Probabilidad y Estadística (93.24)
Pruebas de hipótesis

Índice

1. Repaso de algunos conceptos

Generalidades de Prueba de Hipótesis

En estadística, se denomina *población* al universo de casos posibles. Este término, como muchos otros, tienen sus orígenes en la aplicación de la estadística al estudio de características demográficas. Sin embargo, no se aplica sólo a individuos, sino que se utiliza en forma mucho más amplia.
Lamentablemente, en general no conocemos exactamente la población. De hecho, la población puede ser infinita. Por lo tanto, se suele *inferir* información acerca de la población a partir de la observación de una *muestra* de tamaño finito de la misma. Ya hemos visto, por ejemplo, algunas formas de estimar parámetros de la población a partir de una muestra.

Una *hipótesis estadística* es una afirmación sobre parámetros de una población. Una *prueba de hipótesis* consiste en una forma de contrastar varias hipótesis (mutuamente excluyentes) entre sí, evaluando su posible veracidad. Dado que, en general, no conocemos completamente la población, nunca podemos tener certidumbre total sobre la veracidad de un hipótesis estadística.

Aquí nos concentraremos en pruebas de hipótesis *binarias*, es decir, en las cuales se contrastan sólo dos hipótesis. En particular, en las aplicaciones se tiene interés en poner a prueba la veracidad de cierta hipótesis particular, la cual se denomina *hipótesis nula* (H_0). Para ello, se la compara con una hipótesis complementaria o *hipótesis alternativa* (H_1). El análisis de la veracidad de ambas hipótesis se realiza sobre la base de los datos de una o varias muestras. Nosotros nos enfocaremos en los casos en que se utiliza una sola muestra. Para facilitar el análisis, los datos de la muestra se suelen resumir en un solo valor denominado *estadístico de prueba* (Λ). Basados en en el valor del estadístico de prueba para una muestra particular, se toma una decisión: aceptar o rechazar la veracidad de la hipótesis nula. La hipótesis se rechaza cuando $\Lambda \in R$, siendo R una región pre-determinada de rechazo conocida como la *región crítica*.

Dado que nunca se puede tener una certeza total, se pueden cometer distintos tipos de errores:

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Se acepta H_0	OK	Error Tipo II
Se rechaza H_0	Error Tipo I	OK

Una forma de plantear la prueba de hipótesis es fijando un valor α (pequeño) para la máxima probabilidad admisible de cometer un Error Tipo I. A este valor se lo denomina el *nivel de significación* de la prueba. Dado α, se puede determinar la región crítica $R^{(\alpha)}$ tal que

$$P_{H_0}\left(\Lambda \in R^{(\alpha)}\right) \leq \alpha,$$

donde la probabilidad se evalúa en el caso en que la hipótesis nula sea verdadera. Fijada la región crítica, se puede cometer un Error Tipo II. La probabilidad de cometer este error se suele denominar con la letra β. Se conoce como *potencia de la prueba de hipótesis* a $1-\beta$.

Dada una muestra, se puede calcular un valor observado λ_{obs} del estadístico Λ. Se define el *valor p* de la prueba como la probabilidad de que Λ sea "peor" que λ_{obs} cuando H_0 es verdadera. Por "peor" queremos decir que hace más sospechoso que la hipótesis nula sea verdadera. La hipótesis nula se rechaza si el valor p es menor que el nivel de significación α.

Prueba de hipótesis para la media - Generalidades

Sea X una variable aleatoria con media μ. Existen tres tipos de pruebas de hipótesis:

1. De dos colas:
   - Prueba:
   $$\begin{aligned} H_0 &: \ \mu = \mu_0 \qquad \mu_0 \text{ es un valor dado} \\ H_1 &: \ \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$
   - Condición de rechazo: $\Lambda \notin (\lambda_l, \lambda_u) \subset \mathbb{R}$. Si $\mu = \mu_0$ (la hipótesis nula es cierta), $E_{\mu_0}[\Lambda] \in (\lambda_l, \lambda_u)$.
   - Probabilidad de Error Tipo II: $\beta(\mu_1) = P_{\mu_1}(\Lambda \in (\lambda_l, \lambda_u))$, donde $P_{\mu_1}(\cdot)$ denota la probabilidad cuando $\mu = \mu_1$. Hay cinco valores característicos:
     - $\beta(\mu_0) = 1 - \alpha$.
     - $\beta(\mu_l) = \beta(\mu_u) \approx 0.5$ si la distribución de Λ es simétrica.
     - $\beta(-\infty) = \beta(+\infty) = 0$.

     La gráfica de $\beta(\mu_1)$ vs. μ_1 se conoce como la *curva característica*. Por otro lado, se llama *curva de potencia* a la de $1 - \beta(\mu_1)$ vs. μ_1.
   - Valor p: $p(\lambda_{\text{obs}}) = P_{\mu_0}(|\Lambda - E_{\mu_0}[\Lambda]| > |\lambda_{\text{obs}} - E_{\mu_0}[\Lambda]|)$.
2. De cola derecha:
   - Prueba:
   $$\begin{aligned} H_0 &: \ \mu \leq \mu_0 \qquad \mu_0 \text{ es un valor dado} \\ H_1 &: \ \mu > \mu_0 \end{aligned}$$
   - Condición de rechazo: $\Lambda > \lambda_u$.
   - Probabilidad de Error Tipo II: $\beta(\mu_1) = P_{\mu_1}(\Lambda \leq \lambda_u)$. Hay tres valores característicos:
     - $\beta(\mu_0) = 1 - \alpha$.
     - $\beta(\lambda_u) = 0.5$ si la distribución de Λ es simétrica.
     - $\beta(+\infty) = 0$.
   - Valor p: $p(\lambda_{\text{obs}}) = P_{\mu_0}(\Lambda > \lambda_{\text{obs}})$.
3. De cola izquierda:
   - Prueba:
   $$\begin{aligned} H_0 &: \ \mu \geq \mu_0 \qquad \mu_0 \text{ es un valor dado} \\ H_1 &: \ \mu < \mu_0 \end{aligned}$$
   - Condición de rechazo: $\Lambda < \lambda_l$.
   - Probabilidad de Error Tipo II: $\beta(\mu_1) = P_{\mu_1}(\Lambda \geq \lambda_l)$. Hay tres valores característicos:
     - $\beta(\mu_0) = 1 - \alpha$.
     - $\beta(\lambda_l) = 0.5$ si la distribución de Λ es simétrica.
     - $\beta(-\infty) = 0$.
   - Valor p: $p(\lambda_{\text{obs}}) = P_{\mu_0}(\Lambda < \lambda_{\text{obs}})$.

Prueba de hipótesis para la media con varianza conocida

Asumamos que la muestra $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de una población puede considerarse un conjunto de n variables aleatorias i.i.d. *normales* con media μ **desconocida** y varianza σ^2 **conocida**. Dos estadísticos de prueba habituales son la media muestral $\bar{X}$ y

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Dado que es fácil pasar de uno estadístico a otro, aquí sólo presentaremos los resultados usando Z. Si α es el nivel de significación, las pruebas de hipótesis quedan:

Prueba de Hipótesis	**Condición de rechazo**	**Prob. Error Tipo II** $\beta(\mu_1)$	**Valor** p
$H_0:\ \mu = \mu_0$ $H_1:\ \mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o $Z > +z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\Phi\left(+z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ $-$ $\Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$	$2\left(1 - \Phi\left(\lvert z_{\text{obs}}\rvert\right)\right)$
$H_0:\ \mu \leq \mu_0$ $H_1:\ \mu > \mu_0$	$Z > +z_{1-\alpha}$	$\Phi\left(+z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$	$1 - \Phi\left(z_{\text{obs}}\right)$
$H_0:\ \mu \geq \mu_0$ $H_1:\ \mu < \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$	$\Phi\left(z_{\text{obs}}\right)$

Gracias al Teorema Central del Límite, **estas ecuaciones son válidas aunque las variables aleatorias no sean normales si n es grande**.

Sean o no normales las variables aleatorias, **si n es grande, las mismas condiciones de rechazo y fórmulas para el valor p se pueden utilizar aún en el caso que la varianza sea desconocida**. En este caso, el estadístico de prueba que se utiliza es

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}.$$

Prueba de hipótesis para una proporción

Sea q la probabilidad **desconocida** de un evento dado. Otra forma de entender q es como la proporción de la población que satisface cierta propiedad. Sea X el número de individuos con la propiedad indicada de una muestra de n casos independientes. Si $n \ll N$, siendo N el tamaño de la población, $X \sim \text{Binomial}(n, q)$. Si n es grande, por el Teorema Central del Límite, la distribución de X es aproximadamente normal con media $\mu = nq$ y varianza $\sigma^2 = nq(1-q)$.
Tres estadísticos de prueba posibles son X, $\hat{q} = X/n$ y

$$Z = \frac{\hat{q} - q_0}{\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}}}.$$

Dado que es sencillo pasar de un estadístico a otro, sólo presentaremos resultados correspondientes a Z. Si n es grande (> 100), gracias al Teorema Central del Límite las pruebas de hipótesis para un nivel de significación α quedan:

Prueba de Hipótesis	**Condición de rechazo**	**Prob. Error Tipo II** $\beta(q_1)$	**Valor** p $p(z_{\text{obs}})$
$H_0: q = q_0$ $H_1: q \neq q_0$	$Z < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o $Z > +z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\Phi\left(+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q_1(1-q_1)}} + \frac{q_0-q_1}{\sqrt{\frac{q_1(1-q_1)}{n}}}\right)$ $-$ $\Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q_1(1-q_1)}} + \frac{q_0-q_1}{\sqrt{\frac{q_1(1-q_1)}{n}}}\right)$	$2\left(1 - \Phi\left(\lvert z_{\text{obs}}\rvert\right)\right)$
$H_0: q \leq q_0$ $H_1: q > q_0$	$Z > +z_{1-\alpha}$	$\Phi\left(+z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q_1(1-q_1)}} + \frac{q_0-q_1}{\sqrt{\frac{q_1(1-q_1)}{n}}}\right)$	$1 - \Phi\left(z_{\text{obs}}\right)$
$H_0: q \geq q_0$ $H_1: q < q_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi\left(-z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q_1(1-q_1)}} + \frac{q_0-q_1}{\sqrt{\frac{q_1(1-q_1)}{n}}}\right)$	$\Phi\left(z_{\text{obs}}\right)$

Prueba de hipótesis para la media con varianza desconocida

Asumamos que la muestra $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de una población puede considerarse un conjunto de n variables aleatorias i.i.d. *normales* con media μ y varianza σ^2 **desconocida**. El estadístico de prueba es

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}.$$

Si α es el nivel de significación, las pruebas de hipótesis quedan:

Prueba de Hipótesis	**Condición de rechazo**	**Prob. Error Tipo II** $\beta(\mu_1)$	**Valor** p $p(t_{\text{obs}})$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$T < -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ o $T > +t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	$\Xi_{n-1}\left(+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ $-$ $\Xi_{n-1}\left(-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$	$2\left(1 - \Xi_{n-1}\left(\lvert t_{n-1,\text{obs}}\rvert\right)\right)$
$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$T > +t_{n-1,1-\alpha}$	$\Xi_{n-1}\left(+t_{n-1,1-\alpha} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$	$1 - \Xi_{n-1}\left(t_{\text{obs}}\right)$
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$T < -t_{n-1,1-\alpha}$	$1 - \Xi_{n-1}\left(-t_{n-1,1-\alpha} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$	$\Xi_{n-1}\left(t_{\text{obs}}\right)$

Ξ_{n-1} es la función de distribución (acumulada) correspondiente a una variable aleatoria t de Student con $n-1$ grados de libertad. Cuando n es grande (> 200), $\Xi_{n-1}(\cdot) \approx \Phi(\cdot)$ y $t_{n-1,\delta} \approx z_\delta$.

2. Función de distribución de la variable aleatoria con distribución normal estándar

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

3. Fractiles de la distribución normal estándar

α	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.50	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
0.51	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
0.52	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
0.53	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
0.54	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231
0.55	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
0.56	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
0.57	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
0.58	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250
0.59	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508
0.60	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
0.61	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
0.62	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
0.63	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
0.64	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
0.65	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
0.66	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
0.67	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
0.68	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
0.69	0.4958	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
0.70	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
0.71	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
0.72	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
0.73	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
0.74	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
0.75	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
0.76	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
0.77	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
0.78	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
0.79	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
0.80	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8632	0.8669	0.8706	0.8742
0.81	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
0.82	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502
0.83	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
0.84	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
0.85	1.0364	1.0407	1.0451	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
0.86	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
0.87	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
0.88	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
0.89	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
0.90	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
0.91	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
0.92	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
0.93	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
0.94	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
0.95	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
0.96	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
0.97	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
0.98	2.0537	2.0748	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904
0.99	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

4. Fractiles de la distribución t-Student

GDL	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.8534	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.8530	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.8526	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.8523	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.8520	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.8517	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.8514	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.8512	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.8509	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.8507	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.8505	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.8503	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.8501	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.8499	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.8497	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	0.8495	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.8493	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.8492	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.8490	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778

GDL	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
51	0.8487	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.8486	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.8485	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.8483	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.8482	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.8481	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.8480	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.8479	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.8478	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.8477	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
61	0.8476	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.8475	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.8474	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.8473	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.8472	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	0.8471	1.2945	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.8470	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	0.8469	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	0.8469	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	0.8468	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	0.8467	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.8466	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	0.8466	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.8465	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	0.8464	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430
76	0.8464	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.8463	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.8463	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.8462	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.8461	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.8461	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.8460	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.8460	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.8459	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	0.8459	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.8458	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.8458	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.8457	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.8457	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.8456	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
91	0.8456	1.2909	1.6618	1.9864	2.3680	2.6309
92	0.8455	1.2908	1.6616	1.9861	2.3676	2.6303
93	0.8455	1.2907	1.6614	1.9858	2.3671	2.6297
94	0.8455	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6291
95	0.8454	1.2905	1.6611	1.9853	2.3662	2.6286
96	0.8454	1.2904	1.6609	1.9850	2.3658	2.6280
97	0.8453	1.2903	1.6607	1.9847	2.3654	2.6275
98	0.8453	1.2902	1.6606	1.9845	2.3650	2.6269
99	0.8453	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
100	0.8452	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259

5. Guía de ejercicios

1. De una producción de tubos de hormigón se extrajo una muestra de tamaño 16 y se los pesó resultando una media muestral de 17.5 kg. La varianza del peso de un tubo es de 4 kg^2 y se puede suponer que el peso de esos tubos tiene distribución normal con una media de 18 kg (¡eso lo dice el fabricante!). Considerando un nivel de significación del 5 %, ¿se puede concluir que el peso medio de los tubos es significativamente inferior al especificado por el fabricante?. Calcule el valor P de la prueba.

2. Se supone que un nuevo procedimiento para producir cemento dará por resultado que tenga una resistencia a la compresión de 5000 kg/cm^2 con una desviación estándar de 120 kg/cm^2. Para poner a prueba la hipótesis nula H0: $\mu = 5000$ frente a la alternativa H1: $\mu < 5000$ se analiza una muestra de 50 probetas de hormigón a las que se somete a ensayo. Se rechaza la hipótesis nula si la media muestral es menor que 4970 kg/cm^2.

   a) Determine la probabilidad de cometer error de tipo I.

   b) Evalúe la probabilidad de cometer error tipo II para las alternativas $\mu = 4960$ y $\mu = 4950$.

3. Una empresa desea iniciar una campaña de ventas de aparatos de TV. Se considera que la decisión de comenzar la campaña debe estar relacionada con los ingresos medios mensuales por familia, de modo que será afirmativa si éstos son iguales o superiores a 500 U$S y negativa cuando los ingresos no lleguen a esa suma.
   Un punto de vista respecto del error de tipo I (de probabilidad α) es que la empresa desea evitar el error de no empezar la campaña cuando debería hacerlo; no quiere perder la oportunidad de ganar dinero.
   El otro punto de vista es que la empresa desea evitar el error que supone iniciar la campaña cuando no deba hacerlo, si las familias no tienen suficiente dinero se deben evitar las pérdidas que acarrea una campaña inútil de ventas.

   a) El desvío estándar poblacional es 20 U$S y se extrae una muestra de 100 personas. Elaborar la regla de decisión al 5 % de nivel de significación de la hipótesis nula $\mu = 500$ frente a la alternativa $\mu < 500$. Calcular la probabilidad β de cometer error de tipo II de este regla de decisión para la alternativa $\mu = 495$ U$S. Construir en forma aproximada la gráfica de β en función de μ (curva OC o de operación característica).

   b) Supongamos ahora que la empresa desea evitar el error que supone empezar la campaña de ventas cuando no debe hacerlo; trata de evitar las pérdidas monetarias que origina una campaña de ventas inútil. En este caso las hipótesis nula y alternativa son: H0: $\mu \leq 500$ y H1: $\mu > 500$ respectivamente.
   En este caso el error de tipo I es el que se comete al empezar la campaña cuando no debería hacerse, y el error de tipo II es el que aparece cuando no se empieza debiéndose hacer. Obtener la regla de decisión para los mismos valores de α, n y el desvío estándar poblacional del ingreso. Realizar la curva OC para valores de μ entre 500 U$S y 510 U$S.

   c) Obtener la regla de decisión dados $\alpha = 0.025$, $\beta(470) = 0.05$, el desvío estándar del ingreso es 50 U$S, para el contraste de hipótesis H0: $\mu \geq 500$ y H1: $\mu < 500$. Esto significa que la empresa no desea iniciar la campaña de ventas (con probabilidad 0.95) cuando los ingresos medios son tan bajos como 470 U$S. Representar la curva OC para alternativas entre 460 U$S y 500 U$S.

4. La resistencia a la rotura de cierto tipo de alambre tiene distribución normal con media 280 kg y desvío estándar 20 kg. Se cree que un proceso de fabricación recién desarrollado puede aumentar la resistencia sin modificar el desvío estándar, pero sólo se lo implantará si se tiene una razonable seguridad de que efectivamente es así. Se ha establecido en 0.05 la probabilidad de implantar el nuevo método cuando en realidad la resistencia no se modifica, y en 0.15 la probabilidad de no implantarlo si se incrementa en 10 kg.

   a) Establezca la hipótesis nula, la condición de rechazo y la regla de decisión.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de implantar el nuevo método si la resistencia media aumenta en 5 kg?.

   c) Represente gráficamente las curva OC y de potencia de este ensayo.

5. En una pieza fabricada que ha de acoplarse a otras piezas, hay una dimensión crítica cuyo valor debe ser aproximadamente de 11.5 cm. La variabilidad del proceso de fabricación está dada por un desvío estándar de 0.1 cm. El proceso se considera bajo control si, para una muestra de n piezas, no hay motivos para pensar que la media es diferente de 11.5 cm.

   a) ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra si se establece en 0.1 la probabilidad de revisar el proceso equivocadamente y en 0.05 la probabilidad de no revisarlo cuando la media es de 11.4 cm?.
   Sugerencia: Para aproximar el cálculo suponga que la *cola derecha*, cuando la media es de 11.4 cm, tiene aproximadamente área nula. Una vez calculado el valor de n verifique que la suposición fue acertada.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de revisar el proceso cuando la media es de 11.46 cm?

6. Una compañía debe diseñar un sistema de muestreo periódico para controlar la recepción de grandes partidas de un producto. El proveedor desea tener la seguridad de que le rechacen a lo sumo el 5 % de las partidas buenas, que son aquellas que cumplen con la especificación de que la resistencia media mínima es de 1250 kg. A su vez, el cliente desea rechazar al menos el 90 % de las partidas malas, que son aquellas cuya resistencia media es inferior a 1100 kg. Ambos firman un contrato en el cual constan las condiciones anteriores y se establece que la decisión de rechazar o aceptar una partida se tomará en función del resultado de una muestra de n unidades elegidas al azar de la misma. Existen registros históricos por los cuales se sabe que el desvío de la resistencia a la rotura es de 180 kg.

   a) Indique la hipótesis nula apropiada, su condición de rechazo y la regla de decisión.

   b) Calcule la probabilidad de detectar que una partida dada resiste en promedio 1200 kg.

   c) Represente gráficamente en forma aproximada las curvas de operación característica (curva OC) y de potencia indicando claramente las abscisas y ordenadas de al menos tres puntos.

7. El contenido de los paquetes de cereal llenados por una determinada máquina tiene una distribución normal con desvío estándar de 30 g. Se desea establecer un control periódico del proceso de llenado y se establece en un 5 % la probabilidad de detener la máquina innecesariamente cuando el peso promedio de los paquetes es igual a 360 g (que es el peso neto indicado en el envase), y en 2 % la probabilidad de no realizar las correcciones necesarias en el proceso cuando el peso promedio de cada paquete es un 10 % inferior al valor indicado en el envase. Indique el criterio de decisión y el tamaño de muestra adecuado que daría usted a la persona encargada de controlar el proceso.

8. Según un fabricante, la resistencia media extrema de cierto alambre aleado de Al es de 250 $\mathrm{MN/m^2}$. Un contratista adquiere un lote de alambre y pone a prueba una muestra de tamaño 35. El valor medio y la desviación estándar obtenidos a partir de esa muestra son respectivamente 274.4 $\mathrm{MN/m^2}$ y 11.2 $\mathrm{MN/m^2}$. ¿Es justificable que el contratista concluya que la remesa tiene una resistencia significativamente diferente a lo especificado por el fabricante?. Tomar un nivel de significación del 5 % y suponga que la variable que se mide tiene distribución normal.

   Resolución aquí.

9. Se vende una marca especial de cemento en bolsas de 50 kg. Se eligieron 11 de ellas al azar y se observa que su masa en kg es: 49.2 - 50.1 - 49.8 - 49.7 - 50.1 - 50.5 - 49.6 - 49.9 - 50.4 - 50.2 - 49.7. ¿Son tales resultados consistentes con que la media del cemento en una bolsa es 50 kg? Suponga que el contenido de una bolsa es una variable con distribución normal. Tomar el nivel de significación $\alpha = 0.1$.

10. Un fabricante de lámparas eléctricas ha desarrollado un nuevo proceso de producción que él espera aumentará la eficiencia (se supone una variable normal) media (en lúmenes/watt) de su producto que hasta el momento es de 9.5. Los resultados de un experimento realizado sobre 10 lámparas se dan a continuación: 9.28, 10.25, 11.52, 13.02, 11.58, 9.97, 11.46, 12.05, 9.87, y 10.85.
    ¿Debe el fabricante concluir que la eficiencia aumentó ? Usar 5 % como nivel de significación del test. Usando una planilla de cálculo u otro software adecuado calcular el valor P (la probabilidad de que el estadístico de prueba tome valores superiores al observado, para esta prueba de hipótesis de *cola derecha*) de esta prueba de hipótesis.

11. En una planta de armado se diseña una operación específica que toma un tiempo promedio de 5 minutos. El gerente de planta sospecha que para una máquina en particular el tiempo promedio es mayor. Entonces toma una muestra de 15 tiempos de operación para esa máquina y obtiene los siguientes resultados (en minutos):

5.2	4.2	5.7	6.8	6.7	7.2	3.3	5.3	6.6	4.4	4.8	3.8	3.7	4.5	4.7

    Puede suponerse que el tiempo para esa operación es una variable aleatoria con distribución normal. ¿Se encuentra la sospecha del gerente apoyada por la evidencia si se supone un nivel de significación del 5 %? Justifique su respuesta *detallando el test de hipótesis* correspondiente

12. Tomado de **EL HOMBRE ANUMERICO - .** *El analfabetismo matemático y sus consecuencias*, Autor: John Allen Paulos - Tusquets Ed., Barcelona, 1995.

    > "Supongamos que formulo la hipótesis de que por lo menos el 15 por ciento de los coches de determinada región son Corvette, y que después de observar el paso de mil coches por unos cuantos cruces representativos de dicha región sólo he visto ochenta Corvette. Utilizando la teoría de la probabilidad, calculo que, en el supuesto de que mi hipótesis sea cierta, la probabilidad de este resultado es bastante inferior al 5 por ciento, cifra que comúnmente se usa como *nivel de significación.* Así pues, se rechaza la hipótesis de que el 15 por ciento de los coches de la región son Corvette."

    Verificar los resultados que se comentan en el texto.

    Comentario: Hay dos tipos de errores que se pueden cometer al aplicar este test estadístico u otro cualquiera y se llaman, en un derroche de imaginación, errores del Tipo I y errores del Tipo II. Se comete un error del Tipo I cuando se rechaza una hipótesis verdadera, y uno del Tipo II, cuando se acepta una hipótesis falsa. Así, si una gran cantidad de Corvette procedentes de una exposición automovilística atravesara la región y esto nos llevara a aceptar la hipótesis falsa de que al menos el 15 por ciento de los coches de la región son Corvette, estaríamos cometiendo un error del Tipo II. Por el contrario, si no nos hubiéramos percatado de que la mayoría de los Corvette de la región no estaban en circulación, sino guardados en sus garajes, al rechazar la hipótesis verdadera estaríamos cometiendo un error del Tipo I.

13. Considere la siguiente situación. Ud. recibe una caja con 12 unidades de una pieza y desea ensayar la hipótesis: H0) Las 12 piezas son buenas, extrayendo una única unidad de la caja. La condición de rechazo, obvia, es que la pieza extraída sea defectuosa. Si la pieza extraída es buena, Ud. no puede rechazar la hipótesis, pero en modo alguno puede aceptarla ¿verdad?. Calcule la probabilidad β de cometer error de tipo II para las alternativas de que haya $1, 2, \ldots, R$ piezas defectuosas en la caja. Este es un caso sencillo para ilustrar los conceptos básicos del tema de ensayo de hipótesis.

14. En un experimento para determinar la efectividad de un nuevo medicamento, se ensaya en 400 pacientes que sufren la afección que este medicamento dice curar. Si más de 300 pero menos de 340 pacientes se curan se concluye que el medicamento tiene una efectividad del 80 %.

    a) Determinar la probabilidad de cometer error de tipo I.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de cometer error de tipo II si el nuevo medicamento tiene una efectividad del 70 %?

15. Se sabe que el 30 % de los automovilistas en una ciudad cruzan semáforos en rojo. Para disminuir este porcentaje, la municipalidad realiza una intensiva campaña publicitaria. Luego de la misma se quiere evaluar si la campaña tuvo éxito o no. Para tal fin se dispone, en una esquina representativa, una cámara de video que filma durante varias horas lo ocurrido en el semáforo. Luego de este lapso de tiempo, se contabilizaron 400 autos pasando por la esquina, de los cuales 92 cruzaron el semáforo en rojo. ¿Se puede afirmar, con una probabilidad de error del 5 %, que la campaña hizo descender el porcentaje inicial? Justifique detalladamente planteando una prueba de hipótesis adecuada.

16. La proporción de defectuosos en un proceso es 2 %. Como se desea establecer un control sobre el mismo se inspeccionan con una frecuencia de una vez por hora muestras de tamaño n y se revisa el proceso si se encuentran c ó más defectuosas entre las n. Para determinar n y c se han fijado un riesgo del 10 % (0.1 es la probabilidad de detener el proceso cuando en realidad no habría que hacerlo) y una probabilidad 0.2 de cometer el error de no detener el proceso en el caso en que el porcentaje de defectuosos sea de 6 %.

    a) Especifique claramente la prueba de hipótesis planteada (hipótesis nula, alternativa, nivel de significación, estadístico de prueba y zona de rechazo).

    b) Determine los valores de n y c.

    c) Represente gráficamente en forma aproximada las curvas de operación característica (curva OC) y de potencia indicando claramente las abscisas y ordenadas de al menos tres puntos.

    Resolución aquí.

17. Una máquina dosificadora en una operación de producción se debe ajustar si el porcentaje de envases con falta de llenado es significativamente superior al 8 %. En una muestra aleatoria de 145 envases de la producción de un día se encontraron 18 envases incompletos en su llenado.

a) ¿Indican los resultados que hay que ajustar la máquina dosificadora? Detalle una prueba de hipótesis adecuada. Considere un nivel de significación del 5 %. Calcule el valor P de esta prueba de hipótesis (la probabilidad de que el estadístico de prueba tome valores superiores al observado, en esta prueba de hipótesis de *cola derecha*).

b) ¿Cuál es la probabilidad de decidir que la máquina no debe ser ajustada cuando en realidad la verdadera proporción de envases mal llenados (incompletos) es igual a 0.13?

c) Represente gráficamente en forma aproximada las curvas de operación característica (curva OC) y de potencia indicando claramente las abscisas y ordenadas de al menos tres puntos.

18. En un diario de gran circulación de esta ciudad se publicó el resultado de una encuesta en la que se indicaban, para una muestra de tamaño n, varias *proporciones* de preferencia por varios equipos de fútbol. En ese reporte figuraba una ficha técnica en la que se indicaba lo siguiente:

- Tamaño de la muestra $n = 9300$
- Nivel de confianza 95 %
- Error máximo: 1 % (semiamplitud máxima de un intervalo de confianza).

En esa encuesta se indicaba que *los hinchas de Boca no son la mitad más uno* dado que el 41 % (0.403) de la muestra correspondió a hinchas de Boca. Explique el significado de esta afirmación analizando una prueba de hipótesis de *cola izquierda*. Calcule el valor P de esta prueba y compare con algún nivel de significación típico. En este caso el valor P es la probabilidad de que el estadístico de prueba tome valores inferiores al observado, por tratarse de una prueba de hipótesis de *cola izquierda*.

19. Para estimar el rendimiento de un proceso químico, se observaron datos correspondientes a las últimas 10 corridas del mismo. El rendimiento promedio de estas corridas fue de 64.8 %, y el desvío estándar de las mismas fue de 9.8 %. El responsable del proceso está decidido a invertir en su mejora, sólo si recibe evidencia estadística de que el rendimiento medio del proceso es inferior al 70 %. Si le preguntaran a usted ¿justificaría la inversión?. Suponga que el rendimiento tiene distribución normal y explique detalladamente su respuesta y los criterios utilizados.

20. En un proceso químico se producen en promedio, 800 toneladas de un producto químico por día. Las producciones diarias de una semana fueron: 805, 790, 790, 780, y 770.

a) En base a este resultado, ¿se puede afirmar que la producción promedio es menor a 800 toneladas y que, por lo tanto, algo anda mal en el proceso? Decida a un nivel de significación del 5 %.

b) ¿Cuál es el intervalo del 90 % de confianza para estimar la varianza de la producción diaria?

c) ¿Qué supuestos se requieren para que sea válido el procedimiento para analizar estos datos?

Apéndice: Una simulación en Octave.
Optativo y recomendable para fijar conceptos.

Suponga una prueba de hipótesis de *cola derecha* en la que se quiere poner a prueba la hipótesis nula **H0**: $\mu = \mu_0$ frente a la hipótesis alternativa **H1**: $\mu > \mu_0$. Suponga que la variable aleatoria involucrada en esta prueba tiene distribución normal de media μ y desvío estándar σ. Si se conoce el valor de σ entonces el estadístico de prueba es la variable aleatoria

$$Z = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

que tiene *distribución normal estándar.* Si al evaluar este estadístico resulta mayor que el valor crítico $z_{1-\alpha}$ entonces se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación 100 α %. El valor de α mide la probabilidad de cometer el error de *tipo I.* En promedio si se realizase esta prueba N veces entonces αN veces se rechazaría la hipótesis nula a pesar que el valor de μ no es mayor que μ_0.

Si no se conoce el valor de σ entonces se estima en cada muestra con el desvío estándar muestral S y asi resulta que el estadístico de prueba es la variable aleatoria

$$T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S}$$

que tiene *distribución de Student con* $n-1$ *grados de libertad.* Si al evaluar este estadístico resulta mayor que el valor crítico $t_{1-\alpha,n-1}$ entonces se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación 100 α %. El valor de α mide la probabilidad de cometer el error de *tipo I.* En promedio si se realizase esta prueba N veces entonces αN veces se rechazaría la hipótesis nula a pesar que el valor de μ no es mayor que μ_0.

El siguiente código en *Octave* simula la generación de N muestras de tamaño n y determina en cada una de ellas la condición de rechazo en los dos casos comentados anteriormente para esta prueba de hipótesis de cola derecha. También se calcula la frecuencia de ocurrencia de la comisión del error de tipo I:

```
mu = 10; sigma = 2.5;
n = 10; N = 1000; X = mu+sigma*randn(n,N);
XR = mean(X); S = std(X);
Z = (XR - mu)/(sigma/sqrt(n));
T = (XR - mu)./(S/sqrt(n));
zc = 1.6449; tc = tinv(0.95,n-1);
[zc tc]
pZ = mean(Z > zc); pT = mean(T > tc);
[pZ pT]
```

Breve explicación: La matriz `X` de `n` filas y `N` columnas contiene números aleatorios provenientes de una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desvío estándar σ. Luego se calcula para cada columna (que corresponde a una muestra de tamaño n) la media que se almacena en el vector `XR`; de igual manera la matriz `S` almacena los valores del desvío estándar de cada muestra. Se definen a continuación los estadísticos `Z` y `T` y se calculan los valores críticos (en este ejemplo si $\alpha = 0.05$) para las distribuciones de probabilidad de estos estadísticos. Los valores de `pZ` y `pT` miden la frecuencia de ocurrencia de rechazo. En una ejecución de este código se obtuvieron estos valores:

```
>> [pZ pT]
ans =

 0.043000 0.044000
```

Ambos valores resultan próximos a 0.05.

6. Respuestas

1. El estadístico de prueba Z de este test toma el valor -1 para esta muestra. Como el valor crítico es -1.645 (para el 5 % de cola izquierda) entonces no se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la evidencia muestral no apoya que el peso medio de los tubos haya disminuido.

2. a) 0.039 (3.9 %) b) 0.278 y 0.119.

3. a) El valor crítico de la media muestral es 496.71. La probabilidad de cometer error de tipo II es 0.196 si $\mu = 495$.
b) El valor crítico de la media muestral es 503.29.
c) Si en una muestra de 37 encuestados la media muestral es menor que 483.69 entonces no se lanza la campaña.

4. a) $n = 29$, $\bar{X}_{crit} = 286.11$ b) 0.383.

5. a) n= 11, los extremos del intervalo de valores de la media muestral para el que no se rechaza la hipótesis nula son 11.45 y 11.55. b) 0.371.

6. a) La partida se rechaza si la media de una muestra de tamaño 13 es inferior a 1167.9. b) 0.26.

7. Las condiciones impuestas sobre los errores de tipo I y II se pueden lograr con un tamaño de muestra $n = 10$ (o mayor) y el valor crítico de la media muestral es 344.40 g. Si la media muestral observada en la muestra es menor que 344.40 g entonces se rechaza la hipótesis nula de que el contenido promedio del paquete de cereal poblacional es mayor o igual que 360 g.

8. Considerando un test de dos colas se tiene que la zona crítica para el nivel de significación del 5 % considerando el estadístico T con distribución de Student con 34 grados de libertad es $|t| >$2.032. Como el valor muestral es 12.889 entonces se rechaza la hipótesis nula.

9. Considerando un test de dos colas se tiene que la zona crítica para el nivel de significación del 10 % considerando el estadístico T con distribución de Student con 10 grados de libertad es $|t| >$1.812. Como el valor muestral es -0.635 entonces no se rechaza la hipótesis nula..

10. Considerando un test de cola derecha se tiene que la zona crítica para el nivel de significación el 5 % considerando el estadístico T con distribución de Student con 9 grados de libertad es $t >$1.833. Como el valor muestral del estadístico es 4.087 entonces se rechaza la hipótesis nula. La evidencia muestral apoya que la eficiencia ha aumentado.

11. Considerando un test de cola derecha se tiene que la zona crítica para el nivel de significación el 5 % considerando el estadístico T con distribución de Student con 14 grados de libertad es $t >$1.7613 Como el valor muestral del estadístico es 0.399 entonces no se rechaza la hipótesis nula. La evidencia muestral no apoya que el tiempo promedio de realización de la tarea supera 5 minutos.

12. La probabilidad de que la media muestral sea inferior a 0.08 (80/1000) bajo la hipótesis nula cierta (p =0.15) es del orden de 10^{-10}. La evidencia muestral determina que se rechace la hipótesis nula de que el porcentaje poblacional de Corvette sea de al menos el 15 %.

13. La probabilidad de no rechazar la hipótesis nula si hay k defectuosas en la caja es $\frac{12-k}{12}$ para k tomando los valores de 0 a 12.

14. $\alpha = 0.0126$ (1.26 %) $\beta = 0.0146$ (1.46 %).

15. Se puede concluir, de acuerdo a esta evidencia muestral , que la campaña fue exitosa ya que produjo una disminución significativa del porcentaje de automovilistas que cruzan semáforos en rojo. La proporción muestral es 0.023 y asi el valor observado del estadístico muestral con distribución normal estándar es -3.055 menor que el valor crítico -1.645 (para la prueba de cola izquierda correspondiente a H_0: $p \geq 0.30$ y el nivel de significación 0.05).

16. b) La muestra debe tener tamaño 91 y el valor de c es 4.

17. a) El estadístico de prueba (Z) toma el valor 1.959 para esta muestra. Como excede el valor crítico 1.645 entonces se concluye que hay que ajustar la máquina dosificadora. El valor P de la prueba es 0.025 (menor que el nivel de significación fijado del 5 %). b) 0.32.

18. Valor-p = Φ(-18.71) $\approx$ 0.

19. a) La hipótesis nula es H_0: $\mu \geq 0.70$ frente a H_1: $\mu < 0.70$. Si la evidencia muestral apoya el rechazo de H_0 entonces se acota en α la probabilidad de cometer el error de rechazar H_0 a pesar de ser cierta. En este caso el valor observado del estadístico muestral con distribución t de Student con 9 grados de libertad es -1.677 y esto apoya no rechazar la hipótesis nula ya que el valor crítico al nivel de significación 0.05 es -1.833. Otra manera de presentar el resultado de la prueba es calculando la probabilidad de que el estadístico t con 9 grados de libertad tome valores menores que el observado. Esa probabilidad, denominada *valor p*, es 0.064. A niveles de significación mayores que este valor se rechaza H_0.

20. a) Para esta muestra de tamaño 5 se midieron una media muestral de 787 ton y un desvío estándar muestral de 13.04 ton. El valor observado del estadístico muestral con distribución t de Student con 4 grados de libertad es -2.23 y esto apoya rechazar la hipótesis nula ya que el valor crítico, al nivel de significación 0.05 de esta prueba de cola izquierda, es -2.132. Se concluye que algo anda mal en el proceso por una disminución significativa de la media diaria de de la producción.
b) El intervalo de confianza para la varianza de la producción diaria es (71.67, 956.77) para el nivel de confianza 0.9 (90 %).
c) Se debe suponer que la producción diaria es una variable aleatoria con distribución normal.

7. Ejercicios resueltos

Ejercicio 8

Según un fabricante, la resistencia media de cierto alambre aleado de Al es de 250 MN/m^2. Un contratista adquiere un lote de alambre y pone a prueba una muestra de tamaño 35. El valor medio y la desviación estándar obtenidos a partir de esa muestra son 274.4 MN/m^2 y 11.2 MN/m^2, respectivamente. ¿Es justificable que el contratista concluya que la remesa tiene una resistencia significativamente diferente a lo especificado por el fabricante? Tomar un nivel de significación del 5 %.

Resolución

Al contratista le preocupa que si la afirmación del fabricante es cierta o no. La prueba de hipótesis adecuada es entonces

$$H_0 : \ \mu = 250 \tag{1}$$
$$H_1 : \ \mu \neq 250 \tag{2}$$

Siendo $n = 35$, el valor crítico de la prueba de hipótesis es $t_{34,0.975} \approx 2.0322$. El estadístico observado es

$$t_{\text{obs}} = \frac{274.4 - 250}{\frac{11.2}{\sqrt{35}}} \approx 12.8886. \tag{3}$$

Dado que $t_{\text{obs}} > t_{34,0.975}$, existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significación del 5 %.

Ejercicio 16

La proporción de defectuosos en un proceso es 2 %. Como se desea establecer un control sobre el mismo se inspeccionan con una frecuencia de una vez por hora muestras de tamaño n y se revisa el proceso si se encuentran c o más defectuosas entre las n. Para determinar n y c se han fijado un riesgo del 10 % (0.1 es la probabilidad de detener el proceso cuando en realidad no habría que hacerlo) y una probabilidad 0.2 de cometer el error de no detener el proceso en el caso en que el porcentaje de defectuosos sea de 6 %.

1. Especificar claramente la prueba de hipótesis planteada (hipótesis nula, alternativa, nivel de significación, estadístico de prueba y zona de rechazo).
2. Determinar los valores de n y c.
3. Representar gráficamente en forma aproximada las curvas de operación característica (curva OC) y de potencia indicando claramente las abscisas y ordenadas de al menos tres puntos.

Resolución

Dado que se quiere "mantener a raya" el porcentaje de defectuosos, lo que importa es vigilar que el mismo no aumente respecto del 2 % aceptable. Por lo tanto, la prueba de hipótesis debe ser

$$H_0 : \ q \leq 0.02 \tag{4}$$
$$H_1 : \ q > 0.02 \tag{5}$$

El proceso se detiene si los resultados sugieren que la hipótesis nula es falsa. Entonces, detener el proceso cuando no habría que hacerlo es cometer un Error de Tipo I. Ergo, el problema requiere un nivel significación $\alpha = 0.1$. Por otro lado, no detener el proceso cuando el porcentaje de defectuosos es superior al 2 % es un Error de Tipo II: el problema pide que $\beta(0.06) \leq 0.2$. Si n es grande,

$$\beta(0.06) = \Phi\left(+z_{1-0.1}\sqrt{\frac{0.02(1-0.02)}{0.06(1-0.06)}} + \frac{0.02-0.06}{\sqrt{\frac{0.06(1-0.06)}{n}}}\right) \leq 0.2 \tag{6}$$

$$\Phi\left(+z_{0.9}\sqrt{\frac{49}{141}} - \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{141}}\right) \leq 0.2 \tag{7}$$

$$z_{0.9}\sqrt{\frac{49}{141}} - \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{141}} \leq z_{0.2} \tag{8}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{141}} \geq z_{0.9}\sqrt{\frac{49}{141}} - z_{0.2} \tag{9}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{7}{2}z_{0.9} - \frac{\sqrt{141}}{2}z_{0.2} \tag{10}$$

$$n \geq \left(\frac{7}{2}z_{0.9} - \frac{\sqrt{141}}{2}z_{0.2}\right)^2 \approx \left(\frac{7}{2}1.2816 - \frac{\sqrt{141}}{2}(-0.8416)\right)^2 \tag{11}$$

$$n \geq 89.9136 \tag{12}$$

$$n \geq 90 \tag{13}$$

Podemos verificar:

$$\Phi\left(+z_{0.9}\sqrt{\frac{49}{141}}-\frac{2\sqrt{89}}{\sqrt{141}}\right)\approx 0.2023 \tag{14}$$

$$\Phi\left(+z_{0.9}\sqrt{\frac{49}{141}}-\frac{2\sqrt{90}}{\sqrt{141}}\right)\approx 0.1998 \tag{15}$$

Por lo tanto, el mínimo n es 90. La condición de rechazo es

$$\frac{\hat{q}-0.02}{\sqrt{\frac{0.02(1-0.02)}{90}}}>z_{0.9} \tag{16}$$

$$\hat{q}>0.02+\frac{7}{300}\sqrt{\frac{2}{5}}\,z_{0.9}\approx 0.0389\approx 0.04 \tag{17}$$

Definiendo $X=n\hat{q}=90\hat{q}$,

$$X>1.8+\frac{21}{10}\sqrt{\frac{2}{5}}\,z_{0.9}\approx 3.5021. \tag{18}$$

Es decir, el proceso se revisará (es decir, la hipótesis nula se rechazará) cuando el número de defectuosos de una muestra de $n=90$ sea mayor o igual a $c=4$.

La curva de operación característica se puede graficar a partir de

$$\beta(q_1)=\Phi\left(+z_{0.9}\sqrt{\frac{0.02(1-0.02)}{q_1(1-q_1)}}+\frac{0.02-q_1}{\sqrt{\frac{q_1(1-q_1)}{90}}}\right) \tag{19}$$

Es fácil ver que

$$\beta(0.0200)=0.9, \tag{20}$$
$$\beta(1.0000)=0.0. \tag{21}$$

A partir de las ecuaciones (16)-(17), tampoco es difícil mostrar

$$\beta(0.0389)=0.5. \tag{22}$$

Si bien $\beta(1)=0$, $\beta(q_1)$ es muy pequeño para valores de q_1 bastante más chicos. En efecto,

$$\beta(0.1)=0.0267, \tag{23}$$
$$\beta(0.2)\approx 7\times 10^{-5}. \tag{24}$$

La Fig. 1 muestra la curva de operación característica.

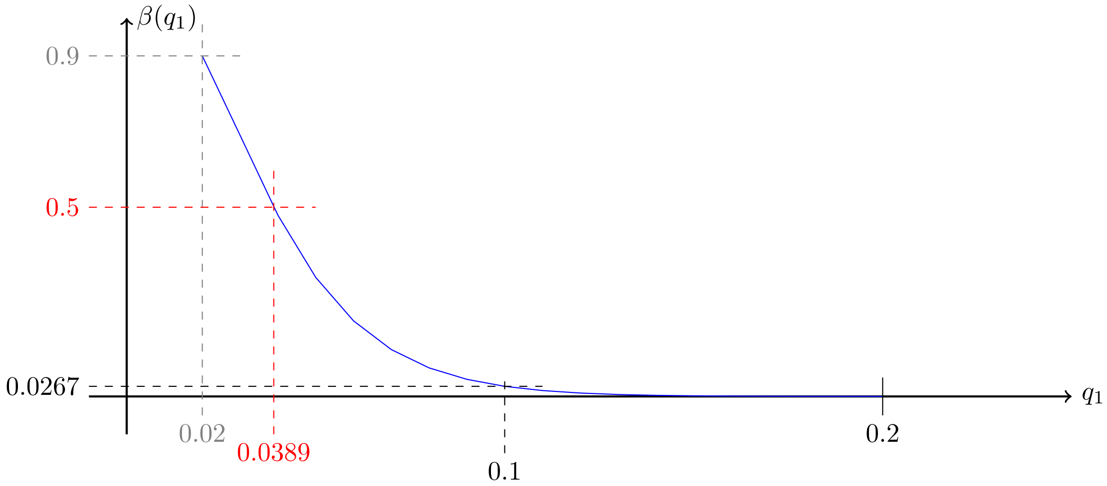

Figura 1: Curva de operación característica del ejercicio 16 de la guía 9.