TP 5

Ejercicio 5

El radio **R** de una esfera se considera una variable aleatoria continua. Supongamos que **R** tiene una funcion de densidad de probabilidad $f_R(r) = 6r(1-r), 0 < r < 1$. Obtener la funcion de densidad de probabilidad del volumen **V** y del area **A**

- Sabemos que el *volumen de una esfera* esta dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Sabemos que el *area* esta dada por:

$$A = 4\pi r^2$$

- Muy importante usar el siguiente **teorema**

Sea R VAContinua y $f_{R(r)}$ su densidad, si definimos una nueva variable aleatoria a partir de la misma $V = g(R)$ entonces la densidad de V se obtiene en lo que tendriamos que evaluar:

$$f_{V(v)} = f_{R(g^{-1}(r))} \cdot \left| \left(\frac{dg^{-1}}{dr} \right) \right|$$

Luego usamos el dato que nos dan en el enunciado: $f_R(r) = 6r(1-r)$

Derivando $\frac{dR}{dv} = d\frac{\left(\frac{3}{4\pi}v\right)^{\frac{1}{3}}}{dv}$

Obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dR}{dv} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{3}{4\pi}v\right)^{-\frac{2}{3}}$$

En simples palabras...

- Tenes dos variables aleatorias continuas, una depende de la otra, por lo que la otra depende de una
- Si conoces la densidad de una de las dos, podes conocer la densidad de la otra. Como?

1. Escribis la VAC(Densidad conocida) = g(VAC(Densidad **no** conocida)) - *Hallas la inversa*
2. Derivas esa funcion (VAC(Dc)) respecto de la VAC(Dnc)
3. Obtenes el parametro a usar para la funcion de densidad conocida
4. Evaluas con ese parametro a la densidad conocida y multplicas la funcion evaluada por la derivada encontrada

Ejercicio 6

El beneficio total de una empresa esta dado por: $B = 10Q - 5Q^2$ (en miles de pesos)

$Q = \text{cantidad vendida}$

$0 < Q < 2$

$$f_{Q(q)} = \begin{cases} q & \text{si } 0 < q < 1 \\ 2 - q & \text{si } 1 < q < 2 \end{cases}$$

Entonces, suponiendo que $f_{Q(q)} = 0$, si q < 0 y $f_{Q(q)} = 1$, si q > 2:

- Para encontrar la acumulada de Q simplemente necesitamos integrar la funcion de densidad

KEY: Cuando se calcula la **acumulada** a partir de la de **densidad** es importante restarle a cada intervalo *la probabilidad acumulada hasta el limite inferior*

$$F_{Q(q)} = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 0 \\ \frac{q^2}{2} - 0 & \text{si } 0 \leq q \leq 1 \\ 2q - \frac{q^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < q < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < q \end{cases}$$

1. Probabilidad de obtener un beneficio superior a los 3000 pesos

Nos estan pidiendo: $P(B \geq 3)$

Esto quiere decir:

$$P(10Q - 5Q^2 \geq 3) = P(5Q(2 - Q) \geq 3)$$

Resolvemos la inecuacion:

$$10Q - 5Q^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow Q = \begin{cases} Q_1 = 0.3675444 \\ Q_2 = 1.6324555 \end{cases}$$

Nosotros queremos que la ecuacion sea mayor a cero, como la funcion es continua, por teorema sabemos que no cambia de signo entre raices ni hacia afuera. Evaluamos en 1:

$$0 - 0 - 3 \geq 0 \Rightarrow \text{absurdo!}$$

$$10 - 5 - 3 = 2 \geq 0$$

$$20 - 20 - 3 > 0 \Rightarrow \text{absurdo!}$$

Entonces tomamos el intervalo $(0.367544, 1.6324555)$

$$P(B \geq 3) = P(Q \in (0.3675444, 1.6324555)) = P(0.3645444 < Q < 1.6324555)$$

$$P(B \geq 3) = F_{Q(1.6324555)} - F_{Q(0.3645444)} = 0.93224555 - 0.06644 = 0.866$$

2. Calcular el valor esperado de B.
3. Obtener la funcion de distribucion de B