Procedimientos para ejercicios de Bidimensionales

Teorema transformacion general

Nota: Este metodo solo se aplica si la funcion $g(X)$ es monotona por partes

- Sea Y, X vac, donde conocemos la denisdad de X
- Sea $Y = g(X)$, no estrictamente monotona (no inyectiva)

Para hallar la densidad de Y…

$$f_{Y(y)} = \sum_{x_i \in g^{-1}(y)} \frac{f_{X(x_i)}}{|g'(x_i)|}$$

- **ATENTO** los x_i son las preimagenes de las ramas, **no las raices**
- $g'(x_i) \neq 0 \Rightarrow$ Los puntos donde la funcion es localmente invertible
- La sumatoria recorre todas las partes en donde la funcion es monotona (localmente invertible)

En otras palabras…

1. Escribís la ecuación $y = g(x)$ y resolvés para x: hallás todas las soluciones x_i que cumplen $g(x_i) = y$
2. En cada solución x_i:
   - Verificás que esté en el dominio de X
   - Calculás $f_{X(x_i)}$
   - Derivás $g(x)$ y evaluás $|g'(x_i)|$
3. Sumás los términos $\frac{f_{X(x_i)}}{|g'(x_i)|}$ correspondientes a cada solución válida

Teorema: trasformacion caso monotono

Nota: Este metodo solo se aplica si la funcion $g(X)$ es monotona (inyectiva)

$$f_{Y(y)} = f_{X(g^{-1}(y))} \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Notemos que en este caso hay varias cosas que cambian:

- Se usa $g^{-1}(y)$ en la evaluacion de f_X
- Se multiplica en vez de dividir
- Restriccion mayor: *Monotonia estricta*

Variables aleatorias bidimensionales

Nota: Antes de leer todo *discretas* y todo *continuas* tener en cuenta que la diferencia entre ambas es minima

- En discretas vamos a tener la suma de probabilidades puntuales
- En continuas vamos a tener integrales de densidades de probabilidad

Es razonable pensar las siguientes equivalencias entre caso discreto vs continuo

- $P(X = x) \to f_{X(x)}$
- $\sum \to \int$

La correlacion es comun para ambos casos. Nos dice como se relacionan linealmente dos variables

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

$$\rho_{X,Y} = -1 \rightarrow \text{negativa perfecta} \rightarrow \text{aumentan y disminuyen al mismo ritmo pero en sentido opuesto}$$

$$\rho_{X,Y} = 0 \rightarrow \text{no existe correlacion lineal}$$

$$\rho_{X,Y} = 1 \rightarrow \text{positiva perfecta} \rightarrow \text{aumentan y disminuyen al mismo ritmo y en mismo sentido}$$

Discretas

Las **probabilidades marginales** de cierta X son: Fijar una x y hacer la suma de todas las probabilidades **conjuntas** (interseccion) con todas las probabilidades x, y_i

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

- Teorema fundamental:

$$P(Y = y | X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

Conclusion: La **probabilidad marginal** representa **la probabilidad total de que ocurra un determinado valor de X, sin importar Y**, sabiendo que X e Y estan relacionados obviamente

- La **esperanza**:

$$E[X] = \sum x P(X)$$

- La **varianza**:

$$V(X) = \sum (x - E[X])^2 P(X)$$

- La **covarianza**:

$$\text{Cov}[X,Y] = \sum (x - E[X])(y - E[Y]) P(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Independencia

Dos variables son independientes sii

$$p_{X,Y}(x_i, y_i) = p_{X(x_i)} \cdot p_{Y(y_i)}$$