TP 5

Tips y Formulas Clave

Probabilidad y Estadistica
23/11/2025

Importante: Probabilidad total

$$P(X = x) = \sum_{y \in R_Y} P(x \mid y).P(y)$$

Importante: Como la normal es simentrica (en caso de estar normalizada), podemos hacer:

$$\text{Normalcdf}(-x) = \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Si lo pensamos graficamente, seria como pensar: El area en la cola izquierda $P(X \leq -x)$ es exactamente lo mismo que el area en la cola derecha $1 - P(X \leq x)$

1 Distribucion de probabilidades

Que hacer si te piden distribucion de probabilidades de una variable la cual viene descripta por una funcion que incluye otras variables?

Importante: Dado X, Y variables aleatorias y tenemos $X = g(Y)$, se procede:

1. Encontramos la **acumulada de la desconocida** despejando $F_X(x)$ (en caso de que X sea la conocida e Y la conocida)
2. Derivamos para poder encontrar la funcion de densidad
3. Para encontrar los limites, es util reemplazar con lo que se evalua en la funcion

2 Mezcla de variables aleatorias

Una **mezcla** ocurre cuando la distribución de una variable aleatoria depende de otra variable aleatoria.

Ejemplo típico: elegir al azar una distribución y luego generar un valor de ella.

Definición general: Si $X \mid Y = y$ tiene densidad $f_{X|Y}(x \mid y)$ y Y tiene densidad/distribución $f_{Y(y)}$, entonces la densidad marginal de X es:

$$f_{X(x)} = \int f_{X|Y}(x \mid y) f_{Y(y)} \, dy$$

Para el caso discreto:

$$P(X = x) = \sum_{y} P(X = x \mid Y = y) P(Y = y)$$

2.1 Teorema de la probabilidad total (formas)

Discreto:

$$P(X = x) = \sum_{i} P(X = x | Y = y_i) P(Y = y_i)$$

Continuo:

$$f_{X(x)} = \int f_{X|Y}(x \mid y) f_{Y(y)} \, dy$$

Mixto: Usa suma sobre las partes discretas y integral sobre las partes continuas.

2.2 Esperanza condicional

La **esperanza condicional** cuantifica el valor esperado de X cuando sabemos el valor de otra variable $Y = y$.

Definición (discreta):

$$E[X|Y = y] = \sum_{x} x \cdot P(X = x \mid Y = y)$$

Definición (continua):

$$E[X|Y = y] = \int x \, f_{X|Y}(x \mid y) \, dx$$

Variable aleatoria condicional: $E[X|Y]$ es en sí misma una variable aleatoria.

2.3 Ley de la esperanza total

$$E[X] = E(E[X|Y])$$

Interpretación: «primero condiciono, después promedio».

2.4 Ley de varianza total

$$\mathrm{Var}(X) = E(\mathrm{Var}(X|Y)) + \mathrm{Var}(E[X|Y])$$

2.5 Independencia y condicionales

Si X y Y son independientes:

- $f_{X|Y}(x \mid y) = f_{X(x)}$
- $E[X|Y] = E[X]$
- $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$

2.6 Cómo resolver ejercicios típicos

2.6.1 1. Te dan una mezcla con parámetros aleatorios

Usar probabilidad total (discreto o continuo según corresponda).

2.6.2 2. Te dan densidades condicionales y una distribución para Y

Aplicar:

$$f_{X(x)} = \int f_{X|Y}(x \mid y) f_{Y(y)} dy$$

2.6.3 3. Te piden esperanza condicional

Usar fórmula según discreto/continuo.

2.6.4 4. Te piden esperanza total

Calcular primero $E[X|Y]$ y luego promediar:

$$E[X] = E(E[X|Y])$$

2.7 Notas útiles

Nota: Recordá que **las mezclas suavizan distribuciones**: si las condicionales son simples pero la distribución de Y es amplia, la marginal puede ser más compleja.

2.8 Ejemplo general

Supongamos:

- $Y \sim \text{Bernoulli}(p)$
- Condicionalmente, $X \mid Y = 0 \sim N(0,1)$
- $X \mid Y = 1 \sim N(3,1)$

Entonces:

$$f_{X(x)} = (1-p)\varphi(x) + p\varphi(x-3)$$

Y la esperanza condicional:

- $E[X|Y = 0] = 0$
- $E[X|Y = 1] = 3$

Esperanza total:

$$E[X] = (1-p) \cdot 0 + p \cdot 3 = 3p$$