Nombre: ______________________ Legajo: ______________________

Haga cada ejercicio en una hoja diferente.
No se contestan preguntas.
Justifique sus cálculos.
Redondee los resultados finales a 4 decimales.
Ejercicio 1 de 5.

Leitmotiv: hijos (otra vez)

1. El tiempo entre cambios de pañales consecutivos de un bebé sigue una ley exponencial de media 4 horas. Asuma que los tiempos son independientes entre sí.
   (a) (1 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen más de 24 horas hasta que se cambie el cuarto pañal?
   (b) (1 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que en un mes típico de 30 días se usen más de 200 pañales?

Respuesta:

Sea $N(t)$ el proceso de Poisson asociado, esto es, el número de pañales cambiados hasta tiempo t. Para la primer pregunta tenemos $N(24) \sim \text{Poisson}(6)$ y

$$\mathrm{P}\left(N(24) < 4\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{6^k}{k!} e^{-6} = 0.1512.$$

Para la segunda pregunta, consideramos $N(720) \sim \text{Poisson}(180)$. La respuesta es:

$$\mathrm{P}\left(N(720) > 200\right) = 1 - \sum_{k=0}^{200} \frac{180^k}{k!} e^{-180} = 0.0652.$$

Usando la aproximación normal sin corrección por continuidad:

$$\mathrm{P}\left(N(720) > 200\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200 - 180}{\sqrt{180}}\right) = 1 - \Phi\left(1.4907\right) = 0.0680.$$

Usando la aproximación normal con corrección por continuidad:

$$\mathrm{P}\left(N(720) > 200\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200.5 - 180}{\sqrt{180}}\right) = 1 - \Phi\left(1.5280\right) = 0.0633.$$

Página vacía.

Nombre: ______________________ Legajo: ______________________

Haga cada ejercicio en una hoja diferente.

No se contestan preguntas.

Justifique sus cálculos.

Redondee los resultados finales a 4 decimales.

Ejercicio 2 de 5.

2. Sobre una base de 981 respuestas a una encuesta entre familias con niños entre 0 y 3 años, se encontró que 362 de ellas han sufrido escasez de pañales.
   (a) (1 pto.) Suponiendo que la muestra es representativa, estime un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de familias de EE.UU. con niños entre 0 y 3 años que han sufrido escasez de pañales.
   (b) (1 pto.) Suponga que usted descree de los resultados. Si desea obtener el valor de la proporción un error menor al 1 % para un nivel del confianza del 99 %, ¿de qué tamaño debería tomar la muestra? *Ayuda: como descree de los resultados, ignora qué valor* $p \in (0, 1)$ *puede tomar la proporción.*

Respuesta:

Más allá de discusiones ecológicas respecto de los descartables, el surtido adecuado de pañales entre infantes de 0 a 3 años resulta necesario para su salud. Este aspecto en EE.UU. fue estudiado en el artículo

> Sobowale, K., Clayton, A., & Smith, M. V. (2021). Diaper need is associated with pediatric care use: an analysis of a nationally representative sample of parents of young children. *The Journal of Pediatrics*, 230, 146-151.

Los datos se tomaron de este artículo.

Para el intervalo de confianza tenemos:

$$\hat{p} = \frac{362}{981} = 0.3690,$$
$$\Delta = z_{0.975}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1.96 z_{0.975}\sqrt{\frac{0.3690(1-0.3690)}{981}} = 0.0302.$$

Por lo tanto, el intervalo es $(0.3388, 0.3992)$.

Como se descree de los resultados de la encuesta, no se conoce el valor de $\hat{p}$ que se puede obtener. Por lo tanto, sólo sabemos que

$$\Delta = z_{0.995}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq z_{0.995}\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Pidiendo que esto sea menor a 0.01, tenemos

$$n \geq \left(\frac{z_{0.995}}{2 \times 0.01}\right)^2 = \left(\frac{2.5758}{2 \times 0.01}\right)^2 = 16587.2415.$$

Entonces, se necesita $n \geq 16588$.

Página vacía.

Nombre: ______________________ Legajo: ______________________

Haga cada ejercicio en una hoja diferente.

No se contestan preguntas.

Justifique sus cálculos.

Redondee los resultados finales a 4 decimales.

Ejercicio 3 de 5.

3. Se le encarga estimar la capacidad de absorción media del pañal "Cola Feliz". Para ello deberá medir la absorción en una muestra de n pañales tomados al azar de la producción. Suponga que la absorción de un pañal tomado al azar puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de media y desvío desconocidos.
   (a) (1 pto.) Su jefe le pide que el error sea menor o igual a 10 ml con un nivel de confianza del 90 %. De acuerdo a expertos del área, el desvío muestral no puede ser superior a los 25 ml. ¿Cuál es el menor valor de n que puede usar? *Ayuda: haga una primera estimación asumiendo que el desvío poblacional es conocido y luego refínela por prueba y error.*
   (b) (1 pto.) Finalmente usa $n = 20$, obteniendo un valor promedio de 500 ml y un desvío muestral de 15 ml. Determine el intervalo de confianza al 90 %.

Respuesta:

Sabemos que

$$\Delta = t_{0.95,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Por lo tanto, necesitamos

$$n \geq \left(\frac{t_{0.95,n-1}s}{10}\right)^2 = \left(t_{0.95,n-1}2.5\right)^2.$$

Obsérvese que tenemos n a la derecha de la desigualdad. Una aproximación al valor deseado se puede obtener reemplazando $t_{0.95,n-1}$ por $z_{0.95,n-1}$:

$$n \geq \left(z_{0.95}2.5\right)^2 = 16.9096$$

Probemos, entonces, con $n = 17$. En este caso, tenemos:

$$\Delta = t_{0.95,16}\frac{s}{\sqrt{17}} = 1.7459\frac{25}{\sqrt{17}} = 10.5860 > 10.$$

Se requiere un valor más grande de n. Intentemos con $n = 18$:

$$\Delta = t_{0.95,17}\frac{s}{\sqrt{18}} = 1.7396\frac{25}{\sqrt{18}} = 10.2507 > 10.$$

Dado que este valor sigue siendo insuficiente, probamos con $n = 19$:

$$\Delta = t_{0.95,18}\frac{s}{\sqrt{19}} = 1.7341\frac{25}{\sqrt{19}} = 9.9455 < 10.$$

Finalmente, el mínimo valor de n es 19.

Si usamos los valores de la segunda pregunta:

$$\Delta = t_{0.95,19}\frac{s}{\sqrt{20}} = 1.7291\frac{15}{\sqrt{20}} = 5.7997.$$

Entonces el intervalo es $(494.2003, 505.7997)$.

Página vacía.

Nombre: ______________________ Legajo: ______________________

Haga cada ejercicio en una hoja diferente.

No se contestan preguntas.

Justifique sus cálculos.

Redondee los resultados finales a 4 decimales.

Ejercicio 4 de 5.

4. El precio de los pañales Q depende de la demanda D de forma que $Q = 10D^2 + 2$. La investigadora Luz Imagina asegura que la demanda en un mes cualquiera puede modelarse como una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y 1.
   (a) (1 pto.) Encuentre el valor esperado y la varianza de la Q.
   (b) (1 pto.) Encuentre la función de densidad de probabilidad de Q y grafíquela.

Respuesta:

$$\mathrm{E}[Q] = \mathrm{E}\left[10D^2 + 2\right] = 10\mathrm{E}\left[D^2\right] + 2.$$
$$\mathrm{E}\left[Q^2\right] = \mathrm{E}\left[\left(10D^2 + 2\right)^2\right] = 100\mathrm{E}\left[D^4\right] + 40\mathrm{E}\left[D^2\right] + 4.$$

Tenemos que hacer las integrales:

$$\mathrm{E}\left[D^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_D(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$
$$\mathrm{E}\left[D^4\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f_D(x)dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

Luego:

$$\mathrm{E}[Q] = \frac{16}{3} = 5.3333.$$
$$\mathrm{E}\left[Q^2\right] = \frac{3560}{15}.$$
$$\mathrm{Var}[Q] = \mathrm{E}\left[Q^2\right] - \left[\mathrm{E}[Q]\right]^2 = \frac{9400}{45} = 208.8889.$$

Dado que $D \sim \mathrm{U}(0,1)$, la función de distribución acumulada de Q es $F_Q(q) = 0$ para $q < 2$ y $F_Q(q) = 1$ para $q > 12$. Para $q \in (2,12)$ tenemos

$$F_Q(q) = \mathrm{P}\left(10D^2 + 2 \leq q\right) = \mathrm{P}\left(D \leq \sqrt{\frac{q-2}{10}}\right) = \sqrt{\frac{q-2}{10}}.$$

Derivando,

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{10(q-2)}} & q \in (2,12), \\ 0 & q \notin (2,12). \end{cases}$$

Página vacía.

Nombre: ______________________ Legajo: ______________________

Haga cada ejercicio en una hoja diferente.

No se contestan preguntas.

Justifique sus cálculos.

Redondee los resultados finales a 4 decimales.

Ejercicio 5 de 5.

5. En un artículo científico se propusieron cadenas de Markov para modelar el sobrepeso infantil, el sobrepeso en la adultez y la muerte de individuos. El modelo para adultos tiene cuatro estados: peso normal (N), sobrepeso (S), obeso (O), muerto (M). Los estados se suceden en cada año de vida. El estudio encontró los siguientes valores:

   - El 2 % de los adultos con peso normal pasa a tener sobre peso y nunca pasan directo a ser obesos. Supongamos que la probabilidad de morir es de 1.2 %.
   - El 1 % de los adultos con sobrepeso pasan a ser obesos y el 0.1 % baja al peso normal. La probabilidad de morir se incrementa al 1.3 %.
   - El 2 % de los adultos obesos baja a tener algo de sobrepeso y nunca pasa directo a un peso normal. En este caso, la probabilidad pasa a ser del 1.6 %.

   (a) (1 pto.) Dibuje el diagrama de la cadena de Markov y escriba la matriz de probabilidades de transición.

   (b) ($1/2$ pto.) ¿Existe una distribución estacionaria o a largo plazo? Justifique. *Ayuda: piense qué sucede siempre a la larga.*

   (c) ($1/2$ pto.) Suponga que un adulto tiene peso normal. ¿Cuál es la esperanza de vida (tiempo medio antes de morir)?

   Ayuda: de Wikipedia sacamos que, si $\mathbb{Q}$ *es una matriz de* 3×3

$$\mathbb{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{Q})} \begin{bmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A &= \ \ (ei - fh), & D &= -(bi - ch), & G &= \ \ (bf - ce), \\ B &= -(di - fg), & E &= \ \ (ai - cg), & H &= -(af - cd), \\ C &= \ \ (dh - eg), & F &= -(ah - bg), & I &= \ \ (ae - bd), \end{aligned}$$

$$\det(\mathbb{Q}) = aA + bB + cC.$$

Respuesta:

El estudio en cuestión fue

> Sonntag, D., Ali, S., Lehnert, T., Konnopka, A., Riedel-Heller, S., & König, H. H. (2015). Estimating the lifetime cost of childhood obesity in Germany: results of a Markov model. *Pediatric Obesity*, 10(6), 416-422.

Los valores consignados son aproximados, ya que, en realidad, dependen de la franja etaria.

Colocando los estados en el orden M, N, S, O:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.012 & 0.958 & 0.020 & 0.000 \\ 0.013 & 0.010 & 0.967 & 0.010 \\ 0.016 & 0.000 & 0.020 & 0.964 \end{pmatrix}.$$

Existe una distribución a largo plazo ya que existe **un solo estado absorbente que es alcanzable desde todos los demás estados**: $\vec{\pi} = (1, 0, 0, 0)$.

Haciendo $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(2:4, 2:4)$, tenemos los valores esperados en

$$(\mathbb{I} - \mathbb{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 40.4653 & 29.4889 & 8.1913 \\ 14.7444 & 47.1822 & 13.1062 \\ 8.1913 & 26.2123 & 35.0590 \end{pmatrix}.$$

Sumando la primera fila, tenemos la respuesta que queremos: 63.4010.