



Gráficos y Multimedia

Sesión 1: Transformaciones Geométricas



Transformaciones Geométricas

INDICE

- Transformaciones Geométricas: Definición
- Transformaciones Básicas:
 - Traslación
 - Rotación
 - Escalado
- Transformaciones en Coordenadas Homogéneas
- Componer Transformaciones
- Otras Transformaciones
- Transformaciones Afines
- Recortado Líneas
- Recortado Polígonos



1. Definición

- Transformación geométrica: mecanismo para alterar las descripciones de las coordenadas de un objeto 3D.
- Las transformaciones implican cambios en:
 - Posición
 - Orientación
 - Tamaño y Forma
- Transformaciones básicas
 - Traslación
 - Rotación
 - Escalado



2. Transformaciones Básicas

TRASLACIÓN

- Cambia la posición de un objeto
- Viene dada por un vector de traslación $T=(t_x, t_y, t_z)$
- Un punto trasladado se calcula como:

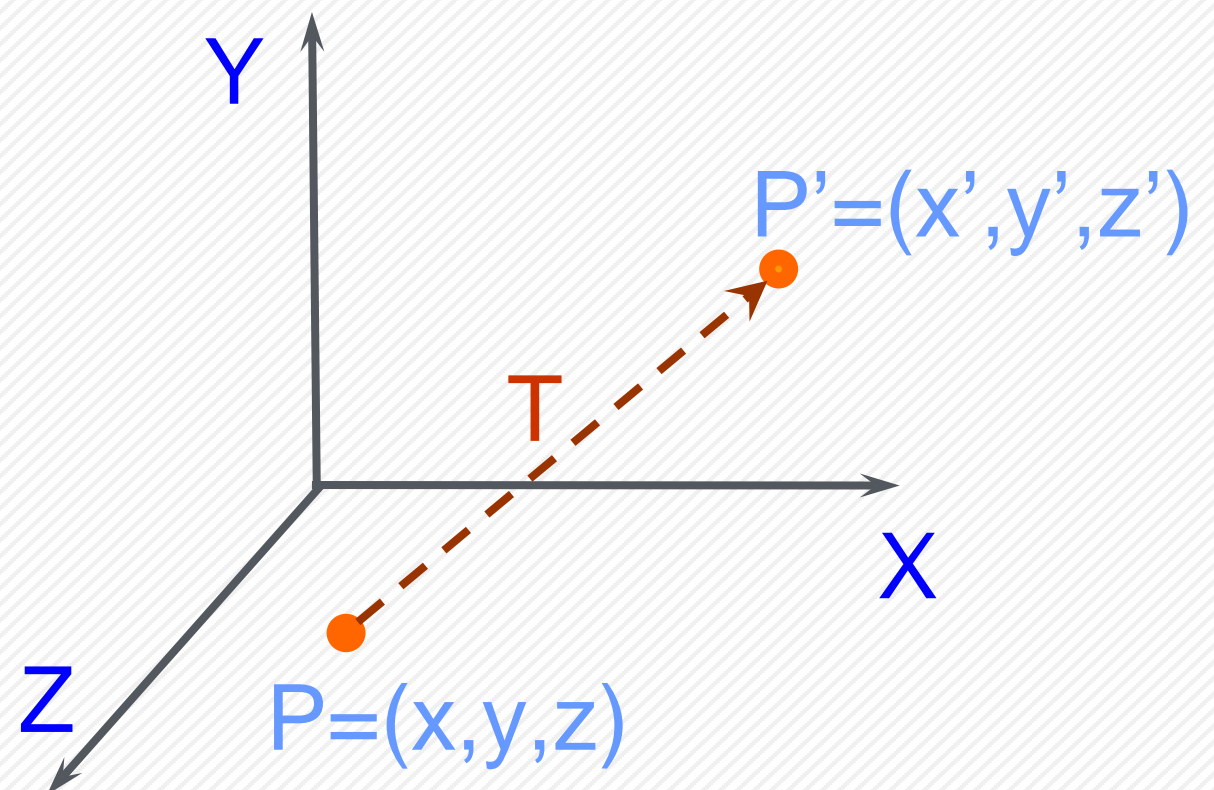
$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

$$z' = z + t_z$$

- En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad P' = T + P$$





2. Transformaciones Básicas

ROTACIÓN

- Cambia la orientación de un objeto
- Viene dada por un eje de rotación y un ángulo θ
- P.ej., para rotar un punto alrededor del eje X:

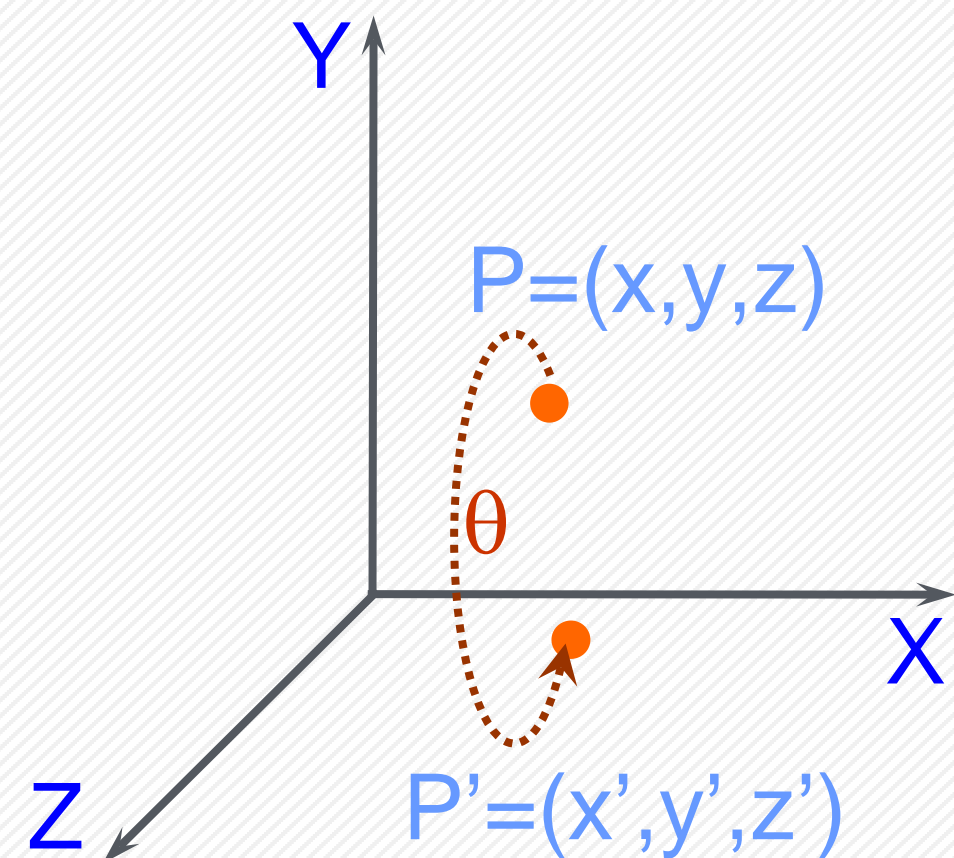
$$x' = x$$

$$y' = y \cdot \cos \theta - z \cdot \sin \theta$$

$$z' = y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta$$

- En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad P' = R \cdot P$$

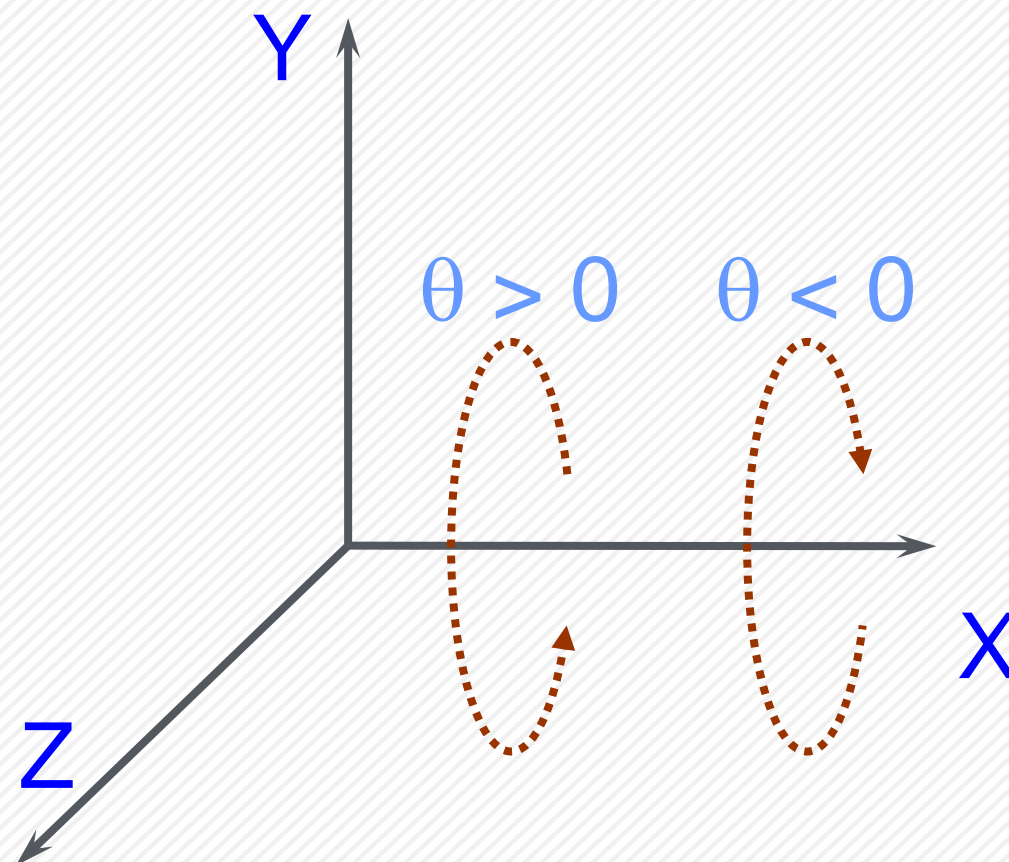




2. Transformaciones Básicas

ROTACIÓN

- El ángulo θ es positivo en sentido antihorario visto desde la parte positiva del eje. Sentido dextrógiro (mano derecha)





2. Transformaciones Básicas

ESCALADO

- Cambia el tamaño de un objeto
- Viene dada por un vector de escalado $S=(s_x, s_y, s_z)$
- Un punto escalado se calcula como:

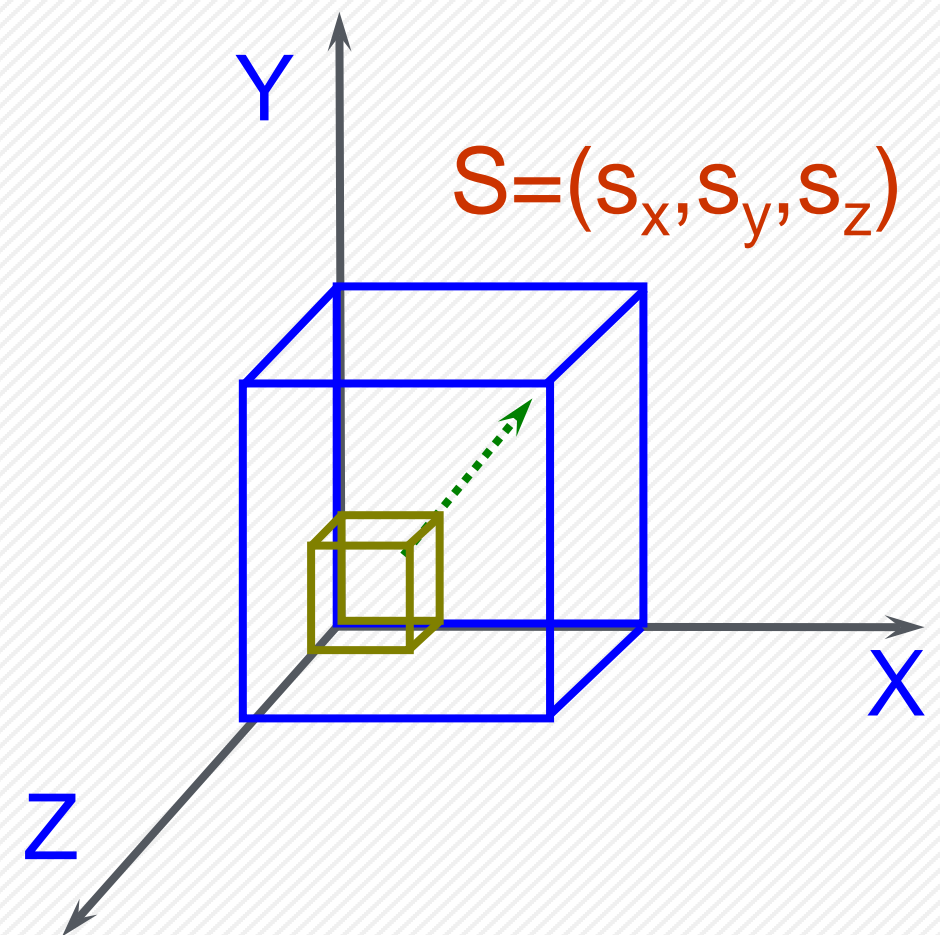
$$x' = x \cdot s_x$$

$$y' = y \cdot s_y$$

$$z' = z \cdot s_z$$

- En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad P' = S \cdot P$$





2. Transformaciones Básicas

ESCALADO

- Si $s_x = s_y = s_z$, se mantienen las dimensiones relativas del objeto, el objeto es proporcional al original
- El escalado se realiza con respecto al origen. Para definir otro punto fijo es necesario primero trasladar la figura para que el punto fijo se encuentre en el origen.



3. Coordenadas Homogéneas

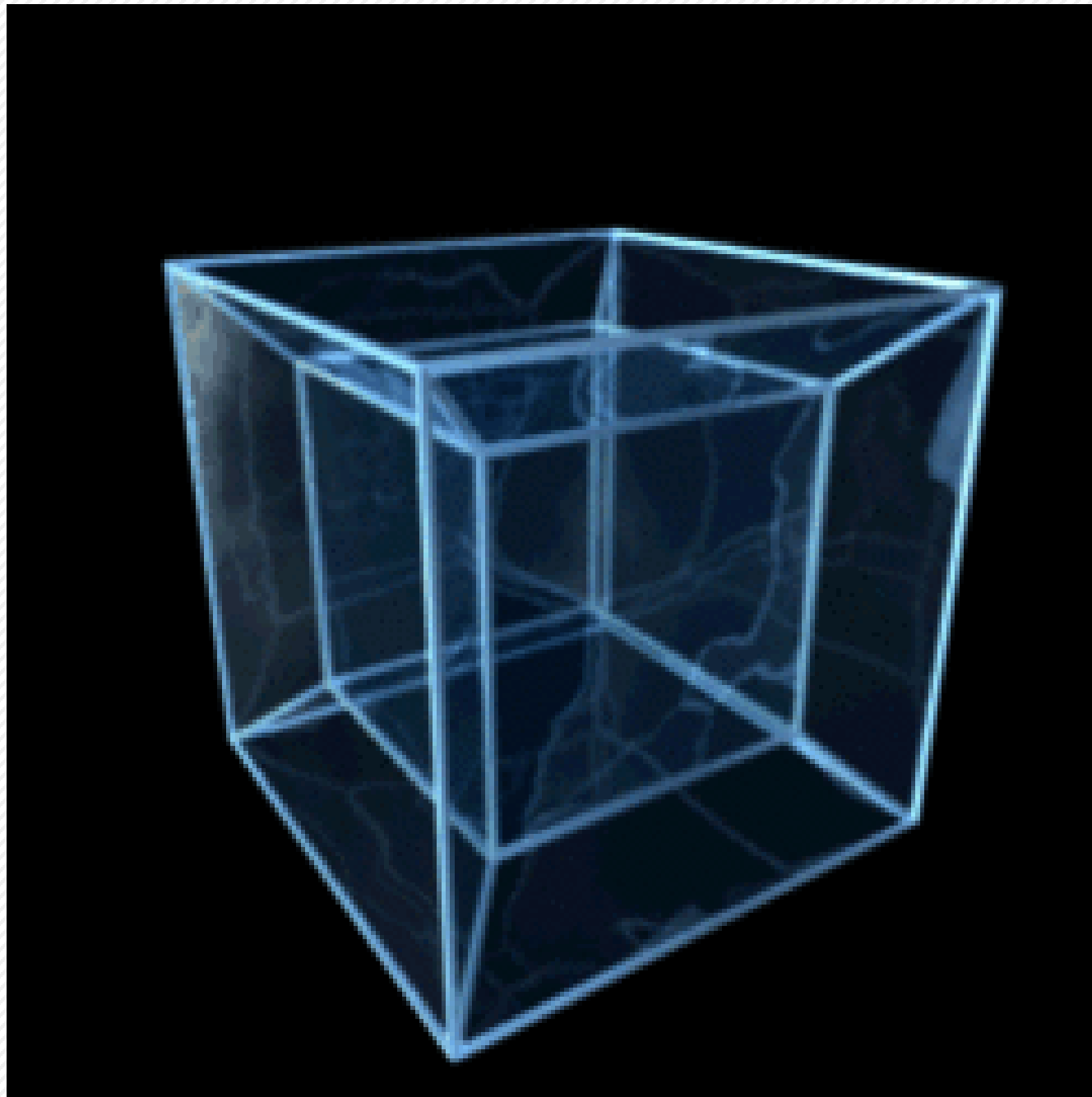
DEFINICIÓN

- Las matrices de rotación y escalado se multiplican, mientras que la de traslación se suma → no se pueden componer
- Para transformar la traslación en un producto de matrices → coordenadas homogéneas
- Se añade una cuarta componente:
 $(x,y,z) \rightarrow (x,y,z,w),$
por sencillez y ser el elemento neutro del producto se elige $w=1$



3. Coordenadas Homogéneas

- Hipercubo (cubo 4D)





3. Coordenadas Homogéneas

TRASLACIÓN

- La traslación, en forma matricial con coordenadas homogéneas queda:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La traslación inversa se realiza con la matriz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



3. Coordenadas Homogéneas

ROTACIÓN

- Rotación alrededor del eje Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Su matriz inversa coincide con su traspuesta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



3. Coordenadas Homogéneas

ROTACIÓN

- Rotación alrededor del eje X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Su matriz inversa coincide con su traspuesta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



3. Coordenadas Homogéneas

ROTACIÓN

- Rotación alrededor del eje Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Su matriz inversa coincide con su traspuesta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



3. Coordenadas Homogéneas

ESCALADO

- El escalado en coordenadas homogéneas es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La inversa de esta matriz es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



4. Componer Transformaciones

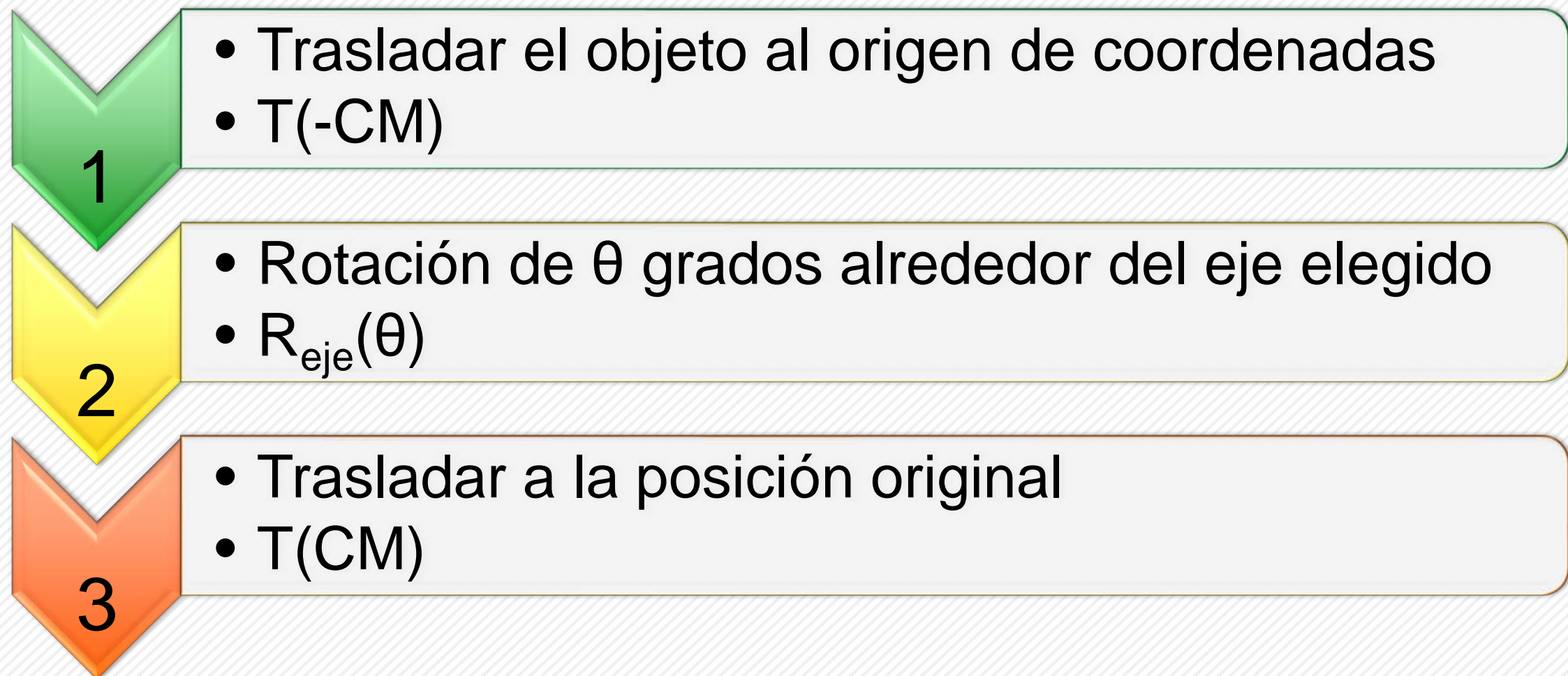
- En coordenadas homogéneas, la composición de transformaciones se realiza mediante el producto matricial
- Aplicar varias transformaciones es equivalente a componer sus matrices y aplicarla una sola vez:
$$P' = T_n \cdot \dots (T_3 \cdot (T_2 \cdot (T_1 \cdot P))) = (T_n \cdot \dots \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1) \cdot P$$
- La composición de transformaciones es:
 - Asociativa
 - No conmutativa en general (el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa)



4. Componer Transformaciones

Rotación alrededor de un centro de masas

- Eje de rotación paralelo a un eje de coordenadas:



$$M = T(-CM) \cdot R_{\text{eje}}(\theta) \cdot T(CM)$$

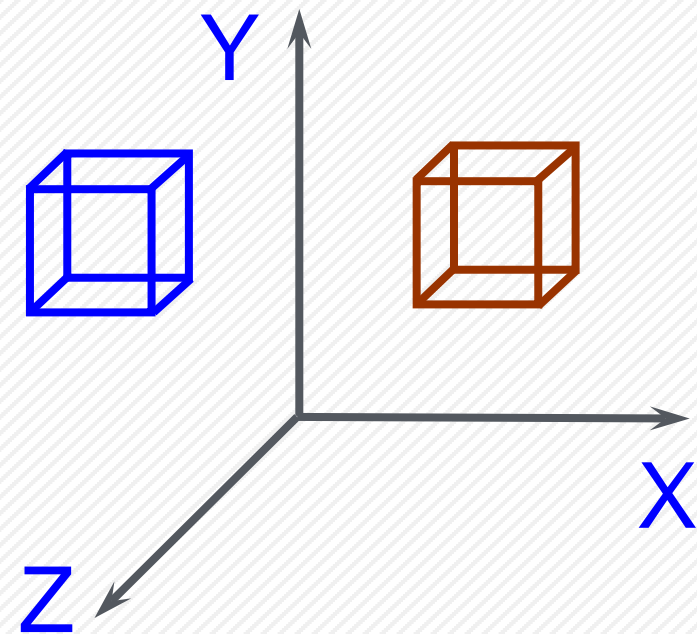


5. Otras Transformaciones

REFLEXIONES

- Produce una imagen de espejo
- Reflexión con respecto a un eje:
 - Con respecto al eje Y

$$Espejo_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Con respecto a un punto general: trasladar el punto al origen



5. Otras Transformaciones

Reflexión con respecto a un plano

- Con respecto al plano XY

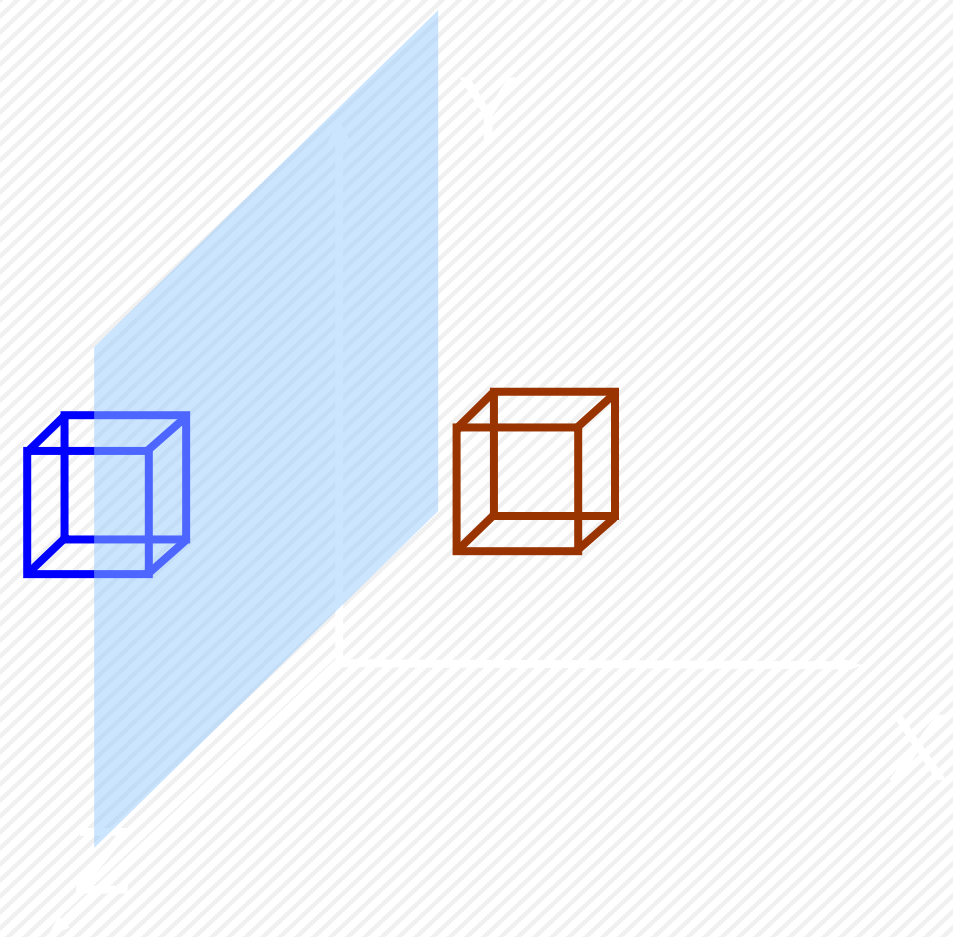
$$Rflx_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Con respecto al plano XZ

$$Rflx_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Con respecto al plano YZ

$$Rflx_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



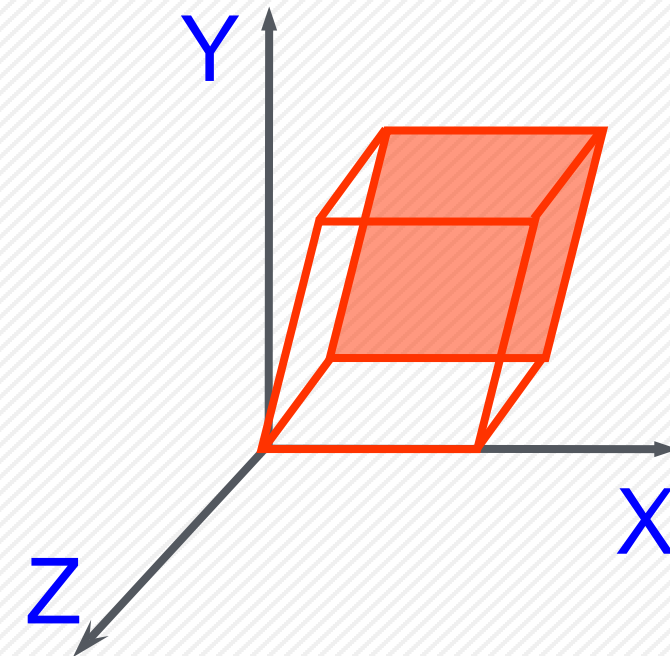
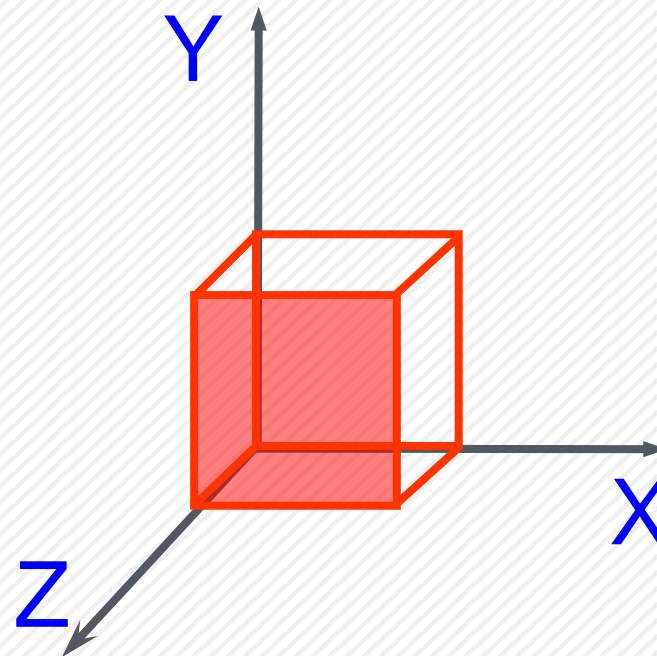


5. Otras Transformaciones

DESENCAJADO (SHEAR)

- Distorsiona la forma del objeto como si estuviera desenchajado
- Los puntos situados sobre uno de los ejes se quedan fijos. Los demás se desplazan
- Desenchajado dejando fijo el eje X (d_y , d_z son los desplazamientos en Y y Z)

$$D_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_y & 1 & 0 & 0 \\ d_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



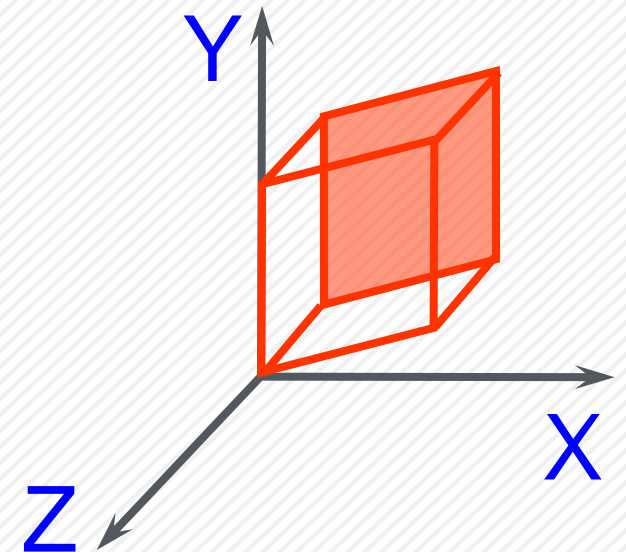
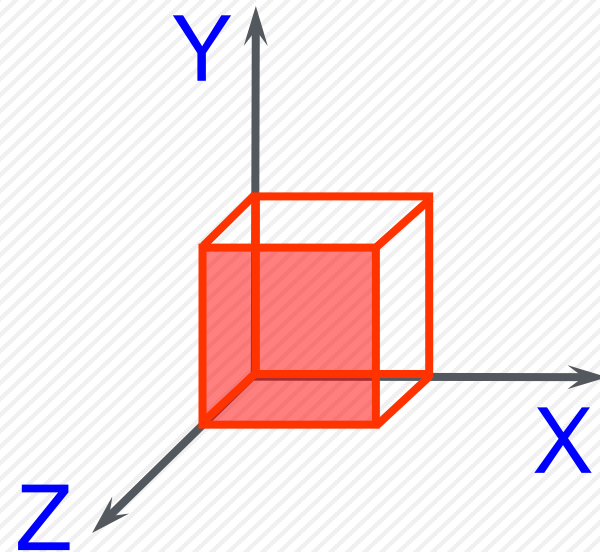


5. Otras Transformaciones

DESENCAJADO

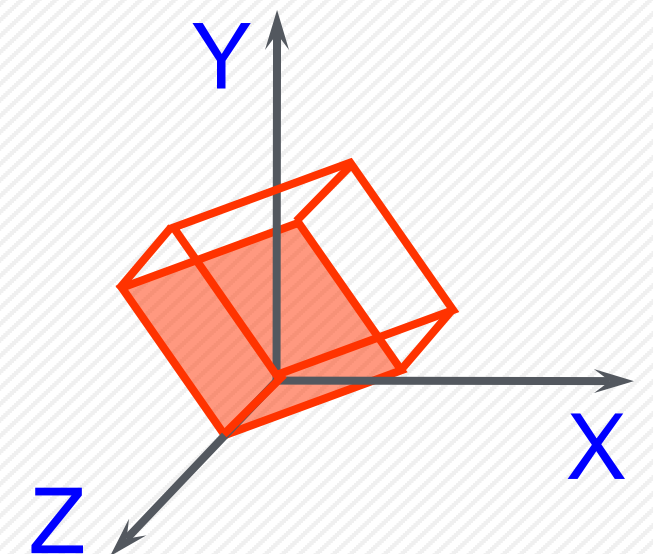
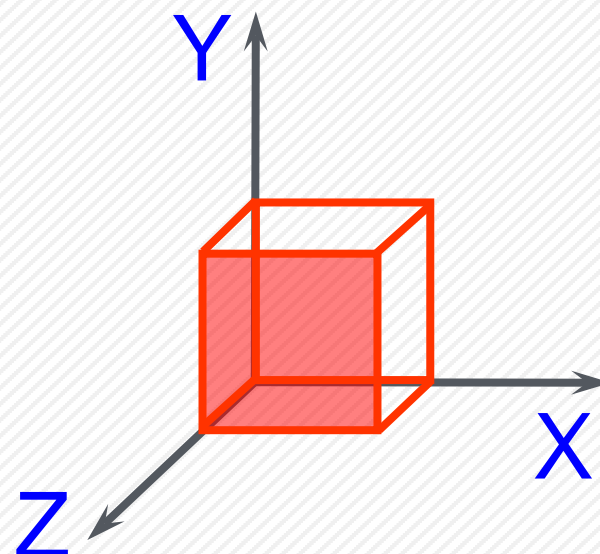
- Desencajado dejando fijo el eje Y

$$D_Y = \begin{bmatrix} 1 & d_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Desencajado dejando fijo el eje Z

$$D_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x & 0 \\ 0 & 1 & d_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





6. Transformaciones Afines

Definición y Características

- Son transformaciones afines:

- Traslación
- Rotación
- Reflexión

De cuerpo rígido: conservan longitudes y ángulos

- Escalado
- Desencajado

De cuerpo no rígido: no conservan longitudes ni ángulos

- Características de las transformaciones afines:

- Conservan las líneas paralelas
- Conservan los puntos finitos
- Toda transformación afín es una combinación de las anteriores



7. Matrices en Java

CLASE MATRIX

- En Android usaremos la clase Matrix para realizar las operaciones matriciales en OpenGL | ES. Debemos importar el paquete:
 - `import static android.opengl.Matrix.*;`
- Más información en:
 - <http://developer.android.com/reference/android/opengl/Matrix.html>
- Debemos emplear el orden correcto para multiplicar las matrices, ya que como hemos visto en el sentido positivo (dextrógiro) las matrices se **premultiplican**.



No confundir con la clase Matrix de Android.