# Variables Aleatorias Bidimensionales

Procedimientos y Tips

Probabilidad y Estadística
16/10/2025

## 1 Teorema de transformación general

**Nota:** Este método solo se aplica si la función $g(X)$ es monótona por partes.

- Sea $Y, X$ variables aleatorias continuas, donde conocemos la densidad de $X$
- Sea $Y = g(X)$, no estrictamente monótona (no inyectiva)

Para hallar la densidad de Y:

$$f_{Y(y)} = \sum_{x_i \in g^{-1}(y)} \frac{f_{X(x_i)}}{|g'(x_i)|}$$

**Importante:** Los $x_i$ son las preimágenes de las ramas, NO las raíces.
- $g'(x_i) \neq 0 \Rightarrow$ Los puntos donde la función es localmente invertible
- La sumatoria recorre todas las partes en donde la función es monótona (localmente invertible)

### 1.1 Procedimiento paso a paso

**Tip:**

1. Escribís la ecuación $y = g(x)$ y resolvés para $x$: hallás todas las soluciones $x_i$ que cumplen $g(x_i) = y$
2. En cada solución $x_i$:
   - Verificás que esté en el dominio de $X$
   - Calculás $f_{X(x_i)}$
   - Derivás $g(x)$ y evaluás $|g'(x_i)|$
3. Sumás los términos $\frac{f_{X(x_i)}}{|g'(x_i)|}$ correspondientes a cada solución válida

# 2 Teorema de transformación caso monótono

**Nota:** Este método solo se aplica si la función $g(X)$ es monótona (inyectiva).

$$f_{Y(y)} = f_{X(g^{-1}(y))} \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Notemos que en este caso hay varias cosas que cambian:

- Se usa $g^{-1}(y)$ en la evaluación de $f_X$
- Se multiplica en vez de dividir
- Restricción mayor: Monotonía estricta

# 3 Variables aleatorias bidimensionales

**Nota:** Antes de leer todo sobre discretas y continuas, tener en cuenta que la diferencia entre ambas es mínima:

- En discretas vamos a tener la suma de probabilidades puntuales
- En continuas vamos a tener integrales de densidades de probabilidad

**Tip:** Equivalencias entre caso discreto vs continuo:

- $P(X = x) \to f_{X(x)}$
- $\sum \to \int$

## 3.1 Correlación

La correlación es común para ambos casos. Nos dice cómo se relacionan linealmente dos variables:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

**Importante:**

- $\rho_{X,Y} = -1 \to$ Correlación negativa perfecta: aumentan y disminuyen al mismo ritmo pero en sentido opuesto
- $\rho_{X,Y} = 0 \to$ No existe correlación lineal
- $\rho_{X,Y} = 1 \to$ Correlación positiva perfecta: aumentan y disminuyen al mismo ritmo y en mismo sentido

# 4 Caso discreto

## 4.1 Probabilidades marginales

Las probabilidades marginales de cierta $X$ son: Fijar una x y hacer la suma de todas las probabilidades conjuntas (intersección) con todas las probabilidades $x, y_i$

$$P(X = x) = \sum_{y} P(X = x, Y = y)$$

**Importante:** Teorema fundamental:

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

**Nota:** La probabilidad marginal representa la probabilidad total de que ocurra un determinado valor de X, sin importar Y, sabiendo que X e Y están relacionados.

## 4.2 Esperanza, varianza y covarianza

- Esperanza:

$$E[X] = \sum xP(X)$$

- Varianza:

$$V(X) = \sum (x - E[X])^2 P(X)$$

- Covarianza:

$$\text{Cov}[X, Y] = \sum (x - E[X])(y - E[Y])P(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

## 4.3 Independencia

**Importante:** Dos variables son independientes si y solo si:

$$p_{X,Y}(x_i, y_i) = p_{X(x_i)} \cdot p_{Y(y_i)}$$