

TP 5

Ejercicio 5

El radio R de una esfera se considera una variable aleatoria continua. Supongamos que R tiene una funcion de densidad de probabilidad $f_R(r) = 6r(1 - r)$, $0 < r < 1$. Obtener la funcion de densidad de probabilidad del volumen V y del area A

- Sabemos que el *volumen de una esfera* esta dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Sabemos que el *area* esta dada por:

$$A = 4\pi r^2$$

- Muy importante usar el siguiente **teorema**

Sea R VAContinua y $f_{R(r)}$ su densidad, si definimos una nueva variable aleatoria a partir de la misma $V = g(R)$ entonces la densidad de V se obtiene en lo que tendríamos que evaluar:

$$f_{V(v)} = f_{R(g^{-1}(r))} \cdot \left| \left(\frac{dg^{-1}}{dr} \right) \right|$$

Luego usamos el dato que nos dan en el enunciado: $f_R(r) = 6r(1 - r)$

Derivando $\frac{dR}{dv} = d\left(\frac{3}{4\pi}v\right)^{\frac{1}{3}}$

Obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dR}{dv} = \left(\frac{1}{4\pi}\right) \left(\frac{3}{4\pi}v\right)^{-\frac{2}{3}}$$

En simples palabras...

- Tenes dos variables aleatorias continuas, una depende de la otra, por lo que la otra depende de una
 - Si conoces la densidad de una de las dos, puedes conocer la densidad de la otra. Como?
- Escribis la VAC(Densidad conocida) = g (VAC(Densidad **no** conocida)) - *Hallas la inversa*
 - Derivas esa funcion (VAC(Dc)) respecto de la VAC(Dnc)
 - Obtenes el parametro a usar para la funcion de densidad conocida
 - Evaluas con ese parametro a la densidad conocida y multiplicas la funcion evaluada por la derivada encontrada
 - Para saber los limites, basta con hallar la *imagen* de la VAC deseada (los puntos criticos y los extremos son siempre limites)

Ejercicio 6

El beneficio total de una empresa esta dado por: $B = 10Q - 5Q^2$ (en miles de pesos)

Q = cantidad vendida

$$0 < Q < 2$$

$$f_{Q(q)} = \begin{cases} q & \text{si } 0 < q < 1 \\ 2 - q & \text{si } 1 < q < 2 \end{cases}$$

Entonces, suponiendo que $f_{Q(q)} = 0$, si $q < 0$ y $f_{Q(q)} = 1$, si $q > 2$:

- Para encontrar la acumulada de Q simplemente necesitamos integrar la función de densidad

KEY: Cuando se calcula la **acumulada** a partir de la de **densidad** es importante restarle a cada intervalo *la probabilidad acumulada hasta el límite inferior*

$$F_{Q(q)} = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 0 \\ \frac{q^2}{2} & \text{si } 0 \leq q \leq 1 \\ 2q - \frac{q^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < q < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq q \end{cases}$$

1. Probabilidad de obtener un beneficio superior a los 3000 pesos

Nos están pidiendo: $P(B \geq 3)$

Esto quiere decir:

$$P(10Q - 5Q^2 \geq 3) = P(5Q(2 - Q) \geq 3)$$

Resolvemos la ecuación:

$$10Q - 5Q^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow Q = \begin{cases} Q_1 = 0.3675444 \\ Q_2 = 1.6324555 \end{cases}$$

Nosotros queremos que la ecuación sea mayor a cero, como la función es continua, por teorema sabemos que no cambia de signo entre raíces ni hacia afuera. Evaluamos en 1:

$$0 - 0 - 3 \geq 0 \Rightarrow \text{absurdo!}$$

$$10 - 5 - 3 = 2 \geq 0$$

$$20 - 20 - 3 > 0 \Rightarrow \text{absurdo!}$$

Entonces tomamos el intervalo $(0.3675444, 1.6324555)$

$$P(B \geq 3) = P(Q \in (0.3675444, 1.6324555)) = P(0.3675444 < Q < 1.6324555)$$

$$P(B \geq 3) = F_{Q(1.6324555)} - F_{Q(0.3675444)} = 0.9324555 - 0.066444 = 0.866$$

2. Calcular el valor esperado de B.

$$\mu_B = \int_{-\infty}^{\infty} b f_{B(b)} db$$

Entonces necesitamos saber la función de densidad de B para calcular la esperanza, la cual se puede deducir de lo anteriormente desarrollado

- Usamos el mismo procedimiento que en ejercicios anteriores:

1. Escribis la VAC(Densidad conocida) = g(VAC(Densidad **no** conocida)) - Hallas la inversa

En este caso la Densidad conocida es la de Q

$$P(B = b) = f_{B(b)} = P(10Q - 5Q^2 = b) = P(10Q - 5Q^2 - b = 0)$$

$$Q = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 20b}}{-10}$$

2. Derivas esa función (VAC(Dc)) respecto de la VAC(Dnc)

En este caso como tenemos dos Qs:

Q_1 :

$$f_{B(b)} =$$

3. Obtenes el parametro a usar para la funcion de densidad conocida
4. Evaluas con ese parametro a la densidad conocida y multiplicas la funcion evaluada por la derivada encontrada
3. Obtener la funcion de distribucion de B

Ejercicio 7

El costo C para producir una cantidad X de un producto viene dado por $C(X) = (X - 4)(X - 8) + 10$ (en miles de pesos). Suponga que X es una VAC con distribucion Uniforme (4, 8)

Calcular:

- $P(C > 9)$
- $E[C]$
- $f_{C(c)}$

Notemos que es el mismo caso de siempre:

1. Tenemos una VAC con distribucion conocida
2. Tenemos la relacion entre esa VAC y una VAC que queremos conocer

Entonces vamos a proceder como siempre

1. Busco los limites de la variable desconocida

$$\frac{dC}{dX} = (X^2 - 12X + 42)' = 0 \Rightarrow X = 6$$

$$C(6) = 6$$

$$C(4) = 0 + 10 = 10$$

$$C(8) = 0 + 10 = 10$$

Entonces:

$$\mathcal{I}(C) = [6, 10]$$

$$P(C > 9) = P(X^2 - 12X + 42 - 9 > 0) = P(X^2 - 12X + 33 > 0)$$

$$X = \begin{cases} x_1 = 6 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 + \sqrt{3} \\ x_2 = 6 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3} \end{cases}$$

- Queremos que X sea mayor a 0 entonces queremos caer en un valor de la parabola en el que estemos en la parte positiva y esto pasa en el caso en el que estemos **hacia afuera** en la parabola pues es positiva

Basta con pedir:

$$X < x_2 \vee X > x_1 \rightarrow \text{pues esto nos hace caer en la parte positiva}$$

$$P(C > 9) = P(X^2 - 12X + 33 > 0) = \underbrace{P(4 < X < x_2) + P(8 > X > x_1)}_{\text{probabilidad del 'or' teniendo en cuenta los limites}}$$

$$P(C > 9) = P(X < x_2) - \underbrace{P(X < 4)}_{0 \text{ pues } 4 \text{ es limite}} + 1 - P(X \leq x_1)$$

$$P(C > 9) = \text{Unifcdf}(x_2) - \text{Unifcdf}(4) + 1 - \text{Unifcdf}(x_1)$$

$$P(C > 9) = 0.06698729799999992 - 0.9330127020000001 + 1 = 0.133975$$

Luego para encontrar $E[C]$ necesitamos $f_{C(c)}$

Ya tenemos los **limites de la imagen** de C y faltaria **hallar las integrales para las zonas que es valido calcularlas**

$$C = X^2 - 12X + 42$$

Queremos hallar:

$$f_{C(c)} = P(C = c) \Rightarrow X^2 - 12X + 42 - c = 0$$

$$X = \begin{cases} x_1 = 6 - \sqrt{c-6} \\ x_2 = 6 + \sqrt{c-6} \end{cases}$$

Finalmente usamos el **teorema** que nos dice:

$$f_{C(c)} = f_{X(x_1(c))} \cdot \left| \frac{d}{dc} x_1(c) \right| + f_{X(x_2(c))} \cdot \left| \frac{d}{dc} x_2(c) \right|$$

$$f_{C(c)} = \frac{1}{4} \left| \underbrace{\frac{-1}{2\sqrt{c-6}}}_{\text{derivada de } x_1} \right| + \frac{1}{4} \left| \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{c-6}}}_{\text{derivada de } x_2} \right|$$

$$f_{C(c)} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{c-6}}$$

Luego para hallar $E[C]$, usamos la definicion de media continua

$$E[C] = \int_{-\infty}^{\infty} c f_{C(c)} dc$$

$$E[C] = \int_{-\infty}^6 \underbrace{c f_{C(c)} dc}_{c < 6 \Rightarrow 0} + \int_6^{10} c f_{C(c)} dc + \int_{10}^{\infty} \underbrace{c f_{C(c)} dc}_{c > 10 \Rightarrow 0}$$

$$E[C] = \int_6^{10} c f_{C(c)} dc = \frac{1}{8} \int_6^{10} \frac{c}{\sqrt{c-6}} dc$$

$$u = c - 6 \Rightarrow du = dc$$

$$E[C] = \frac{1}{4} \int_6^{10} \frac{u+6}{\sqrt{u}} du$$

$$E[C] = \frac{1}{4} \left(\int_6^{10} \sqrt{u} du + 6 \int_6^{10} \frac{1}{\sqrt{u}} du \right)$$

$$E[C] = \frac{1}{4} \left((c-6)^{\frac{3}{2}} \Big|_6^{10} + 6 \left(\sqrt{c-6} \right) \Big|_6^{10} \right)$$

$$E[C] = \frac{22}{3}$$

Ejercicio 8

Una corriente electrica de variable I se puede considerar como una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(9, 11)$. Si esta corriente pasa por una resistencia de 2Ω entonces la potencia desipada W viene dada por $W = 2I^2$

1. Obtener la funcion densidad de probabilidad de W
2. Calcular $E[W]$, $\text{VAR}[W]$
3. Calcular $P(W > E[W])$

Lo mismo de siempre, piden la funcion de densidad de probabilidad de una VAC que depende de otra la cual *si conocemos su densidad*

- Escribimos la VAC de densidad conocida en funcion de la desconocida:

$$I = \sqrt{\frac{W}{2}}$$

$$P(I = i) = \text{Unifpdf}(9, 11, i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 9 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 9 < i < 11 \\ 0 & \text{si } 11 < i \end{cases}$$

Proseguimos como siempre: *derivamos la funcion que depende de la desconocida*

$$\frac{dI}{dW} = g(w) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{W}{2}}}$$

Seguimos con lo mismo de siempre...

$$f_{W(w)} = f_{I(i)} \cdot |g(w)| = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{OJO, es } f_{I(i)}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\frac{W}{2}}} = \frac{1}{8\sqrt{\frac{W}{2}}}$$

Ademas para los limites haríamos lo siguiente:

$$9 < \sqrt{\frac{W}{2}} < 11 \Rightarrow 162 < W < 242$$

Conclusion:

$$f_{W(w)} = \frac{1}{8\sqrt{\frac{W}{2}}} \mathbb{I}_{(162, 242)} 0$$

- Para el punto 2 basta con usar la definicion de media continua

$$E[W] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W(w)} w dw = \int_{162}^{242} f_{W(w)} w dw$$

Nota: Esta integral no es trivial(hay que hacer por partes y no me acuerdo) por lo que voy a optar por calcularla a partir de I

Planteamos lo siguiente y notamos que piden I^2

$$E[W] = E[2I^2] = 2E[I^2]$$

Por la formula de la uniforme:

$$\mu_I = \frac{a+b}{2} = 10$$

Mientras que la varianza es:

$$V[I] = \frac{(b-a)^2}{12} = E[I^2] - E^2[I] = -(\mu_I)^2 + E[I^2]$$

$$(2)^2 = -1200 + 12E[I^2]$$

$$\frac{1204}{12} = E[I^2]$$

Retomando...

$$E[W] = 2E[I^2] = 2 \times \frac{1204}{12} = 200.666$$

$$V[W] = E[W^2] - E^2[W] = E[W^2] - (200.666)^2 = 533.689$$

$$E[W^2] = 4E[I^4] = 4 \int_a^b i^4 f_{I(i)} di = 2 \int_a^b i^4 di = \frac{2}{5} i^5 \Big|_9^{11} = \frac{2}{5} (11^5 - 9^5) = 40800.8$$

- Para el punto 3 piden $P(W > E[W] = 200.666)$

$$P(W > 200.666) = P(2I^2 > 200.666)$$

$$P(I > \sqrt{100.333}) = 1 - P(I < \sqrt{100.333}) = 1 - (\sqrt{100.333} - 9)(2) = 0.491681$$

Ejercicio 9

La variable aleatoria continua X tiene una funcion densidad de probabilidad tal que:

$$f_{X(x)} = \begin{cases} x+1 & x \in (-1, 0) \\ 1-x & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

1. Obtener las funciones de distribucion y probabilidad de: $Y = X^2$
2. Determinar $E[Y]$, $\text{Var}[Y]$

En este caso la funcion $|X| = g(Y) = \sqrt{Y}$ no es monotona ya que es una **funcion par**

Su raiz esta en $Y = 0$, las ramas de la funcion seran:

$$x = \pm\sqrt{y}$$

Entonces vamos a usar el **teorema general** que acepta monotonia por partes:

Tenemos que usar

$$f_{Y(y)} = \frac{f_{X(\sqrt{y})}}{2\sqrt{y}} + \frac{f_{X(-\sqrt{y})}}{2\sqrt{y}}$$

$$f_{Y(y)} = \frac{1 - \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} + \frac{1 + \sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$$

$$f_{Y(y)} = \frac{(1 - \sqrt{y}) + (1 + \sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

$$f_{Y(y)} = \frac{2 - 2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) \mathbb{I}_{(0,1)}(y)$$

El siguiente renglon es **INCORRECTO**. Pues cuando usamos el **teorema general** no hay que evaluar la densidad conocida en las raices sino que en las preimagenes, de esta forma siempre **quedara algebraico**

MAL: $f_{Y(y)} = \frac{f_{X(+0)}}{|g'(y)|} + \frac{f_{X(-0)}}{|-g'(y)|}$

2. Determinar μ_y, σ_y^2

$$f_{Y(y)} = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) \mathbb{I}_{(0,1)}(y)$$

$$E[Y] = \mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y(y)} dy$$

$$\mu_y = \int_0^1 y f_{Y(y)} dy$$

$$\mu_y = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{y}} - y dy = \int_0^1 \sqrt{y} dy - \int_0^1 y dy = 0.1667$$

Por otro lado:

$$\sigma_y^2 = \underbrace{E[Y^2]}_{\text{simil } E[Y]} - \underbrace{E^2[Y]}_{\mu_y^2 = 0.1667^2} = E[Y^2] - 0.0277$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 f_{Y(y)} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y}} - y^2 dy = 0.0666$$

En conclusion:

- $f_{Y(y)} = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) \mathbb{I}_{(0,1)}(y)$
- $\mu_y = 0.16667$
- $V[Y] = 0.03896$

Ejercicio 10

Sean $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ y $Y = w(X)$, donde $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$w(x) = \begin{cases} -1x \leq 0.3 \\ +0.3 < x \leq 0.7 \\ +1x > 0.7 \end{cases}$$

1. Y , es una variable aleatoria discreta o continua?

El recorrido es discreto: $R_Y = \{-1, +0, +1\}$, por lo tanto entiendo que es una discreta

A pesar de que X es continua, w la “discretiza”, aunque la “imagen” que en realidad no es la imagen, es la **preimagen** sean \mathbb{R} , no quiere decir que la imagen sea \mathbb{R} , de hecho los unicos posibles valores son los mencionados anteriormente

2. Determine la funcion de masa de probabilidad o la funcion de densidad de probabilidad de Y , segun corresponda

$$P(Y = -1) = P(X \leq 0.3) = \text{Unifcdf}(0, 1, x = 0.3) = 0.3$$

$$P(Y = 0+) = P(0.3 < X \leq 0.7) = P(X \leq 0.7) - P(X < 0.3) = 0.4$$

$$P(Y = 1) = P(0.7 < X) = 1 - P(X \leq 0.7) = 1 - \text{Unifcdf}(0, 1, x = 0.7) = 0.3$$

3. Calcular $E[Y]$, $V[Y]$

$$E[Y] = -0.3 + 0.3 = 0$$

$$V[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = E[Y^2] = 0.3 + 0.3 = 0.6$$

Ejercicio 11

Sea $X \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, encontrar una funcion $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / Y = w(X) \sim \text{Binomial}(3, 0.5)$

En este caso el recorrido de $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$ pues se pide que sea una Binomial de 3 trials

$$P(Y = 0) = \text{Bipdf}(0) = 0.125 \quad P(Y = 1) = \text{Bipdf}(1) = 0.375 \quad P(Y = 2) = \text{Bipdf}(2) = 0.375$$

$$P(Y = 3) = \text{Bipdf}(3) = 0.125$$

Entonces para formar la funcion, sabiendo que depende de una uniforme(0, 1): La acumulada de la uniforme(0, 1) = x , por lo tanto setear los limites deberia ser trivial:

ATENTO: A los limites en funciones partidas. Me habia olvidado en este caso de *sumarle lo acumulado hasta el anterior*

$$w(X) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0.125 \\ 1 & 0.125 < x \leq 0.5 \\ 2 & 0.5 < x \leq 0.875 \\ 3 & 0.875 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 12

Sean $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ e $Y = w(X)$, donde $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0.5 \\ x - 0.5 & x > 0.5 \end{cases}$$

1. Y es una variable aleatoria discreta o continua?

En este caso si es continua porque cuando $x > 0.5$, la funcion w es una recta en \mathbb{R} por lo que en este caso si. Aunque la preimagen sigue siendo distinta de la imagen

2. Calcular $E[Y]$, $V[Y]$

En esta ocasion como Y es continua, es mas complicado Tenemos que encontrar su funcion de densidad con la misma estrategia que veniamos usando antes, el **teorema de la transformacion**

Ejercicio 13

Se representa la distribución de probabilidades conjunta $p_{X,Y}(x, y)$. Calcule todas las distribuciones **marginales y condicionales**

y / x	1	2	3	4	5	Probabilidades marginales de Y
1	0.10	0.10	0.05	0.15	0.10	$P(Y = 1) = 0.5$
2	0.05	0.05	0.05	0.15	0.00	$P(Y = 2) = 0.3$
3	0.05	0.05	0.00	0.10	0.00	$P(Y = 3) = 0.2$
PMs de X	0.2	0.2	0.1	0.4	0.1	$\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1$

Nota: Las probabilidades marginales de cierta X son: Fijar una x y hacer la suma de todas las probabilidades **conjuntas** (intersección) con todas las probabilidades x, y_i . Entonces tiene sentido que para el caso continuo vayan a ser integrales dobles las que tengamos que calcular ya que serían densidades de área

- Probabilidades marginales de variables aleatorias bidimensionales:

En el caso discreto son:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

Donde necesitamos usar la **formula fundamental**:

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

Notemos que combinando fundamental con Bayes:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y)$$

En términos prácticos... La **probabilidad marginal** representa la **probabilidad total de que ocurra un determinado valor de X, sin importar Y**, sabiendo que X e Y están relacionados obviamente. Ejemplo corto: X = cantidad de cafés vendidos Y = clima

$$P(X = 2) = \text{La probabilidad de vender 2 cafés}$$

Notemos que están relacionadas las variables pues si llueve podría entenderse que la gente sale menos a la calle. entonces:

Si tenemos los siguientes datos:

$$P(X = 2, Y = \text{sol}) = 0.1$$

$$P(X = 2, Y = \text{nube}) = 0.2$$

$$P(X = 2, Y = \text{lluvia}) = 0.1$$

Para hallar $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$$

Nos sirve para extraer información más concreta de los datos que ya tenemos

- Probabilidades condicionales de variables aleatorias bidimensionales:

Es hacer: $P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} \rightarrow$ Todas las condicionales

Ejercicio 14

1. Las distribuciones de probabilidad marginales



2. La distribucion de probabilidades de $X + Y, XY$
3. El valor esperado y la varianza de $X + Y, XY$
4. La covarianza $\text{Cov}[X, Y]$

Ejercicio 19

Cierto supermercado tiene una caja de atención común y otra caja rápida. Supongamos que X es el número de clientes que están en espera en la caja común en un momento particular del día, y que Y es el número de clientes que están en espera en la caja rápida al mismo tiempo. La distribución de probabilidades conjunta de (X, Y) se resume en la siguiente tabla:

x / y	0	1	2	3
0	0.08	0.07	0.04	0.00
1	0.06	0.15	0.05	0.04
2	0.05	0.04	0.1	0.06
3	0.00	0.03	0.04	0.07
4	0.00	0.01	0.05	0.06

1. La probab de que haya 1 cliente en cada linea (exactamente)
2. Prob de que la cantidad de clientes en cada cola sea la misma
3. Prob de que haya por lo menos dos clientes mas en una cola de espera que en la otra
4. Prob de que la cantidad de clientes en ambas colas sea exactamente 4
5. Valor esperado del numero de clientes en cada caja
6. Son X, Y independientes?

Ejercicio 23

Ejercicio 25

Ejercicio 31