Probabilidad y Estadística (93.24)

Procesos Estocásticos:

Procesos de Poisson y Cadenas de Markov

Índice

1. Repaso de algunos conceptos

Proceso estocástico

Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, donde $\mathbb{T}$ es el *conjunto de índices* o *espacio de parámetro* del proceso. El conjunto de valores tomados por cada variable aleatoria $X(t)$ se lo denomina *espacio de estados* $\mathbb{E}$.

El espacio de parámetros puede ser continuo (por ej., $\mathbb{T} = (a, b) \subset \mathbb{R}$) o discreto (por ej., $\mathbb{T} = \mathbb{N}$). Por otra parte, el proceso se denomina discreto o continuo de acuerdo a si el espacio de estados $\mathbb{E}$ es discreto o continuo.

Para poder describir de manera completa un proceso estocástico, es necesario dar las distribuciones de probabilidad conjuntas de las variables aleatorias $\{X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)\}$ para toda tupla $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En el caso de un proceso discreto, se debe poder escribir

$$p(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots, x_n, t_n) = \mathrm{P}\left(X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_n) = x_n\right).$$

En el caso de un proceso continuo, se debe dar la densidad de probabilidad conjunta, la cual podemos escribir como

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots, x_n, t_n).$$

En general, no es sencilla la descripción completa de un proceso estocástico de esta manera. Por ello se utilizan ciertas simplificaciones que facilitan dicha descripción. Algunas simplificaciones que vemos: procesos estacionarios; procesos con incrementos independientes; procesos de Markov.

En todos los procesos estocásticos es válida la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p(x_1, t_1, \cdots, x_{k-1}, t_{k-1}, x_{k+1}, t_{k+1}, \cdots, x_n, t_n) = \sum_{\mathbf{x_k}\in\mathbb{E}} p(x_1, t_1, \cdots, x_{k-1}, t_{k-1}, \mathbf{x_k}, \mathbf{t_k}, x_{k+1}, t_{k+1}, \cdots, x_n, t_n)$$

para procesos discretos, y

$$f(x_1, t_1, \cdots, x_{k-1}, t_{k-1}, x_{k+1}, t_{k+1}, \cdots, x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_1, \cdots, x_{k-1}, t_{k-1}, \mathbf{x_k}, \mathbf{t_k}, x_{k+1}, t_{k+1}, \cdots, x_n, t_n)\, d\mathbf{x_k}$$

para procesos continuos.

Proceso estacionario

Se dice que un proceso estocástico $\{X(t)\}_t$ es *estacionario* sii para todo $n \in \mathbb{N}$, toda tupla $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ y todo Δt tal que $\{t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, \cdots, t_n + \Delta t\} \subset \mathbb{T}$ se tiene

$$f(x_1, t_1 + \Delta t, x_2, t_2 + \Delta t, \cdots, x_n, t_n + \Delta t) = f(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots, x_n, t_n)$$

si el proceso es continuo, y

$$p(x_1, t_1 + \Delta t, x_2, t_2 + \Delta t, \cdots, x_n, t_n + \Delta t) = p(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots, x_n, t_n)$$

si es discreto.
Básicamente: $\{X(t)\}_t$ es estacionario si no se lo puede distinguir del proceso $\{X(t+\Delta t)\}_t$.

Se dice que un proceso estocástico es *estacionario en sentido amplio* sii $\mathrm{E}[X(t)]$ y $\mathrm{Var}[X(t)]$ son constantes.

Incrementos independientes

Se dice que un proceso estocástico $\{X(t)\}_t$ tiene *incrementos independientes* sii para $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{T}$

$$[t_1, t_2) \cap [t_3, t_4) = \emptyset \Rightarrow (X(t_2) - X(t_1)) \text{ y } (X(t_4) - X(t_3)) \text{ son v.a. independientes}$$

Intuitivamente: los cambios del proceso estocástico en partes "separadas" del espacio de índices $\mathbb{T}$ son independientes.

Se dice que un proceso estocástico $\{X(t)\}_t$ tiene *incrementos estacionarios* sii para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ y para todo Δt tal que $t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t \in \mathbb{T}$, las variables aleatorias

$$(X(t_2) - X(t_1)) \text{ y } (X(t_2 + \Delta t) - X(t_1 + \Delta t))$$

tienen la misma distribución de probabilidades.

Procesos de Markov

Se dice que un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ es un *proceso de Markov* sii para todo conjunto de valores $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n$, $t_i \in \mathbb{T}$, y para todo $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{E}$ se cumple

$$f\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \cdots, x_2, t_2, x_1, t_1\right) = f\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}\right)$$

si el proceso es continuo, y

$$p\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \cdots, x_2, t_2, x_1, t_1\right) = p\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}\right)$$

si el proceso es discreto.
Intuitivamente: el proceso depende del estado más reciente y no de toda la *historia*.

En los procesos de Markov, la ecuación de Chapman-Kolmogorov tiene una forma muy simple: si $t_1 \leq t_2 \leq t_3$,

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathbb{E}} p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

para procesos discretos, y

$$f(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_3, t_3 | x_2, t_2) f(x_2, t_2 | x_1, t_1)\, dx_2$$

para procesos continuos.

Proceso de conteo

Considere un proceso estocástico $\{T(k)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ con las siguientes características:

1. $T_0 = 0$.
2. $k \leq m \Rightarrow T_k \leq T_m$.

Este tipo de proceso estocástico puede utilizarse para modelar los instantes de ocurrencia de ciertos *eventos*, como ser, arribos de paquetes en una red informática, llegada de clientes en una cola, emisión de una partícula, etc. El espacio de estadios puede ser discreto o continuo. A cada proceso que marca los instantes de ocurrencia de eventos, se le puede asociar un *proceso de conteo* $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ definido como:

$$N(t) = \text{máx}\left\{k : T_k \leq t\right\}.$$

Es decir: $N(t)$ cuenta la cantidad de eventos hasta el instante t. Se puede observar que $N(t)$ tiene las siguientes características:

1. $N(0) = 0$.
2. $N(t) \in \mathbb{N}^0$.
3. $s \leq t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$.
4. $N(t) - N(s)$ es la cantidad de eventos en el intervalo $(s, t]$.

Proceso de Poisson

Un proceso estocástico $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}^{\geq 0}}$ es un *proceso de Poisson* con tasa $\lambda > 0$ sii es un proceso de conteo que satisface las siguientes condiciones:

1. Tiene incrementos independientes.
2. Los incrementos son estacionarios.
3. La probabilidad de que exactamente un evento ocurra en un intervalo de longitud Δt es $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$.
4. La probabilidad de que más de un evento ocurra en un intervalo de longitud Δt es $o(\Delta t)$.

La condición 3 dice que λ es la *tasa de generación de eventos*. El proceso es el mismo se lo mire en el intervalo en que se lo mire: esto está garantizado por la condición 2. La condición 1 impide que haya reglas para “secuencias de rachas” del estilo “a muchos eventos en un intervalo, siguen muchos eventos en el intervalo siguiente”. Finalmente, la condición 4 nos dice que no se dan dos eventos simultáneamente.
A partir de la definición, se puede verificar que $N(t)$ es un proceso de Markov. Más aún, se puede demostrar que $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, es decir,

$$\mathrm{P}\left(N(t) = k\right) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Sea $\{T(k)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ el proceso estocástico que modela los instantes de ocurrencia de eventos asociados al proceso de Poisson $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}^{\geq 0}}$. También se puede demostrar que, para todo $k \in \mathbb{N}^0$, $(T(k+1) - T(k))$ son variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Es decir, los tiempos entre eventos son variables exponenciales independientes.

Cadenas de Markov

Las *cadenas de Markov* son procesos de Markov en los cuales el espacio de estados es discreto: $\mathbb{E} = \{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$. Nosotros nos concentraremos en cadenas cuyo espacio de parámetro o conjunto de índices es también discreto: $\mathbb{T} = \mathbb{N}^0$. Una cadena de Markov $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ queda completamente descripta por

1. La distribución de probabilidades del estado inicial:

$$p_j(0) = \mathrm{P}\left(X(0) = s_j\right) \qquad \forall s_j \in \mathbb{E}.$$

   Es claro $\sum_j p_j(0) = 1$.

2. Las probabilidades de transición entre cada par de estados en cada instante de tiempo:

$$p_{ij}(n) = \mathrm{P}\big(X(n+1) = s_j \,|\, X(n) = s_i\big) \qquad \forall s_i, s_j \in \mathbb{E}.$$

   Dado que la cadena de Markov debe pasar de un estado a otro en cada instante de tiempo, $\sum_j p_{ij}(n) = 1$ para todo i.

A partir de estos datos y, utilizando la ecuación de Chapman-Kolomogorov, se puede encontrar la distribución de probabilidades de $X(n)$ para todo n. En efecto, por la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$p_j(n+1) = \sum_i p_{ij}(n) p_i(n).$$

Una forma compacta de escribir la ecuación de Chapman-Kolmogorov es introduciendo la matriz de probabilidades de transición

$$\mathbb{P}(n) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Las filas de esta matriz suman 1. Si definimos el vector de probabilidades de estado $\vec{p}(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) & p_2(n) & \cdots \end{pmatrix}(n)$, luego

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n)\mathbb{P}(n) = \vec{p}(0)\prod_{k=0}^{n}\mathbb{P}(k),$$

donde hemos usado inducción en la última igualdad.
Se dice que la cadena de Markov es *homogénea* si $p_{ij}(n) = p_{ij}(k)$ para todo k, n; es decir, las probabilidades de transición no cambian con el tiempo. En este caso, $\mathbb{P}$ es constante y

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(0)\mathbb{P}^{n+1}.$$

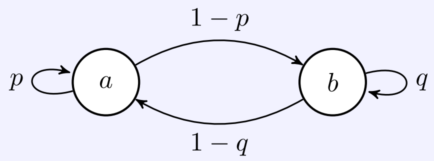
Diagrama de estados de una cadena de Markov

Se trata de un grafo dirigido y con aristas etiquetadas. Cada nodo del grafo se corresponde a un estado posible de la cadena de Markov. La etiqueta de cada arista dirigida indica la probabilidad de transición de un estado hacia otro.
En el ejemplo de la figura siguiente, hay dos estados, a y b. Luego

$$\mathrm{P}\big(X(n+1)=a|\, X(n)=a\big)=p,\ \mathrm{P}\big(X(n+1)=b|\, X(n)=a\big)=1-p,$$

$$\mathrm{P}\big(X(n+1)=b|\, X(n)=b\big)=q,\ \mathrm{P}\big(X(n+1)=a|\, X(n)=b\big)=1-q.$$

Obsérvese que la suma de las etiquetas de todas las aristas (flechas) que salen de un nodo debe ser 1.



Tipos de estados (en cadenas homogéneas)

Definiciones:

- Accesibilidad y comunicabilidad: Decimos que el estado s_j es *accesible* desde el estado s_i sii $p_{ij}^n > 0$ para algún $n \in \mathbb{N}^0$. Dos estados s_i y s_j se comunican entre sí cuando s_j es accesible desde s_i e s_i es accesible desde s_j.
- Cadena de Markov irreducible: Se dice que dos estados que se comunican entre sí están en la misma *clase*. Si todos los estados de una cadena de Markov están en la misma clase, se dice que la cadena es *irreducible*.
- Estados transitorios y recurrentes: Llamemos r_i a la probabilidad de que, partiendo del estado s_i, el proceso de Markov va a volver al estado s_i. Decimos que s_i es:
  - un *estado recurrente* si $r_i = 1$ (o sea, seguro que vuelve);
  - un *estado transitorios* si $r_i < 1$.
- Estados periódicos: Dado un s_i, podemos determinar m_i, esto es, el entero más grande tal que $p_{ii}^n = 0$ cuando n no es divisible por m_i. Si $m_i = 1$, decimos que es un *estado aperiódico*. Si $m_i > 1$, decimos que s_i es un *estado periódico* con período m_i.

Hecho: Sean s_i y s_j dos estados en la misma clase. Entonces o los dos son transitorios o los dos son recurrentes. Si son periódicos, ambos tienen el mismo período.

Condición suficiente para existencia de distribución estacionaria

Teorema: Considere una cadena de Markov finita. Si existe un $n \geq 1$ tal que todos los elementos $\mathbb{P}^n$ son positivos. En este caso, se dice que $\mathbb{P}$ es *regular* y la cadena es irreducible con los estados recurrentes y aperiódica. Por tanto, existe

$$\vec{\pi} = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n),$$

y ese límite es independiente de la distribución de probabilidades del estado original $\vec{p}(0)$.

Dado que

$$\vec{\pi} = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n) = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n+1) = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n)\mathbb{P} = \vec{\pi}\mathbb{P}.$$

Es decir, $\vec{\pi}$ puede encontrarse como el autovector a izquierda de la matriz $\mathbb{P}$ correspondiente al autovalor 1.

Tiempo hasta absorción

Consideremos una cadena de Markov finita con $\mathbb{E} = \{s_1, s_2, s_3, \cdots, s_m\}$. Supongamos que los estados $s_1, s_2, \cdots, s_k$, $k < m$, son absorbentes. Luego, la matriz de transición se puede escribir como:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbb{F} & \mathbb{Q} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de $k \times k$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k\times(m-k)}$ es una matriz de 0s, $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{(m-k)\times k}$, y $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{(m-k)\times(m-k)}$.

Teorema: Considere la matriz

$$\mathbb{M} = \left(\mathbb{I}_{(m-k)\times(m-k)} - \mathbb{Q}\right)^{-1}.$$

El elemento $\mathbb{U}(i, j)$ es el valor esperado del tiempo pasado en s_{k+j}, dado que se comenzó en s_{k+i}, antes de alcanzar un estado absorbente. La probabilidad de alcanzar cada estado absorbente, viene dada por

$$\mathbb{G} = \mathbb{M}\mathbb{F}.$$

Es decir, $\mathbb{G}(i, j)$ es la probabilidad de ser absorbido por el estado j habiendo partido del estado s_{k+i}.

2. Guía de ejercicios

1. **La caminata aleatoria (o random walk) simétrica** Supongamos el siguiente juego: se lanza una moneda en forma reiterada y el jugador gana 1 peso si sale cara y pierde 1 peso si sale ceca.

   a) Se define el proceso estocástico $X_n : n \in \mathbf{N}$ donde X_n es el dinero que tiene el jugador al cabo de n jugadas (se supone $X_0 = 0$). Definir el recorrido de X_n y el espacio de estados del proceso (válido para todo valor de n).

   b) Obtener la distribución de probabilidades de X_n.

   c) Expresar la variable X_n como una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y calcular $\mathrm{E}[X_n]$ y $\mathrm{Var}(X_n)$.

   Nota: Se llama caminata aleatoria porque, en vez de un juego, se puede pensar en la caminata de un individuo que se mueve un paso a la izquierda o a la derecha de acuerdo al resultado de lanzar una moneda.

   Resolución aquí.

   El siguiente código de *Octave* simula el proceso (se muestran M *realizaciones del proceso*y N instantes posteriores al inicial):

```
N = 100; M = 10;
for i=1:M
 Z(1,i) = 0;
 for k=1:N
  r = rand;s = -(r<1/2)+(r>=1/2);
  Z(k+1,i) = Z(k,i)+s;
 end
 end
 plot(Z,'o-')
```

2. **La caminata aleatoria (ó random walk) general** Extienda el ejercicio anterior, pero esta vez asumiendo que la moneda puede estar *cargada*, es decir, la probabilidad de que salga cara es $p \in (0, 1)$.

   a) Obtener la distribución de probabilidades de X_n.

   b) Calcular $\mathrm{E}[X_n]$ y $\mathrm{Var}(X_n)$.

3. Suponga un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados discreto definido de la siguiente manera:
$$X_{n+1} = X_n + Z_n$$
   para n tomando los valores $0, 1, 2, \ldots,$ (el *tiempo* discreto) y con $X_0 = 0$. Las variables aleatorias Z_n se suponen independientes, e igualmente distribuidas con recorrido $\{-2\,, -1\,, 0\,, 1\,, 2\}$ con función de probabilidad $p_Z(z) =$
   $probZ = z$ tal que $p_Z(-2) = p_Z(2) = 0.1$, $p_Z(-1) = p_Z(1) = 0.25$ y $p_Z(0) = 0.3$.

   a) Obtener la distribución de probabilidades de X_n para n tomando los valores 1, 2 y 3.

   b) Calcular $\mathrm{E}[X_n]$ y $\mathrm{Var}\,[X_n]$.

   El siguiente código de *Octave* simula el proceso (se muestran M *realizaciones del proceso* y N instantes posteriores al inicial):

```
M=40; N=100;
X(1,1:M)=zeros(1,M);
S=[-2 -1 0 1 2];
P=[0.1 0.25 0.3 0.25.1];
Z=discrete_rnd (S,P,N,M);
for k=1:N
X(k+1,:)=X(k,:)+Z(k,:);
end
plot(X,'o-')
```

Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

4. **La caminata aleatoria (o random walk) Gaussiana** Otra extensión de los ejercicios anteriores es cuando la cantidad perdida o ganada en cada jugada es una variable aleatoria continua. En particular, supongamos que la cantidad ganada en la jugada k-ésima es una variable aleatoria $G_k \sim N(0,1)$. Más aún, asuma que las G_k son variables i.i.d. Se define el proceso estocástico $X_n : n \in \mathbf{N}$ donde X_n es el dinero que tiene el jugador al cabo de n jugadas (se supone $X_0 = 0$).

   a) Definir el recorrido de X_n y el espacio de estados del proceso (válido para todo valor de n).
   b) Obtener la distribución de probabilidades de X_n.
   c) Calcular $\mathrm{E}[X_n]$ y $\mathrm{Var}(X_n)$.

   Nota: En términos de una *caminata*, la longitud de los pasos dados varía en cada instante. Una forma intuitiva de pensarlo es como una partícula liviana suspendida en un líquido. Debido al movimiento de las moléculas del líquido, la partícula sufre continuos golpes o choques que cambian su trayectoria. Si discretizamos el tiempo (lo dividimos en una secuencia de instantes equiespaciados), podemos pensar que los golpes llevan a la partícula a pegar saltos de longitud variable. El resultado es algo parecido a lo que se conoce como *movimiento Browniano*, un proceso estocástico que tiene aplicaciones muy importantes en varios campos de la ciencia y de las finanzas.

   El siguiente código de *Octave* simula el proceso (se muestran M *realizaciones del proceso* y N instantes posteriores al inicial):

```
X(1,1:40)=zeros(1,40);
for k=1:100
X(k+1,:)=X(k,:)+randn(1,40);
end
plot(X,'-o')
```

5. Se sabe que durante ciertas horas del día las llamadas telefónicas a una central están distribuidas al azar según un proceso de Poisson con un promedio de 4 llamadas por minuto. Calcular la probabilidad de que:

   a) transcurran dos minutos sin llamadas,
   b) en un minuto haya por lo menos dos llamadas,

c) en tres minutos se produzcan exactamente 10 llamadas.

d) en los próximos tres intervalos consecutivos de 3 minutos se produzcan 10 llamadas en cada uno.

e) el tiempo entre dos llamadas consecutivas supere 30 segundos.

f) el tiempo que transcurre hasta que ocurran 3 llamadas sea inferior a 1 minuto. Tenga en cuenta que para que el tiempo hasta que ocurran m eventos de un proceso de Poisson de parámetro λ sea inferior a t es equivalente a que el número de eventos en un intervalo de longitud t sea mayor o igual a m.

6. El número de partículas emitidas por una sustancia radiactiva en el tiempo obedece a un proceso de Poisson. Supongamos que la emisión ocurre a razón de 75 partículas por minuto.

   a) Determinar la probabilidad de que durante 20 segundos sean emitidas exactamente 20 partículas.

   b) Representar gráficamente la función de probabilidad de la variable aleatoria X: número de partículas emitidas en 20 segundos.

   c) Si en dos minutos se registraron 100 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que en los próximos 45 segundos se registren 50 partículas más?

7. Se ha encontrado que el número de fallas de los subsistemas de un sistema dado puede considerarse un proceso de Poisson con un promedio de una falla de un subsistema cada 100 horas.

   a) Se inicia cierto proceso que requerirá que el sistema opere durante 200 horas. Calcular la probabilidad de que el proceso pueda ser completado con éxito si se supone que el sistema está operante si como máximo fallan 4 subsistemas.

   b) Suponga que en una situación especial se requiere operar uno de estos subsistemas. En cuanto falla se cambia por otro y asi cada vez que falla el que esta funcionando se reemplaza por otro. Se supone despreciable el tiempo que demora sacar el fallado y cambiarlo por el relevo. Se tienen 10 de estos subsistemas. ¿Cuál es la probabilidad de que ese stock pueda servir para cubrir un tiempo de servicio total de al menos 1500 hs.?

8. Suponga que en cierto banco se atiende, en promedio durante una parte del día, a cuatro clientes cada seis minutos según un proceso de Poisson. Calcular la probabilidad de que:

   a) puedan atenderse a seis o más clientes en seis minutos;

   b) se empleen más de tres minutos en atender a un cliente;

   c) el tiempo de atención a un cliente esté comprendido entre dos y cuatro minutos;

   d) el tiempo que insuma atender 10 clientes sea menor a 10 minutos.

   Resolución aquí.

9. El tiempo entre arribos de clientes, durante la mañana de un día normal, a una estación de servicio se puede considerar una variable aleatoria con distribución exponencial de media 5 minutos.

   a) Describir la distribución de probabilidades del número de clientes que llegan en una hora.

   b) Calcular la probabilidad de que en 30 minutos lleguen mas de 5 clientes.

c) Calcular la probabilidad de que el intervalo de tiempo entre las llegadas de los clientes décimo y undécimo exceda 10 minutos.

d) Calcular el valor esperado y la varianza del tiempo transcurrido hasta que llega el décimo cliente desde que comenzó el servicio.
(Nota: Si se supone que el tiempo transcurrido es una suma de variables aleatorias independientes entonces se cumple que la varianza de esa suma es la suma de las varianzas de los sumandos).

e) Calcular la probabilidad de que el número de clientes atendidos en 6 horas exceda 90.

10. Los impulsos de ruido en una línea telefónica siguen un proceso de Poisson de parámetro λ (en impulsos por segundo).

    a) Determinar la probabilidad de que no haya ruido durante t segundos.

    b) Supongamos que los mensajes se codifican de manera que los errores provocados por un solo impulso de ruido se pueden corregir. Determinar la probabilidad de que un mensaje que dura t segundos sea recibido sin errores.

    c) Se consideran 100 intervalos consecutivos de longitud 1 segundo. ¿cuál es la probabilidad de que en mas de la mitad de ellos haya habido mas de un impulso ? Suponga que $\lambda = 2$ impulsos por segundo.

11. Un negocio tiene dos líneas telefónicas. Suponga que en un instante n puede haber 0, 1 ó 2 líneas ocupadas. Se observan las líneas ocupadas a intervalos regulares de 5 minutos. Sea X_n el número de líneas ocupadas en el instante n. Suponga que el proceso se puede describir como una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias. Los estados posibles del proceso son 0, 1 y 2 y la matriz de transición de la cadena es:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

    a) Realice el diagrama de transición de estados del proceso.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el instante $n = 1$ haya dos líneas ocupadas si al inicio del proceso había una línea ocupada?

    c) Cuál es la probabilidad de que en el instante $n = 4$ haya una línea ocupada si en el instante $n = 3$ había dos líneas ocupadas?

    d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el instante $n = 4$ haya dos líneas ocupadas si en el instante $n = 2$ había dos líneas ocupadas?

    e) Si $\pi(n)$ es la distribución de probabilidades de estados en el instante n, obtener $\pi(1)$, $\pi(2)$ y $\pi(3)$ si $\pi(0) = (0.3\ 0.3\ 0.4)$

    f) Encuentre, si existe, un vector de probabilidades estacionario (la distribución de probabilidades de estados a *largo plazo*).

Nota: Si 1 es autovalor simple de la matriz de transición $\mathbb{P}$ entonces la distribución de probabilidades de estados a *largo plazo* es el autovector de la traspuesta de $\mathbb{P}$ cuyas componentes tienen sus componentes positivas y de suma 1. Para este ejemplo puede probar el siguiente código de *Octave*:

```
P = [0.5 0.3 0.2;0.2 0.8 0;0.3 0.3 0.4];
[a b] = eig(P');
a
b
pestac=a(:,1)/sum(a(:,1))
```

La matriz **b** que devuelve el procedimiento **eig** es diagonal y los elementos diagonales son los autovalores de $\mathbb{P}$. En la primera columna de **a** se encuentran las componentes de un autovector de la traspuesta de P correspondiente al autovalor 1 de P. Dividiendo esas componentes por su suma se obtiene la distribución de probabilidades de estados a *largo plazo* para esta cadena de Markov.

12. Una empresa produce cierto artículo en cada período de ventas. Si logra un éxito de ventas en un período entonces la probabilidad de tener éxito en el próximo período es 0.5. Si en el período de ventas no tiene éxito entonces la probabilidad de tener éxito en el próximo período es 0.25. Supongamos que se considere que en el presente período se ha obtenido éxito.

    a) Describir el problema usando una cadena de Markov. Obtener la matriz $\mathbb{P}$ de transición y hacer un diagrama de transición de estados de la cadena.

    b) Obtener la probabilidad de *éxito* luego de tres períodos de ventas.

    c) Determinar con que frecuencia se tiene éxito de ventas *a tiempo grande*.

13. Tres supermercados S_1, S_2 y S_3 compiten por los clientes. Una investigación determina que al comenzar el mes de agosto los tres supermercados tienen igual cantidad de clientes. Al finalizar el mes se observa que:

    a) S_1 conserva el 80 % de sus clientes y gana el 10 % y el 2 % de los clientes de S_2 y S_3 respectivamente.

    b) S_2 conserva el 70 % de sus clientes y gana el 14 % y el 8 % de los clientes de S_1 y S_3 respectivamente.

    c) S_3 conserva el 90 % de sus clientes y gana el 6 % y el 20 % de los clientes de S_1 y S_2 respectivamente.

    Sea $\mathbb{P}$ es la matriz cuadrada de elementos p_{ij}, donde p_{ij} es la probabilidad de que un cliente del supermercado S_i se pase al supermercado S_j al cabo de un mes.

    a) Construya la matriz de transición $\mathbb{P}$, con los datos del problema.

    b) Si $\mathbb{P}^{(n)}$ es la matriz cuyo elemento de la posición i, j indica la proporción de clientes que se pasaron del supermercado S_i al S_j al cabo de n meses (bajo el supuesto de que estas proporciones permanecen invariables mes a mes), determine qué porcentaje de clientes se pasaron de S_2 al S_3 al cabo de 2 meses.

    c) Sea $A = (1/3\ 1/3\ 1/3)$ el vector fila cuyos elementos indican la proporción de clientes que tenía inicialmente cada supermercado. El producto $A\mathbb{P}^{(n)}$ indica la proporción de clientes de cada supermercado al cabo de n meses. Calcule qué proporción de clientes tiene cada supermercado al cabo de un año, dos años, tres años y cuatro años.

    d) ¿Qué puede concluir acerca de la proporción de clientes de cada supermercado a largo plazo?

    e) Verifique que la respuesta del punto d) también puede obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones $xP = 1.x$, donde $x = (x_1\ x_2\ x_3)$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, es decir, x es un autovector fila a izquierda de la matriz $\mathbb{P}$ correspondiente al autovalor 1.

    Resolución aquí.

14. Tres compañías, 1, 2 y 3, introducen al mercado simultáneamente marcas nuevas de pasta dental. Al principio, las proporciones iniciales del mercado en cada marca son de 40, 20 y 40 % respectivamente. Durante el primer año, la compañía 1 mantuvo el 85 % de su clientela, obtuvo el 15 % de la clientela de la compañía 2, y el 5 % de la compañía 3; la compañía

2 obtuvo el 5 % de la clientela de la compañía 1, retuvo el 75 % de su propia clientela, y obtuvo el 5 % de la de la compañía 3; y la compañía 3 obtuvo el 10 % de la clientela de la compañía 1, el 10 % de la compañía 2 y retuvo el 90 % de su propia clientela. Suponiendo que el mercado total que se comparte en estas tres compañías no varía y que cada año se intercambian entre ellas las mismas fracciones:

a) Encuentre la matriz de transición $\mathbb{P}$.

b) Determine las proporciones del mercado en cada compañía después de: i) un año, ii) 2 años.

c) Determine las proporciones del mercado en cada compañía a largo plazo.

15. *El vendedor viajero* La región de ventas de un vendedor la componen tres ciudades A, B y C. Nunca vende en la misma ciudad en días seguidos. Si vende en la ciudad A, entonces al día siguiente vende en la ciudad B. Sin embargo, si vende en una de las dos ciudades B ó C, entonces al día siguiente la probabilidad de vender en A es el doble de la de vender en la restante ciudad.

    a) Describir el problema usando una cadena de Markov. Obtener la matriz $\mathbb{P}$ de transición y hacer un diagrama de transición de estados de la cadena.

    b) Verificar que existe una distribución de probabilidades de estados *a tiempo grande*.

    c) Determinar con que frecuencia vende en cada ciudad *a tiempo grande*.

16. El estado s_j de una cadena de Markov $\{X_n\}$ se denomina *alcanzable* desde el estado i si es posible que se produzca una transición desde el estado i al estado s_j en un número finito de pasos. Para que esto ocurra se debe cumplir que el elemento i, j de la matriz de transición de n pasos $\mathbb{P}^{(n)}$ sea positivo para algún $n > 0$. Si todo estado es alcanzable desde cualquier otro estado entonces se dice que la cadena es *regular*. ¿Es regular la cadena cuya matriz de transición se muestra a continuación?

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

17. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$ y matriz de transición de probabilidades dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

    a) Calcular $\mathrm{P}\big(X_2 = a \,|\, X_1 = b, X_0 = c\big)$.

    b) Calcular $\mathrm{P}\big(X_{35} = a \,|\, X_{33} = a\big)$.

    c) Estimar $\mathrm{P}\big(X_{200} = a \,|\, X_0 = b\big)$.
    (Probar primero que se alcanza un estado estacionario).

    Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado: aquí y allá.

18. Una urna contiene 5 bolillas negras y 5 bolillas blancas. Consideremos el siguiente experimento,que se repite indefinidamente: se escoge aleatoriamente una bola de la urna; si es blanca, se vuelve a poner en la urna; si es negra, se deja fuera. Sea X_n el número de bolas negras en la urna después de n extracciones.

a) Describir el experimento como una cadena de Markov.

b) Determinar la matriz $\mathbb{P}$ de probabilidades de transición de estado.

c) Calcular $\mathbb{P}_{54}^{(2)}$ (la probabilidad de que el proceso pase del valor 5 al valor 4 en dos etapas) de dos formas: directamente y calculando la matriz $\mathbb{P}^2$.

d) Obtener la distribución de probabilidades de estados a *largo plazo*.

19. Jorge tiene 3 pesos. En cada jugada puede perder 1 peso con probabilidad 3/4 pero puede ganar dos pesos con probabilidad 1/4. Deja de jugar si pierde sus tres pesos o si gana por lo menos 3 pesos.

    a) Obtener la matriz de transición de la cadena de Markov.
    Pista: Considere 8 estados donde cada uno corresponde a que el jugador tenga 0, 1,..., 7 pesos. La matriz de transición tendrá muchos ceros.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya por lo menos 4 jugadas en el juego?

20. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{E} = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición de probabilidades dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

    a) Usando solo el álgebra del cálculo de probabilidades y todas las posibles transiciones generar tablas para la probabilidad de la transición $i \to j$ en n pasos para los siguientes pares (i, j): $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(1, 1)$, y $(2, 2)$ y para n tomando los valores 1 a 5.

    b) Probar que la cadena es regular y obtener la distribución de probabilidades de estados a *largo plazo*.

21. La matriz de probabilidades de transición de un paso de una cadena de Markov es:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

    a) Demostrar que la cadena es regular.

    b) Si el proceso comienza en el estado 1 determinar la probabilidad de alcanzar el estado 3 en dos pasos.

    c) Obtener la distribución de probabilidades a *largo plazo*.

22. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$ y matriz de transición de probabilidades dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

    a) Represente el diagrama de transición de estados de la cadena.

b) Por inspección del diagrama verifique que:

1) el conjunto de estados tiene tres subconjuntos disjuntos (se denominan *clases*) que corresponden a estados comunicados entre ellos.
2) Hay dos clases que son cerradas y recurrentes, una vez que uno de los estados de la clase cerrada es alcanzado entonces todos los estados subsiguientes de la cadena corresponden a esa clase.
3) La clase restante es transiente, el proceso puede terminar saliendo de ella.
4) Una de las clases cerradas es periódica de periodo 3, la otra no es periódica.

c) Usando solo el álgebra del cálculo de probabilidades y la suma de alguna serie numérica demuestre que si el proceso comienza en:

1) el estado 0 entonces la probabilidad de alcanzar el estado 6 es $\frac{1}{4}$.
2) el estado 1 entonces la probabilidad de alcanzar el estado 3 es 1.
3) el estado 1 entonces el numero promedio de pasos hasta llegar al estado 3 es 3.
4) el estado 1 entonces a largo plazo la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado 2 es $\frac{3}{8}$.

Son datos

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad |q| < 1$$

Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

23. Un aficionado utiliza un método bastante simple para pronosticar el tiempo atmosférico. Clasifica cada día como *seco* o *húmedo*, y supone que la probabilidad de que cualquier día dado sea igual al precedente está dada por una constante p, $(0 < p < 1)$. De acuerdo con registros anteriores, se sabe que la probabilidad de que el primero de enero sea *seco* es $\beta\,(0 < \beta < 1)$.

   a) Si $\beta_n = P(\text{el } n\text{-ésimo día del año sea } \textit{seco})$, obtener una expresión para β_n en función de p y n, para $n = 1, 2, 3$.

   b) Si el tercer día del año fue *seco*, ¿cuál es la probabilidad de que el primero de enero también haya sido *seco*?

   c) Analizar la situación como una cadena de Markov y obtener la distribución de probabilidades estacionaria.

24. Suponga este proceso de dos estados: M, *muerto* y V, *vivo*. Estos son los estados de una persona cuando comienza un año. Sea entonces el proceso estocástico donde X_n es el estado al comienzo del año n y que en $n = 0$ el estado es V. Se considera que el proceso es de Markov y que las probabilidades de transición de un paso no nulas son: $\mathrm{P}\big(X_n = V|\, X_{n-1} = V\big) = 1-p$, $\mathrm{P}\big(X_n = M|\, X_{n-1} = V\big) = p$ y que $\mathrm{P}\big(X_n = M|\, X_{n-1} = M\big) = 1$ dado que el estado M es claramente absorbente.

   a) Obtener $\mathbb{P}^n$ con $\mathbb{P}$ la matriz de probabilidades de transición de un paso. Interpretar su valor límite. Para obtener P^n se sugiere calcular unas primeras potencias, luego conjeturar la forma y demostrar usando inducción completa.

   b) Obtener una expresión para $p_n = \mathrm{P}\big(X_{n+1} = M \cap \bigcap_{k=1}^{n} X_k = V|\, X_0 = V\big)$.
   Sugerencia: $p_1 = \mathrm{P}\big(X_2 = M \cap X_1 = V|\, X_0 = V\big) = \mathrm{P}\big(X_2 = M|\, X_1 = V\big)\,\mathrm{P}\big(X_1 = V|\, X_0 = V\big) = (1-p)\,p$. Esta es la probabilidad de la persona se muera antes de cumplir 2 años.

c) Sea N la variable aleatoria que cuenta los años de vida de una persona. Probar que $\mathrm{P}(N = 0) = p$, y que para $k \in \mathbf{N}$ se tiene $\mathrm{P}(N = k) = p\,(1 - p)^k$. Calcular el valor esperado de N.

25. Cada materia que cursa un alumno en una universidad tiene tres oportunidades para dar el examen final. Suponga que la probabilidad de aprobar el examen final es siempre p. Sea X_n la variable aleatoria que da el número de oportunidades que tiene el alumno en el período n. El recorrido de X_n es el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ siendo el valor cero el estado que se alcanza cuando se aprueba el examen final (claramente un estado absorbente). El estado 3 corresponde al que se tiene una vez aprobada la cursada. Cuando no se aprueba en la última de las instancias se produce una transición del estado 1 al 3 (la materia se recursa).

   a) Modelar la evolución de este proceso como una cadena de Markov obteniendo la matriz de probabilidades de transición de un paso.

   b) Suponga que el estado inicial es el 3. En este caso la distribución de probabilidades es $(0\,,0\,,0\,,1)$. Obtener la distribución de probabilidades para los primeros tres períodos y conjeturar sobre su forma para todo n. Analizar su valor límite.

Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

3. Respuestas

1. a) El recorrido de X_n es el conjunto $\{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$. El espacio de estados es $\mathbb{E} = \mathbb{Z}$. b) La distribución de probabilidades de X_n viene dada por $\mathrm{P}(X_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Por ejemplo si $n = 3$ se tiene:

k	$\mathrm{P}(X_3 = k)$
-3	0.125
-1	0.375
1	0.375
3	0.125

c) La variable aleatoria X_n es una suma de variables aleatorias independientes con idéntica distribución, esto es:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

si $X_0 = 0$ y donde Z_k es la variable aleatoria que toma los valores -1 y 1 ambos con probabilidad $\frac{1}{2}$, con valor esperado 0 y varianza 1. De esta manera el valor esperado de X_n es cero $\forall\, n$, mientras que la varianza es n.

2. a) En el caso general se tiene $\mathrm{P}(X_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2}$, para $k \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$. b) $\mathrm{E}[X_n] = n\,(2\,p - 1)$ y $\mathrm{Var}[X_n] = 4\,n\,p\,(1-p)$.

3. a) El par (valor, probabilidad) para X_0 es $(0, 1)$, para X_1 se tienen los pares (-2 , 0.1), (-1, 0.25), (0, 0.3), (1, 0.25), y (2, 0.1). La distribución de probabilidades de X_2 viene dada por los pares (-4, 0.01), (-3, 0.05), (-2, 0.1225), (-1, 0.2), (0, 0.235), (1, 0.2), (2, 0.1225), (3, 0.05), y (4, 0.01). b) $\mathrm{E}[X_n] = 0$ y $\mathrm{Var}[X_n] = 1.3\;n$.

4. a) Para $n > 0$ el espacio de estados $\mathbb{E}$ es el conjunto de números reales que es el recorrido de la variable aleatoria normal. b) La distribución de probabilidades de X_n es la de una suma de n variables aleatorias normales estándar independientes y por consiguiente es normal con media 0 y varianza n.

5. a) 0.000335 b) 0.9084 c) 0.10484 d) 0.00115 e) 0.13534 f) 0.7619.

6. a) 0.0519. c) 0.03926.

7. a) 0.9474. b) 0.0699 .

8. a) 0.2149 b) 0.1353 c) 0.1941 d) 0.1374.

9. a) Tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 12$ b) 0.5543 c) 0.1353 d) El valor esperado es 50 min y la varianza 250 min^2 e) 0.0172.
10. a) $\exp(-\lambda\, t)$ b) $\exp(-\lambda\, t)\,(1 + \lambda\, t)$ c) Usando la distribución binomial la probabilidad pedida es 0.9642.
11. b) 0 c) 0.3. d) 0.22 e) $\pi(1) = (0.33 \quad 0.45 \quad 0.22)$ f) $(0.3 \quad 0.6 \quad 0.1)$

12. b) $\frac{11}{32}$
c)

$$\mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\,0.25^n + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\,0.25^n + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\,0.25^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\,0.25^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz de transición de n pasos tiende a una matriz cuyas dos filas son iguales al vector fila de la distribución estacionaria de probabilidades. La probabilidad de *éxito* a largo plazo es $\frac{1}{3}$.

13. b) 0.326 . c) (0.191 0.243 0.567) ; (0.179 0.239 0.582); (0.17774 0.23860 0.5837); (0.17767 0.23858 0.58375)
d) para 100 meses (0.1776 0.2386 0.5838)
e) (0.1776 0.2386 0.5838) con 4 decimales.

14. b1) (0.39 0.19 0.42) b2) 0.381 0.183 0.436)
c) luego de transcurrido mucho tiempo ($\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$).

15. c) El 40 % del tiempo en la ciudad A, 45 % del tiempo en B y el 15 % del tiempo en C.

16. Si.

17. a) 1 b) 0.49 c) $\frac{10}{27}$.

18. b)

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) $\frac{19}{36}$. d) (1 0 0 0 0 0).

19. a)

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $\frac{27}{64}$.

20. a)

n	$p_{21}^{(n)}$	$p_{33}^{(n)}$	$p_{11}^{(n)}$	$p_{22}^{(n)}$
1	0	0	0	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{33}{54}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{15}{54}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{37}{54}$
4	$\frac{11}{108}$	$\frac{23}{108}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{217}{324}$
5	$\frac{37}{324}$	$\frac{35}{162}$	$\frac{11}{108}$	$\frac{161}{243}$

b) Todos los estados resultan conectados en 3 o más pasos por lo tanto la cadena es regular. La distribución de probabilidades para *tiempo grande* es el vector ($\frac{1}{9}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{2}{9}$).

21. a) Todos los estados resultan conectados en 3 o más pasos por lo tanto la cadena es regular. b) $\frac{1}{6}$ c) La distribución de probabilidades para *tiempo grande* es el vector ($\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$).

23. a) $\beta_n = (2\,p-1)^n\,\beta - \frac{1}{2}\,((2\,p-1)^n - 1) \quad n: 0, 1, 2\ldots$ b) $\frac{\beta}{1-(1-\beta)(1-2\,p)^2}$.

24. a)

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-(1-p)^n & (1-p)^n \end{bmatrix}.$$

b) $p_0 = p \quad , p_n = p\,(1-p)^n \quad n \in \{1, 2, \ldots\}$ c) $\mathrm{E}\,[N] = \frac{1-p}{p}$.

25. a) $(0,0,0,1) \to (p, 0, (1-p), 0) \to (1-(1-p)^2, 0, (1-p)^2, 0) \to \ldots, (1-(1-p)^n, 0, (1-p)^n, 0) \ldots$. La distribución de probabilidades de largo plazo ($n \to \infty$) es (1, 0, 0, 0).

4. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

La caminata aleatoria (random walk) simétrica Supongamos el siguiente juego: se lanza una moneda en forma reiterada y el jugador gana 1 peso si sale cara y pierde 1 peso si sale ceca.

1. Se define el proceso estocástico $\{X_n : n \in \mathbb{N}^0\}$ donde X_n es el dinero que tiene el jugador al cabo de n jugadas (se supone $X_0 = 0$). Definir el recorrido de X_n y el espacio de estados del proceso (válido para todo valor de n).
2. Obtener la distribución de probabilidades de X_n.
3. Expresar la variable X_n como una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y calcular $\mathrm{E}[X_n]$ y $\mathrm{Var}[X_n]$.

Nota: Se llama caminata aleatoria porque, en vez de un juego, se puede pensar en la caminata de un individuo que se mueve un paso a la izquierda o a la derecha de acuerdo al resultado de lanzar una moneda.

El siguiente código de *Octave* simula el proceso (se muestran `M` *realizaciones del proceso* y `N` instantes posteriores al inicial):

```
N = 100; M = 10;
for i=1:M
    X(1,i) = 0;
    for k=1:N
        Rk = rand;
        Yk = -(Rk<1/2)+(Rk>=1/2);
        X(k+1,i) = X(k,i)+Yk;
    end
end
plot(X,'o-')
```

Resolución

El proceso tiene las siguientes características:

- Se trata de un proceso de Markov. En efecto, el dinero del jugador luego de n jugadas no depende de toda la historia de apuestas, sino solamente del dinero que tiene luego de la jugada $n-1$ y el que gane o pierda en la jugada n:

$$\mathrm{P}\big(X_n = x_n |\, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \cdots, X_1 = x_1\big) = \mathrm{P}\big(X_n = x_n |\, X_{n-1} = x_{n-1}\big), \quad (1)$$

  donde asumido que *los lanzamientos de monedas son experimentos independientes.* Más aún,

$$\mathrm{P}\big(X_n = x_n |\, X_{n-1} = x_{n-1}\big) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x_n = x_{n-1} \pm 1, \\ 0 & \text{para todo otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

- Definamos el proceso estocástico $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$Y_n = X_n - X_{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Es decir, Y_n es la cantidad ganada en la jugada n-ésima. Por lo tanto, $Y_n \in \{-1, +1\}$. Es fácil ver que

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k. \tag{4}$$

Dado que los lanzamientos de monedas son independientes e idénticos, las Y_n son variables aleatorias i.i.d. con

$$\mathrm{P}\left(Y_n = \pm 1\right) = \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\mathrm{E}\left[Y_n\right] = (-1)\frac{1}{2} + (+1)\frac{1}{2} = 0, \tag{6}$$

$$\mathrm{Var}\left[Y_n\right] = \mathrm{E}\left[Y_n^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y_n\right]\right)^2 = \mathrm{E}\left[Y_n^2\right] = (-1)^2\frac{1}{2} + (+1)^2\frac{1}{2} = 1. \tag{7}$$

Luego,

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left[Y_k\right] = 0, \tag{8}$$

$$\mathrm{Var}\left[X_n\right] = \mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left[Y_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left[Y_1\right] = n, \tag{9}$$

donde en la última ecuación hemos usado el hecho que la varianza de una suma de variables aleatorias independientes es igual a la suma de las varianzas de cada variable aleatoria.

- El proceso X_n tiene incrementos independientes. En efecto, sean $i \leq j < m \leq n \in \mathbb{N}$. Luego

$$X_j - X_i = \sum_{k=i+1}^{j} Y_k, \qquad X_n - X_m = \sum_{l=m+1}^{n} Y_l. \tag{10}$$

Dado que los lanzamientos de las monedas son independientes, $\{Y_{m+1}, Y_{m+2}, \cdots, Y_n\}$ son independientes entre sí y de $\{Y_{i+1}, Y_{i+2}, \cdots, Y_j\}$. Por lo tanto, $(X_n - X_m)$ es independiente de $(X_j - X_i)$.

- El proceso X_n tiene incrementos estacionarios. Sean $i < j, m \in \mathbb{N}$. Luego

$$X_j - X_i = \sum_{k=i+1}^{j} Y_k, \qquad X_{j+m} - X_{i+m} = \sum_{l=i+m+1}^{j+m} Y_l = \sum_{h=i+1}^{j} Y_{l+m}. \tag{11}$$

Dado que las variables Y_k son i.i.d., $\sum\limits_{k=i+1}^{j} Y_k$ tiene la misma distribución que $\sum\limits_{h=i+1}^{j} Y_{l+m}$.

- Llamemos $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al proceso estocástico

$$G_n = \begin{cases} 1 & \text{si el jugador gana en la } n\text{-ésima jugada,} \\ 0 & \text{si el jugador pierde en la } n\text{-ésima jugada.} \end{cases} \tag{12}$$

Dado que los lanzamientos de monedas son independientes e idénticos, las G_n son variables aleatorias i.i.d. con $G_n \sim \mathrm{Bernoulli}(1/2)$. Es fácil ver que

$$Y_n = 2\,G_n - 1. \tag{13}$$

Por lo tanto,

$$X_n = 2\sum_{k=1}^{n} G_k - n. \tag{14}$$

Definamos

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} G_k. \tag{15}$$

Sabemos que la suma de variables aleatorias i.i.d. Bernoulli es una variable aleatoria binomial, es decir, $H_n \sim \text{Binomial}(n, 1/2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_n = x) &= \mathrm{P}(2H_n - n = x) = \mathrm{P}\left(H_n = \frac{n+x}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+x}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } \frac{n+x}{2} = 0, 1, \cdots, n \\ 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+x}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } x = -n, -n+2, \cdots, n-2, n \\ 0 & \text{en todo otro caso.} \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

Es decir que el recorrido de X_n es $\{-n, -n+2, \cdots, n-2, n\}$.

- A pesar que ya hemos demostrado que tiene incrementos independientes y estacionarios, el proceso X_n no es estacionario. En efecto,

$$\mathrm{P}(X_2 = 1) = 0 \neq \frac{1}{2} = \mathrm{P}(X_1 = 1), \tag{17}$$

por lo que no se cumple que X_{n+h} y X_n tengan la misma distribución ($n, h = 1$ en el ejemplo).

Finalmente, el código en *Octave* se entiende de la siguiente manera:

- `X` será una matriz con `N` filas y `M` columnas que se llenará gracias a los dos lazos `for ... end` entre las líneas **04-08** y **02-09**.
- Cada columna de `X` tendrá una *realización* del proceso estocástico X_n, esto es, una posible historia de juego.
- Cada realización se simula recordando que $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. La línea **07** escribe exactamente esta ecuación, donde `X(k+1,i)` es X_k en la `i`-ésima realización. La diferencia entre k y `k+1` se debe a que *Octave* indexa los arreglos empezando de 1 (ver línea **03**).
- Las líneas **05-06** simulan la ganancia Y_k (`Yk`) en la `i`-ésima realización. La función `rand` de *Octave* simula un experimento en el que se obtiene un número con distribución $U(0, 1)$. Si `Rk`$= R_k \sim U(0, 1)$, entonces

$$\mathrm{P}\left(R_k < \frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}\left(R_k \geq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Ahora bien:

  - `(Rk<1/2)` da 1 si se cumple la condición entre paréntesis y 0 en caso contrario;
  - `(Rk>=1/2)` da 1 si se cumple la condición entre paréntesis y 0 en caso contrario.

Por lo tanto, `Yk` será -1 con probabilidad $1/2$ y $+1$ con igual probabilidad.

- La línea **10** simplemente grafica las realizaciones. Ver Fig. 1.

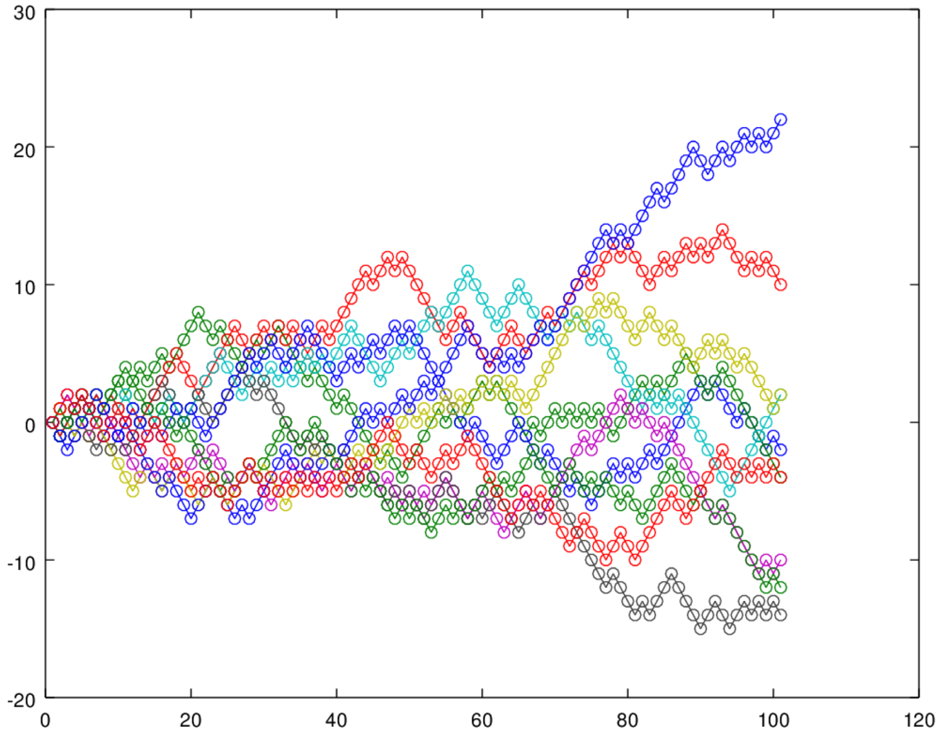


Figura 1: Diez realizaciones del proceso estocástico X_n en el ejercicio 1 de la guía 6. El eje de las abscisas corresponde a $n-1$, el índice. Las ordenadas corresponden a la cantidad ganada por el jugador ($). Cada realización está graficada con un color diferente.

Ejercicio 3

Suponga un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados discreto definido de la siguiente manera:

$$X_{n+1} = X_n + Z_n \tag{19}$$

para n tomando los valores 0, 1, 2, ... (el tiempo discreto) y con $X_0 = 0$. Las variables aleatorias Z_n se suponen independientes, e igualmente distribuidas con recorrido $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ con función de probabilidad
$p_Z(z) = P(Z = z)$ tal que $p_Z(-2) = p_Z(2) = 0.1$, $p_Z(-1) = p_Z(1) = 0.25$ y $p_Z(0) = 0.3$.

a) Obtener la distribución de probabilidades de X_n para n tomando los valores 1, 2 y 3.

b) Calcular $\mathrm{E}[X_n]$ y $\mathrm{Var}[X_n]$.

Resolución

Ítem a

La primer consigna nos induce a utilizar una herramienta muy útil para un análisis inicial de cualquier proceso estocástico: visualizar los primeros instantes de tiempo para detectar patrones en el comportamiento.

Tenemos como dato que $X_0 = 0$. En base a este valor inicial se desarrolla el proceso. A partir de ese momento, se tiene:

$$X_{n+1} = X_n + Z_n, \quad \forall n \geq 0 \tag{20}$$

Es decir, si $n = 0$:

$$X_1 = \underbrace{X_0}_{0} + Z_0 \Rightarrow X_1 = Z_0 \tag{21}$$

Por lo tanto, al ser iguales como variables aleatorias, ambas son discretas y la distribución de X_1 es idéntica a la distribución de Z_0, es decir:

- $R_{X_1} = R_{Z_0} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- $p_{X_1}(-2) = p_{Z_0}(-2) = 0.1$
- $p_{X_1}(-1) = p_{Z_0}(-1) = 0.25$
- $p_{X_1}(0) = p_{Z_0}(0) = 0.3$
- $p_{X_1}(1) = p_{Z_0}(1) = 0.25$
- $p_{X_1}(2) = p_{Z_0}(2) = 0.1$

Continuando con la ecuación que nos define el proceso, podemos determinar cómo se comporta X_2:

$$X_2 = \underbrace{X_1}_{Z_0} + Z_1 \Rightarrow X_2 = Z_0 + Z_1 \tag{22}$$

Es decir, podemos escribir a X_2 como la suma de Z_1 y Z_0. Por lo que su recorrido es:

$$R_{X_2} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \tag{23}$$

Vale aclarar que como Z_1 y Z_0 son independientes, al cumplirse $Z_0 = X_1$, también son independientes Z_1 y X_1.

Calculamos estas probabilidades puntuales, utilizando probabilidad total y comenzando por $p_{X_2}(-4)$:

$$\begin{aligned} p_{X_2}(-4) &= \mathrm{P}(X_2 = -4) = \mathrm{P}(Z_1 + X_1 = -4) = \sum_{i=-2}^{2} \mathrm{P}(Z_1 + X_1 = -4, X_1 = i) \\ &= \sum_{i=-2}^{2} \mathrm{P}(Z_1 = -4 - i, X_1 = i) \overset{\text{IND}}{=} \sum_{i=-2}^{2} \mathrm{P}(Z_1 = -4 - i)\,\mathrm{P}(X_1 = i) \end{aligned} \tag{24}$$

Notemos que de esta última suma, $-4 - i < -2$ si $i \geq -1$. Es decir, $\mathrm{P}(Z_1 = -4 - i) = 0$ si $i \geq -1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_{X_2}(-4) &= \sum_{i=-1}^{2} \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -4 - i)}_{0}\mathrm{P}(X_1 = i) + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -4 - (-2))\,\mathrm{P}(X_1 = -2)}_{i=-2} \\ &= \mathrm{P}(Z_1 = -2)\,\mathrm{P}(X_1 = -2) = 0.1^2 = 0.01 \end{aligned} \tag{25}$$

Notemos que en este cálculo, muchos términos se anulan y sólo uno de ellos es de importancia. Esto obedece a cierta intuición de que para que $Z_1 + X_1 = -4$, siguiendo sus recorridos se puede dar únicamente en el caso en que $Z_1 = X_1 = -2$. El teorema de probabilidad total nos asiste en el caso en que esta progresión de eventos no es tan trivial.

Equivalentemente, obviando las probabilidades nulas, podemos proceder con el resto de las probabilidades puntuales:

- $p_{X_2}(-3)$:

$$\begin{aligned} p_{X_2}(-3) &= \sum_{i=-2}^{2} \mathrm{P}(Z_1 = -3 - i)\,\mathrm{P}(X_1 = i) \\ &= \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = -2)}_{0.1} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = -1)}_{0.25} = 2 \cdot 0.25 \cdot 0.1 = 0.05 \end{aligned} \tag{26}$$

- $p_{X_2}(-2)$:

$$\begin{aligned} p_{X_2}(-2) &= \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 0)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = -2)}_{0.1} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = -1)}_{0.25} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 0)}_{0.3} \\ &= 2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 + 0.25^2 = 0.1225 \end{aligned} \tag{27}$$

- $p_{X_2}(-1)$:

$$\begin{aligned} p_{X_2}(-1) = &\underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = -2)}_{0.1} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 0)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = -1)}_{0.25} + \\ &+ \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 0)}_{0.3} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 1)}_{0.25} = 0.2 \end{aligned} \tag{28}$$

- Para calcular $p_{X_2}(0)$, usaremos la simetría respecto del cero de la distribución $p_Z = p_{Z_1} = p_{X_1}$:

$$p_{X_2}(0) = \sum_{i=-2}^{2} \mathrm{P}(Z_1 = 0 - i)\,\mathrm{P}(X_1 = i) = \sum_{i=-2}^{2} p_Z(-i) \cdot p_Z(i) = \sum_{i=-2}^{2} p_Z^2(i) = 0.235 \tag{29}$$

- $p_{X_2}(1)$:

$$p_{X_2}(1) = \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = -1)}_{0.25} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 0)}_{0.3} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 0)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 1)}_{0.25} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = -1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 2)}_{0.1} = 0.2 \quad (30)$$

- $p_{X_2}(2)$:

$$p_{X_2}(2) = \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 0)}_{0.3} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 1)}_{0.25} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 0)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 2)}_{0.1} = 0.1225 \quad (31)$$

- $p_{X_2}(3)$:

$$p_{X_2}(3) = \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 1)}_{0.25} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 1)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 2)}_{0.1} = 0.05 \quad (32)$$

- $p_{X_2}(4)$:

$$p_{X_2}(4) = \underbrace{\mathrm{P}(Z_1 = 2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_1 = 2)}_{0.1} = 0.01 \quad (33)$$

Notar que la distribución de X_2 también es simétrica respecto del cero. Es decir, $p_{X_2}(i) = p_{X_2}(-i)$ para todo i. Esto se debe a que se suman dos variables simétricas respecto del cero. Esto se puede generalizar a cualquier suma finita de variables simétricas. Por lo tanto, como:

$$X_3 = \underbrace{X_2}_{\text{simétrica}} + \underbrace{Z_2}_{\text{simétrica}} \quad (34)$$

podemos concluir que X_3 también será simétrica, y podemos reducir sus cálculos a los valores no negativos y en base a ellos, deducir la parte negativa. Más aún, podemos restringirnos únicamente a la parte positiva, por la siguiente propiedad:

$$\mathrm{P}(X_3 < 0) + \mathrm{P}(X_3 = 0) + \mathrm{P}(X_3 > 0) = 1 \Rightarrow \mathrm{P}(X_3 = 0) + 2 \cdot \mathrm{P}(X_3 > 0) = 1 \Rightarrow \mathrm{P}(X_3 = 0) = 1 - 2 \cdot \mathrm{P}(X_3 > 0) \quad (35)$$

Como $X_3 = X_2 + Z_2$, el recorrido será

$$R_{X_3} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (36)$$

Por el razonamiento anterior, podemos calcular únicamente $p_{X_3}(k)$ con $1 \leq k \leq 6$, haciendo probabilidad total con los valores de X_2:

- $p_{X_3}(6)$:

$$p_{X_3}(6) = \sum_{i=-4}^{4} \mathrm{P}(Z_2 = 6 - i)\,\mathrm{P}(X_2 = i) = \underbrace{\mathrm{P}(Z_2 = 2)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}(X_2 = 4)}_{0.01} = 0.001 = p_{X_3}(-6) \quad (37)$$

- $p_{X_3}(5)$:

$$\begin{aligned}
p_{X_3}(5) &= \sum_{i=-4}^{4} \mathrm{P}\left(Z_2 = 5-i\right)\mathrm{P}\left(X_2 = i\right) = \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=2\right)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=3\right)}_{0.05} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=4\right)}_{0.01} \\
&= 0.0075 = p_{X_3}(-5)
\end{aligned} \tag{38}$$

- $p_{X_3}(4)$:

$$\begin{aligned}
p_{X_3}(4) &= \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=2\right)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=2\right)}_{0.1225} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=3\right)}_{0.05} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=0\right)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=4\right)}_{0.01} \\
&= 0.02775 = p_{X_3}(-4)
\end{aligned} \tag{39}$$

- $p_{X_3}(3)$:

$$\begin{aligned}
p_{X_3}(3) &= \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=2\right)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=1\right)}_{0.2} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=2\right)}_{0.1225} + \\
&\quad + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=0\right)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=3\right)}_{0.05} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=-1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=4\right)}_{0.01} \\
&= 0.066625 = p_{X_3}(-3)
\end{aligned} \tag{40}$$

- $p_{X_3}(2)$:

$$\begin{aligned}
p_{X_3}(2) &= \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=2\right)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=0\right)}_{0.235} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=1\right)}_{0.2} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=0\right)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=2\right)}_{0.1225} + \\
&\quad + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=-1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=3\right)}_{0.05} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=-2\right)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=4\right)}_{0.01} \\
&= 0.12375 = p_{X_3}(-2)
\end{aligned} \tag{41}$$

- $p_{X_3}(1)$:

$$\begin{aligned}
p_{X_3}(1) &= \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=2\right)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=-1\right)}_{0.2} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=0\right)}_{0.235} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=0\right)}_{0.3}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=1\right)}_{0.2} + \\
&\quad + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=-1\right)}_{0.25}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=2\right)}_{0.1225} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Z_2=-2\right)}_{0.1}\underbrace{\mathrm{P}\left(X_2=3\right)}_{0.05} \\
&= 0.174375 = p_{X_3}(-1)
\end{aligned} \tag{42}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_3=0\right) &= 1 - 2\cdot\mathrm{P}\left(X_3>0\right) = 1 - 2\sum_{i=1}^{6}\mathrm{P}\left(X_3=i\right) \\
&= 1 - 2(0.001 + 0.0075 + 0.02775 + 0.066625 + 0.12375 + 0.174375) \\
&= 0.198
\end{aligned} \tag{43}$$

Comentario: Que X_1 y Z_0 sean iguales como variables aleatorias, es más fuerte que el hecho de que tengan la misma distribución. $X_1 = Z_0$ implica que siempre que Z_0 tome un valor k, X_1 tomará también el valor k. Es decir, todos los eventos que involucren a X_1 son iguales a los eventos equivalentes de Z_0. Sin embargo, por ejemplo, X_1 tiene la misma distribución que Z_1, pero no son iguales como variables, lo que dice es que $\mathrm{P}(Z_1 = k) = \mathrm{P}(X_1 = k)$, a pesar de que Z_1 y X_1 pueden tomar distintos valores.

Ítem b

En el último ítem se pedían las distribuciones de X_n para los primeros instantes de tiempo. En este caso, nos piden menos datos sobre las distribuciones (valor esperado y varianza), pero para todos los instantes de tiempo.

Para realizar este análisis, como en muchos procesos estocásticos, es de mucha utilidad expresar el proceso como una suma de variables, que permita analizar lo que sucede en cada instante de tiempo.

Para expresar el proceso X_n como una suma, volvamos a algunas ecuaciones obtenidas en el ítem anterior:

$$\begin{aligned} &X_0 = 0 \\ &X_1 = X_0 + Z_0 \Rightarrow \underline{X_1 = Z_0} \\ &X_2 = X_1 + Z_1 \Rightarrow \underline{X_2 = Z_0 + Z_1} \\ &X_3 = X_2 + Z_2 \Rightarrow \underline{X_3 = Z_0 + Z_1 + Z_2} \end{aligned} \tag{44}$$

Podemos inducir que cada variable del proceso $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se puede escribir en términos del proceso $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Más aún, hemos logrado expresarlo como suma de variables independientes, del siguiente modo:

$$X_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i, \quad n \in \mathbb{N} \tag{45}$$

El hecho de que sea una suma nos facilita el cálculo del valor esperado, justamente por la propiedad de linealidad:

$$\mathrm{E}[X_n] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} Z_i\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\mathrm{E}[Z_i]}_{0} = 0 \tag{46}$$

Esto tiene sentido ya que habíamos deducido que las variables X_n debían ser simétricas respecto del cero. Aunque esto no lo confirma (habría que calcular el coeficiente de simetría), le da consistencia al resultado ya que si son simétricas respecto del cero, su valor esperado es nulo.

El hecho de que sean independientes nos simplifica el cálculo de la varianza, ya que la covarianza entre los pares de variables distintas da cero como resultado y se puede escribir la varianza de la suma como la suma de las varianzas:

$$\mathrm{Var}[X_n] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=0}^{n-1} Z_i\right] \overset{\text{IND}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Var}[Z_i] \tag{47}$$

Como además las Z_i son idénticamente distribuidas, la varianza coincide para todos los valores de $i \in \mathbb{N}_0$, es decir, podemos :

$$\mathrm{Var}[X_n] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Var}[Z_i] = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}}_{n \text{ términos}} \mathrm{Var}[Z_0] = n \cdot \mathrm{Var}[Z_0] \tag{48}$$

Por lo que sólo nos resta calcular $\mathrm{Var}\left[Z_0\right]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[Z_0\right] &= \mathrm{E}\left[Z_0^2\right] - \underbrace{\mathrm{E}\left[Z_0\right]^2}_{0} = \mathrm{E}\left[Z_0^2\right] = \sum_{i=-2}^{2} i^2 \mathrm{P}\left(Z_0 = i\right) \\ &= 4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.1 \\ &= 1.3 \end{aligned} \tag{49}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Var}\left[X_n\right] = 1.3 \cdot n \tag{50}$$

Ejercicio 8

Suponga que en cierto banco se atiende, en promedio durante una parte del día, a cuatro clientes cada seis minutos según un proceso de Poisson. Calcular la probabilidad de que:

1. puedan atenderse a seis o más clientes en seis minutos;
2. se empleen más de tres minutos en atender a un cliente;
3. el tiempo de atención a un cliente esté comprendido entre dos y cuatro minutos;
4. el tiempo que insuma atender 10 clientes sea menor a 10 minutos.

Resolución

Llamemos $N(t)$ al proceso de Poisson que se corresponde con la cantidad de clientes atendida a partir de cierto instante de tiempo que tomamos como punto de partida y llamamos $t = 0$. La tasa del proceso de Poisson es

$$\lambda = \frac{4 \text{ clientes}}{6 \text{ minutos}} = \frac{2}{3} \min^{-1}. \tag{51}$$

Luego, $N(6) \sim \text{Poisson}(4)$ y la probabilidad de atender a seis o más clientes en seis minutos es

$$\mathrm{P}\left(N(6) \geq 6\right) = 1 - \mathrm{P}\left(N(6) \leq 5\right) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{4^k}{k!} e^{-4} \approx 1 - 0.7851 = 0.2149. \tag{52}$$

Definamos T como el tiempo de atención de un cliente. Recordando que el tiempo entre eventos de un proceso Poisson tiene una distribución exponencial cuyo parámetro es igual a la tasa del proceso, tenemos que $T \sim \text{Expo}(2/3)$, siendo T medido en minutos. Por lo tanto, para las preguntas 2 y 3 tenemos:

$$\mathrm{P}\left(T > 3\right) = 1 - \mathrm{F}_T(3) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{3}\cdot 3}\right) = e^{-2} \approx 0.1353, \tag{53}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(2 < T < 4\right) = \mathrm{P}\left(2 < T \leq 4\right) = \mathrm{F}_T(4) - \mathrm{F}_T(3) &= \left(1 - e^{-\frac{2}{3}\cdot 4}\right) - \left(1 - e^{-\frac{2}{3}\cdot 2}\right) \\ &= e^{-\frac{4}{3}} - e^{-\frac{8}{3}} \approx 0.1941. \end{aligned} \tag{54}$$

Para la última pregunta, llamemos T_k al tiempo de atención de k clientes. Es fácil ver que (mirar la definición de proceso de conteo)

$$T_k < t \Leftrightarrow N(t) \geq k. \tag{55}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(T_{10} < 10\right) = \mathrm{P}\left(N(10) \geq 10\right) = 1 - \mathrm{P}\left(N(10) \leq 9\right) &= 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{\left(\frac{20}{3}\right)^k}{k!} e^{-\frac{20}{3}} \\ &\approx 1 - 0.8626 = 0.1373. \end{aligned} \tag{56}$$

Ejercicio 13

Tres supermercados S_1, S_2 y S_3 compiten por los clientes. Una investigación determina que al comenzar el mes de agosto los tres supermercados tienen igual cantidad de clientes. Al finalizar el mes se observa que:

1. S_1 conserva el 80 % de sus clientes y gana el 10 % y el 2 % de los clientes de S_2 y S_3 respectivamente.
2. S_2 conserva el 70 % de sus clientes y gana el 14 % y el 8 % de los clientes de S_1 y S_3 respectivamente.
3. S_3 conserva el 90 % de sus clientes y gana el 6 % y el 20 % de los clientes de S_1 y S_2 respectivamente.

Sea $\mathbb{P}$ es la matriz cuadrada de elementos p_{ij}, donde p_{ij} es la probabilidad de que un cliente del supermercado S_i se pase al supermercado S_j al cabo de un mes.

1. Construya la matriz de transición $\mathbb{P}$, con los datos del problema.
2. Si $\mathbb{P}^{(n)}$ es la matriz cuyo elemento de la posición i, j indica la proporción de clientes que se pasaron del supermercado S_i al S_j al cabo de n meses (bajo el supuesto de que estas proporciones permanecen invariables mes a mes), determine qué porcentaje de clientes se pasaron de S_2 al S_3 al cabo de 2 meses.
3. Sea $\vec{p}(0) = (1/3\ 1/3\ 1/3)$ el vector fila cuyos elementos indican la proporción de clientes que tenía inicialmente cada supermercado. El producto $A\mathbb{P}^{(n)}$ indica la proporción de clientes de cada supermercado al cabo de n meses. Calcule qué proporción de clientes tiene cada supermercado al cabo de un año, dos años, tres años y cuatro años.
4. ¿Qué puede concluir acerca de la proporción de clientes de cada supermercado a largo plazo?
5. Verifique que la respuesta del punto d) también puede obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones $x\mathbb{P} = 1.x$, donde $x = (x_1\ x_2\ x_3)$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, es decir, x es un autovector fila a izquierda de la matriz $\mathbb{P}$ correspondiente al autovalor 1 .

Resolución

Tomemos una persona al azar de entre el universo de clientes de supermercados. Luego, sea $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ el proceso estocástico que describe de qué supermercado es cliente dicha persona durante el mes n-ésimo. El espacio de estados del proceso es $\mathbb{E} = \{s_1, s_2, s_3\}$, donde

$$s_i = [\text{cliente del supermercado } S_i] \qquad i = 1, 2, 3. \tag{57}$$

Dado que, por el enunciado,

$$\mathrm{P}\big(X(n+1) = s_j |\, X(n) = s_i, X(n-1) = s_k, \cdots\big) = \mathrm{P}\big(X(n+1) = s_j |\, X(n) = s_i\big),$$

sabemos que $X(n)$ es un proceso de Markov. Más aún, como que el espacio de estados $\mathbb{E}$ es discreto, se trata de una cadena de Markov. La Fig. 2 muestra el diagrama de estados de la cadena.

A partir del diagrama, es fácil escribir la matriz de probabilidades de transición:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.14 & 0.06 \\ 0.10 & 0.70 & 0.20 \\ 0.02 & 0.08 & 0.90 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

donde la primer, segunda y tercer fila corresponden a los estados s_1, s_2 y s_3, respectivamente.

La matriz $\mathbb{P}^{(n)}$ de probabilidades de transición en n pasos se puede escribir en función de la matriz de transición $\mathbb{P}$ como

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n. \tag{59}$$

En particular,

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.6552 & 0.2148 & 0.1300 \\ 0.1540 & 0.5200 & 0.3260 \\ 0.0420 & 0.1308 & 0.8272 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

La fracción de clientes que pasan del supermercado S_2 al S_3 en dos meses, se puede obtener como $\mathbb{P}^{(2)}(2,3) = 0.3260$.

Si los clientes se distribuyen uniformemente entre los tres supermercados al inicio, $\vec{p}(0) = (1/3\ 1/3\ 1/3)$. Luego de un año, la distribución será:

$$\vec{p}(12) = \vec{p}(0)\mathbb{P}^{12} \approx \begin{pmatrix} 0.1906 & 0.2428 & 0.5666 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Y luego de 2 y 3 años:

$$\vec{p}(24) = \vec{p}(0)\mathbb{P}^{24} \approx \begin{pmatrix} 0.1786 & 0.2389 & 0.5825 \end{pmatrix}, \tag{62}$$

$$\vec{p}(36) = \vec{p}(0)\mathbb{P}^{36} \approx \begin{pmatrix} 0.1777 & 0.2386 & 0.5836 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Para hacer estas cuentas, hemos utilizado un programa de computadora. Más abajo mostramos cómo hacerlo de otra manera. Lo que es importante es notar que los valores aparentan converger. De hecho, la cadena de Markov es irreducible y existe un estado estacionario. El mismo puede ser obtenido planteando

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} = \vec{\pi}\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.80 & 0.14 & 0.06 \\ 0.10 & 0.70 & 0.20 \\ 0.02 & 0.08 & 0.90 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Esto da a lugar a tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$0.80\pi_1 + 0.10\pi_2 + 0.02\pi_3 = \pi_1 \tag{65}$$
$$0.14\pi_1 + 0.70\pi_2 + 0.08\pi_3 = \pi_2 \tag{66}$$
$$0.06\pi_1 + 0.20\pi_2 + 0.90\pi_3 = \pi_3 \tag{67}$$

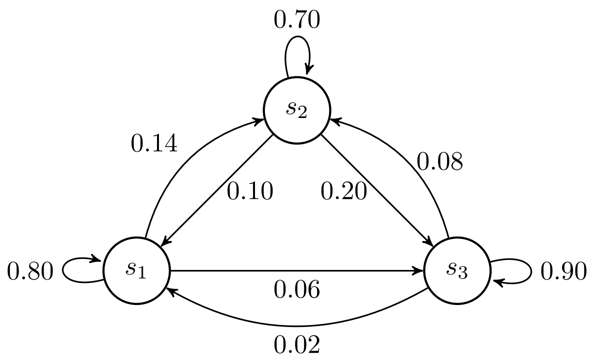


Figura 2: Diagrama de estados de la cadena de Markov del Ejercicio 13 de la guía 6.

Obsérvese que si se suman m.a.m. las Ecs. (65)-(67), se obtiene:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3. \tag{68}$$

Esto implica que las Ecs. (65)-(67) son linealmente dependientes. Para poder obtener una única solución, reemplazamos una de las ecuaciones por la ecuación referente a la normalización del vector $\vec{\pi}$:

$$0.80\pi_1 + 0.10\pi_2 + 0.02\pi_3 = \pi_1 \tag{69}$$

$$0.14\pi_1 + 0.70\pi_2 + 0.08\pi_3 = \pi_2 \tag{70}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \tag{71}$$

De la Ec. (69), obtenemos

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{10}\pi_3. \tag{72}$$

Reemplazando esta ecuación en la (70),

$$\frac{14}{100}\left(\frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{10}\pi_3\right) + \frac{70}{100}\pi_2 + \frac{8}{100}\pi_3 = \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{47}{115}\pi_3. \tag{73}$$

Substituyendo esto en la Ec. (72), tenemos

$$\pi_1 = \frac{47}{230}\pi_3 + \frac{1}{10}\pi_3 = \frac{35}{115}\pi_3. \tag{74}$$

Finalmente, substituyendo las Ecs. (73)-(74) en la Ec. (71),

$$\frac{35}{115}\pi_3 + \frac{47}{115}\pi_3 + \pi_3 = \frac{35+47+115}{115}\pi_3 = 1 \Rightarrow \tag{75}$$

$$\Rightarrow \pi_3 = \frac{115}{197} \approx 0.5838,\ \pi_2 = \frac{47}{197} \approx 0.2386,\ \pi_1 = \frac{35}{197} \approx 0.1777. \tag{76}$$

Obsérvese que estos números coinciden bastante bien con los obtenidos cuando se buscó la distribución de probabilidades de luego de 3 años.

Extra: Autovalores y autovectores de la matriz de transición

Asumamos que la matriz $\mathbb{P}$ es diagonalizable. En este caso, la matriz de transición se puede escribir como

$$\mathbb{P} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}, \tag{77}$$

donde $\mathbf{V}$ es la matriz de autovectores y $\boldsymbol{\Lambda}$ es la matriz diagonal de autovalores. Luego,

$$\mathbb{P}^n = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}^n\mathbf{V}^{-1}. \tag{78}$$

Es fácil verificar que uno de los autovalores es igual 1. En efecto, dado que las filas de la matriz de probabilidad de transición suman 1,

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{79}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\mathbb{P} = \mathbf{V}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}, \tag{80}$$

$$\mathbb{P}^n = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}. \tag{81}$$

A partir de estas ecuaciones se puede encontrar $\vec{p}(n)$ para cualquier n. Haciendo algunas cuentas (o utilizando un programa matemático como *Octave*):

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)\mathbb{P}^n = \vec{p}(0)\mathbf{V} \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{10} - \frac{\sqrt{7}}{25}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{7}{10} + \frac{\sqrt{7}}{25}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, \tag{82}$$

donde, por ej.,

$$\mathbf{V} \approx \begin{pmatrix} +0.5152 & -0.9147 & 1 \\ -0.8368 & -0.1908 & 1 \\ +0.1852 & +0.3564 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{V}^{-1} \approx \begin{pmatrix} +0.3698 & -0.8590 & +0.4892 \\ -0.6908 & -0.2230 & +0.9138 \\ +0.1777 & +0.2386 & +0.5838 \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Cuando $n \to \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n) &= \vec{p}(0)\mathbf{V} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \vec{p}(0) \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & * & 1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ +0.1777 & +0.2386 & +0.5838 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} +0.1777 & +0.2386 & +0.5838 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{84}$$

donde hemos usado el hecho que la suma de las componentes de $\vec{p}(0)$ es 1. Obsérvese que hemos llegado a la misma probabilidad estacionaria, aunque por un camino distinto. La clave fue que la matriz $\mathbb{P}$ tiene uno solo autovalor igual a 1 y los demás son menores a 1 en módulo.

Ejercicio 17

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$ y matriz de transición de probabilidades dada por

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}. \tag{85}$$

a) Calcular $\mathrm{P}\big(X_2 = a \big| X_1 = b, X_0 = c\big)$

b) Calcular $\mathrm{P}\big(X_{35} = a \big| X_{33} = a\big)$

c) Estimar $\mathrm{P}\big(X_{200} = a \big| X_0 = b\big)$

Resolución

Ítem a

Por ser cadena de Markov, la probabilidad condicional depende únicamente del último tiempo del condicionante. Es decir,

$$\mathrm{P}\big(X_2 = a \big| X_1 = b, X_0 = c\big) = \mathrm{P}\big(X_2 = a \big| X_1 = b\big) \tag{86}$$

Esta probabilidad se obtiene en la primer fila y segunda columna de la matriz de transición. Es decir,

$$\mathrm{P}\big(X_2 = a \big| X_1 = b, X_0 = c\big) = \mathrm{P}\big(X_2 = a \big| X_1 = b\big) = 1 \tag{87}$$

Ítem b

Por ser cadena de Markov homogénea, las matrices de transición se mantienen constantes para todo instante de tiempo n. Por lo tanto, la probabilidad pedida describe todas las formas de mantenerse en el estado a luego de dos pasos.

Hay dos maneras de realizar este cálculo, una se basa en cáclulos de probabilidades básicos:

$$\mathrm{P}\big(X_{35} = a \big| X_{33} = a\big) = \frac{\mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{33} = a\right)}{\mathrm{P}\left(X_{33} = a\right)} \tag{88}$$

Por el teorema de probabilidad total, podríamos considerar todos los estados por los que puede pasar en el instante $n = 34$ para reescribir el numerador:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{33} = a\right) =& \mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a\right) + \mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{34} = b, X_{33} = a\right) + \\ &+ \mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{34} = c, X_{33} = a\right) \end{aligned} \tag{89}$$

Cada uno de estos términos se puede reescribir del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a\right) = & \underbrace{\frac{\mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a\right)}{\mathrm{P}\left(X_{34} = a, X_{33} = a\right)}}_{\mathrm{P}\left(X_{35}=a | X_{34}=a, X_{33}=a\right)} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{P}\left(X_{34} = a, X_{33} = a\right)}{\mathrm{P}\left(X_{33} = a\right)}}_{\mathrm{P}\left(X_{34}=a | X_{33}=a\right)} \cdot \\ & \cdot \mathrm{P}\left(X_{33} = a\right) \end{aligned} \tag{90}$$

Como X_n es una cadena de Markov, en el primer factor se puede prescindir del último evento del condicionante. Es decir,

$$\mathrm{P}\left(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a\right) = \mathrm{P}\big(X_{35} = a | X_{34} = a \big| \cdot\big) \mathrm{P}\big(X_{34} = a \big| X_{33} = a\big) \cdot \mathrm{P}\left(X_{33} = a\right) \tag{91}$$

Del mismo modo,

- $\mathrm{P}(X_{35}=a, X_{34}=b, X_{33}=a) = \mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=b\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=b | X_{33}=a\big) \cdot \mathrm{P}(X_{33}=a)$
- $\mathrm{P}(X_{35}=a, X_{34}=c, X_{33}=a) = \mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=c\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=c | X_{33}=a\big) \cdot \mathrm{P}(X_{33}=a)$

Por lo tanto, como $\mathrm{P}(X_{33}=a)$ es un factor común en el numerador y aparece en el denominador:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{33}=a\big) &= \frac{\mathrm{P}(X_{35}=a, X_{33}=a)}{\mathrm{P}(X_{33}=a)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=a\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=a | X_{33}=a\big) \cdot \mathrm{P}(X_{33}=a)}{\mathrm{P}(X_{33}=a)} + \\
&+ \frac{\mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=b\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=b | X_{33}=a\big) \cdot \mathrm{P}(X_{33}=a)}{\mathrm{P}(X_{33}=a)} + \\
&+ \frac{\mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=c\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=c | X_{33}=a\big) \cdot \mathrm{P}(X_{33}=a)}{\mathrm{P}(X_{33}=a)} \\
&= \mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=a\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=a | X_{33}=a\big) + \\
&+ \mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=b\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=b | X_{33}=a\big) + \\
&+ \mathrm{P}\big(X_{35}=a | X_{34}=c\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{34}=c | X_{33}=a\big) \\
&= 0.3^2 + 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0 = \underline{0.49}
\end{aligned} \tag{92}$$

Este desarrollo permite obtener lo intuitivo, que hay tres opciones para que el proceso se mantenga en a luego de dos pasos:

- $\underbrace{a}_{n=33} \to \underbrace{a}_{n=34} \to \underbrace{a}_{n=35}$
- $\underbrace{a}_{n=33} \to \underbrace{b}_{n=34} \to \underbrace{a}_{n=35}$
- $\underbrace{a}_{n=33} \to \underbrace{c}_{n=34} \to \underbrace{a}_{n=35}$

y la probabilidad pedida se obtiene sumando las probabilidades respectivas a estas tres opciones.

Otra manera más directa de resolverlo, es obteniendo la primer coordenada de la segunda potencia de la matriz de transiciones P:

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbb{P}^2)_{11} = 0.3^2 + 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0 = 0.49 \tag{93}$$

Esta herramienta es mucho más eficiente y es la que se sugiere usar en momentos donde el tiempo apremia. Sin embargo, el anterior desarrollo permite entender porqué esta herramienta es válida y trae aparejadas conceptos claves de la materia.

Además, el procedimiento anterior sirve para cualquier proceso estocástico, las particularidades de que haya sido una cadena de Markov homogénea, nos simplificó las cuentas. Sin embargo, en el caso de tener un proceso más complejo, el cálculo de las probabilidades deberá adecuarse a dicha complejidad.

Ítem c

Pide estimar $\mathrm{P}\big(X_{200}=a | X_0=b\big)$, y por suerte pide estimarlo, porque sino, deberíamos calcular la potencia $\mathbb{P}^{200}$ y buscar la coordenada de la segunda fila y primer columna.

Si la cadena tiene una distribución estacionaria, su primer componente estimará la probabilidad de estar en el estado a a largo plazo, para **cualquier distribución inicial** (en este caso, $X_0 = b$).

Para determinar la distribución estacionaria, debe existir un límite para la matriz P^n a medida que n se hace grande. En caso de existir este límite, es una matriz con filas idénticas y la distribución estacionaria coincide con este vector fila.

En el caso de que la cadena sea regular, esta distribución estacionaria se puede calcular hallando un autovector a izquierda de la matriz de transiciones P de autovalor 1.

Para eso, primero debemos probar que la cadena es regular, es decir, que existe una potencia de $\mathbb{P}$ con todos sus valores positivos. Para lograr esto, conviene notar lo siguiente: Si $\mathbb{P}^k > 0$, entonces $\mathbb{P}^m > 0$ para todo $m \geq k$. Es decir, para hacer más eficiente la búsqueda de dicha potencia, podemos tratar de buscar potencias más altas más rápido. Para eso, podemos hallar primero $P^2 = P \times P$, una vez obtenido esta potencia, en vez de hallar P^3, podemos hallar $P^4 = P^2 \times P^2$, luego $P^8 = P^4 \times P^4$, y así sucesivamente hasta encontrar una potencia de la matriz P compuesta únicamente por valores positivos.

Primero calculemos $\mathbb{P}^2$:

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.21 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.21 & 0.49 \end{pmatrix} \tag{94}$$

Es decir, P^2 tiene todas sus coordenadas positivas, por lo que la cadena es regular y por lo tanto, tiene sentido calcular $\vec{\pi} = (a, b, c)$ su autovector (con autovalor 1) a izquierda. Como además, tiene que ser una distribución de probabilidad, sus componentes deben sumar 1:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times \mathbb{P} \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 0.3a + b \\ b = 0.4a + 0.3c \\ c = 0.3a + 0.7c \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{95}$$

Como las primeras 3 ecuaciones son linealmente independientes, podemos prescindir de alguna de ellas:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} a = 0.3a + b \\ b = 0.4a + 0.3c \\ \cancel{c = 0.3a + 0.7c} \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0.7a = b \\ b = 0.4a + 0.3c \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0.7a = b \\ 0.7a - 0.4a = 0.3c \\ a + 0.7a + c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0.7a = b \\ a = c \\ 1.7a + a = 1 \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = \dfrac{7}{27} \\ c = \dfrac{10}{27} \\ a = \dfrac{10}{27} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{96}$$

Es decir, la distribución estacionaria es $\vec{\pi} = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right)$. Sin embargo, esto no es lo pedido. Nos piden la probabilidad de estar a largo plazo <u>en el estado a</u>. Es decir,

$$\mathrm{P}\left(X_{200} = a | X_0 = b\right) \approx \frac{10}{27} \tag{97}$$

Comentario: Que la distribución estacionaria sea $\pi = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right)$, nos permite deducir lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix} \tag{98}$$

Es decir, como la distribución inicial es $\vec{\pi}_0 = (0,1,0)$ y podemos suponer que $\mathbb{P}^{200}$ es una potencia suficientemente grande, podemos aproximar esa potencia por el límite:

$$\vec{\pi}_0 \times \mathbb{P}^{200} \approx (0,1,0) \times \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix} = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right) \Rightarrow \mathrm{P}\big(X_{200} = a |\, X_0 = b\big) \approx \frac{10}{27} \tag{99}$$

Este resultado no aporta nada nuevo a lo ya obtenido anteriormente. Sin embargo, permite ver que la probabilidad de estar en el estado a a largo plazo es independiente de la distribución inicial. Es decir, cualquier vector inicial $\vec{\pi}_0 = (p_a, p_b, p_c) \geq 0$ con $p_a + p_b + p_c = 1$, cumplirá lo mismo:

$$\begin{aligned} \vec{\pi}_0 \times \mathbb{P}^{200} &\approx (p_a, p_b, p_c) \times \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix} \\ &\approx \left((p_a + p_b + p_c)\frac{10}{27}, (p_a + p_b + p_c)\frac{7}{27}, (p_a + p_b + p_c)\frac{10}{27}\right) = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right) \end{aligned} \tag{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\big(X_{200} = a |\, \vec{\pi}_0\big) \approx \frac{10}{27} \tag{101}$$

Ejercicio 22

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y matriz de transición de probabilidades dada por

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{102}$$

a) Represente el diagrama de transición de estados de la cadena.

b) Por inspección del diagrama verifique que:

1) el conjunto de estados tiene tres subconjuntos disjuntos (se denominan clases) que corresponden a estados comunicados entre ellos.
2) Hay dos clases que son cerradas y recurrentes, una vez que uno de los estados de la clase cerrada es alcanzado entonces todos los estados subsiguientes de la cadena corresponden a esa clase.
3) La clase restante es transiente, el proceso puede terminar saliendo de ella.
4) Una de las clases cerradas es periódica de periodo 3, la otra no es periódica.

c) Usando solo el álgebra del cálculo de probabilidades y la suma de alguna serie numérica demuestre que si el proceso comienza en:

1) el estado 0 entonces la probabilidad de alcanzar el estado 6 es $\frac{1}{4}$
2) el estado 1 entonces la probabilidad de alcanzar el estado 3 es 1.
3) el estado 1 entonces el numero promedio de pasos hasta llegar al estado 3 es 3.
4) el estado 1 entonces a largo plazo la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado 2 es $\frac{3}{8}$.

Son datos

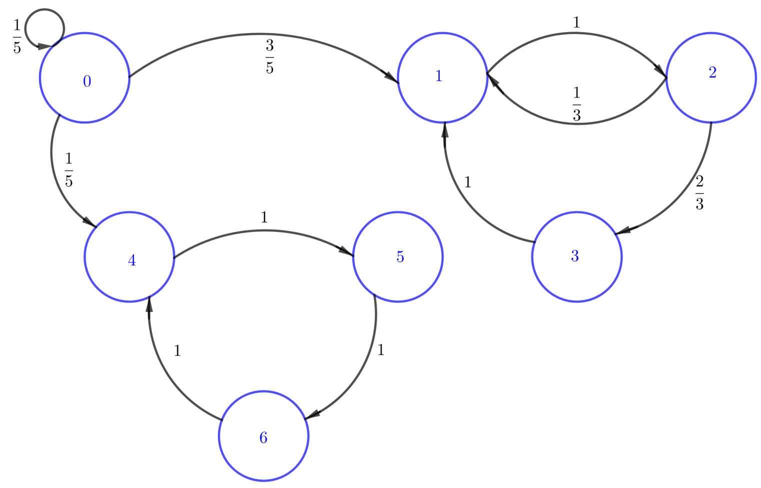
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1, \tag{103}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2} \quad |q| < 1. \tag{104}$$

Resolución

Ítem a

El diagrama de transición es el siguiente:



Ítem b1

Cuando se refiere a un conjunto de estados comunicados entre sí, hay que hacer hincapié en el hecho de que de cualquiera de los estados del conjunto, se pueda llegar con probabilidad positiva a otro estado del conjunto en un tiempo finito. Es decir, para dos estados $i \neq j$ del conjunto, tiene que existir un valor $k \in \mathbb{N}$ tal que $(P^k)_{ij} > 0$.

Por ejemplo, el conjunto $A = \{0, 1\}$ no es una clase, ya que $(P)_{01} = \frac{3}{5} > 0$, pero $(P^k)_{10} = 0$ para todo valor de $k \in \mathbb{N}$. Es decir, se puede acceder al estado 1 desde el estado 0, pero no se puede acceder al estado 0 desde el estado 1.

Por lo tanto, las tres clases son:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{0\} \\ C_2 &= \{1, 2, 3\} \\ C_3 &= \{4, 5, 6\} \end{aligned} \tag{105}$$

Notemos que todos los estados de estas clases están comunicadas entre sí.

Ítem b2

Las clases cerradas y recurrentes son C_2 y C_3. Esto se debe a la ausencia de flechas que van de estados de C_2 al resto de los estados. Lo mismo ocurre con la clase C_3.

Ítem b3

La otra clase, C_1 es transitoria ya que la probabilidad de salir de la clase es positiva. Más aún, esto puede ocurrir en un único paso, ya que $P_{01} = \frac{3}{5}$. Si bien calcular todos los casos en los que se sale de la clase C_1 puede resultar complicado, lo que podemos asegurar es que la probabilidad es mayor que $\frac{3}{5}$ y por lo tanto, positiva.

Ítem b4

Se puede ver que C_3 es la clase periódica, y además, de período 3. Esto se debe a lo siguiente, tomando un estado $i \in C_3$:

$$\mathrm{P}\big(X_{n+m} = i |\, X_n = i\big) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } m = 3 \cdot k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array} \right. \tag{106}$$

Por otro lado, C_2 no es periódica, ya que las probabilidades de volver a un mismo estado deben ser siempre 0 o 1 según el período. Sin embargo, por ejemplo:

$$\mathrm{P}\big(X_{n+2} = 1 \big| \, X_n = 1\big) = \frac{1}{3} \notin \{0, 1\} \tag{107}$$

Ítem c

Para todos estos ítems, siguiendo la otra guía de ejercicios resueltos de la guía 6, notaremos del siguiente modo una serie de probabilidades (para cada par de estados i, j) que nos será de utilidad:

$$q_{ij}(n) = \mathrm{P}\left(X_n = j, \bigcap_{m=1}^{n-1} X_m \neq j \,\middle|\, X_0 = i\right) \tag{108}$$

En resumidas cuentas, esta probabilidad corresponde al evento en el que se llega **por primera vez** al estado j desde el estado i en n pasos.

Vamos a poner un par de ejemplos:

- $q_{13}(4) = \mathrm{P}\big(X_4 = 3, X_3 \neq 3, X_2 \neq 3, X_1 \neq 3 \big| \, X_0 = 1\big)$. Notemos que hay sólo una forma de que esto suceda:

$$X_0 = 1 \to X_1 = 2 \to X_2 = 1 \to X_3 = 2 \to X_4 = 3 \tag{109}$$

Es decir,

$$q_{13}(4) = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{12} \cdot p_{23} = \frac{2}{9} \tag{110}$$

Comentario: Esta multiplicación también se puede obtener de un modo más deductivo:

$$\begin{aligned} q_{13}(4) &= \mathrm{P}\big(X_4 = 3, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2 \big| \, X_0 = 1\big) \\ &= \frac{\mathrm{P}\big(X_4 = 3, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1|\big)}{\mathrm{P}\left(X_0 = 1\right)} \end{aligned} \tag{111}$$

Multiplicando y dividiendo por los términos adecuados, podemos transformarlo en una multiplicación de condicionales:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{P}\left(X_4 = 3, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = 1\right)} &\cdot \frac{\mathrm{P}\left(X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1\right)}{\mathrm{P}\left(X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1\right)} \cdot \\ &\cdot \frac{\mathrm{P}\left(X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1\right)}{\mathrm{P}\left(X_3 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1\right)} \cdot \\ &\cdot \frac{\mathrm{P}\left(X_1 = 2, X_0 = 1\right)}{\mathrm{P}\left(X_1 = 2, X_0 = 1\right)} \end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\big(X_4 = 3 \big| \, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1\big) &\cdot \mathrm{P}\big(X_3 = 2 \big| \, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1\big) \cdot \\ &\cdot \mathrm{P}\big(X_2 = 1 \big| \, X_1 = 2, X_0 = 1\big) \cdot \\ &\cdot \mathrm{P}\big(X_1 = 2 \big| \, X_0 = 1\big) \end{aligned} \tag{113}$$

Por ser un proceso de Markov, las probabilidades se pueden basar únicamente en el último evento. Es decir:

$$\begin{aligned} q_{13}(4) &= \mathrm{P}\big(X_4 = 3 \big| \, X_3 = 2\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_3 = 2 \big| \, X_2 = 1\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_2 = 1 \big| \, X_1 = 2\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_1 = 2 \big| \, X_0 = 1\big) \\ &= p_{23} \cdot p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{12} = \frac{2}{9} \end{aligned} \tag{114}$$

- $q_{03}(2) = \mathrm{P}\big(X_2 = 3, X_1 \neq 3 |\, X_0 = 0\big)$. Notemos que esto no puede suceder, ya que el camino más rápido entre los estados 0 y 3 es:

$$X_0 = 0 \to X_1 = 1 \to X_2 = 2 \to X_3 = 3 \tag{115}$$

Por lo tanto, no se puede llegar en 2 pasos del estado 0 al 3, decimos que $q_{03}(2) = 0$.

- $q_{45}(4) = \mathrm{P}\big(X_4 = 5, X_3 \neq 5, X_2 \neq 5, X_1 \neq 5 |\, X_0 = 4\big)$. En este caso, hay un camino que llega del 4 al 5 en 4 pasos:

$$X_0 = 4 \to X_1 = 5 \to X_2 = 6 \to X_3 = 4 \to X_4 = 5 \tag{116}$$

Sin embargo, no cumple la condición de que sea la **primera vez** que llega al estado 5 desde el estado 4. De este modo, $q_{45}(4) = 0$, pero, como se llega en un paso del 4 al 5, $q_{45}(1) = p_{45} = 1$.

- Por último, analicemos $q_{06}(6)$. Hay dos caminos para llegar del 0 al 6 en 6 pasos:

$$\begin{array}{l} X_0 = 0 \to X_1 = 4 \to X_2 = 5 \to X_3 = 6 \to X_4 = 4 \to X_5 = 5 \to X_6 = 6 \\ X_0 = 0 \to X_1 = 0 \to X_2 = 0 \to X_3 = 0 \to X_4 = 4 \to X_5 = 5 \to X_6 = 6 \end{array} \tag{117}$$

Sin embargo, notemos que el primer camino se llega en 6 pasos, pero no por primera vez. Por lo tanto, el evento sólo se corresponde con el segundo camino:

$$\begin{aligned} q_{06}(6) &= \mathrm{P}\big(X_6 = 6, X_5 \neq 6, X_4 \neq 6, X_3 \neq 6, X_2 \neq 6, X_1 \neq 6 |\, X_0 = 0\big) \\ &= \mathrm{P}\big(X_6 = 6, X_5 = 5, X_4 = 4, X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0 |\, X_0 = 0\big) \\ &= p_{00}^3 \cdot p_{04} \cdot p_{45} \cdot p_{46} = \frac{1}{625} \end{aligned} \tag{118}$$

Cuando no especificamos el número de pasos, nos referimos a la probabilidad de llegar en algún momento desde el estado i al estado j:

$$q_{ij} = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} X_k = j \middle| X_0 = i\right) \tag{119}$$

Esta unión no es disjunta, y aquí se ve la utilidad de la definición de $q_{ij}(n)$. Considerar los eventos en los que se llega **por primera vez** en n pasos, hace que los eventos sean mutuamente excluyentes y permite transformar esta probabilidad en una suma:

$$q_{ij} = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = j \middle| X_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{ij}(n) \tag{120}$$

Ítem c1

Con las definiciones anteriores, nos piden

$$q_{06} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{06}(n) \tag{121}$$

Notemos que el proceso no puede llegar al 6 desde el 0 en menos de 3 pasos, por lo que $q_{06}(1) = q_{06}(2) = 0$:

$$q_{06} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{06}(n) = \underbrace{q_{06}(1)}_{0} + \underbrace{q_{06}(2)}_{0} + \sum_{n=3}^{+\infty} q_{06}(n) = \sum_{n=3}^{+\infty} q_{06}(n) \tag{122}$$

Además, el proceso no puede llegar del 0 al 6 sin pasar por el 4, entonces, la primera vez que pase por el 6 está vinculada con la primera vez que llegue al 4. Más aún, por la dinámica del proceso, pasa exactamente 2 pasos antes por el 4. Es decir:

$$q_{06}(n) = q_{04}(n-2) \cdot \underbrace{p_{45}}_{1} \underbrace{p_{56}}_{1} \Rightarrow q_{06} = \sum_{n=3}^{+\infty} q_{04}(n-2) \overset{k=n-2}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} q_{04}(k) \tag{123}$$

Analicemos $q_{04}(k)$. Sería la probabilidad de que el proceso llegue por primera vez del 0 al 4 en k pasos. Esto sólo se puede dar si los $k-1$ pasos anteriores se mantuvo en el estado 0 y luego pasó al estado 4. Es decir,

$$q_{04}(k) = p_{00}^{k-1} \cdot p_{04} = \frac{1}{5}^{k-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}^{k} \Rightarrow q_{06} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5}^{k} \tag{124}$$

Notemos que resultó una serie que no es exactamente la dada como dato, ya que esa serie comienza desde cero. Por lo tanto, sumaremos y restaremos el término pertinente:

$$q_{06} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5}^{k} \right) + \frac{1}{5}^{0} - \frac{1}{5}^{0} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5}^{k} \right) - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 = \frac{1}{4} \tag{125}$$

De este modo, obtuvimos lo pedido.

Ítem c2

Ahora nos piden la probabilidad dada por q_{13}:

$$q_{13} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{13}(n) \tag{126}$$

Nos sería de mucha utilidad ir viendo que sucede con los primeros valores de n para ver si logramos obtener un patrón.

- $n = 1$: notemos que no se puede llegar del estado 1 al estado 3 en 1 paso por lo que $q_{13}(1) = 0$
- $n = 2$: esto se puede dar si se cumple la siguiente progresión: $1 \to 2 \to 3$. Entonces, $q_{13}(2) = \frac{2}{3}$
- $n = 3$: notemos que no se puede llegar del estado 1 al estado 3 en 3 pasos, ya que debe ciclar entre el estado 1 y 2 para no llegar en 2 pasos, por lo que $q_{13}(3) = 0$
- $n = 4$: esto se puede dar si se cumple la siguiente progresión: $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3$. Entonces, $q_{13}(4) = \frac{2}{9}$
- $n = 5$: nuevamente, para evitar llegar antes al 3, debe ciclar entre 1 y 2, por lo que $q_{13}(5) = 0$
- $n = 6$: esto se puede dar si se cumplen dos ciclos entre 1 y 2, es decir: $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3$. Entonces, $q_{13}(6) = \frac{2}{27}$

Así, vamos viendo que los términos impares son nulos y sólo sobreviven los pares $n = 2k$. Por lo tanto,

$$q_{13} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{13}(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_{13}(2k) \overset{h=k-1}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} q_{13}(2h+2) \tag{127}$$

Además, podemos ir viendo que para llegar por primera vez al 3 en $2h+2$ pasos, tienen que haberse dado antes h ciclos entre los estados 1 y 2, luego pasar del 2 al 3. Cada ciclo tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$, por lo tanto:

$$q_{13} = \sum_{h=0}^{+\infty} q_{13}(2h+2) = \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{h} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{h} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \tag{128}$$

Ítem c3

Ahora debemos definir una variable aleatoria, que es la siguiente:

$$T_{13} = \text{Cantidad de transiciones hasta llegar por primera vez al estado 3, comenzando desde el estado 1} \tag{129}$$

Notar que el enunciado pide el valor esperado de T_{13}. T_{13} es una variable discreta, y podemos deducir a partir de su definición, que $\mathrm{P}\left(T_{13}=n\right)=q_{13}(n)$, ya que $q_{13}(n)$ representa la probabilidad de llegar del estado 1 por primera vez al estado 3 en n pasos. Es decir,

$$\mathrm{E}\left[T_{13}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \mathrm{P}\left(T_{13}=n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot q_{13}(n) \tag{130}$$

La ventaja es que descubrimos un patrón para $q_{13}(n)$ en el ítem anterior. Habíamos visto que se anula para los impares y que para los pares, vale $q_{13}(2k)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{E}\left[T_{13}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot q_{13}(n)=\sum_{k=1}^{+\infty} 2k \cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}=4 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=4 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^{2}}=4 \cdot \frac{3}{4}=3 \tag{131}$$

Ítem c4

Por último, acá nos piden analizar una probabilidad específica, no es que en algún momento llegue del estado 1 al estado 2, porque eso es claramente 1. Justamente, llega del estado 1 al 2 en un paso ya que $p_{12}=1$.

Aquí hay que estudiar el comportamiento de la siguiente probabilidad:

$$\mathrm{P}\big(X_n=2 |\, X_0=1\big), \quad n \to +\infty \tag{132}$$

Contar todas las posibles combinaciones a medida que n se hace muy grande puede ser muy dificultoso, justamente porque se ven dos alternativas, ciclos del tipo $1 \to 2 \to 1$, o el ciclo $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Pero además, estos ciclos pueden darse de varias formas distintas y en distintos momentos para un n grande. El cálculo se hace inmanejable.

Por lo tanto, vamos a recurrir a otra alternativa. La cadena X_n no es regular (ya que $(P^k)_{10}=0, \forall k \in \mathbb{N}$). Sin embargo, una vez en la clase $C_2=\{1,2,3\}$, la cadena se mantiene dentro de la clase (justamente vimos que es cerrada). Entonces podemos considerar una nueva cadena de Markov Y_n con estos 3 estados y las mismas probabilidades de transición y tendrá la misma dinámica.

Por lo tanto, consideramos Y_n con espacio de estados $E_Y=\{1,2,3\}$ y matriz de transición dada por:

$$\mathbb{P}_Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{133}$$

Si esta cadena es regular, tendremos una distribución estacionaria, lo que nos permite calcular:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}\big(X_n=2 |\, X_0=1\big)=\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}\big(Y_n=2 |\, Y_0=1\big) \tag{134}$$

Veamos si Y_n es regular:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{P}_Y^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{135}$$

Por último:

$$\mathbb{P}_Y^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{81} & \frac{2}{9} & \frac{26}{81} \\ \frac{32}{81} & \frac{37}{81} & \frac{4}{27} \\ \frac{2}{9} & \frac{13}{27} & \frac{8}{27} \end{pmatrix} > 0 \tag{136}$$

Por lo tanto, la cadena es regular y tiene una distribución estacionaria, que coincide con el autovector a izquierda de $\mathbb{P}_Y$ de autovalor 1:

$$\left\{ \begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times \mathbb{P}_Y \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cancel{a = \frac{b}{3} + c} \\ b = a \\ c = \frac{2b}{3} \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \tag{137}$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{c} \color{red}{b = a} \\ \color{blue}{c = \frac{2b}{3}} \\ \color{red}{b} + b + \color{blue}{\frac{2b}{3}} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = \dfrac{3}{8} \\ \\ b = \dfrac{3}{8} \\ \\ c = \dfrac{1}{4} \end{array} \right\} \tag{138}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que, comenzando en el estado 1, el proceso (sea X_n o Y_n) esté en el estado 2 a largo plazo es $b = \frac{3}{8}$

Ejercicio 25

Cada materia que cursa un alumno en una universidad tiene tres oportunidades para dar el examen final. Suponga que la probabilidad de aprobar el examen final es siempre p. Sea X_n la variable aleatoria que da el número de oportunidades que tiene el alumno en el período n. El recorrido de X_n es el conjunto $\{0,1,2,3\}$ siendo el valor cero el estado que se alcanza cuando se aprueba el examen final (claramente un estado absorbente). El estado 3 corresponde al que se tiene una vez aprobada la cursada. Cuando no se aprueba en la última de las instancias se produce una transición del estado 1 al 3 (la materia se recursa).

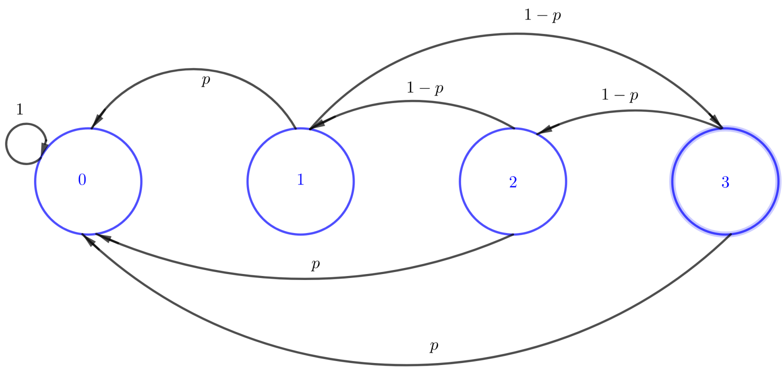
a) Modelar la evolución de este proceso como una cadena de Markov obteniendo la matriz de probabilidades de transición de un paso.

b) Suponga que el estado inicial es el 3. En este caso la distribución de probabilidades es (0,0,0,1). Obtener la distribución de probabilidades para los primeros tres períodos y conjeturar sobre su forma para todo n. Analizar su valor límite.

Resolución

Ítem a

El diagrama de transición de la cadena viene dada por:



Por lo tanto, la matriz de transiciones es la siguiente:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} \tag{139}$$

Ítem b

Nos dicen que $X_0 = 3$, es decir:

$$\vec{\pi}_0 = (0,0,0,1) \tag{140}$$

Nos piden determinar $\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2, \vec{\pi}_3$ para determinar si hay algún patrón.

$$\begin{aligned}\vec{\pi}_1 = \vec{\pi}_0 \times \mathbb{P} = (0,0,0,1) \times &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} \\ = (p, 0, 1-p, 0)&\end{aligned} \tag{141}$$

$$\begin{aligned}\vec{\pi}_2 = \vec{\pi}_1 \times \mathbb{P} = (p,0,1-p,0) \times &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} \\ = (2p - p^2, (1-p)^2, 0, 0)&\end{aligned} \tag{142}$$

$$\begin{aligned}\vec{\pi}_3 = \vec{\pi}_2 \times \mathbb{P} = (2p-p^2,(1-p)^2,0,0) \times &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} \\ = (p^3 - 3p^2 + 3p, 0, 0, (1-p)^3)&\end{aligned} \tag{143}$$

No parece haber un patrón muy claro en la primer coordenada. Sin embargo, el patrón es claro en los estados 1, 2, 3. En cada intento, la probabilidad de no aprobar la materia (estado 0) es haber reprobado todas las instancias anteriores.

Es decir, en el instante n, la probabilidad de no estar en el estado 0 es $(1-p)^n$. Por lo tanto, la probabilidad de estar en el estado 0 es $1-(1-p)^n$. En efecto:

- $n = 0 : 1 - (1-p)^0 = 0$
- $n = 1 : 1 - (1-p)^1 = p$
- $n = 2 : 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$
- $n = 3 : 1 - (1-p)^3 = 1 - (1 - 3p + 3p^2 - p^3) = p^3 - 3p^2 + 3p$

Es decir, lo único que se altera es la cantidad de oportunidades, que se repite periódicamente cada 3 oportunidades. Por lo que dependerá del resto de dividir por 3 y podemos inferir el siguiente patrón:

$$\vec{\pi}_n = \begin{cases} (1-(1-p)^n, 0, 0, (1-p)^n) & \text{si } n = 3k \\ (1-(1-p)^n, 0, (1-p)^n, 0) & \text{si } n = 3k+1 \\ (1-(1-p)^n, (1-p)^n, 0, 0) & \text{si } n = 3k+2 \end{cases} \tag{144}$$

Por lo tanto, para analizar el valor límite, como $(1-p)^n$ tiende a cero cuando $n \to +\infty$, todas las componentes correspondientes a los estados 1,2,3 tienden a cero. Del mismo modo, la primer coordenada tenderá a 1. Es decir,

$$\lim_{n \to +\infty} \vec{\pi}_n = (1,0,0,0) \tag{145}$$

Es decir, probabilísticamente, un alumno termina aprobando la materia, por lo que este ejercicio tiene el condimento especial de sembrar optimismo en nuestros alumnos.