Resumen Teorico

TP8: Estimacion | TP9: Pruebas de Hipotesis

Probabilidad y Estadistica 93.24
2025

---

1 TP8 - Estimacion de Parametros

1.1 Generalidades de Estimacion

Estimador: Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. cuya distribucion depende de un parametro θ desconocido. Un **estimador** $\hat{\theta}$ es una funcion de las v.a. que aproxima θ.

Estimacion: Si se obtienen valores $x_1, ..., x_n$ de la muestra, la **estimacion** es el valor numerico $\hat{\theta}(x_1, ..., x_n)$.

1.1.1 Error Cuadratico Medio (ECM)

$$\text{ECM}\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] = \text{sesgo}^2\left(\hat{\theta}\right) + \text{Var}\left(\hat{\theta}\right)$$

donde:

$$\text{sesgo}\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\hat{\theta}\right] - \theta$$

Importante:
- **Insesgado:** $E\left[\hat{\theta}\right] = \theta$ (sesgo $= 0$)
- **Asintoticamente insesgado:** $\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{\theta}\right] - \theta = 0$
- **Consistente:** $\lim_{n\to\infty} \hat{\theta} = \theta$

1.2 Metodos de Estimacion

1.2.1 Maxima Verosimilitud (MLE)

Verosimilitud: La funcion de verosimilitud es $f(x_1, ..., x_n; \theta)$, la densidad conjunta vista como funcion de θ.

$$\hat{\Theta} = \arg\max_{\theta} f(X_1, ..., X_n; \theta)$$

Tip: Conviene trabajar con la **log-verosimilitud**:

$$\mathcal{L}(\theta) = \ln f(X_1, ..., X_n; \theta)$$

Derivar, igualar a cero y despejar θ.

Ejemplo: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ i.i.d.

$$f(X_1, ..., X_n; \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2}}$$

$$\mathcal{L}(\mu) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \Longrightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

Nota: Los estimadores MLE son **asintoticamente consistentes**.

1.2.2 Metodo de los Momentos

Igualar momentos poblacionales con momentos muestrales:

$$\mu_k = E[X^k] = w_{k(\theta)}$$

$$\hat{\Theta} = w_k^{-1}(\hat{\mu}_k)$$

Ejemplo: $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \Longrightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum X_i = \frac{1}{\hat{\Theta}} \Longrightarrow \hat{\Theta} = \frac{n}{\sum X_i}$$

1.2.3 Maximo a Posteriori (MAP)

Enfoque Bayesiano: Se considera Θ como v.a. con distribucion **a priori** $f_{\Theta(\theta)}$.

Usando Bayes:

$$f(\theta \mid X_1, ..., X_n) = \frac{f(X_1, ..., X_n \mid \theta) f_{\Theta(\theta)}}{\int f(X_1, ..., X_n \mid \zeta) f_{\Theta(\zeta)} d\zeta}$$

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} f(\theta \mid X_1, ..., X_n)$$

Importante: A medida que $n \to \infty$, la informacion **a priori** pierde importancia y el estimador MAP converge al MLE.

1.3 Estimadores Puntuales

1.3.1 Estimador de la Media

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Propiedad	**Resultado**
Insesgado	Si, $E\left[\overline{X}\right] = \mu$
Consistente	Si (Ley de Grandes Numeros)
ECM	$\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$
Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\hat{\mu} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
TCL (n grande)	$\hat{\mu}$ es asintoticamente normal

1.3.2 Estimador de la Varianza

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}\right)^2$$

Propiedad	**Resultado**
Insesgado	Si (gracias al $n-1$)
Varianza	$\mathrm{Var}(S^2) = \frac{\sigma^4}{n}\left(\kappa + 2 + \frac{2}{n-1}\right)$
Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

donde $\kappa = \text{curtosis} = \frac{E\left[(X_1 - E[X_1])^4\right]}{\sigma^4} - 3$

1.3.3 Estimador de una Proporcion

Sean $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ i.i.d.

$$\hat{p} = F = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Propiedad	**Resultado**
Insesgado	Si
ECM	$\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$
Distribucion exacta	$n\hat{p} \sim \text{Binomial}(n, p)$
TCL (n grande)	$\hat{p} \approx \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

1.4 Estimacion por Intervalos

Intervalo de Confianza: Intervalo $\left(\hat{\theta}_l^\alpha, \hat{\theta}_u^\alpha\right)$ tal que:

$$P\left(\hat{\theta}_l^\alpha < \theta < \hat{\theta}_u^\alpha\right) = 1 - \alpha$$

donde $1 - \alpha$ es el **nivel de confianza**.

Importante: **Interpretacion frecuentista:** Si tomamos N muestras y construimos N intervalos, aproximadamente $(1-\alpha)N$ contendran al verdadero θ.

Tipos de intervalos:
* **Bilateral:** ambos limites finitos
* **Unilateral a derecha:** $\left(-\infty, \hat{\theta}_u^\alpha\right)$
* **Unilateral a izquierda:** $\left(\hat{\theta}_l^\alpha, +\infty\right)$

1.4.1 IC para la Media (σ conocida)

Sean $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ i.i.d., σ^2 conocida. Con nivel de confianza γ:

Tipo	**Intervalo**
Unilateral derecha	$\left(-\infty, \overline{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Unilateral izquierda	$\left(\overline{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$
Bilateral	$\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

donde $z_p = \Phi^{-1}(p)$ es el percentil de la normal estandar.

Tip: Por TCL, estas formulas valen para n grande aunque las v.a. no sean normales. Si σ es desconocida y n es muy grande, reemplazar σ por S.

1.4.2 IC para la Media (σ desconocida)

Sean $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ i.i.d., ambos desconocidos. Usar **t-Student**:

Tipo	**Intervalo**
Unilateral derecha	$\left(-\infty, \overline{X} + t_{n-1,\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
Unilateral izquierda	$\left(\overline{X} - t_{n-1,\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$
Bilateral	$\left(\overline{X} - t_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

donde $t_{k,p}$ es el percentil de t-Student con k grados de libertad.

Nota: Para $n > 200$, la t-Student es muy similar a la normal, asi que $t_{n-1,\delta} \approx z_\delta$.

1.4.3 IC para Proporcion (n grande)

Tipo	**Intervalo**
Unilateral derecha	$\left[0, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$
Unilateral izquierda	$\left(\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, 1\right]$
Bilateral	$\left(\hat{p} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

Nota: Notar que $p \in [0, 1]$ y se usa $\hat{p}(1 - \hat{p})$ como estimador de la varianza.

2 TP9 - Pruebas de Hipotesis

2.1 Generalidades

Hipotesis Estadistica: Afirmacion sobre parametros de una poblacion. Se contrasta una **hipotesis nula** (H_0) contra una **hipotesis alternativa** (H_1).

Estadistico de Prueba: Valor Λ calculado a partir de la muestra. Se rechaza H_0 cuando $\Lambda \in R$ (region critica).

2.1.1 Tipos de Errores

	H_0 verdadera	**H_0 falsa**
Se acepta H_0	OK	Error Tipo II (β)
Se rechaza H_0	Error Tipo I (α)	OK

Importante:
* **Nivel de significacion** (α): maxima prob. de Error Tipo I
* **Potencia** ($1 - \beta$): prob. de rechazar H_0 cuando es falsa

Valor p: Probabilidad de obtener un estadistico «peor» que el observado, asumiendo H_0 verdadera. Se rechaza H_0 si $p < \alpha$.

2.2 Pruebas para la Media

2.2.1 Tres Tipos de Pruebas

1. Dos colas:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Rechazo: $\Lambda \notin (\lambda_l, \lambda_u)$

2. Cola derecha:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Rechazo: $\Lambda > \lambda_u$

3. Cola izquierda:

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

Rechazo: $\Lambda < \lambda_l$

2.2.2 Con Varianza Conocida (Test Z)

Estadistico:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Prueba	Rechazo	Valor p
$H_0 : \mu = \mu_0$	$Z < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o $Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2(1 - \Phi(\lvert z_{\text{obs}} \rvert))$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$Z > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_{\text{obs}})$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_{\text{obs}})$

Tip: Por TCL, estas formulas valen para n grande aunque las v.a. no sean normales. Si σ es desconocida y n grande, usar S en lugar de σ.

2.2.3 Con Varianza Desconocida (Test t)

Estadistico:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Prueba	Rechazo	Valor p
$H_0 : \mu = \mu_0$	$T < -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ o $T > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	$2(1 - \Xi_{n-1}(\lvert t_{\text{obs}} \rvert))$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$T > t_{n-1,1-\alpha}$	$1 - \Xi_{n-1}(t_{\text{obs}})$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$T < -t_{n-1,1-\alpha}$	$\Xi_{n-1}(t_{\text{obs}})$

donde Ξ_{n-1} es la CDF de la t-Student con $n-1$ grados de libertad.

2.3 Pruebas para una Proporcion

Sea q la probabilidad desconocida. Con n grande ($n > 100$):

Estadistico:

$$Z = \frac{\hat{q} - q_0}{\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}}}$$

Prueba	Rechazo	Valor p
$H_0 : q = q_0$	$\lvert Z \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2(1 - \Phi(\lvert z_{\text{obs}} \rvert))$
$H_0 : q \leq q_0$	$Z > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_{\text{obs}})$
$H_0 : q \geq q_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_{\text{obs}})$

3 Resumen de Formulas Clave

3.1 Estimadores Puntuales

Parametro	**Estimador**	**Varianza del Estimador**
μ	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$	$\frac{\sigma^2}{n}$
σ^2	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2$	$2\frac{\sigma^4}{n-1}$ (normal)
p	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$\frac{p(1-p)}{n}$

3.2 Intervalos de Confianza Bilaterales

Caso	**IC al nivel γ**
Media, σ conocida	$\overline{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Media, σ desconocida	$\overline{X} \pm t_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$
Proporcion (n grande)	$\hat{p} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

3.3 Estadisticos de Prueba

Caso	**Estadistico**
Media, σ conocida	$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Media, σ desconocida	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$
Proporcion (n grande)	$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

3.4 Valores Criticos Comunes

α	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$z_{1-\alpha}$	Confianza
0.10	1.645	1.282	90%
0.05	1.960	1.645	95%
0.01	2.576	2.326	99%

Error Comun: No confundir:

* **Nivel de confianza** $(1-\alpha)$: para IC
* **Nivel de significacion** (α): para tests
* IC del 95% corresponde a test con $\alpha = 0.05$

Tip:

* Test **bilateral**: usar $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
* Test **unilateral**: usar $z_{1-\alpha}$ o $t_{n-1,1-\alpha}$