# Ejercicio 1

**Caminada aleatoria simetrica.**

Supongamos el siguiente juego: se lanza una moneda en forma reiterada y el jugador gana 1 peso si sale cara y pierde 1 peso si sale ceca.

1. Se define el proceso estocastico $X_n : n \in \mathbb{N}$ donde $X_n$ es el dinero que tiene el jugador al cabo de $n$ jugadas (se supone $X_0 = 0$). Definir el recorrido de $X_n$ y el espacio de estados del proceso (valido para todo valor de n)

Sabemos que cada paso notemoslos $i$, si la moneda no esta cargada y asumiendo que son independientes entre si:

$$P(Z_i = \text{Gana}) = 0.5 \Rightarrow \text{son } i.i.d.$$

$$Z_i = \{\text{Gana} \to 1, \text{Pierde} \to -1\}$$

En palabras esto seria que todas las tiradas de moneda tienen una probabilidad de ganar de 0.5, por lo que el valor esperado de $n$ tiradas, viene dado por:

Es un proceso de Markov pues las probabilidades son i.i.d. Por lo tanto la plata que se tiene en la jugada $n$ depende *solamente* de lo que se tiene en la tirada anterior $n - 1$

Entonces los posibles valores de $X_n$ son:

$$\boxed{X_n = (+1).k + (-1).(n - k) = 2k - n, k \in \mathbb{N}_0}$$

El recorrido:

$$\boxed{R_{X_n} = \{-n, -n + 2, -n + 4, ..., n\}}$$

*Duda que tuve: porque se le suman k pares? no podria terminar en n + 1?*

Notemos con un ejemplo rapido:

Si parto en 0 y tengo que si o si hacer 3 jugadas, *no tengo forma de volver a* 0 entonces tiene sentido que la paridad sea la misma que la cantidad de jugadas (si se le suma 2k a un numero mantiene su paridad)

Por lo tanto si partimos en 0 y queremos saber la probabilidad de volver a 0, y se hacen 3 jugadas va a ser 0 esa probabilidad

2. Obtener la distribucion de probabilidades de $X_n$

Como mencionamos anteriormente en caso de querer volver a un valor que no mantiene la paridad de $n$ (cantidad de jugadas), la probabilidad de llegar a ese punto va a ser 0

Ademas de esto solo nos interesa el paso anterior ya que como son eventos i.i.d., no nos interesa toda la historia

$$P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x_n = x_{n-1} \pm 1 \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Luego la distribucion de $X_n$ la obtenemos usando que $X_n = 2k - n$

Como k es la cantidad de exitos, podemos deducir la distribucion ya que su probabilidad es 0.5

$$K \sim \text{Binomial}(\text{Trials} = n, p = 0.5)$$

$$P(X_n = x_n) = P(2K - n = x_n) = P\left(K = \frac{x_n + n}{2}\right) = \text{BinomialPDF}(x = K, n = n, 0.5)$$

$$k \in \{-n, 2 - n, 4 - n, ..., n\}$$

3. Expresar la variable $X_n$ como suma de variables iid

Esto es sencillo, de hecho lo habiamos escrito asi anteriormente:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

4. Calcular $E[X_n], V[X_n]$

$$E[X_n] = nE[Z_i] = n(0.5(-1) + 0.5(1)) = n0 = 0$$

$$V[Z_i] = E[Z_i^2] - E^2[Z_i] \Rightarrow E[X_n^2] = n(0.5(-1)^2 + 0.5(1)^2) = n1 = n$$

## Ejercicio 2

**Caminata aleatoria general**

Extiende al ejercicio anterior, pero esta vez asumiendo que la moneda puede estar *cargada*, osea que la probabilidad de que salga cara es $p \in (0, 1)$

1. Obtener la distribucion de probabilidades de $X_n$

$$Z_i \in \{-1, 1\}$$

Pero esta vez:

$$P(Z_i = 1) = p, P(Z_i = -1) = 1 - p$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} Z_i = \text{Igual al anterior (la probabilidad no afecta el recorrido)}$$

Lo que si va a cambiar es la distribucion, como las probabilidades cambian, ahora la Binomial que representa a $x$ va a ser otra

Siendo $k$ la cantidad de victorias:

$$K \sim \text{Binomial}(n, p)$$

Entonces la distribucion de $X_n$ nos quedaria:

$$X_n = 2k - n \Rightarrow K = \frac{X_n + n}{2}$$

$$P(X_n = x) = \text{BinomPDF}(x = k, n, p)$$

2. Calcular la esperanza y la varianza

Esto es sencillo, *igual que siempre*:

Tener en cuenta que es la suma de las esperanzas de cada uno de los experimentos

$$E[Z_i] = (+1)p + (-1)(1 - p) = 2p - 1 \Rightarrow E[X_n] = nE[Z_i] = n(2p - 1)$$

$$V[Z_i] = p + 1 - p + (2p - 1)^2 \Rightarrow V[X_n] = nV[Z_i] = n(4p^2 - 4p) = 4np(p - 1)$$

## Ejercicio 3

Suponga un proceso estocastico en tiempo discreto con espacio de eestados discreto definido de la siguiente manera:

$$X_{n+1} = X_n + Z_n$$

Para $n$ tomando los valores 0, 1, 2, ..., y con $X_0 = 0$. Las variables aleatorias $Z_n$ se suponen iid con recorrido: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ con funcion de probabilidad $p_Z(z) = P(Z = z); p_Z(-2) = p_Z(2) = 0.1; p_Z(1) = p_Z(-1) = 0.25; p_Z(0) = 0.3$

1. Obtener la distribucion de probabilidades de $X_n$ para $n$ tomando los valores 1, 2 y 3.

Usando el dato:

- $n = 1$:

$$X_{0+1} = X_0 + Z_0 = Z_0 \Rightarrow X_1 = Z_0$$

- $n = 2$

$$X_2 = X_1 + Z_1 = Z_0 + Z_1$$

- $n = 3$

$$X_3 = X_2 + Z_2 = Z_0 + Z_1 + Z_2$$

Luego ver calculo de distribucion en programa que nos da literalmente todos los casos

```
Z_vals = [-2, -1, 0, 1, 2]

# Probabilidades
Z_probs = [0.1, 0.25, 0.3, 0.25, 0.1]

def inicializar_Z():
    dist = {}
    for i in range(len(Z_vals)):
        dist[Z_vals[i]] = Z_probs[i]
    return dist

def convolve(dist1, dist2):
    result = {}
    for val1 in dist1:
        for val2 in dist2:
            suma = val1 + val2
            prob = dist1[val1] * dist2[val2]
            if suma in result:
                result[suma] += prob
            else:
                result[suma] = prob
    return result

def calcular_Xn(Z_dist, n):
    dist = Z_dist
    for _ in range(n-1):
```

```python
        dist = convolve(dist, Z_dist)
    return dist

Z_dist = inicializar_Z()

n = int(input("Ingrese n: "))

Xn = calcular_Xn(Z_dist, n)

def mostrar(dist, nombre):
    print("Distribución de", nombre)
    for k in sorted(dist.keys()):
        print("X =", k, "-> P =", round(dist[k], 4))
    print("")

mostrar(Xn, f"X{n}")
```

Si queremos escribir como suma de las $Z_i$ hariamos:

$$X_i = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$$

2. Calcular $E[X_n], V[X_n]$

Como las $Z_i$ son i.i.d., la varianza de la suma va a ser la suma de las varianzas, es decir que todas las variables aleatorias van a tener la misma varianza y la misma esperanza

$$E[X_n] = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} Z_k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{[Z_k]}_{0} = 0$$

$$V[X_n] = V\left[\sum_{k=0}^{n-1} Z_k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} V[Z_0] = \sum_{k=0}^{n-1} V[Z_0] = nV[Z_0] = nE[Z_0^2] = n(4(0.2) + 1(0.5)) = 1.3n$$

## Ejercicio 4 - Caminata aleatoria Gaussiana

Otra extension de los ejercicios anteriores es cuando la cantidad perdida o ganada en cada jugada es una variable aleatoria continua. En particular, supongamos que la cantidad ganada en la jugada k-esima es una VA $G_k \sim N(0, 1)$. Mas aun, asuma que las $G_k$ son i.i.d.. Se define el proceso estocastico $X_n : n \in \mathbb{N}$ donde $X_n$ es el dinero que tiene el jugador al cabo de $n$ jugadas (se supone $X_0 = 0$)

1. Recorrido de $X_n$ y el espacio de estados del proceso

- En este caso los pasos son variables aleatorias pero continuas, por lo tanto usamos las formulas cerradas, no necesitamos usar Convolucion

$$X_n \sim N(0, n)$$

$$R_{X_n} = \mathbb{R} \rightarrow \text{Pues puede tomar cualquier valor}$$

2. Obtener la distribucion de probabilidades de $X_n$

Esta mencionada anteriormente, *pero* si queremos escribir la funcion acumulada, seria:

$$P(X_n \leq n) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \text{Acordarse 'x menos la media dividido el desvio'}$$

3. Calcular $E[X_n], V[X_n]$

$$E[X_n] = \mu = 0$$

$$V[X_n] = n$$

## Ejercicio 8 - Procesos de Poisson

Suponga que en cierto banco se atiende, en promedio durante una parte del dia, a cuatro clientes cada seis minutos segun un proceso de Poisson. Calcular la probabilidad de que:

1. Puedan atenderse a seis o mas clientes en seis minutos
2. Se empleen mas de tres minutos en atender a un cliente
3. El tiempo de atencio a un cliente este comprendido entre dos y cuatro minutos
4. El tiempo que insuma atender 10 clientes sea menor a 10 minutos

**Muy importante**: Recordar que en los *procesos de Poisson*, $\lambda$ representa eventos por unidad de tiempo, por lo que en este caso:

$$4 \text{ Clientes cada 6 minutos} \Rightarrow \frac{4}{6} \text{ Clientes por unidad de tiempo (mins)}$$

Luego una vez tenemos $\lambda$ por unidad de tiempo, podemos decir que $T \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, siendo $T$ la unidad de tiempo (minuto)

Definimos: $C$ : Cantidad de clientes atendidos

$$\boxed{P(C(t) \leq 6) = \text{Poiscdf}(\lambda \times 6) \Rightarrow P(C(t) > 6) = 1 - \text{Poiscdf}(\lambda \times 6) = 0.21486}$$

Retomamos $T$, nos piden la probabilidad de que se empleen mas de 3 minutos en atender a 1 cliente, quiere decir que la distancia en tiempo entre eventos sea mayor a 3 unidades de minutos:

$$\boxed{P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3) = 1 - \text{ExpoCDF}(\lambda) = 0.13532}$$

Luego me piden el tiempo de atencion a un cliente este entre dos y cuatro minutos, en este caso volvemos a usar la misma distribucion $T$ pues es la que nos indica la distancia en tiempo entre dos eventos

$$P(2 < T < 4) = P(T < 4) - P(T < 2) = \text{ExpoCDF}(x = 4, \lambda) - \text{ExpoCDF}(x = 2, \lambda)$$

$$P(2 < T < 4) = 0.9305258126197583 - 0.7364204344410559 = 0.1941053$$

$$\boxed{\text{P}(2 < \text{T} < 4) = 0.1941}$$

Me piden que el tiempo que insuma atender 10 clientes sea menor a 10 minutos.

**Ojo** porque cuando piden muchos eventos en un tiempo determinado, tenemos que usar Poisson

**Esto esta mal**:

$$P(T = 1) = \text{ExpoPDF}(x = 1, \lambda) = 0.3422$$

**Esto es lo que corresponde hacer:**

Como piden el tiempo que insuma atender 10 clientes sea *menor a 10 minutos* hay que tener en cuenta el caso en el que atienden a MAS de 10 clientes:

$$P(T_{10} \leq 10) = P(C(t) \geq 10) = 1 - P(C(t) < 10) = 1 - P(C(t) \leq 9)$$

$$1 - \text{PoisCDF}(\lambda \times 10) = 0.13737$$

$$\boxed{P(T_{10} \leq 10) = 0.13737}$$

## Ejercicio 13

Tres supermercados $S_1, S_2, S_3$ compiten por los clientes. Una investigacion determina que al comenzar el mes de agosto los tres supermercados tienen igual cantidad de clientes. Al finalizar el mes se observa que:

1. $S_1$ conserva el 80% de sus clientes y gana el 10% y el 2% de los clientes de $S_2, S_3$
1. $S_2$ conserva el 70% de sus clientes y gana el 14% y el 8% de los clientes de $S_1, S_3$
1. $S_3$ conserva el 90% de sus clientes y gana el 6% y el 20% de los clientes de $S_1, S_2$

Sea $\mathbb{P}$ la matriz cuadrada de elementos $p_{ij}$, donde $p_{ij}$ es la probabilidad de que un cliente del supermercado $S_i$ se pase al supermercado $S_j$ al cabo de un mes.

1. Construir la matriz de transicion $\mathbb{P}$, con los datos del problema

**Esto es incorrecto**:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.02 \\ 0.14 & 0.7 & 0.08 \\ 0.06 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Lo que estoy haciendo aca es que la columna dice el origen, mientras que la fila es el destino pero es la revez:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.14 & 0.06 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.02 & 0.08 & 0.9 \end{pmatrix}$$

2. Si $\mathbb{P}^n$ es la matriz cuyo elemento de la posicion $i, j$ indica la proporcion de clientes que se pasaron de $S_i$ a $S_j$ al cabo de $n$ meses, determine que porcentaje de clientes se pasaron de $S_2 \rightarrow S_3$ al cabo de 2 meses

Nos queda, haciendo la potencia en la calculadora y obteniendo la posicion $(2, 3)$:

$$\text{El porcentaje de clientes que } S_2 \rightarrow S_3 \text{ al cabo de 2 meses} = 0.326$$

3. Sea $\vec{p}(0) = \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}\right)$ el vector fila cuyos elementos indican la proporcion de clientes que tenia inicialmente cada supermercado. El producto $A\mathbb{P}^n$ indica la proporcion de clientes de cada supermercado al cabo de $n$ meses.

Por codigo obtenemos:

- 1 año: $\vec{p}(12) = (0.19056464217402852, 0.24282981204838205, 0.5666055457775896)$
- 2 años: $\vec{p}(24) = (0.17863451653371634, 0.23889188846628787, 0.5824735949999964)$
- 3 años: $\vec{p}(36) = (0.17773767147277136, 0.238602152570176, 0.5836601759570534)$

Notemos que a largo plazo va a converger la proporcion de clientes de cada supermercado

## Ejercicio 17

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$ y matriz de transicion de probabilidades dada por:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $P(X_2 = a|X_1 = b, X_0 = c)$

Como es una cadena de Markov, la probabilidad de $X_2$ solo depende del paso anterior, por lo tanto:

$$P(X_2 = a|X_1 = b, X_0 = c) = P(X_2 = a|X_1 = b)$$

Esta probabilidad es "La probabilidad de $X_2 = a$ sabiendo que $X_1 = b$" entonces sale facilmente con la matriz de transicion de probabilidades. Como el espacio de estados es $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$ entonces las "filas" y las "columnas" de las matrices representan esas transiciones

$$P(X_2 = a|X_1 = b) = P(X_n + 1 = a \mid X_n = b) = \text{Origen: b} \to \text{Destino: a} = \mathbb{P}[1][0] = 1$$

2. Calcular $P(X_{35} = a|X_{33} = a)$

$$P(X_{35} = a| \ X_{33} = a) \Rightarrow \text{Haces dos pasos y terminas en el mismo lugar}$$

El "Hacer dos pasos" quiere decir que si elevo la matriz al cuadrado, voy a obtener esas probabilidades

$$\mathbb{P}^2[a][a] = \mathbb{P}^2[0][0] \underbrace{=}_{\text{por codigo}} 0.49$$

3. Estimar $P(X_{200} = a| \ X_0 = b)$

$$\mathbb{P}^{200}[b][a] = 0.3704$$

## Ejercicio 25

Cada materia que cursa un alumno en una universidad tiene tres oportunidades para dar el examen final. Suponga que la **probabilidad de aprobar el examen final es siempre p**. Sea $X_n$ la variable aleatoria que da el **número de oportunidades** que tiene el alumno en el período **n**. El recorrido de $X_n$ es el conjunto {0,1,2,3} siendo el valor cero el estado que se alcanza cuando se aprueba el examen final (claramente un estado absorbente). El **estado 3** corresponde al que se tiene una vez **aprobada la cursada**. Cuando no se aprueba en la última de las instancias se produce una transición del estado 1 al 3 (la materia se recursa)

1. Modelar la evolucion de este proceso como una cadena de Markov obteniendo la matriz de probabilidades de transicion de un paso

- Entonces se empieza en 3 $\Rightarrow X_0 = 3$
- Con probabilidad $p$ se pasa directo a 0 en todos los estados, con probabilidad $p - 1$ se pasa al estado $n - 1$
- En la ultima de las instancias, si desaprobas, pasas a 3 denuevo
- Si ya estas en cero, no tenes chance de irte a otro lado

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

2. En el caso de que el estado inicial es 3, la distribucion de probabilidades es $(0, 0, 0, 1)$. Obtener la distribucion de probabilidades para los primeros tres periodos y conjeturar sobre su forma para todo $n$. Analizar su valor limite

Esto seria calcular si o si a mano la multiplicacion de matrices para los 3 casos. No lo voy a hacer pero es eso