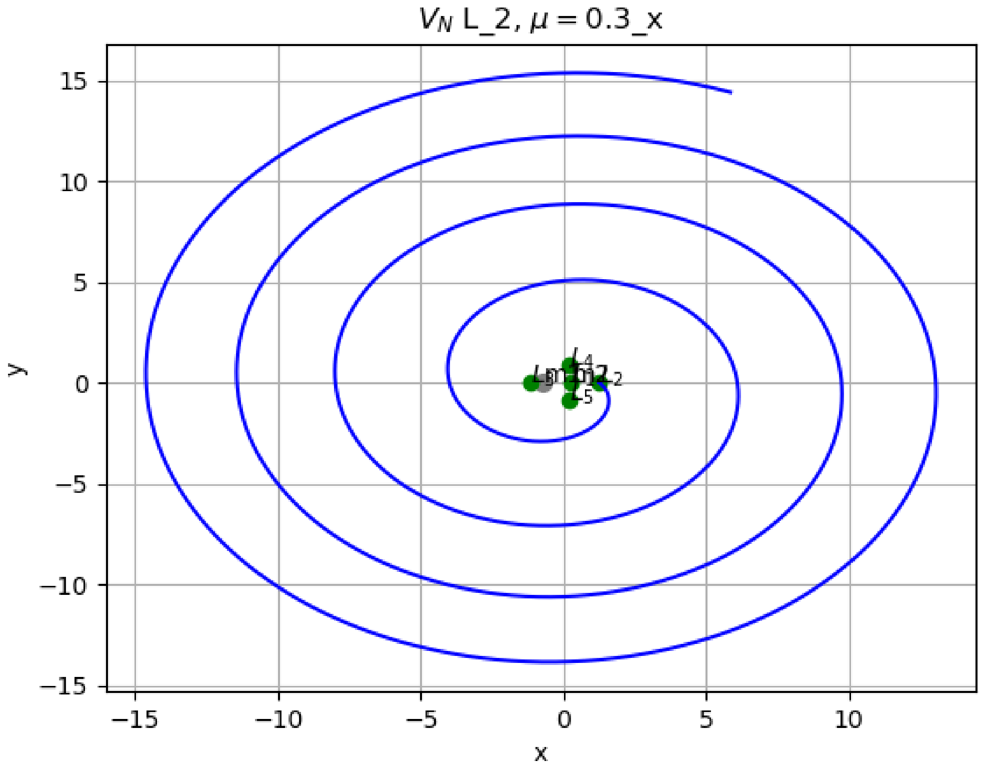


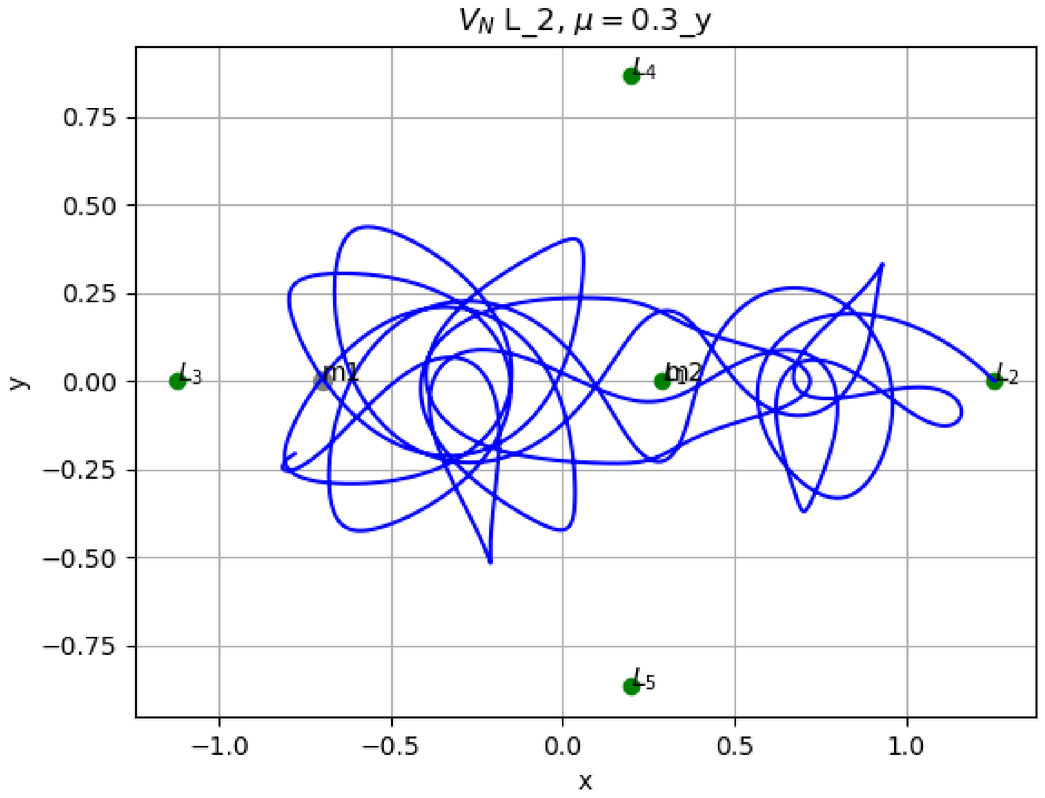


05 - Resultados
Simulación Potencial Clásico

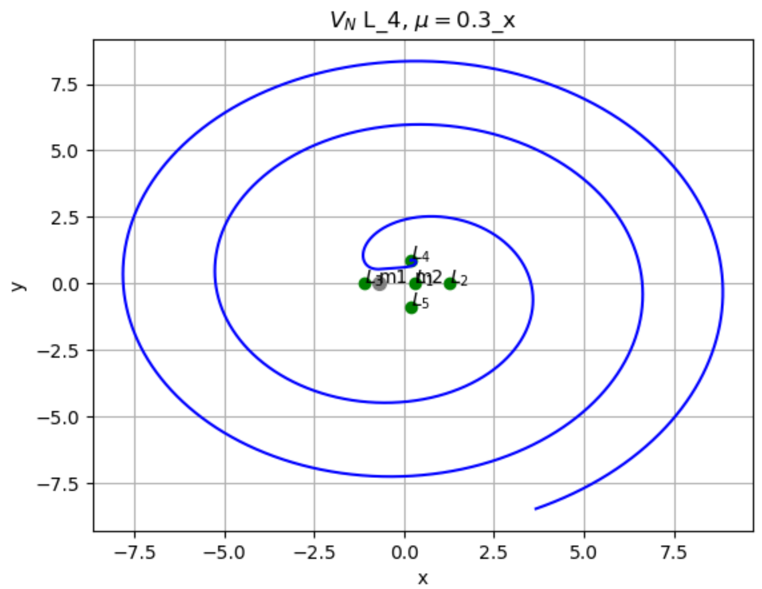


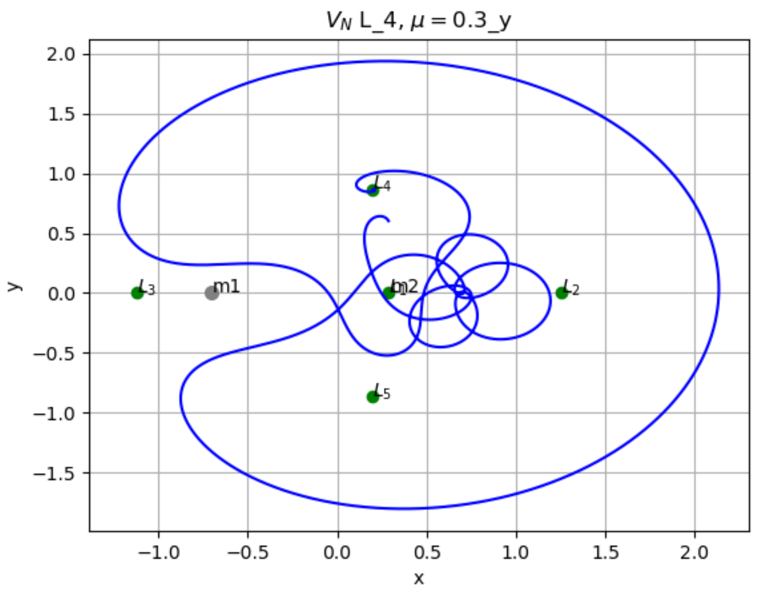


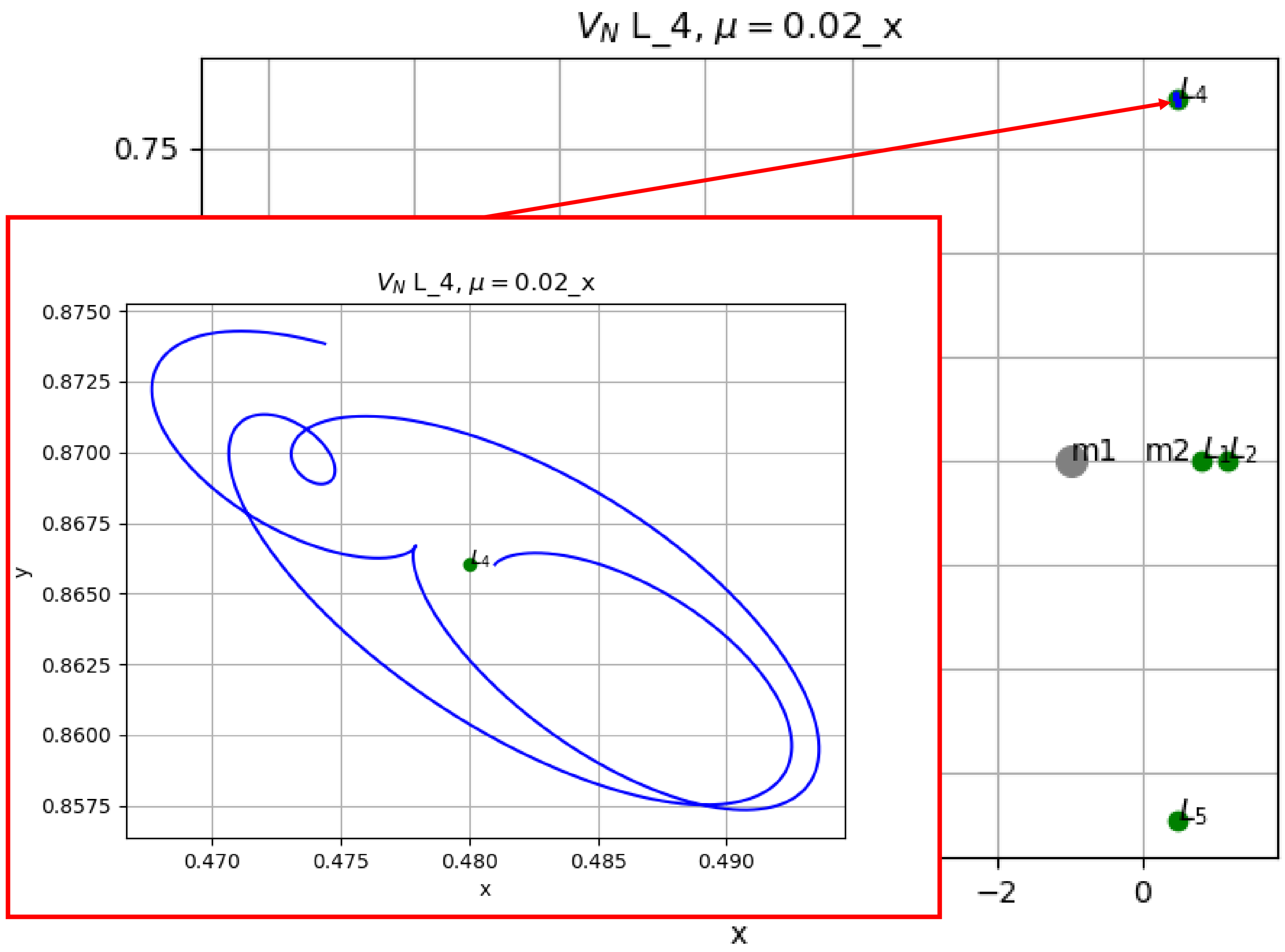


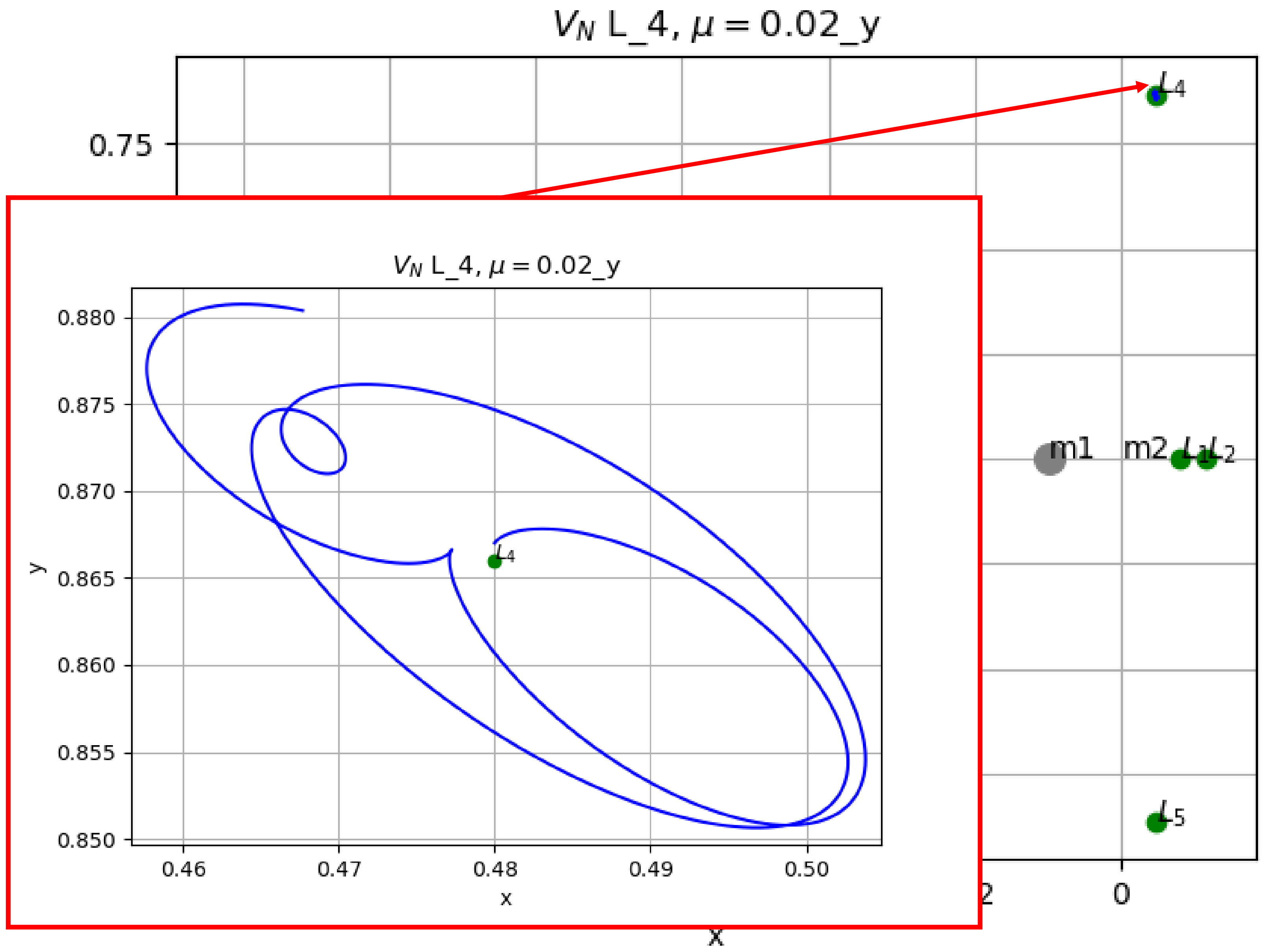


05 - Resultados
Simulación Potencial Clásico

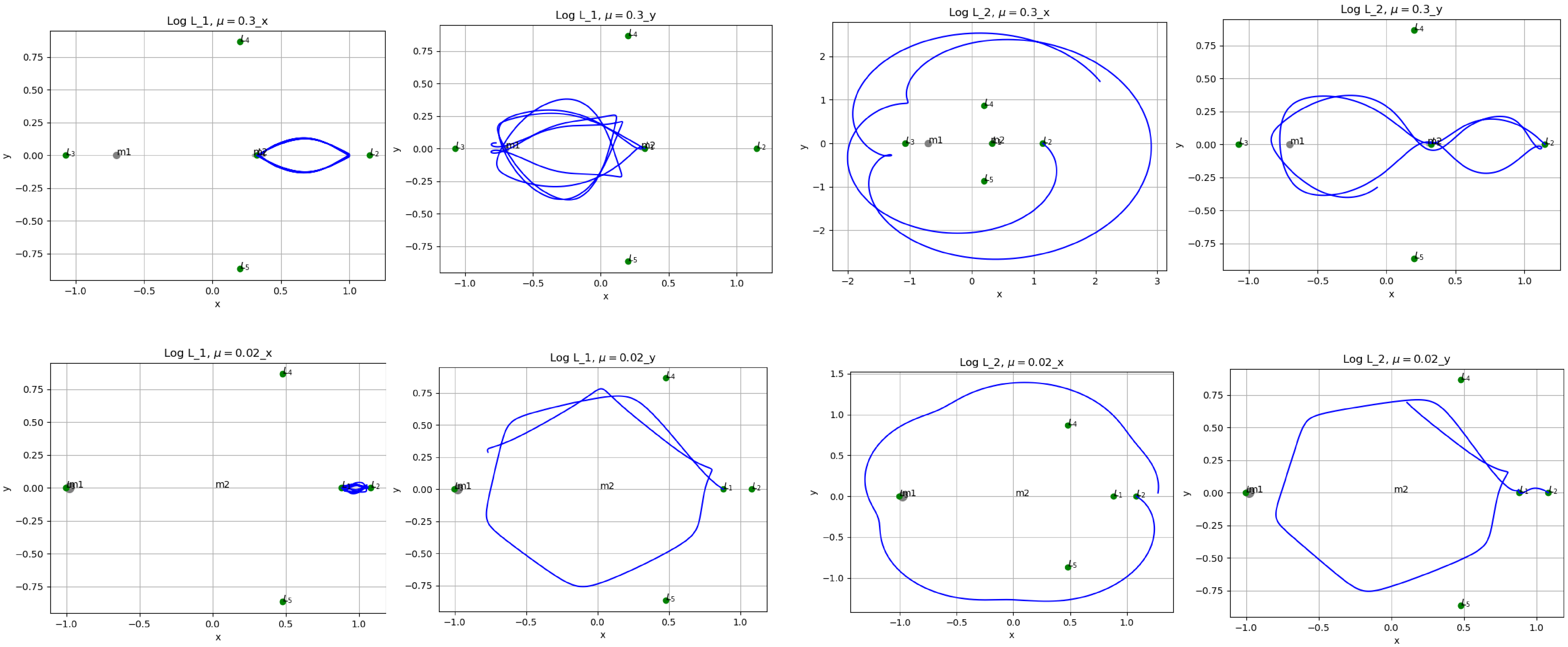




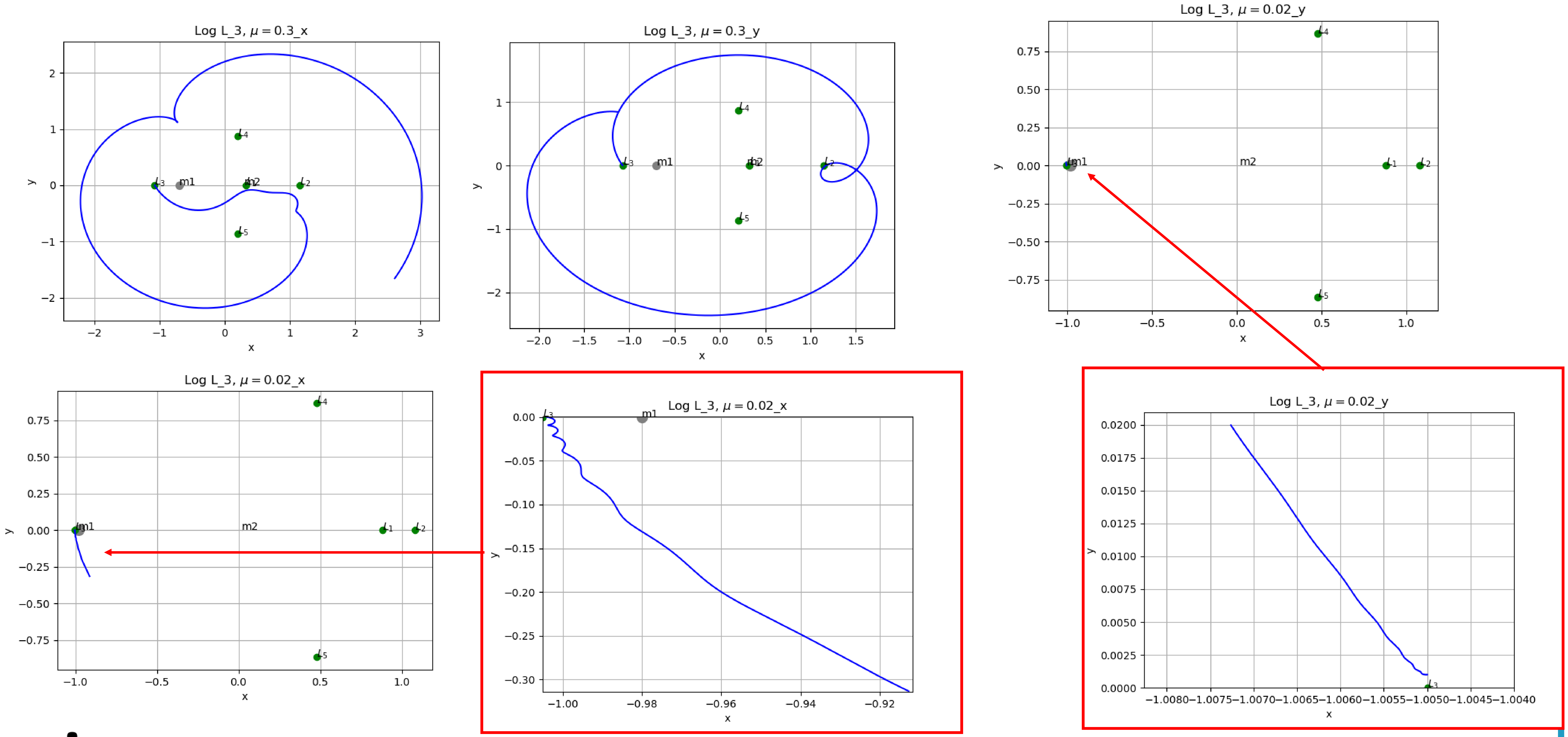




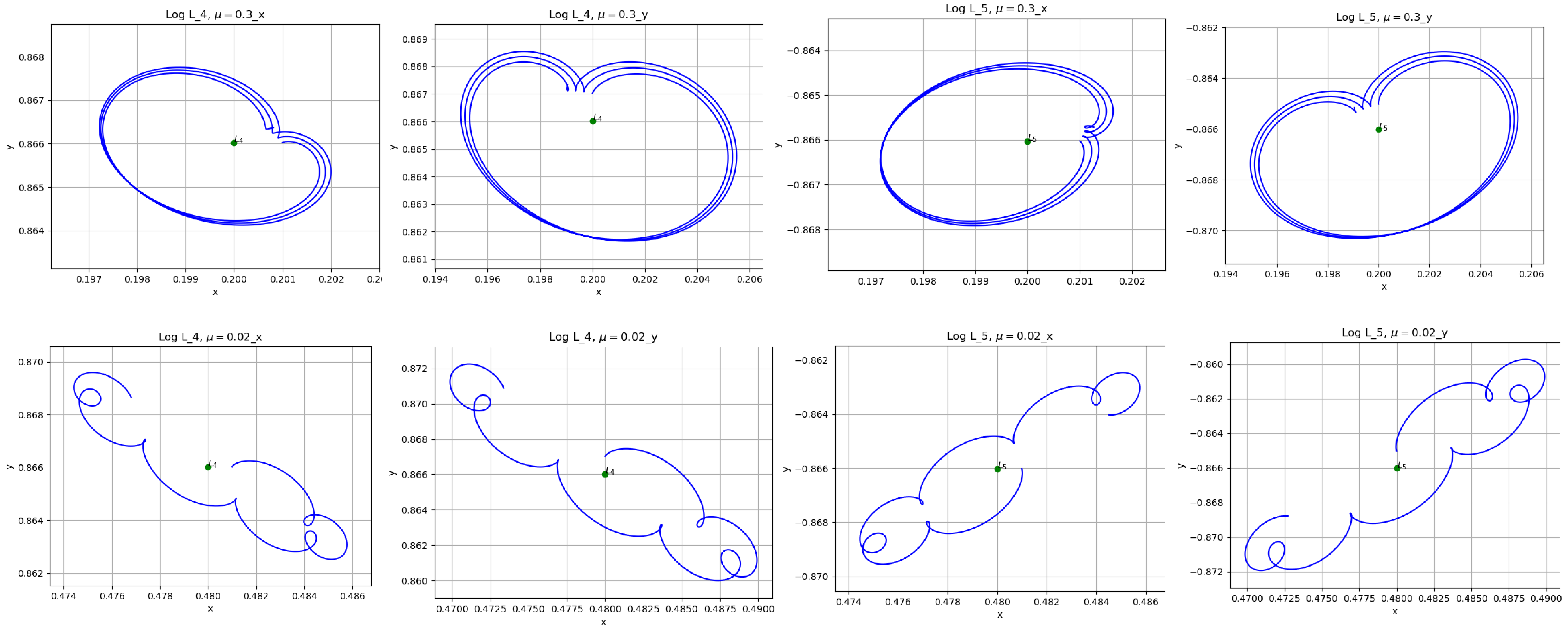
05 - Resultados
Simulación Potencial Logarítmico



05 - Resultados
Simulación Potencial Logarítmico



05 - Resultados
Simulación Potencial Logarítmico



06 - Conclusiones y trabajo futuro
Problema CR3BP mediante potenciales clásico y logarítmico

- Se ha estudiado la estabilidad dentro de los potenciales.

- En cuanto a la **estabilidad**:
  - **Modelo clásico**: Cuenta con un comportamiento más **divergente** e **inestable**. Excepto en la condición de **$\mu<0.038$**.
  - **Modelo logarítmico**: Cuenta con **órbitas más acotadas** y **puntos estables** dentro de más opciones de configuración del sistema.

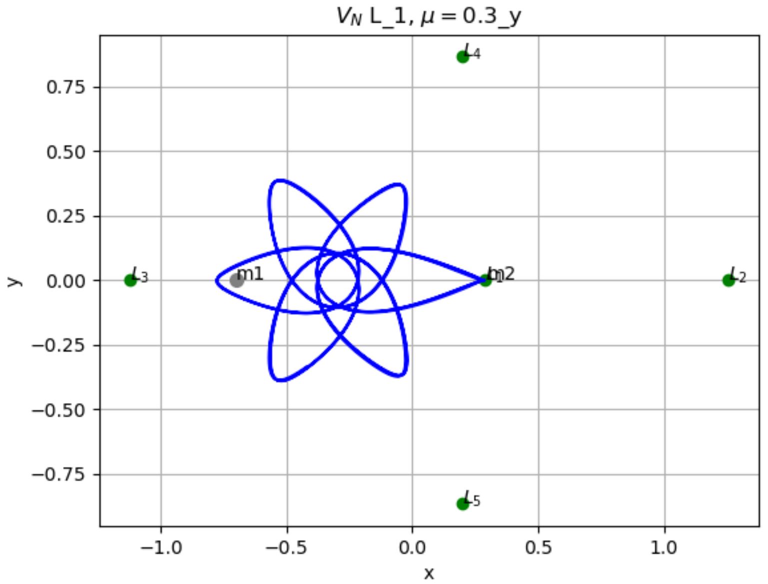
- En **futuros trabajos** se pueden estudiar los **efectos numéricos** que podrían tener **otros métodos** matemáticos diferentes a RK, con que el se ha hecho este estudio. También sería interesante comprobar algunas configuraciones en **busca de órbitas periódicas**.

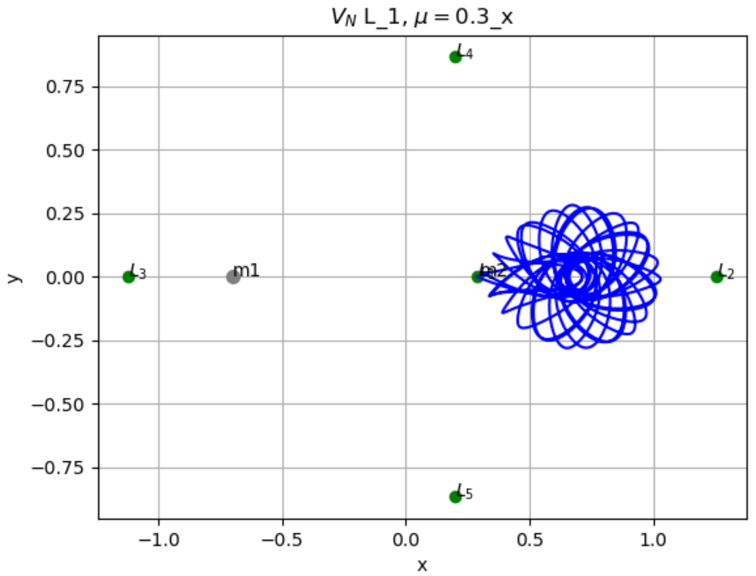
muchas gracias.

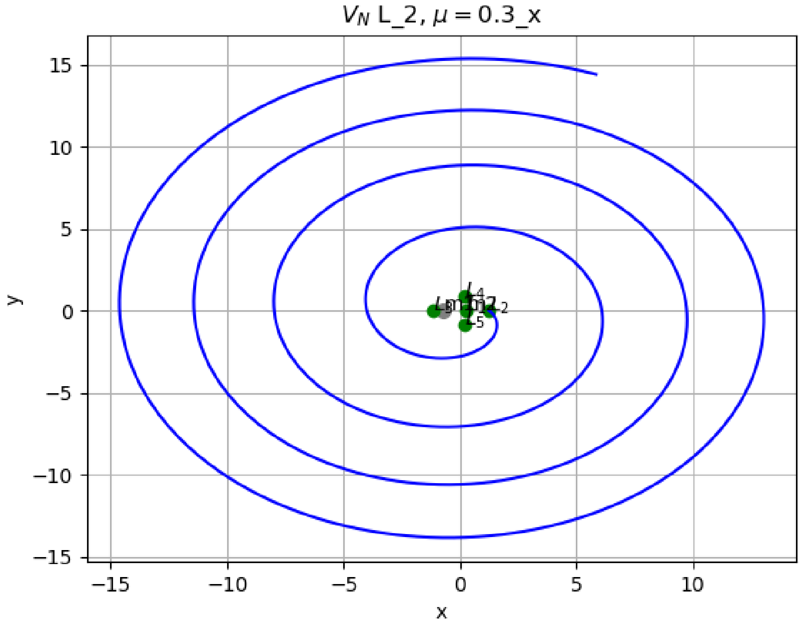
LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

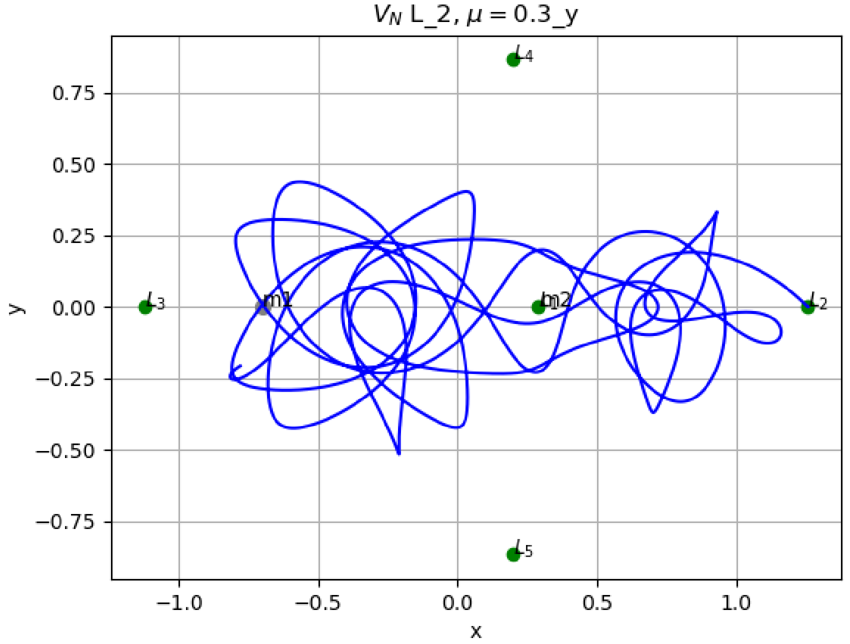
https://github.com/JuanfranZZ/3BodyProblem.git

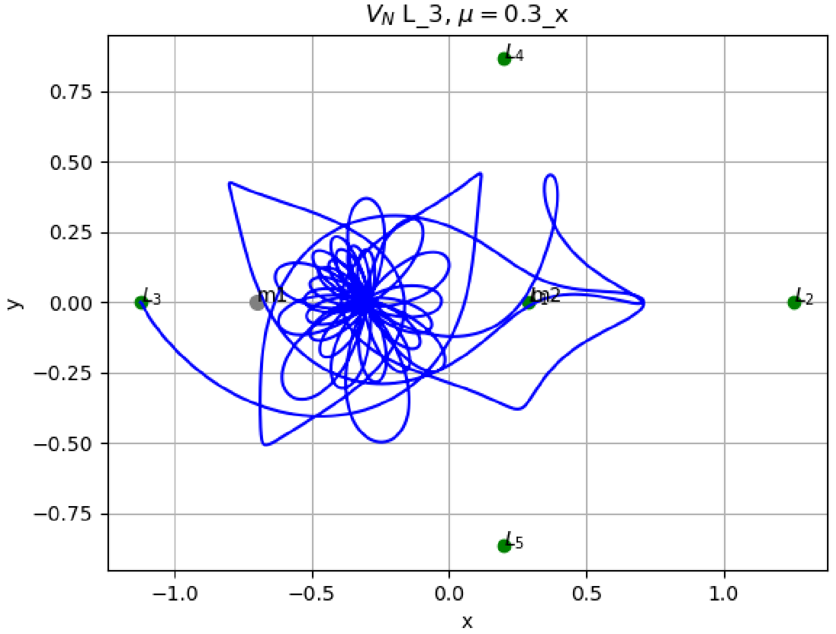
Resultados
Simulación Potencial Clásico

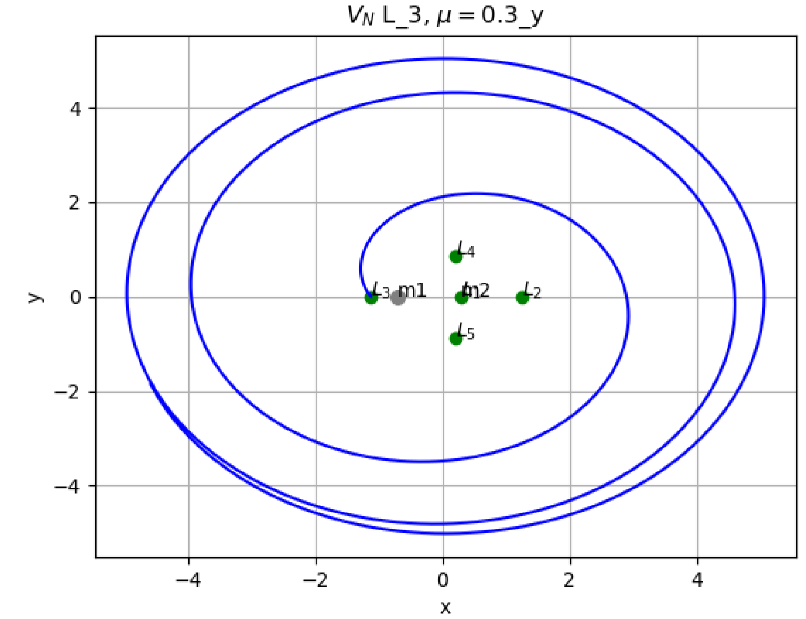


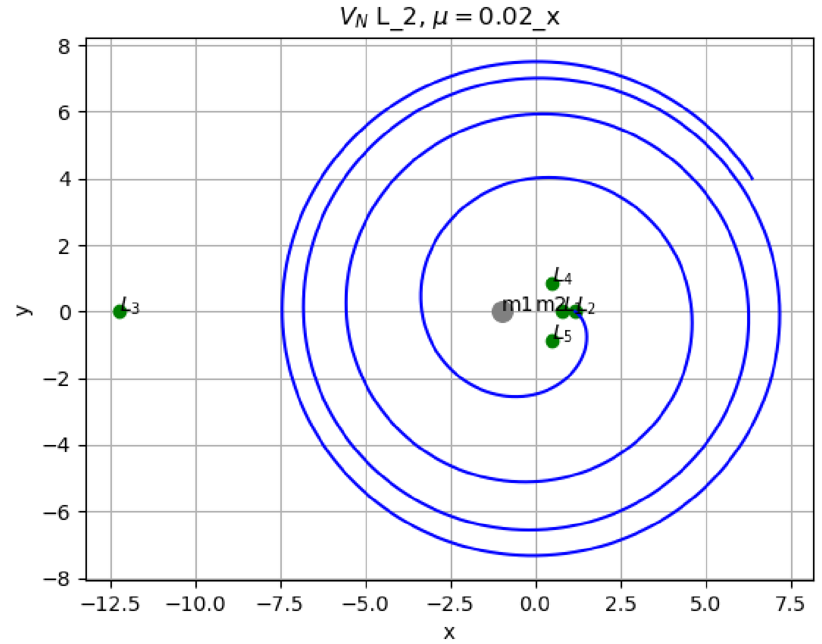


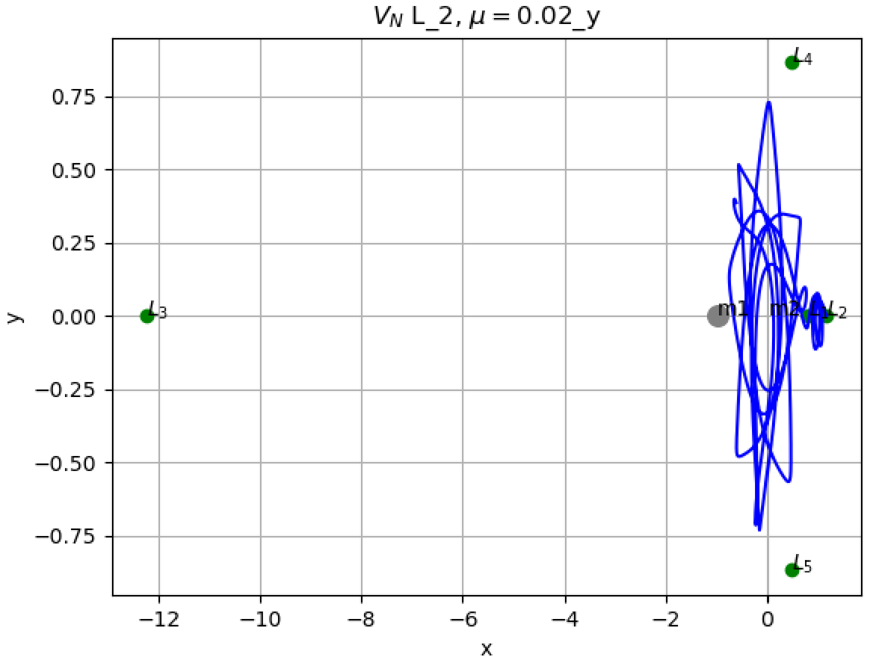


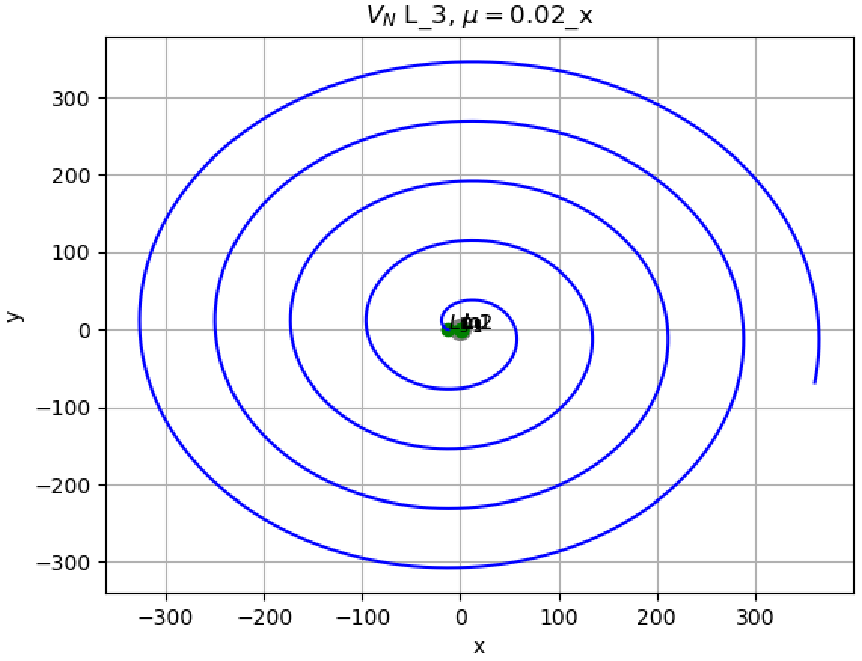


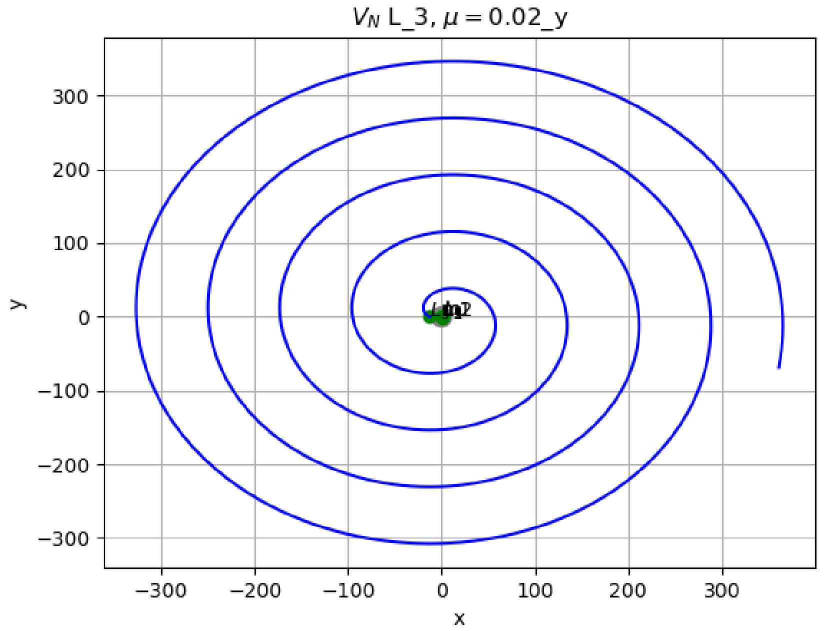












Desarrollo*
Ecuaciones dinámicas

Potencial clásico:

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\,\dot{y} - \dfrac{(1-\mu)(x+\mu)}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}^3} - \dfrac{\mu(x - (1-\mu))}{\sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2}^3} \\ \ddot{y} = y + 2\,\dot{x} - \dfrac{(1-\mu)y}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}^3} - \dfrac{\mu y}{\sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2}^3} \\ \ddot{z} = -\dfrac{(1-\mu)z}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}^3} - \dfrac{\mu z}{\sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2}^3} \end{cases}$$

Potencial logarítmico:

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\,\dot{y} - \dfrac{(1-\mu)(x+\mu)}{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} - \dfrac{\mu(x - (1-\mu))}{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2} \\ \ddot{y} = y + 2\,\dot{x} - \dfrac{(1-\mu)y}{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} - \dfrac{\mu y}{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2} \\ \ddot{z} = -\dfrac{(1-\mu)z}{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} - \dfrac{\mu z}{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$