# Guia de ejercicios - VAD

## Ejercicio 1

Considere el experimento de lanzar un par de dados no cargados. Sean las variables aleatorias

- $X$: { Suma de los puntos obtenidos }
- $Y$: { Maximo puntaje de los dos obtenidos }
- $N_i$: { El valor que toma el dado i }

$R_{N_i} = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \}$ $R_i = \{\ 1,\ 2\ \}$

Obtener las tablas de la funcion de probabilidad y la funcion de distribucion de estas variables aleatorias discretas. Calcular las siguientes probabilidades:

- $R_X = \{\ 12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2\ \}$

| $x$ | $P(X = x)$ |
|---|---|
| 2 | $P(N_1 = 1 \cap N_2 = 1)$ |
| 3 | $P((N_1 = 1 \cap N_2 = 2) \cup (N_1 = 2 \cap N_2 = 1))$ |
| 4 | $P((N_1 = 2 \cap N_2 = 2) \cup (N_1 = 3 \cap N_2 = 1) \cup (N_1 = 1 \cap N_2 = 3))$ |
| 5 | $2 \times P((N_1 = 2 \cap N_2 = 3) \cup (N_1 = 1 \cap N_2 = 4))$ |
| 6 | $2 \times P((N_1 = 4 \cap N_2 = 2) \cup (N_1 = 5 \cap N_2 = 1)) + P(N_1 = 3 \cap N_2 = 3)$ |
| 7 | $2 \times P((N_1 = 4 \cap N_2 = 3) \cup (N_1 = 5 \cap N_2 = 2) \cup (N_1 = 6 \cap N_2 = 1))$ |
| 8 | $2 \times P((N_1 = 3 \cap N_2 = 5) \cup (N_1 = 2 \cap N_2 = 6)) + P(N_1 = 4 \cap N_2 = 4)$ |
| 9 | *Ver funcion abajo* |
| 10 | … |
| 11 | … |
| 12 | … |

*Notemos:* $P(X = x) = \frac{x-1}{6^2}$

- $R_Y = \{\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\ \}$

| y | P(Y = y) |
|---|---|
| 1 | $P(N_1 = 1 \cap N_2 = 1)$ |
| 2 | $P(N_1 = 2 \cap N_2 = 2) + 2 \times P(N_1 = 2 \cap N_2 = 1)$ |
| 3 | $P(N_1 = 3 \cap N_2 = 3) + 2 \times P(N_1 = 3 \cap N_2 \leq 2)$ |
| 4 | $2 \times P(N_1 = 4 \cap N_2 \leq 4)$ |
| 5 | $2 \times P(N_1 = 5 \cap N_2 \leq 5)$ |
| 6 | $2 \times P(N_1 = 6 \cap N_2 \leq 6)$ |

*Notemos:* $P(Y = y) =$

a. Probabilidades pedidas de X:

$$P(X < 7) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$P(X<7) = 0 + \frac{1}{6^2} + \underbrace{\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}}_{P(X=3)} + \underbrace{3 \times \frac{1}{6^2}}_{P(X=4)} + \underbrace{4 \times \frac{1}{6^2}}_{P(X=5)} + \underbrace{5 \times \frac{1}{6^2}}_{P(X=6)} =$$

## Ejercicio 2

Suponga que la demanda diaria de un articulo es una variable aleatoria $D$ con recorrido $R_D = \{1, 2, 3, 4\}$ y funcion de probabilidad $p_D(r) = C\frac{2^r}{r!}$

a. Calcule la constante C.

Como me dan la funcion de densidad y la suma en todo el recorrido tiene que dar 1, es facil ver:

$$1 = C\left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24}\right) \Rightarrow C = \frac{1}{2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24}}$$

b. La representacion grafica de la funcion es sencilla pues discreta

## Ejercicio 3 - Determinar:

a. Valor esperado y varianza de las VADs del ejercicio 1

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} P(X = x).x =$$

$$P(X = 2).2 + P(X = 3).3 + P(X = 4).4 + P(X = 5).5 + P(X = 6).6$$
$$+P(X = 7).7 + P(X = 8).8 + P(X = 9).9 + P(X = 10).10 + P(X = 11).11 + P(X = 12).12$$

$$E[X] = \frac{143}{9} = 15.889$$

$$E[Y] = \sum_{y \in R_Y} P(Y = y).y = P(Y = 1) + 2.P(Y = 2) + 3.P(Y = 3) + 4.P(Y = 4) + 5.P(Y = 5) + 6.P(Y = 6)$$

$$E[Y] = \frac{1}{6^2} \times 1 + \frac{1+2}{6^2} \times 2 + \frac{1+2\times 2}{6^2} \times 3 + \frac{1+2\times 3}{6^2} \times 4 + \frac{1+2\times 4}{6^2} \times 5 + \frac{1+2\times 5}{6^2} \times 6$$

b. Valor esperado E[D] de la variable aleatoria D de la demanda del ejercicio anterior

## Ejercicio 4

Se seleccion al azar una muestra sin reemplazo de 3 articulos de un total de 10 de los cuales 2 son defectuosos. Si X es la variable aleatoria: numero de articulos defectuosos en la muestra, obtenga la distribucion de probabilidades de X y calcule sus parametros caracterisiticos. Como cambia el problema si el muestreo es con sustitucion?

- Se seleccionan 3 al azar
- Total elems: 10
- Defect elems: 2
- X = { Numero de articulos **defectuosos** }

**Como cambia el problema si el muestreo es con sustitucion?**
Lo que cambia seria que en vez de tener ditribucion **hipergeometrica**, tendria distribucion **geometrica**.

- Por un lado la **Hiper** es sin reposicion, es decir que cambia la probabilidad en cada extraccion
- Por otro lado la **Geo** es con reposicion, es decir que para todas las extracciones, la probabilidad es la misma

# Ejercicio 5

- El 0.84 pasa la prueba sin modificaciones
- Las que no, se reelaboran y de estas, el 0.75 pasa la prueba
- Las que no, se vuelven a reelaborar y de estas, el 0.9 pasan la prueba
- Las que no, se desarman

$$X = \{\#\text{veces que se reprocesa una controladora seleccionada al azar}\}$$

$$E_i = \{\text{Exito despues de la falla i}\}$$

a. $R_X = \{0, 1, 2\}$

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.84 & \text{si } x = 0 \\ 0.16 \times 0.75 = 0.12 & \text{si } x = 1 \\ 0.16 \times 0.25 = 0.04 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Nota1: *Entiendo que a pesar de que la prueba 2 se realiza solo si se fallo en la primera, son independientes las pruebas entre si*

Nota2: *En el ultimo caso no se multiplica por 0.9 porque en realidad todos los que llegaron a esa instancia, van a haber sido reelaborados 2 veces y no mas (funcionen o no)*

b. Calcular el valor espearado de $X$, como se interpreta este numero?

$$E[X] = P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 = 0.2$$

Se puede interpretar como que se espera que las controladoras se van a reprocesar 0 veces

c. Calcular la varianza y el desvio estandar de $X$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = E[X^2] - 0.2^2 = 0.28 - 0.2^2 = 0.24$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{0.24} \approx 0.4898979$$

d. Cual es el porcentaje de controladoras que se desarman?

$$D = \{\text{Una controladora tomada al azar se desarma}\}$$

$$P(D) = P(X \neq 0 \cap X \neq 1 \cap X \neq 2) = 0.84 \times 0.16^2 \times 0.75 \times 0.25 = 0.004032$$

## Ejercicio 6

En una estacion de servicio, la distribucion de clientes que llegan cada 15 minutos tiene la siguiente distribucion de probabilidades

| **Nro. de clientes** | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| **Probabilidad** | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

$$\text{NC} = \{\text{Cantidad de clientes que llegan en 15 mins}\}$$

$$f_{\text{NC}}(x) = \begin{cases} 0.2 \text{ si } x = 0 \\ 0.5 \text{ si } x = 1 \\ 0.3 \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

$$\text{TC} = \{\text{Un cliente paga con tarjeta de credito}\}$$

$$P(\text{TC}) = 0.25$$

Cada cliente tiene una forma de pago independiente de la de los demas

$$Y = \{\text{La cantidad de clientes que en 15 minutos pagan con tarjeta de credito}\}$$

a. Obtener la distribucion de probabilidades de la variable aleatoria $Y$

*Hay que usar probabilidad total*

$$Y \sim \text{Binomial}(\text{trials} = \text{NC}, p = P(\text{TC}))$$

$$f_{Y(y)} = P(\text{NC} = 0).\underbrace{\text{binompdf}(0, 0.25)}_{\text{Y=y sabiendo que NC = 0}} + P(\text{NC} = 1).\underbrace{\text{binompdf}(1, 0.25)}_{\text{Y = y sabiendo NC = 1}} + P(\text{NC} = 2).\underbrace{\text{binompdf}(2, 0.25)}_{\text{Y = y sabiendo NC = 2}}$$

*Ojo porque la distribucion de probabilidades es "la tablita", es decir que probabilidad tiene cada valor del recorrido*

| y | P(Y = y) |
|---|---|
| 0 | $0.2 + 0.5 \times 0.75 + 0.3 \times 0.5625 = 0.74375$ |
| 1 | $0.2 \times 0 + 0.5 \times 0.25 + 0.3 \times 0.375 = 0.2375$ |
| 2 | $0.2 \times 0 + 0.5 \times 0 + 0.3 \times 0.0625 = 0.01875$ |

b. Calcule el valor esperado y la dispersion de la variable aleatoria $Y$

$$E[Y] = P(Y = 0).0 + P(Y = 1).1 + P(Y = 2).2 = 0.2375 + 0.0375 = 0.275$$

$$\text{Var}(Y) = E[X^2] - E^2[X] = P(Y = 1).1^2 + P(Y = 2).2^2 - 0.275^2 = 0.236875$$

## Ejercicio 7

Una organizacion de consumidores que valua automoviles nuevos reporta regularmente el numero de defectos importantes en cada automovil examinado. Sea $X$ el numero de defectos importantes en un automovil seleccionado al azar de un cierto tipo y $F_{X(x)}$ la funcion de distribucion de probabilidad correspondiente

$$F_{X(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.06 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.19 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.39 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.67 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0.92 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0.97 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

1. Calcular la siguientes probabilidades directamente de la funcion dada:

$p_{X(2)} = P(X = 2), P(X > 3), P(2 \leq X \leq 5), y P(2 < X < 5)$

$$p_{X(2)} = 0.39 - 0.19 = 0.2$$

$$P(X > 3) = 1 - 0.67 = 0.33$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0.97 - 0.19 = 0.78$$

$$P(2 < X < 5) = 0.92 - 0.39 = 0.53$$

2. Cual es el numero esperado de defectos importantes que se espera al examinar un automovil, seleccionado al azar, del tipo considerado en este problema?

$$E[X] = 0.06 \times 0 + 0.13 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.28 \times 3 + 0.25 \times 4 + 0.05 \times 5 + 6 \times 0.03 = 2.8$$

# Ejercicio 8

La probabilidad de falla de un cierto tipo de componentes electronicos es de 0.10, una compañia produce con ellos dos tipos de circuitos denominados **I** y **II** respectivamente. El circuito de tipo **I** consiste en un paralelo de dos componentes. El circuito tipo **II** esta armado con una serie de dos componentes. De la produccion total se elige un circuito de cada tipo. Sea $X$ la variable aleatoria que indica el numero de circuitos que funciona cuando se prueban ambos.

1. Definir la funcion de probabilidad $p_X$, hallar la funcion de probabilidad y representar ambas funciones en forma grafica

$$X = \{\text{Cantidad de circuitos que funcionan}\}$$

$$F_i = \{\text{El circuito tipo i, falla}\}$$

$$C_i = \{\text{El componente i, falla}\}, i \in \{1, 2\}$$

$$P(F_{\text{I}}) = P(C_1 \cap C_2) \underbrace{=}_{\text{ind}} P(C_1).P(C_2) = 0.01$$

$$P\left(\overline{F_{\text{I}}}\right) = P\left(\overline{C_1} \cup \overline{C_2}\right) = 1 - P(F_{\text{I}}) = 0.99$$

$$P(F_{\text{II}}) = P\left(C_1 \cup \left(\overline{C_1} \cap C_2\right)\right) = P(C_1) + P\left(\overline{C_1}\right).P(C_2) = 0.1 + 0.09 = 0.19$$

$$p_{X(x)} = \begin{cases} P(F_{\text{I}} \cap F_{\text{II}}) & \text{si } x = 0 \\ P\left(\left(F_{\text{I}} \cap \overline{F_{\text{II}}}\right) \cup \left(\overline{F_{\text{I}}} \cap F_{\text{II}}\right)\right) & \text{si } x = 1 \\ P\left(\overline{F_{\text{I}}} \cap \overline{F_{\text{II}}}\right) & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

2. Hallar el valor esperado de $X$

$$E[X] = 1.P\big(\big(F_{\mathrm{I}} \cap \overline{F_{\mathrm{II}}}\big) \cup \big(\overline{F_{\mathrm{I}}} \cap F_{\mathrm{II}}\big)\big) + 2.P\big(\overline{F_{\mathrm{I}}} \cap \overline{F_{\mathrm{II}}}\big) =$$
$$= 0.01 \times (1 - 0.19) + 0.99 \times 0.19 + 2 \times 0.99 \times (1 - 0.19) = 1.8$$

# Ejercicio 10

Un contratista debe elegir entre dos obras. La primera promete una ganancia de $240k$ con una probabilidad de 0.75 o una perdida de $60k$ (por inconvenientes varios) con una probabilidad de 0.25. La segunda obra promete una ganancia de $360k$ con probabilidad 0.5 o una perdida de $90k$ con probabilidad 0.5

1. Cual deberia elegir el contratista si quiere maximizar la ganancia esperada?

La ganancia esperada deberia ser el valor esperado de la variable aleatoria que describe la ganancia, llamemosla $X$

**Para la obra 1**:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.75 \text{ if } x = 240000 \\ 0.25 \text{ if } x = -60000 \end{cases}$$

$$E[X] = P(X = 240000).240000 - P(X = 60000).60000 = 165000$$

**Para la obra 2**:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.5 \text{ if } x = 360000 \\ 0.5 \text{ if } x = -90000 \end{cases}$$

$$E[Y] = P(Y = 360000).360000 - P(Y = -90000).90000 = 135000$$

$\boxed{\textbf{Deberia elegir la obra 1}}$

1. Cual seria la obra que elegiria si su negocio anduviera mal y quebrara a menos

que lograra una ganancia de $300k$ en su proxima obra

**La obra 2**

# Ejercicio 11

Un vendedor de diarios compra cada periodico a 40 centavos y lo vende a 1 peso y no puede devolver los diarios que no vendio. La demanda diaria es independiente de la del dia anterior y tiene la siguiente distribucion de probabilidades:

| **cantidad demandada** | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **probabilidad** | 0.01 | 0.04 | 0.06 | 0.08 | 0.15 | 0.28 | 0.22 | 0.16 |

Cuantos diarios debe adquirir diariamente si desea maximizar la ganancia esperada? (la insatisfaccion de la demanda no esta penalizada)

## Ejercicio 12

De un mazo de naipes ordinarios (52 naipes) bien barajado se extraen cinco cartas, al azar (sin sustitucion), para un mano de poker

1. Obtenga la distribucion de probabilidades del numero de diamantes D en la mano

$$X = \{\text{Se extrae un diamante de la carta de naipes bien barajada}\}$$

$$D = \{\text{Cantidad de diamantes en una mano de cinco cartas}\}$$

Hay 13 diamantes en total, entonces:

$$P(X) = \frac{13}{52}$$

### Muy importante

Notemos que las probabilidades en esta situacion cambian en cada extraccion, ya sea que sacamos un diamante o no. Pues se reducen los casos totales (cantidad de cartas) y en caso de extraer un diamante, el total de diamantes

- Por lo tanto:

$$D \sim \text{Hipergeometrica}(\text{pop. size} = 52, \text{successes in pop.} = 13, \text{extraction size} = 5)$$

1. Determine el valor esperado y el desvio estandar de D

*Para el valor esperado, podemos usar la formula*

$$E[D] = 5.P(D = 5) + 4.P(D = 4) + 3.P(D = 3) + 2.P(D = 2) + 1.P(D = 1)$$

$$E[D] = 5 \times 0.000495 + 4 \times 0.010729 + 3 \times 0.081542 + 2 \times 0.274279 + 0.411419$$

$$\boxed{E[D] = 1.2499}$$

*Para el desvio lo mismo*

$$\sigma = \sqrt{V[X]}$$

$$V[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$V[X] = 2.4264 - 1.5624 = 0.8639$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{0.8639} = 0.9295}$$

2. Calcule la probabilidad de sacar por lo menos un trebol

$$P(T \geq 1) \underbrace{=}_{\#\text{Treb.} = \#\text{Diam.}} P(D \geq 1) = 1 - P(D < 1)$$

$$P(T \geq 1) = 1 - P(D = 0) = 1 - 0.2215 = 0.7785$$

$$\boxed{P(T \geq 1) = 0.7785}$$

3. Calcule la probabilidad de sacar por lo menos dos ases

$$\text{EA} = \{\text{Se extrae un As del mazo de 52 cartas}\}$$

$$A = \{\text{Cantidad de ases en una mano de cinco cartas}\}$$

$$P(\text{EA}) = \frac{4}{52}$$

$$A \sim \text{Hipergeometrica}(\text{pop. size} = 52, \text{successes in pop.} = 4, \text{extraction size} = 5)$$

$$P(A \geq 2) = 1 - P(A \leq 1) = 1 - cdf(A = 1) = 1 - 0.9583 = 0.0417$$

$$\boxed{P(A \geq 2) = 0.0417}$$

## Ejercicio 13

En una semana de trabajo se realizaron 50 facturas en un comercio. En 5 de el las se cometio un error

## Ejercicio 21

Se determino, a partir de numerosas experiencias previas, que de cada 5 fusibles que produce una maquina 1 es defectuoso. Calcular la probabilidad de que en una muestra aleatoria (**de un lote muy grande**) de 4 fusibles se obtengan:

**Como la muestra es muy grande, podemos usar binomial en vez de hipergeometrica**

$$D = \{\text{Cantidad de fusibles defectuosos tomados de una muestra de 4}\}$$

$$D \sim \text{Binomial}\left(\text{trials} = 4, p = \frac{1}{5}\right)$$

1. Uno defectuoso

$$P(D = 1) = \text{binompdf}\left(4, \frac{1}{5}\right) = 0.4096$$

2. Como max dos defectuosos

$$P(D \leq 2) = \text{binomcdf}\left(4, \frac{1}{5}\right) = 0.9728$$

3. Ninguno defectuoso

$$P(D = 0) = \text{binompdf}\left(4, \frac{1}{5}\right) = 0.4096$$

4. Los cuatro defectuosos

$$P(D = 4) = \text{binompdf}\left(4, \frac{1}{5}\right) = 0.0016$$

## Ejercicio 24

La maquina A produce diariamente el doble de articulos que la maquina B; el 4% de los articulos producidos por la maquina A tiende a ser defectuosos, mientras que para la maquina B el porcentaje de defectuosos es del 2%. Se combina la produccion diaria de ambas maquinas y se toma una muestra aleatoria de 10 articulos

1. Cual es la probabilidad de que la muestra contenga exactamente 2 defectuosos?

$$D_i = \{\text{Cantidad de articulos defectuosos en una muestra de i articulos}\}$$

$$D = \{\text{Articulo defectuoso}\}$$

$$A = \{\text{articulo de la maquina A dentro de la muestra}\}$$

$$B = \{\text{articulo de la maquina B dentro de la muestra}\}$$

$$P(D|A) = 0.04$$

$$P(D|B) = 0.02$$

$$P(D) = 0.04P(A) + 0.02P(B) = 0.03333$$

$$P(D_{10} = 2) = \text{Binompdf}(\text{trials} = 10, p = 0.0333333) = 0.03812$$

2. Determinar el valor esperado y el desvio estandar del numero de articulos defectuosos en esa muestra aleatoria de 10 articulos

$$D_{10} = 2)2 + P(D_{10} = 3)3 + P(D_{10} = 4)4 + P(D_{10} = 5)5 + P(D_{10} = 6)6 + P(D_{10} = 7)7 + P(D_{10} = 8)8 + P(D_{10} = 9)9 + P(D_{1}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V[X]} = \sqrt{pn(1-p)} = \sqrt{0.322222} = 0.567646$$

## Ejercicio 28

Sea p la probabilidad de que cualquier simbolo particular de un codigo se transmita erroneamente a traves de un sistema de comunicaciones. Suponga que en diferentes simbolos ocurren errores independientemente uno de otro. Suponga tambien que con probabilidad $p_2$ un simbolo erroneo se corrige al recibirse. Sea $X_n$ el numero de simbolos correctos recibidos en un bloque de mensaje formado por $n$ simbolos (una vez que el proceso de correccion haya terminado)

1. Demostrar que $X_n$ es una variable aleatoria discreta con distribucion binomial
2. Determinar el valor esperado y la verianza de $X_n$ si $n = 10$, $p = 0.02$, y $p_2 = 0.95$

$$D = \{\text{Hubo defecto en la salida del envio}\}$$

$$Z = \{\text{Se corrige un defecto}\}$$

$$C = \{\text{Simbolo recibido correctamente}\}$$

$$P(C) = P(C|D).P(D) + P\left(C|\overline{D}\right).P\left(\overline{D}\right)$$

$$P(C) = P(D \cap Z).P(D) + P\left(\overline{D}\right)^2 = 0.96078$$

$$E[X_n] = n0.96078 = 9.6078$$

$$V[X] = np(1-p) = 0.37681$$