Procesos Estocasticos

Tips y Conceptos Clave

Probabilidad y Estadistica
16/10/2025

---

1 Proceso Estocastico

Importante: Coleccion de variables aleatorias indexadas por un parametro (en general tiempo)

$$\{X(t)\}_{t \in T}$$

Donde:
- T : Tiempo discreto o continuo
- E : Espacio de estados (valores posibles de $X(t)$)

1.1 Simplificaciones utiles

1.1.1 Procesos estacionarios

Nota: Las probabilidades son independientes del tiempo. Las reglas del juego no dependen del momento en que empezamos.

$$f(x_1, t_1 + \Delta t, x_2, t_2 + \Delta t, ...) = f(x_1, t_1, x_2, t_2, ...)$$

1.1.2 Incrementos independientes

Nota: Los cambios en intervalos de tiempo NO solapados son independientes.

1.1.3 Incrementos estacionarios

Nota: Las distribuciones de los incrementos solo dependen del tamaño del intervalo, no del momento.

2 Procesos de Markov

Importante: El futuro depende solo del presente, no de todo el pasado. Se ignora el pasado, solo te importa el lugar final.

$$P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, ..., X(t_1) = x_1) = P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

Tip: En tiempos discretos:

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2} p(x_3, t_3 | x_2, t_2).p(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

2.1 Cadenas de Markov

Nota: Son procesos de Markov con espacio de estados discreto.

Se definen por:
1. Distribucion inicial $p_{j(0)}$
2. Matriz de transicion P, donde cada elemento p_{ij} es:

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\right)$$

2.1.1 Evolucion y paso

- Evolucion:

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n).P$$

- Si es homogenea (transiciones no dependen de n):

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0).P^n$$

2.1.2 Estado estacionario

Importante: Existe un estado estacionario si:

$$\pi = \pi P$$

Tip: Se resuelve el sistema con la condicion inicial:

$$\sum \pi_i = 1$$

Nota: A π se lo llama «autovector a izquierda» porque multiplica a la matriz desde la izquierda y «a 1» porque en ese calculo $\lambda = 1$ (deberia estar multiplicando a π).

2.1.3 Estados de una cadena de Markov

Tip: Hacer grafo de estados para este ejercicio.

- **Accesible**: Existe camino de un estado al otro
- **Irreducible**: Todos se comunican (comunicar: Si puedo llegar de A a B entonces puedo llegar de B a A)
- **Recurrente**: Vuelve seguro
- **Transitorio**: Puede que no vuelva al estado inicial
- **Periodico/Aperiodico**
- **Regular**: Algun P^n tiene todas sus entradas positivas

3 Random Walk (Caminata aleatoria)

Definicion:
- $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$
- Los Z_k son variables aleatorias i.i.d.

3.1 Caso simple

Nota: Si $Z_k \in \{-1, 1\}$:
- $E[Z_k] = 0, V[Z_k] = 1$
- $E[X_n] = 0, V[X_n] = n$

3.2 Caso generalizado

Tip: Si Z_k generalizado, calcular $E[Z_k], V[Z_k]$, y luego:
- $E[X_n] = nE[Z_k]$
- $V[X_n] = nV[Z_k]$

3.3 Posibles recorridos

Importante: Tener en cuenta que cuando la caminata es binaria no puedo moverme 0 pasos, si o si $+1$ o -1.

- Binaria (± 1): $R_{X_n} = \{-n, -n+2, -n+4, ..., n-2, n\}$
- Multivaluada (los pasos pueden ser de mayor modulo que 1): Todas las sumas posibles de n incrementos

3.4 Random walk continua

Nota: Gaussiana: $X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ (su recorrido es $\mathbb{R}$)

4 Procesos de Poisson

Importante: Proceso estocastico usado para: arribos, fallas, particulas

$$\lambda : \text{Eventos por unidad de tiempo} \Rightarrow \text{Tiempo entre eventos sucesivos } T_i \sim \text{Exponencial}(\lambda)$$

4.1 Propiedades

Cumple con:

1. Incrementos independientes
2. Incrementos estacionarios
3. La probabilidad de 1 evento en $\Delta t \approx \lambda \Delta t$
4. La probabilidad de 2 o mas eventos en Δt es despreciable

4.2 Distribucion

Importante:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$$

Nota: Los tiempos entre eventos son exponenciales con parametro λ.

5 Tiempo hasta absorcion

Nota: Si algunos estados son absorbentes, se trabaja con una particion de la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ F & Q \end{pmatrix}$$

$$M = (I - Q)^{-1}$$

Importante: Probabilidades de absorcion: $G = MF$