1. Proceso Estocastico

- Coleccion de variables aleatorias indexadas por un parametro (en general tiempo)

$$\{X(t)\}_{t \in T}$$

T : Tiempo discreto o continuo

E : Espacio de estados $\to$ Valores posibles de $X(t)$

1.1. Simplificaciones utiles

- **Procesos estacionarios**

Las probabilidades son independientes del tiempo

Las reglas del juego no dependen del momento en que empezamos

$$f(x_1, t_1 + \Delta t, x_2, t_2 + \Delta t, ...) = f(x_1, t_1, x_2, t_2, ...)$$

- **Incrementos independientes**

Los cambios en intervalos de tiempo **no solapados** son independientes

- **Incrementos estacionarios**

Las distribuciones de los incrementos solo dependen del **tamaño del intervalo**, no del momento

1.2. Procesos de Markov

El futuro depende solo del presente, no de todo el pasado

$$P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, ..., X(t_1) = x_1) = P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

Se ignora el pasado, solo te importa el lugar final

- En tiempos discretos:

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2} p(x_3, t_3 | x_2, t_2) . p(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

1.2.1. Cadenas de Markov

Son procesos de Markov con espacio de estados discreto:

1. Distribucion inicial $p_{j(0)}$
2. Matriz de transicion P, donde cada elemento p_{ij} es:

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\right)$$

- Evolcion/Paso:

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n).P$$

- Si es homogenea (transiciones no dependen de n):

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0).P^n$$

- Existe un **estado estacionario** si:

$$\pi = \pi P$$

Se resuelve el sistema con la condicion inicial:

$$\sum \pi_i = 1$$

Nota a π se lo llama “autovector” a izquierda porque multiplica a la matriz desde la izquierda y “a 1” porque en ese calculo $\lambda = 1$ (deberia estar multiplicando a π)

- **Estados de una cadena de Markov**

Hacer grafo de estados para este ejercicio
- **Accesible**: Existe camino de un estado al otro
- **Irreducible**: Todos se comunican (*comunicar*: Si puedo llegar de A a B entonces puedo llegar de B a A)
- **Recurrente**: Vuelve seguro
- **Transitorio**: Puede que no vuelva al estado inicial
- **Periodico/Aperiodico**
- **Regular**: Algun P^n tiene todas sus entradas positivas

1.3. Random Walk (Caminata aleatoria)
- $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$
- Los Z_k son va. i.i.d.
- Si $Z_k \in \{-1, 1\}$, es el caso simple:
  - $E[Z_k] = 0, V[Z_k] = 1$
  - $E[X_n] = 0, V[X_n] = n$
- Si Z_k generalizado, calcular $E[Z_k], V[Z_k]$, y luego:
  - $E[X_n] = nE[Z_k]$
  - $V[X_n] = nV[Z_k]$

Posibles recorridos de random walks:

IMPORTANTE: *tener en cuenta que cuando la caminata es binaria no puedo moverme 0 pasos, si o si +1 o −1*

- Binaria(± 1): $R_{X_n} = \{-n, -n+2, -n+4, ..., n-2, n\}$
- Multivaluada(los pasos pueden ser de mayor modulo que 1):
  $\text{Todas las sumas posibles de n incrementos}$

1.3.1. Random walk continua
Gaussiana: $X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ (su recorrido es $\mathbb{R}$)

1.4. Procesos de Poisson
- **Proceso estocastico** uso:$\rightarrow$ arribos, fallas, particulas

  $\lambda : \text{Eventos por unidad de tiempo} \Rightarrow \text{Tiempo entre eventos sucesivos } T_i \sim \text{Exponencial}(\lambda)$

Cumple con...
1. **Incrementos independientes**
2. **Incrementos estacionarios**
3. La probabilidad de 1 evento en $\Delta t \approx \lambda \Delta t$ (*leer que es lambda*)
4. La probabilidad de 2 o mas eventos en Δt es despreciable

- **Distribucion**:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$$

- Los tiempos entre eventos son exponenciales con parametro λ

1.5. Tiempo hasta absorcion

- Si algunos estados son absorbentes, sse trabaja con una particion de la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ F & Q \end{pmatrix}$$

$$M = (I - Q)^{-1}$$

- **Probabilidades de absorcion** $G = MF$