Probabilidad y Estadística (93.24)
Cálculo de probabilidades

Índice

1. Repaso de algunos conceptos

Espacio muestral. Álgebra de eventos.

El **espacio muestral** S de un experimento aleatorio es el conjunto de resultados posibles de dicho experimento.
Un **suceso** o **evento** es un conjunto de resultados posibles de un evento. Si A es un evento, entonces $A \subseteq S$.
Algunas exigencias de la teoría de la probabilidad:

- Si se quiere hablar de que ocurran los resultados en un evento, se debe estar dispuesto a hablar de que *no* ocurran. Es decir, si se quiere hablar del evento A, se debe poder hablar de su complemento $\overline{A}$.
- Si se quiere de la ocurrencia de los sucesos A y B, se debe estar dispuesto a hablar de la ocurrencia de *ambos* eventos, A **y** B, es decir, $A \cap B$.
- Si se quiere de la ocurrencia de los sucesos A y B, se debe estar dispuesto a hablar de la ocurrencia de *al menos uno de los* eventos, A **o** B, es decir, $A \cup B$.

Clásicamente, las últimas dos exigencias se extienden a secuencias enumerables de eventos. En particular, se define un σ-álgebra de eventos Σ como una colección de subconjuntos de S que satisface:

1. $S \in \Sigma$;
2. $A \in \Sigma \Rightarrow \overline{A} \in \Sigma$;
3. $\{A_k\}$ una colección enumerable de eventos $A_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \Sigma$.

   Dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** si son disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Axiomas de probabilidad.

Sea S un espacio muestral y Σ un σ-álgebra de subconjuntos de S. Luego $P : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una **medida de probabilidad** sobre (S, Σ) sii

1. $\mathrm{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$;
2. $\mathrm{P}(S) = 1$;
3. $\{A_k\}$ una colección enumerable de eventos mutuamente excluyentes $A_k \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mathrm{P}(A_k)$.

Consecuencias elementales de los axiomas.

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathrm{P}(A) \leq 1$.
- $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Probabilidad condicional.

La **probabilidad condicional de un evento o suceso** A **dado otro evento** B está definida como

$$\mathrm{P}\left(A|\,B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(A \cap B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right)} \text{ si} \mathrm{P}\left(B\right) \neq 0.$$

Si $\mathrm{P}\left(B\right) = 0$, la probabilidad condicional no está definida. La intuición de la probabilidad condicional es la siguiente: el universo de casos posibles se limita al suceso B, y la probabilidad condicional de A dado B es la probabilidad del evento A dentro de ese universo reducido.

Independencia.

Dos eventos A y B son independientes si y sólo si

$$\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) \cdot \mathrm{P}\left(B\right).$$

Es interesante observar que el evento Ω (el universo de casos posibles) es independiente de cualquier otro. Intuitivamente, Ω corresponde a que "cualquier cosa" (o "alguna cosa") suceda. Que suceda "cualquier cosa" es independiente de cualquier otro posible resultado de un experimento aleatorio. Dicho de otra forma, Ω es un evento que *siempre sale*, independientemente de cualquier otro suceso.
También el evento $\emptyset$ es independiente de cualquier otro. La probabilidad de ocurrencia de $\emptyset$ es nula independientemente de cualquier otro evento.
Otra forma de evaluar la independencia de dos eventos es a través de la probabilidad condicional. Si $\mathrm{P}\left(A\right) \neq 0$, entonces A y B son independientes si y sólo si

$$\mathrm{P}\left(B|\,A\right) = \mathrm{P}\left(B\right).$$

Este resultado es inmediato a partir de la definición de independencia dada más arriba y resulta más intuitiva: la probabilidad de B *no depende* de A. De forma similar, si $\mathrm{P}\left(B\right) \neq 0$, entonces A y B son independientes si y sólo si

$$\mathrm{P}\left(A|\,B\right) = \mathrm{P}\left(A\right).$$

Teorema de Bayes

Una colección de eventos $\{A_k\}_{k=1}^n$ es una **partición** del espacio muestral S si todos los eventos son mutuamente excluyentes y $S = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Si B es un evento cualquiera, entonces la **fórmula de probabilidad total** dice que se puede escribir

$$\mathrm{P}\left(B\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(B \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(B|\,A_k\right)\mathrm{P}\left(A_k\right). \tag{1}$$

El **teorema de Bayes** dice que

$$\mathrm{P}\left(A_j|\,B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(B|\,A_j\right)\mathrm{P}\left(A_j\right)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(B|\,A_k\right)\mathrm{P}\left(A_k\right)}. \tag{2}$$

Las probabilidades $\mathrm{P}\left(A_k\right)$ son llamadas ***a priori***, mientras que $\mathrm{P}\left(A_j|\,B\right)$ es denominada probabilidad ***a posteriori*** (esto es, después de conocerse B).

Árbol de probabilidades

Las reglas para armar el árbol son las siguientes:

1. En cada arista del grafo se coloca la probabilidad condicional del nodo destino (nodo "hijo") dada la intersección de todos los nodos en el camino desde la raíz hasta él (intersección de todos los nodos "antepasados").
2. Los nodos hijos forman una partición del espacio muestral, es decir, son todos disjuntos y su unión comprende el universo de posibilidades.
3. Como consecuencia de las dos reglas anteriores, la suma de las etiquetas de todas las aristas que salen de un nodo es 1.
4. También como consecuencia de las dos primeras reglas, la probabilidad de la intersección de todos los nodos atravesados en un camino cualquiera del grafo está dada por el producto de las etiquetas de las aristas recorridas.

Regla de Laplace

La regla de Laplace para el cálculo de probabilidades de un evento es

$$\frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ total de casos}} = \frac{\#\text{ de casos correspondientes al evento}}{\#\text{ total de casos}}. \tag{3}$$

Esta regla se utiliza cuando todos los casos son igualmente probables.

Combinatoria - Regla de la suma

Sean A_1, A_2 dos conjuntos disjuntos. Luego

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|\,. \tag{4}$$

En palabras: En la heladera hay 4 $(= |A_1|)$ *manzanas y* 5 $(= |A_2|)$ *peras. Considerando sólo esos dos tipos, hay* $4 + 5 = 9$ *frutas de dónde escoger.*
En general, si $A_1, \cdots, A_n$ son conjuntos disjuntos, entonces

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|\,. \tag{5}$$

Combinatoria - Principio de inclusión-exclusión

Sean A_1, A_2 dos conjuntos. Luego

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \,. \tag{6}$$

En palabras: En un grupo de amigos, 4 $(= |A_1|)$ *son rubios y* 5 $(= |A_2|)$ *tienen ojos verdes. Sólo 2* $(= |A_1 \cap A_2|)$ *tienen ambas características. Por lo tanto, hay 2 rubios y de ojos verdes, 2 rubios y de ojos no verdes, 3 no rubios y de ojos verdes. En total, hay* $4 + 5 - 2 = 7$ *amigos.*
En general, para $A_1, \cdots, A_n$ tenemos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$\cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n| \tag{7}$$

Combinatoria - Regla del producto

Sean A_1, A_2 dos conjuntos. Luego

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2| \,, \tag{8}$$

donde $\times$ representa el producto cartesiano.
En palabras: En la heladera hay 4 $(= |A_1|)$ *manzanas y* 5 $(= |A_2|)$ *peras. Si se puede tomar una manzana y una pera, se pueden formar* $4 \cdot 5 = 20$ *pares diferentes de frutas.*
En general, para $A_1, \cdots, A_n$ tenemos

$$|A_1 \times A_2 \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| \,. \tag{9}$$

Combinatoria - Regla del palomar

Si n objetos son distribuidos en m conjuntos, y $n > m$, al menos uno de los conjuntos debe tener más de un objeto.
En palabras: En un grupo de más de 366 personas, al menos 2 deben cumplir años el mismo día.
En general: dados $k, m \in \mathbb{N}$, si $n = km + 1$ objetos son distribuidos en m conjuntos, al menos uno de los conjuntos debe contener al menos $k + 1$ objetos.

Factorial y combinatoria

1. La cantidad de formas de ordenar n objetos es $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$.
2. La cantidad de formas de elegir r elementos de entre n, **en orden y sin repeticiones** es:
$$n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{10}$$
3. La cantidad de formas de elegir r elementos de entre n, **sin repeticiones**, pero **sin importar el orden** es:
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}. \tag{11}$$
Otra forma: La cantidad de conjuntos de r elementos tomados de entre n que se pueden formar es...
4. La cantidad de formas de elegir r elementos de entre n, **en orden y con repeticiones** es n^r.
5. La cantidad de formas de elegir r elementos de entre n, **con repeticiones**, pero **sin importar el orden** es:
$$\binom{n+r-1}{r}. \tag{12}$$

Indentidades de números combinatorios

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \tag{13}$$
$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \tag{14}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n \tag{15}$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{r} = 0 \tag{16}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1} \quad \text{para} m \geq 0,\ n \geq 1 \tag{17}$$
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} \tag{18}$$

Con reposición vs. sin reposición

Cuando el tamaño de la población y los tamaños de cada clase en la que se divide la población son mucho mayores que el tamaño de la muestra, entonces no hay mucha diferencia entre las probabilidades calculadas con o sin reposición.

2. Guía de ejercicios

1. Se arrojan dos dados no cargados.

   a) Describa un espacio muestral o conjunto de todos los resultados posibles.

   b) Calcule la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 7.

   c) Calcule la probabilidad de que la suma sea 4 o 9.

2. De una urna con bolillas rojas numeradas de 1 a 5 y tres negras numeradas de 6 a 8 se saca una completamente al azar. Juzgue la validez de los siguientes argumentos.

   a) Las rojas tienen mayor probabilidad de salir que las negras. Como 1 es roja y 6 negra, es más probable que salga el 1 que el 6.

   b) Sólo hay dos resultados posibles: **rojo** o **negro**. Luego la probabilidad de cada uno es 1/2.

   c) Cualquier bolilla tiene la misma probabilidad de salir: 1/8.

   d) El experimento ya se realizó una vez y salió el 4. Si se vuelve a realizar sería mucha casualidad que vuelva a salir el 4. Luego en dos repeticiones consecutivas del experimento si la primera vez salió 4, la segunda es menos probable que salga el 4 que, por ejemplo, el 8.

3. Tres componentes se conectan para formar un sistema. El componente 1 se conecta en serie con un paralelo de los componentes 2 y 3. Como éstos dos últimos se conectan en paralelo, este subsistema funcionará si, por lo menos, uno de los dos componentes funciona. Para que el sistema funcione deberán funcionar el componente 1 y al menos uno de los componentes del paralelo.
   Supongamos un experimento aleatorio que consiste en registrar el estado de cada componente como S_i si funciona el componente i y F_i si falla el componente i.
   Listar los resultados que corresponden al suceso:

   a) A: funcionan exactamente dos de los tres componentes.

   b) B: al menos dos de los componentes funcionan.

   c) C: el sistema funciona.

   Hacer una lista de los resultados que corresponden a: $\overline{C}$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$ y $B \cap C$.

4. En una producción de 100 artículos hay 10 defectuosos y el resto no tiene defectos.

   a) Para cada uno de los siguientes experimentos describa un espacio muestral y asigne la probabilidad a cada suceso elemental.

      1) Se extrae un artículo al azar y se registra su calidad.
      2) Se extraen simultáneamente dos artículos y se registra su calidad.
      3) Se extraen sucesivamente sin reposición 2 artículos y se registra su calidad.
      4) Se extraen sucesivamente con reposición 2 artículos y se registra su calidad.
      5) Se extraen sucesivamente con reposición 2 artículos y se cuenta la cantidad de defectuosos.
      6) Se extraen sucesivamente sin reposición 2 artículos y se cuenta la cantidad de defectuosos.

   b) Compare los resultados obtenidos en: 2) con 3) y 3) con 4) y saque conclusiones.

   c) Calcule la probabilidad de que el segundo artículo sea bueno en los casos 3). y 4). Compare los resultados.

d) Compare los resultados obtenidos en: 2) con 3) y 3) con 4) y saque conclusiones si el tamaño de la población es 1000.

e) Generalice la probabilidad de obtener k defectuosos en una muestra aleatoria de tamaño n en los casos 5) y 6) si hay b artículos buenos y d defectuosos.

Resolución aquí.

5. Suponga que A y B son sucesos para los cuales $\mathrm{P}(A) = x, \mathrm{P}(B) = y, \mathrm{P}(A \cap B) = z$. Exprese cada una de las probabilidades siguientes en términos de x, y, z.

   a) $\mathrm{P}(A \cup B)$

   b) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$

   c) $\mathrm{P}(A \cup \overline{B})$

   d) $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$

   Nota: $\overline{A}$ es el suceso complementario del suceso A.

6. Obtener una expresión de cálculo para $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$ en términos de $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(C)$, $\mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{P}(B \cap C)$, $\mathrm{P}(A \cap C)$ y $\mathrm{P}(A \cap B \cap C)$.

7. Suponga que A, B y C son sucesos tales que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/4$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B \cap C) = 0$, $\mathrm{P}(A \cap C) = 1/8$ y $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Calcule la probabilidad de que al menos uno de los sucesos A, B o C ocurra.

8. Dos sucesos A y B tienen igual probabilidad de ocurrencia, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 0.4$. Calcular $\mathrm{P}(\overline{A} | \overline{B})$ si la probabilidad de ocurrencia de ambos es $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.25$.

9. Las probabilidades de ocurrencia de dos sucesos A y B son $\mathrm{P}(A) = 0.5$ y $\mathrm{P}(B) = 0.6$. Calcular $\mathrm{P}(A | \overline{B})$ si la probabilidad de ocurrencia de ambos es $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.25$.

10. Considere dos sucesos A y B para los cuáles $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcular:
    a) $\mathrm{P}(A | B)$ *b*) $\mathrm{P}(B | A)$ *c*) $\mathrm{P}(A \cup B)$ *d*) $\mathrm{P}(\overline{A} | \overline{B})$ *e*) $\mathrm{P}(\overline{B} | \overline{A})$.
    Resolución aquí.

11. Si $\mathrm{P}(A | B) = 0.6$, $\mathrm{P}(\overline{A} \cup B) = \mathrm{P}(A \cup \overline{B}) = 0.8$,

    a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

    b) Calcular $\mathrm{P}(A \cup B)$ y $\mathrm{P}(B | A)$.

    Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

12. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Considerando que $\mathrm{P}(A) = 0.4$, $\mathrm{P}(B) = p$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.7$. ¿Cuál es el valor de p si A y B son:

    a) mutuamente excluyentes?

    b) independientes?

13. Se sabe que cierta producción está sujeta a tres tipos de defectos, A, B y C. Entre 1000 unidades producidas en un día, el inspector de la línea de montaje informó de los siguientes resultados:

defecto	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
número de piezas	30	35	20	5	5	4	2

Compruebe que la proporción de unidades defectuosas en las 1000 unidades es de 0.073.
Nota: Para entender esta tabla tenga en cuenta, por ejemplo, que si una unidad tiene el defecto A y el B, pero no el C, figurará en la columna A, en la B y en la AB.

14. La clasificación de los grupos sanguíneos (tipos de sangre) se realiza de acuerdo con la presencia o ausencia de tres antígenos, que están simbolizados por A, B y Rh. Este sistema da lugar a ocho tipos posibles de sangre, que son los siguientes:

Tipo de sangre	Antígeno presente
0 negativo	ningún antígeno
0 positivo	Rh
A negativo	A
A positivo	A y Rh
B negativo	B
B positivo	B y Rh
AB negativo	A y B
AB positivo	A, B y Rh

En un grupo numeroso de personas se detectó que 40 % tenían antígeno A, 50 % el antígeno B, 60 % antígeno Rh, 20 % los antígenos A y B, 30 % los antígenos A y Rh, 30 % los antígenos B y Rh y, por último, 20 % los tres.
Determinar el porcentaje de personas que pertenece al tipo sanguíneo:
a) 0 positivo *b*) 0 negativo *c*) A negativo.

Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

15. Cierto tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los cojinetes, por combustión del bobinado o por desgaste de las escobillas. Suponga que la probabilidad de la obstrucción es el doble de la de combustión, la cual es cuatro veces más probable que la inutilización de las escobillas. ¿Cuál es la probabilidad de que el fallo sea por cada uno de estos tres mecanismos si la probabilidad de que el motor falle es 0.13? Indique las hipótesis que debe asumir para resolver el problema.

16. Un sistema de frenado diseñado para impedir que los automóviles derrapen puede descomponerse en tres subsistemas en serie (el sistema de frenado opera adecuadamente si y solo sí los tres subsistemas operan adecuadamente), que operan independientemente: un sistema electrónico, otro hidráulico y un tercero mecánico. La *confiabilidad de un sistema* se define como la probabilidad de que funcione adecuadamente durante un período de tiempo dado.
En cierto tipo de frenado las confiabilidades de cada subsistema son respectivamente 0.998; 0.997.y 0.993.

    a) Determine la confiabilidad del sistema.

    b) Si en cierto período de operación el sistema falló porque eso ocurrió con uno de los subsistemas, ¿cuál de los tres es más probable que haya fallado?

17. Un número binario está compuesto sólo de los dígitos **0** y **1**. Esos dígitos se transmiten uno tras otro a través de cierto canal de información. Suponga que la probabilidad de que se transmita un dígito incorrecto es p y que los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir al extremo del canal de información un número incorrecto de n dígitos ? La condición de número incorrecto corresponde a que por lo menos un bit sea recibido con error.

b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir al extremo del canal de información un número incorrecto de n dígitos por tener sólo un bit con error?

18. Agregando tres bits extras a una palabra de 4 bits de una manera particular (código de *Hamming*) se puede detectar y corregir hasta un error en cualquiera de los bits. Si la probabilidad de que un bit sea cambiado durante la transmisión (y por consiguiente se transmita con error) es 0.05 y esos cambios son independientes:

    a) ¿cuál es la probabilidad de que una palabra (de 7 bits en total) sea correctamente recibida (o sea con hasta un error) ?

    b) Compare la probabilidad calculada en a) con la que correspondería si la palabra de 4 bits no fuera transmitida con bits de chequeo. En este caso los 4 bits deben recibirse sin error para que la palabra no tenga error.

19. En la fabricación de cierto artículo se encuentra que se presenta un tipo de defectos con una probabilidad de 0.1 y defectos de un segundo tipo con una probabilidad de 0.05.
    Si la ocurrencia de esos defectos puedan suponerse sucesos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que:

    a) un artículo no tenga ambas clases de defectos?

    b) un artículo sea defectuoso?

    c) sabiendo que un artículo es defectuoso, tenga sólo un tipo de defecto?

20. Los contactos A, B, C, D, pertenecen a distintos relevadores (ver Fig. 1). Cuando se excita cualquier relevador se cierra el contacto pero puede ocurrir una falla de conexión con probabilidad 10^{-2}. Calcule la probabilidad de que circule corriente entre la entrada y la salida del circuito de la figura al excitar los cuatro relevadores. Asuma independencia de falla de los relevadores.

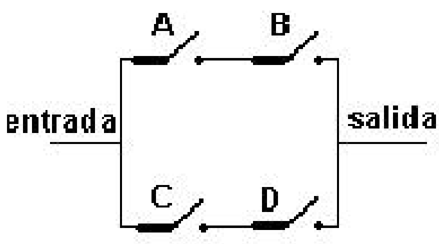


Figura 1: sistema de relevadores

21. Un conjunto electrónico consta de 2 subsistemas, A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen estas probabilidades: P (A falle) = 0.2; P (B sólo falle) = 0.15; P (A y B fallen) = 0.15.
    Calcule las siguientes probabilidades:

    a) P$\big($A falle$|$ B haya fallado$\big)$.

    b) P (sólo A falle).

22. Para la señalización de emergencia se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador accione durante la avería es igual a 0.95 para el primero de ellos y 0.9 para el segundo.

    a) Halle la probabilidad de que durante la avería accione sólo un indicador.

    b) Calcule la probabilidad de que durante la avería se accionen k indicadores para k tomando los valores 0, 1, y 2.

23. Una instalación industrial funciona cuando lo hacen un motor y al menos dos de tres equipos de bombeo. La probabilidad de que funcione el motor es 0.95 y la de funcionamiento de cada equipo de bombeo es 0.8. Se supone que la ocurrencia de falla en el motor o cualquiera de las bombas son sucesos independientes.

    a) Calcule la probabilidad de buen funcionamiento de la instalación.

    b) Si la instalación funciona calcular la probabilidad de que funcionen exactamente dos equipos de bombeo.

24. En una pequeña ciudad se publican dos diarios *Nuevos Aires* y *Opinión*. El 40 % de los habitantes lee *Nuevos Aires*, el 23 % lee *Opinión* y el 8 % lee ambos.

    a) ¿Cuál es el porcentaje de personas que lee diarios ?

    b) De los habitantes que leen diarios, ¿qué porcentaje lee *Opinión* ?

    c) Si se eligen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas lean diarios ?

    d) ¿Qué porcentaje de la población lee sólo *Nuevos Aires*?

    Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

25. Un análisis para detectar una enfermedad infecciosa ofrece un 90 % de confiabilidad en los enfermos (la probabilidad de detección de la enfermedad si la persona está enferma es 0.9) y 99 % en las personas sanas (o sea que en el 1 % de los casos se declara como enfermo a una persona que no lo está).
    Por datos recopilados con anterioridad se estimó que el 5 % de las personas padece esta enfermedad.

    a) Calcule la probabilidad de que un análisis resulte positivo.

    b) Calcule la probabilidad de que ocurra un *falso positivo*. Esto sucede cuando el análisis da positivo y la persona no está infectada.

    c) Calcule la probabilidad de que se produzca un *falso negativo*. Esto ocurre cuando el análisis da negativo y la persona está infectada.

    d) Supongamos que se hace un análisis en un laboratorio y resulta positivo. Calcule la probabilidad que la persona de la que se extrajo la muestra para este análisis esté efectivamente enferma.

    e) Una persona se realiza el análisis y le da positivo. Como está preocupado decide realizar en otro laboratorio un análisis del mismo tipo (con las mismas probabilidades 0.9 y 0.99 del anterior laboratorio). Suponga que los resultados de los análisis de estos laboratorios son independientes. Si ambos análisis dan positivos, ¿cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma?
    Ayuda: Si bien *informalmente* decimos que los análisis de los diferentes laboratorios son independientes entre sí, más *formalmente* deberíamos decir que los análisis de los laboratorios son independientes condicionados por la condición de enfermo o no del individuo. Por tanto, si $T_i =$ da positivo el test i, y $E =$ individuo enfermo, entonces $\mathrm{P}\big(T_1 \cap T_2 | E\big) = \mathrm{P}\big(T_1 | E\big)\mathrm{P}\big(T_2 | E\big)$, y $\mathrm{P}\big(T_1 \cap T_2 | E^c\big) = \mathrm{P}\big(T_1 | E^c\big)\mathrm{P}\big(T_2 | E^c\big)$.
    Sugerencia: Realice un diagrama de árbol para representar la sucesión de eventos.

26. El control de calidad para cierto tipo de motor eléctrico consiste en dos pruebas: S (ensayo de sobrecarga) y C (ensayo de consumo). Se estimó que el 3 % de los motores que se someten a este control falla en la prueba S, el 4 % en la prueba C y el 95 % en ninguna de las dos.

    a) ¿Son las fallas en las pruebas sucesos estadísticamente independientes?

    b) De los motores que fallan en S, ¿qué porcentaje falla en la prueba C?

27. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25 %, 35 % y 40 % de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5 %, 4 % y 2 % respectivamente son pernos defectuosos. Se escoge un perno al azar del total de lo producido por las tres máquinas.

    a) ¿Cual es la probabilidad de que el perno extraído sea defectuoso?
    Esta probabilidad expresada como porcentaje corresponde al porcentaje de defecto del total de lo producido y siempre resulta entre los porcentajes mínimo y máximo de defectos de las máquinas.

    b) Si el perno extraído es defectuoso, ¿de qué máquina es más probable que provenga ?

28. Un sistema de transmisión de energía eléctrica está compuesto por un transformador elevador T_1, dos líneas de transporte de energía L y dos transformadores reductores T_2 (ver Fig. 2). El consumidor puede recibir por cualquier línea la potencia que necesite, pero el transformador reductor puede transmitir sólo el 50 % de la potencia requerida por el consumidor. La

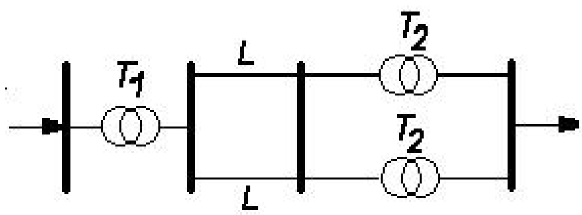


Figura 2: sistema de transmisión

probabilidad de falla del transformador T_1 es $q_{T1} = 0.05$, de una línea L es $q_L = 0.03$ y la del transformador T_2 es $q_{T2} = 0.006$. Los fallos de todos los elementos se consideran sucesos aleatorios independientes.
Determine la probabilidad de transmitir un porcentaje de la potencia requerida por el consumidor del:
a) 100 %, *b*) 50 %, *c*) 0 %.

Sugerencias: Por ejemplo para que el consumidor pueda recibir el 100 % de lo que requiere debe funcionar correctamente el transformador elevador T_1, al menos una de las dos líneas L deben funcionar y no fallar ninguno de los dos transformadores reductores T_2. Puede resultar conveniente realizar un diagrama de árbol con una sucesión de sucesos independientes comenzando con un primer par de sucesos (primeras dos ramas) ***T1*** *y su opuesto siendo* ***T1*** *la falla del transformador 1.*

Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

29. Un transmisor está enviando un mensaje mediante un código binario, es decir, una secuencia de **0** y **1**. Cada bit transmitido (**0** ó **1**) debe pasar por tres sistemas repetidores para llegar al receptor. En cada repetidor el bit enviado puede ser diferente del bit recibido (una inversión)

con probabilidad 0.10. Supongamos que los repetidores operan independientemente uno de otro.

$$\text{Transmisor} \rightarrow \text{Repetidor 1} \rightarrow \text{Repetidor 2} \rightarrow \text{Repetidor 3} \rightarrow \text{Receptor.}$$

a) Si se envía un **1** desde el transmisor, ¿cuál es la probabilidad de que el receptor reciba un **1**?

b) Supongamos que 70 % de todos los bits enviados desde el transmisor son **1**. Si un **1** es recibido por el receptor, ¿cuál es la probabilidad de que se haya enviado un **1**?

Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

30. En un proceso de producción de artículos de goma se consideran de buena calidad a aquellos que no son ni excesivamente duros ni excesivamente blandos. Se ha efectuado un estudio estadístico determinándose que el 5 % de los artículos son excesivamente blandos (EB) y el 4 % son excesivamente duros (ED). El 15 % de los artículos ED se vende al público, mientras que el 98 % de los EB no sale a la venta. Se sabe además que la probabilidad de que un artículo de buena calidad no se venda es 0.01.

    a) ¿Qué porcentaje de artículos se vende al público?

    b) ¿Qué porcentaje de artículos que salen a la venta son de mala calidad?

    Resolución aquí.

31. Una empresa compra bulones a un proveedor. El control de calidad en la recepción establece seleccionar una muestra al azar de 20 bulones de la partida entregada por el proveedor y rechazarla si se encuentra 1 o más defectuosos. La probabilidad de que un bulón sea defectuoso es $p = 0.04$.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar la partida? Indique que consideraciones tuvo en cuenta para hacer el cálculo.

    b) Realice un gráfico de la probabilidad de aceptar la partida en función de p.

    c) Un lote se considera aceptable si $p \leq 0.03$. ¿Cuál es la máxima probabilidad de rechazar un lote aceptable?

    d) Para ahorrar costo en el control de recepción los bulones se verifican uno tras otro y se detiene el proceso rechazando el lote ante el primer bulón defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el rechazo se produzca con el quinto bulón controlado? Suponga $p = 0.04$.

32. Se extraen 10 cartas de un mazo de truco (todas de una vez ó una tras otra sin reposición). ¿Cuál es la probabilidad de sacar: a) por lo menos un as, b) por lo menos dos ases.

33. Ocho personas, entre las que se encuentran Jorge y Alejandro, se forman en una fila para acceder a una caja registradora. Si la fila se formó al azar calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

    a) Jorge y Alejandro están uno detrás del otro

    b) Entre Jorge y Alejandro hay dos personas

    Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

34. En un sorteo con 100 números hay 5 premios. Se venden todos los números y Ud. compra 5. Calcular la probabilidad de:

a) sacar dos premios.
b) sacar por lo menos un premio.

35. Para poder operar la cuenta personal de banco a través de un cajero automático hay que ingresar un conjunto de 4 dígitos en sucesión (el PIN de la tarjeta). Calcular la probabilidad de poder operar la cuenta en un intento al elegir los cuatro números al azar, sabiendo que:

    a) todos los dígitos son distintos;
    b) el número de cuatro dígitos es capicúa.

36. Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Halle la probabilidad de los sucesos que se indican a continuación:

    a) los dos resultados son iguales,
    b) los dos resultados son distintos y su suma no supera 9,
    c) la suma de ambos resultados es 10,
    d) el primer resultado es inferior a 4 y el segundo es impar,
    e) el módulo de la diferencia entre ambos resultados es 1.

37. Se sacan dos cartas al azar de un mazo de cartas españolas (48 cartas, no se toman en cuenta los comodines). Hallar la probabilidad de que:

    a) las dos cartas sean de espadas.
    b) una sea de espadas y la otra de copas.
    c) las dos sean del mismo palo.
    d) las dos sean de distinto palo

    Resolución aquí. Video con el ejercicio explicado.

38. Suponga que en una población de N elementos se toma una muestra aleatoria de tamaño n.

    a) Encontrar la probabilidad p de que ninguno de m elementos ($m \leq N$) determinados queden incluidos en la muestra si suponemos que el muestreo se hace: (a) sin reemplazo, (b) con reemplazo.
    b) Comparar los valores numéricos de las probabilidades para ambas modalidades de muestreo si $N = 100$ y: a) $n = m = 3$, b) $n = m = 10$ c) $n = m = 20$. Saque alguna conclusión.
    c) Obtenga expresiones para p, en ambas modalidades de muestreo, en la forma de un producto de n factores (en un caso son distintos y en el otro todos iguales). Suponga $n > 1$. Por comparación de esos factores demuestre que la probabilidad p es menor en el caso del muestreo sin reposición que el caso con reposición.

39. Hay tres partidas de 20 piezas en cada una. El número de piezas estándares en la primera, segunda y tercera de las partidas es respectivamente igual a 20, l5 y 10. De una partida tomada al azar se ha escogido en forma aleatoria una pieza que resultó estándar.
    Calcular la probabilidad de que la pieza se haya tomado de la tercera partida.

40. Un fabricante arma equipos con 10 componentes básicos. Si alguno de ellos falla el equipo no funciona. La probabilidad de que un componente sea defectuoso es $p = 0.02$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo funcione al ser armado?

b) ¿Cuál debería ser el valor de p para que la probabilidad de que el equipo funcione sea la mitad de la calculada anteriormente?

c) Para disminuir la probabilidad de que el equipo falle se coloca en cada uno de los 10 componentes otro idéntico en paralelo. De esta manera cada uno de estos paralelos de dos componentes funciona si por lo menos uno funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo falle? Considere $p = 0.02$.

3. Respuestas

1. b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{36}$.
4.
a.1) $S=\{D,B\}$, $\mathrm{P}(D)=0.1$, $\mathrm{P}(B)=0.9$.
a.2) $S=\{(D,D),(DB),(BB)\}$, $\mathrm{P}(DD)=\frac{1}{110}$, $\mathrm{P}(DB)=\frac{20}{110}$, $\mathrm{P}(BB)=\frac{89}{110}$.
a.3) $S=\{(DD),(DB),(BD),(BB)\}$, $\mathrm{P}(DD)=\frac{1}{110}$, $\mathrm{P}(DB)=\mathrm{P}(BD)=\frac{1}{11}$, $\mathrm{P}(BB)=\frac{89}{110}$.
a.4) $S=\{(DD),(DB),(BD),(BB)\}$, $\mathrm{P}(DD)=0.01$, $\mathrm{P}(DB)=\mathrm{P}(BD)=0.09$, $\mathrm{P}(BB)=0.81$.
a.5) $S=\{0,1,2\}$, $\mathrm{P}(0)=0.81$, $\mathrm{P}(1)=0.18$, $\mathrm{P}(2)=0.01$.
a.6) $S=\{0,1,2\}$, $\mathrm{P}(0)=\frac{89}{110}$, $\mathrm{P}(1)=\frac{2}{11}$, $\mathrm{P}(2)=\frac{1}{110}$.
5. a) $x+y-z$ b) $y-z$ c) $1-y+z$ d) $x-z$.
6. $\frac{5}{8}$.
7. 0.625.
8. 0.75.
9. a) 0.75 b) 0.5 c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{5}{6}$.
10. a) No b) $\mathrm{P}(A\cup B)=0.7$, $\mathrm{P}\big(B|\,A\big)=0.6$.
11. a) 0.3 b) 0.5.
12. a) 0.7001 b) 0.2559.
13. 0.073.
14. a) 20 % b) 10 % c) 10 %.
15. P (falla escobillas) = 0.01, P (falla cojinetes) = 0.04, P (falla bat) = 0.08.
16. a) 0.98804 b) Es más probable que sea el tercero el que haya fallado.
17. $1-(1-p)^n$.
18. a) 0.9556 b) 0.8145.
19. a) 0.995 b) 0.145 c) 0.9655.
20. 0.999604.
21. a) 0.5 b) 0.05.
22. a) 0.14 .
23. a) 0.8512 b) 0.4286.
24. a) 55 % b) 41.8 % c) 0.3025 (30.25 %) d) 32 %.
25. a) 0.0545 b) 0.0095 c) 0.005 d) 0.8257 e) 0.9977.
26. a) No b) 66.6 %.
27. a) 0.0345 (3.45 %) b) Es más probable que provenga de la máquina B.
28. a) 0.938 b) 0.0113 c) 0.051.
29. a) 0.756 b) 0.878.
30. a) 90.79 % b) 0.77 % .
31. a) 0.5579 c) 0.4566 d) 0.034.
33. a) 0.25 b) $\frac{5}{28}$.
34. a) 0.01838 b) 0.2304.
35. a) $\frac{1}{5040}$ b) 0.01.
36. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{13}{18}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{18}$.
37 a) $\frac{11}{188}$ b) $\frac{6}{47}$ c) $\frac{11}{47}$ d) $\frac{36}{47}$.
38. a) $\frac{\binom{N-m}{n}}{\binom{N}{n}}$ b) $(1-\frac{m}{N})^n$
39. 0.222.

40. a) 0.81707 b) 0.086 (8.6 %) c) 0.00399.

4. Ejercicios resueltos

Ejercicio 4

En una producción de 100 artículos hay 10 defectuosos y el resto no tiene defectos.

1. Para cada uno de los siguientes experimentos describa un espacio muestral y asigne la probabilidad a cada suceso elemental.

   a) Se extrae un artículo al azar y se registra su calidad.

   b) Se extraen simultáneamente dos artículos y se registra su calidad.

   c) Se extraen sucesivamente sin reposición 2 artículos y se registra su calidad.

   d) Se extraen sucesivamente con reposición 2 artículos y se registra su calidad.

   e) Se extraen sucesivamente con reposición 2 artículos y se cuenta la cantidad de defectuosos.

   f) Se extraen sucesivamente sin reposición 2 artículos y se cuenta la cantidad de defectuosos.

2. Compare los resultados obtenidos en: b) con c) y c) con d) y saque conclusiones.

3. Calcule la probabilidad de que el segundo artículo sea bueno en los casos c) y d). Compare los resultados.

4. Suponga ahora que el tamaño de la población (conjunto total de artículos) es 1000 y hay 100 defectuosos (es decir, la proporción de defectuosos no cambia). Compare los resultados obtenidos en: c) con d) y e) con f). Saque conclusiones.

5. Generalice los ejercicios e) y f) llamando N al tamaño de la población, R a la cantidad de defectuosos y n a la cantidad individuos que se extraen. A n se lo suele llamar *tamaño de la muestra*. Asuma que $R, N-R \geq n$.

Resolución:

1. *a*) Definamos el evento:

$$D = \text{artículo defectuoso.} \tag{19}$$

Un artículo puede ser defectuoso o no defectuoso, por lo que el espacio muestral es $\mathcal{S} = \{D, \overline{D}\}$.
Usando la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(D\right) &= \frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ total de casos}} = \frac{\#\text{ de defectuosos}}{\#\text{ total de artículos}} = \frac{10}{100} \\ &= 0.1, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) &= \frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ total de casos}} = \frac{\#\text{ de \textbf{no} defectuosos}}{\#\text{ total de artículos}} = \frac{90}{100} \\ &= 0.9. \end{aligned} \tag{21}$$

Como era de esperar, $\mathrm{P}\left(D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) = 1$.

b) No es difícil ver que sólo existen las siguientes posibilidades:

$$0D = \text{ninguno de los dos es defectuoso,} \tag{22}$$
$$1D = \text{sólo uno de los dos es defectuoso,} \tag{23}$$
$$2D = \text{los dos son defectuosos.} \tag{24}$$

El espacio muestral está dado por $\mathcal{S} = \{0D, 1D, 2D\}$. Para calcular la probabilidad de cada uno de los eventos elementales, nuevamente utilizamos la regla de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(0D) &= \frac{\text{cantidad de maneras de tomar dos } \textbf{no} \text{ defectuosos y ningún defectuoso}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{dos } \textbf{no} \text{ defectuosos}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{ningún defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos}} \\
&= \frac{\binom{90}{2} \times \binom{10}{0}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{90!}{2!\cdot 88!} \times \frac{10!}{0!\cdot 10!}}{\frac{100!}{2!\cdot 98!}} = \frac{\frac{90\cdot 89}{2}}{\frac{100\cdot 99}{2}} \qquad (25)\\
&= \frac{89}{110} \approx 0.8091,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(1D) &= \frac{\text{cantidad de maneras de tomar uno } \textbf{no} \text{ defectuoso y uno defectuoso}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{uno } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{uno defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos}} \\
&= \frac{\binom{90}{1} \times \binom{10}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{90!}{1!\cdot 89!} \times \frac{10!}{1!\cdot 9!}}{\frac{100!}{2!\cdot 98!}} = \frac{90 \times 10}{\frac{100\cdot 99}{2}} \qquad (26)\\
&= \frac{2}{11} \approx 0.1818,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(2D) &= \frac{\text{cantidad de maneras de tomar ningún } \textbf{no} \text{ defectuosos y dos defectuosos}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{ningún } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{dos defectuosos}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos}} \\
&= \frac{\binom{90}{0} \times \binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{90!}{0!\cdot 90!} \times \frac{10!}{2!\cdot 8!}}{\frac{100!}{2!\cdot 98!}} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2}}{\frac{100\cdot 99}{2}} \qquad (27)\\
&= \frac{1}{110} \approx 0.0091.
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que $\mathrm{P}(0D) + \mathrm{P}(1D) + \mathrm{P}(2D) = 1$.

c) Los eventos elementales son:

$$\begin{aligned}
DD &= \text{el primero y el segundo artículo son defectuosos,} && (28)\\
D\overline{D} &= \text{el primer artículo es defectuoso y el segundo no,} && (29)\\
\overline{D}D &= \text{el primer artículo no es defectuoso y el segundo sí,} && (30)\\
\overline{D}\overline{D} &= \text{ni el primero ni el segundo artículo son defectuosos.} && (31)
\end{aligned}$$

Por la regla de Laplace, calculamos las probabilidades:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(DD) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\
&= \frac{10 \times 9}{100 \times 99} = \frac{1}{110} \approx 0.0091, \qquad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(D\overline{D}\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{10 \times 90}{100 \times 99} = \frac{1}{11} \approx 0.0909, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{D}D\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{90 \times 10}{100 \times 99} = \frac{1}{11} \approx 0.0909, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{D}\overline{D}\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{90 \times 89}{100 \times 99} = \frac{89}{110} \approx 0.8091. \end{aligned} \tag{35}$$

Es fácil verificar que la suma de las probabilidades de los eventos elementales es 1.

d) Los eventos elementales y el espacio muestral son los mismos que en el ejercicio anterior. Sólo cambian las probabilidades por hecho de que los artículos se reponen.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(DD\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{10 \times 10}{100 \times 100} = \frac{1}{100} = 0.01, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(D\overline{D}\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{10 \times 90}{100 \times 100} = \frac{9}{100} = 0.09, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{D}D\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{90 \times 10}{100 \times 100} = \frac{9}{100} = 0.09, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{D}\overline{D}\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{90 \times 90}{100 \times 100} = \frac{81}{100} = 0.81. \end{aligned} \tag{39}$$

e) Si se sacan dos artículos, puede haber dos defectuosos, uno defectuoso o ninguno defectuoso. Podemos escribir, entonces, el espacio muestral como $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$, donde cada elemento del mismo corresponde al número de defectuosos. Ahora bien, las probabilidades son fáciles de calcular a partir del ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(0\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo } \textbf{no} \text{ defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\ &= \frac{81}{100} = 0.81, \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(1\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo \textbf{no} defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} + \\
&+ \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero \textbf{no} defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\
&= \frac{18}{100} = 0.18,
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(2\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\
&= \frac{1}{100} = 0.01.
\end{aligned} \tag{42}$$

f) El espacio muestral es el mismo que en el ejercicio anterior, pero las probabilidades cambian dado que es sin reposición.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(0\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero \textbf{no} defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo \textbf{no} defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\
&= \frac{89}{110} \approx 0.8091,
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(1\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo \textbf{no} defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} + \\
&+ \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero \textbf{no} defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\
&= \frac{2}{11} \approx 0.1818,
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(2\right) &= \frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el primero defectuoso}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad de maneras de tomar}\\ \text{el segundo defectuoso}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de maneras de tomar dos artículos sin reposición}} \\
&= \frac{1}{110} \approx 0.0091.
\end{aligned} \tag{45}$$

2. *b)- simultáneamente* vs. *c) - secuencialmente sin reposición:* En el ejercicio b), al sacar ambos artículos simultáneamente, no tengo forma de distinguir uno del otro. En el ejercicio c), en cambio, si puedo distinguir el **primero** del **segundo**.

   c) - sin reposición vs. *d) - con reposición:* En el d), al haber reponerse los artículos extraídos, no influye la calidad del primer artículo obtenido sobre la calidad del segundo artículo obtenido. En el c), en cambio, las calidad del segundo artículo no es independiente de la calidad del primero: por ej., si el primero fue defectuoso, tengo un defectuoso menos entre los artículos restantes.

3. Llamemos $B2$ al evento. No es difícil ver que $B2 = D\overline{D} \cup \overline{D}D$, por lo que $\mathrm{P}\left(B2\right) = \mathrm{P}\left(D\overline{D}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}D\right)$.

   c) - sin reposición:

$$\mathrm{P}\left(B2\right) = \frac{9}{11} \approx 0.8182. \tag{46}$$

d) - con reposición:

$$\mathrm{P}(B2) = \frac{9}{10} = 0.9000. \tag{47}$$

4. *c) - sin reposición:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(DD) &= \frac{100 \times 99}{1000 \times 999} = \frac{11}{1110} \approx 0.0099, && (48)\\
\mathrm{P}\left(D\overline{D}\right) &= \frac{100 \times 900}{1000 \times 999} = \frac{10}{111} \approx 0.0901, && (49)\\
\mathrm{P}\left(\overline{D}D\right) &= \frac{900 \times 100}{1000 \times 999} = \frac{10}{111} \approx 0.0901, && (50)\\
\mathrm{P}\left(\overline{D}\overline{D}\right) &= \frac{900 \times 899}{1000 \times 999} = \frac{899}{1110} \approx 0.8099. && (51)
\end{aligned}$$

d) - con reposición:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(DD) &= \frac{100 \times 100}{1000 \times 1000} = \frac{1}{100} = 0.01, && (52)\\
\mathrm{P}\left(D\overline{D}\right) &= \frac{100 \times 900}{1000 \times 1000} = \frac{9}{100} = 0.09, && (53)\\
\mathrm{P}\left(\overline{D}D\right) &= \frac{900 \times 100}{1000 \times 1000} = \frac{9}{100} = 0.09, && (54)\\
\mathrm{P}\left(\overline{D}\overline{D}\right) &= \frac{900 \times 900}{1000 \times 1000} = \frac{81}{100} = 0.81. && (55)
\end{aligned}$$

e) - con reposición:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(0) &= \frac{1}{100} = 0.01, && (56)\\
\mathrm{P}(1) &= \frac{9}{50} = 0.18, && (57)\\
\mathrm{P}(2) &= \frac{81}{100} = 0.81. && (58)
\end{aligned}$$

f) - sin reposición:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(0) &= \frac{11}{1110} \approx 0.0099, && (59)\\
\mathrm{P}(1) &= \frac{20}{111} \approx 0.1802, && (60)\\
\mathrm{P}(2) &= \frac{899}{1110} \approx 0.8099. && (61)
\end{aligned}$$

Conclusión. Usando la notación del próximo ejercicio: No es demasiado difícil ver que si $N, N-D, D \gg n$, entonces no habrá mucha diferencia entre las probabilidades con o sin reposición. Vea también el próximo ejercicio.

5. En ambos casos, el espacio muestral es $\mathcal{S} = \{0, 1, \cdots, n\}$, donde cada elemento corresponde a la cantidad de defectuosos extraídos.

   Con reposición: Consideremos la probabilidad de obtener k defectuosos en los primeros k extraídos y ningún defectuoso entre los demás:

$$\begin{aligned}
\frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ total de casos}} &= \frac{\overbrace{R \times R \times \cdots R}^{k \text{ veces}} \times \overbrace{(N-R) \times (N-R) \times \cdots (N-R)}^{n-k \text{ veces}}}{\underbrace{N \times N \times \cdots N}_{n \text{ veces}}}\\
&= \frac{R^k (N-R)^{n-k}}{N^n}.
\end{aligned} \tag{62}$$

No es tan difícil ver que, en realidad, el orden exacto en que se encuentren los k defectuosos no es relevante para este cálculo. Es decir, la probabilidad de obtener k defectuosos en una posición dada (sea cual fuere) y $(n-k)$ no defectuosos es siempre la misma:

$$\frac{R^k\,(N-R)^{n-k}}{N^n} = p^k\,(1-p)^{n-k}, \tag{63}$$

donde hemos definido $p = R/N$, la proporción de defectuosos. Para poder calcular la probabilidad de que haya exactamente k defectuosos en la muestra, debemos sumar este valor tantas veces como posibles ordenamientos de k defectuosos y $(n-k)$ defectuosos pueda haber. Esto es,

$$\mathrm{P}\,(k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}, \tag{64}$$

donde hemos usado el hecho que el número de formas de ordenar k elementos indistinguibles (son todos defectuosos) en una lista n está dado por el número combinatorio que aparece como primer factor.

Es fácil verificar que la suma de las probabilidades de los eventos es igual a 1:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\,(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1. \tag{65}$$

Sin reposición: Consideremos la probabilidad de obtener k defectuosos en los primeros k extraídos y ningún defectuoso entre los demás:

$$\frac{[R\times(R-1)\times\cdots(R-(k-1))]\,\times\,[(N-R)\times(N-R-1)\times\cdots(N-R-(n-k-1))]}{N\times(N-1)\times\cdots(N-(n-1))}. \tag{66}$$

Al igual que en el caso con reposición, no es difícil ver que el orden exacto en que se encuentren los k defectuosos no es relevante para este cálculo. Es decir, la probabilidad de obtener k defectuosos en una posición dada (sea cual fuere) y $(n-k)$ no defectuosos es siempre la misma:

$$\frac{\left[\prod_{i=0}^{k-1}(R-i)\right]\times\left[\prod_{j=0}^{n-k-1}(N-R-j)\right]}{\prod_{m=0}^{n-1}(N-m)} = \frac{\left[\frac{R!}{(R-k)!}\right]\times\left[\frac{(N-R)!}{(N-R-(n-k))!}\right]}{\frac{N!}{(N-n)!}}. \tag{67}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(k) &= \binom{n}{k}\frac{\left[\prod_{i=0}^{k-1}(R-i)\right]\times\left[\prod_{j=0}^{n-k-1}(N-R-j)\right]}{\prod_{m=0}^{n-1}(N-m)}\\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{\left[\frac{R!}{(R-k)!}\right]\times\left[\frac{(N-R)!}{(N-R-(n-k))!}\right]}{\frac{N!}{(N-n)!}}\\
&= \frac{\left[\frac{R!}{(R-k)!k!}\right]\times\left[\frac{(N-R)!}{(N-R-(n-k))!(n-k)!}\right]}{\frac{N!}{(N-n)!n!}}\\
&= \frac{\binom{R}{k}\times\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}.
\end{aligned} \tag{68}$$

En el caso especial que $N, R, N-R \gg n$, para todo $m \leq n$ tenemos que

$$\begin{aligned} N-m &\approx N, & (69)\\ R-m &\approx R, & (70)\\ N-R-m &\approx N-R. & (71) \end{aligned}$$

Usando esto,

$$\mathrm{P}\left(k\right) \approx \binom{n}{k} \frac{\left[\prod_{i=0}^{k-1} R\right] \times \left[\prod_{j=0}^{n-k-1} \left(N-R\right)\right]}{\prod_{m=0}^{n-1} N} = \binom{n}{k} p^{k} \left(1-p\right)^{n-k}. \tag{72}$$

Es decir que, cuando $N, R, N-R \gg n$, las probabilidades con y sin reposición son muy parecidas.

Ejercicio 10

Considere dos sucesos A y B para los cuáles $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
Calcular:
a) $\mathrm{P}(A|B)$ *b*) $\mathrm{P}(B|A)$ *c*) $\mathrm{P}(A \cup B)$ *d*) $\mathrm{P}(\overline{A}|\overline{B})$ *e*) $\mathrm{P}(\overline{B}|\overline{A})$.

Si $\mathrm{P}(A|B) = 0.6$, $\mathrm{P}(\overline{A} \cup B) = \mathrm{P}(A \cup \overline{B}) = 0.8$,

1. ¿Son independientes los sucesos A y B?
2. Calcular $\mathrm{P}(A \cup B)$ y $\mathrm{P}(B|A)$.

Resolución

Supongamos entonces que A y B son dos sucesos para los cuáles $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
Usando la definición de probabilidad condicional se tiene:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

De igual manera:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Es interesante observar que las probabilidades condicionales $\mathrm{P}(A|B)$ y $\mathrm{P}(B|A)$ son distintas de las incondicionales $\mathrm{P}(A)$ y $\mathrm{P}(B)$, respectivamente, resultando que estos eventos no son independientes.

La probabilidad de que ocurra por lo menos uno de los dos sucesos considerados viene dada por:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Para las otras dos probabilidades condicionales solicitadas también se usa la definición para obtener:

$$\mathrm{P}(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{B})} = \frac{1 - \mathrm{P}(A \cup B)}{1 - \mathrm{P}(B)} = \frac{5/12}{2/3} = \frac{5}{8}.$$

$$\mathrm{P}(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{A})} = \frac{1 - \mathrm{P}(A \cup B)}{1 - \mathrm{P}(A)} = \frac{5/12}{1/2} = \frac{5}{6}.$$

Con estas cuatro probabilidades condicionales se pueden calcular otras cuatro usando la propiedad relativa a la probabilidad del suceso complementario. Por ejemplo:

$$\mathrm{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}|\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

En forma análoga se puede ver que $\mathrm{P}(\overline{B}|A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A|\overline{B}) = \frac{3}{8}$ y $\mathrm{P}(B|\overline{A}) = \frac{1}{6}$.

Si ahora la información disponible es $\mathrm{P}(A|B) = 0.6$, $\mathrm{P}(\overline{A} \cup B) = \mathrm{P}(A \cup \overline{B}) = 0.8$ entonces habrá que obtener $\mathrm{P}(A)$ y $\mathrm{P}(B)$. A partir de las leyes de De Morgan y la probabilidad del suceso complementario se tiene:

$$\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0.2.$$

mientras que, a partir de la definición de probabilidad condicional, se tiene

$$\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = 0.6\,\mathrm{P}\left(A\right).$$

Los sucesos $A \cap B$ y $A \cap \overline{B}$ son una partición de A, son mutuamente excluyentes y su unión es A , entonces

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \mathrm{P}\left(A \cap B\right) + \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = 0.6\,\mathrm{P}\left(A\right) + 0.2,$$

de donde resulta $\mathrm{P}\left(A\right) = 0.5$.
Como $\mathrm{P}\big(A|\,B\big) = 0.6 \neq \mathrm{P}\left(A\right) = 0.5$ entonces los sucesos A y B no son independientes.

De igual manera se puede obtener $\mathrm{P}\left(B\right)$. Los sucesos $B \cap A$ y $B \cap \overline{A}$ son una partición de B, son mutuamente excluyentes y su unión es B. Entonces

$$\mathrm{P}\left(B\right) = \mathrm{P}\left(B \cap A\right) + \mathrm{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = 0.6\,\mathrm{P}\left(A\right) + 0.2,$$

de donde resulta $\mathrm{P}\left(B\right) = 0.5$.

Se puede ver que $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = 0.6\,\mathrm{P}\left(A\right) = 0.3 \neq \mathrm{P}\left(A\right)\,\mathrm{P}\left(B\right) = 0.25$, otra manera de verificar que este par de sucesos no son independientes.

Para terminar se tiene $\mathrm{P}\left(A \cup B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(B\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B\right) = 0.5 + 0.5 - 0.3 = 0.7.$, mientras que $\mathrm{P}\big(A|\,B\big) = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

Ejercicio 11

Si $\mathrm{P}\left(A|\,B\right)$ =0.6, $\mathrm{P}\left(\overline{A}\cup B\right)=\mathrm{P}\left(A\cup\overline{B}\right)=0.8$,

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) Calcular $\mathrm{P}\left(A\cup B\right)$ y $\mathrm{P}\left(B|\,A\right)$

Resolución

En este caso, no es necesario describir los eventos ni los datos porque ya vienen detallados en el enunciado.

Ítem a

Para probar que los sucesos A y B son independientes, debería darse la propiedad: $\mathrm{P}\left(A\cap B\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\right)$. En caso de que la igualdad no se cumpla, podemos afirmar que los eventos no son independientes. Por lo tanto, se pueden calcular los términos $\mathrm{P}\left(A\cap B\right)$, $\mathrm{P}\left(A\right)$ y $\mathrm{P}\left(B\right)$ para ver si se verifica la igualdad.

Empezamos con el dato de $\mathrm{P}\left(A|\,B\right)$ =0.6, por definición, podemos obtener lo siguiente:

$$\mathrm{P}\left(A|\,B\right)=0.6\Rightarrow\frac{\mathrm{P}\left(A\cap B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right)}=0.6\Rightarrow\mathrm{P}\left(A\cap B\right)=0.6\cdot\mathrm{P}\left(B\right)\tag{73}$$

Esta igualdad la usaremos como dato para las ecuaciones subsiguientes. Por otro lado, usando la propiedad de la probabilidad de la unión:

$$\mathrm{P}\left(A\cup\overline{B}\right)=\mathrm{P}\left(A\right)+\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)}_{1-\mathrm{P}(B)}-\underbrace{\mathrm{P}\left(A\cap\overline{B}\right)}_{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}=\cancel{\mathrm{P}\left(A\right)}+1-\mathrm{P}\left(B\right)-\cancel{\mathrm{P}\left(A\right)}+\mathrm{P}\left(A\cap B\right)=1-\mathrm{P}\left(B\right)+0.6{\cdot}\mathrm{P}\left(B\right)\tag{74}$$

Como dato, tenemos además que esta probabilidad debe dar como resultado 0.8. Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$\underbrace{1-\mathrm{P}\left(B\right)+0.6\cdot\mathrm{P}\left(B\right)}_{-0.4\cdot\mathrm{P}(B)}=0.8\Rightarrow1-0.8=0.4\cdot\mathrm{P}\left(B\right)\Rightarrow\frac{0.2}{0.4}=0.5=\mathrm{P}\left(B\right)\tag{75}$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\mathrm{P}\left(A\cap B\right)=0.6{\cdot}0.5=0.3$. Además, tenemos la probabilidad de $\mathrm{P}\left(\overline{A}\cup B\right)=0.8$:

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\cup B\right)=\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)}_{1-\mathrm{P}(A)}+\mathrm{P}\left(B\right)-\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{A}\cap B\right)}_{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}=1-\mathrm{P}\left(A\right)+\cancel{\mathrm{P}\left(B\right)}-\cancel{\mathrm{P}\left(B\right)}+\underbrace{\mathrm{P}\left(A\cap B\right)}_{0.3}=1.3-\mathrm{P}\left(A\right)\tag{76}$$

Teniendo en cuenta que esta expresión tiene que valer 0.8:

$$1.3-\mathrm{P}\left(A\right)=0.8\Rightarrow\mathrm{P}\left(A\right)=0.5\tag{77}$$

Por lo tanto, los eventos A y B no son independientes ya que no se cumple la igualdad requerida:

$$\mathrm{P}\left(A\cap B\right)=0.3\neq0.25=0.5\cdot0.5=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\right)\tag{78}$$

Ítem b

Todas las probabilidades ya calculadas nos facilitarán enormemente esta resolución ya que casi todas las probabilidades involucradas son datos:

$$\mathrm{P}\left(A\cup B\right)=\underbrace{\mathrm{P}\left(A\right)}_{0.5}+\underbrace{\mathrm{P}\left(B\right)}_{0.5}-\underbrace{\mathrm{P}\left(A\cap B\right)}_{0.3}=0.7\tag{79}$$

Por otro lado,

$$\mathrm{P}\big(B|\,A\big) = \frac{\mathrm{P}\left(A \cap B\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6 \tag{80}$$

Notar que el valor de la probabilidad condicional coincide con su inverso $\mathrm{P}\big(A|\,B\big)$. Esta igualdad es casual, no se cumple siempre, pero en este caso se debe a que $\mathrm{P}\left(A \cap B\right)$ es naturalmente idéntico para ambas fracciones y el denominador en este caso coincide. Eso no significa que sea una propiedad que se pueda utilizar ya que generalmente $\mathrm{P}\big(A|\,B\big) \neq \mathrm{P}\big(B|\,A\big)$.

Ejercicio 14

La clasificación de los grupos sanguíneos (tipos de sangre) se realiza de acuerdo con la presencia o ausencia de tres antígenos, que están simbolizados por A, B y Rh. Este sistema da lugar a ocho tipos posibles de sangre, que son los siguientes:

Tipo de sangre	Antígeno presente
0 negativo	ningún antígeno
0 positivo	Rh
A negativo	A
A positivo	A y Rh
B negativo	B
B positivo	B y Rh
AB negativo	A y B
AB positivo	A, B y Rh

(81)

En un grupo numeroso de personas se detectó que 40 % tenían antígeno A, 50 % el antígeno B, 60 % antígeno Rh, 20 % los antígenos A y B, 30 % los antígenos A y Rh, 30 % los antígenos B y Rh y, por último, 20 % los tres. Determinar el porcentaje de personas que pertenece al tipo sanguíneo:

a) 0 positivo b) 0 negativo c) A negativo

Resolución

En todos los ejercicios de esta guía y en gran parte de la materia, es esencial comenzar definiendo los eventos de relevancia que ayuden a comprender el fenómeno aleatorio y sus probabilidades.

Eventos

En este caso, consideraremos los siguientes eventos:

- $A =$ la persona elegida tiene el antígeno A.
- $B =$ la persona elegida tiene el antígeno B.
- $Rh =$ la persona elegida tiene el antígeno Rh.

En base a las combinaciones de estos eventos se pueden tener las 8 situaciones descriptas en la tabla.

Datos

Ahora que tenemos definidos los eventos, pasemos a detallar los datos probabilísticos que nos provee el enunciado:

- $P(A)=0.4$
- $P(Rh)=0.6$
- $P(A \cap Rh)=0.3$
- $P(A \cap B \cap Rh)=0.2$
- $P(B)=0.5$
- $P(A \cap B)=0.2$
- $P(B \cap Rh)=0.3$

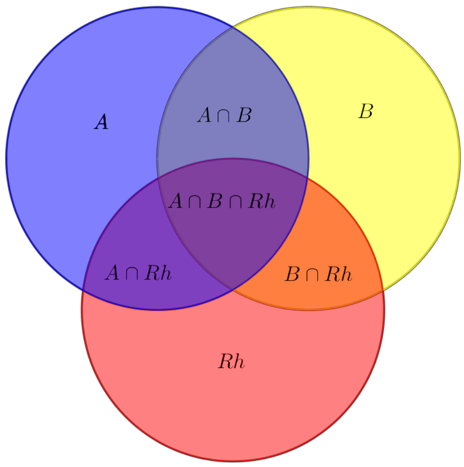
Comentarios:

- Notar que los datos provistos no corresponden a eventos excluyentes. Por ejemplo, cuando se refiere a que cuando dice que una persona tiene el antígeno Rh, no significa que sólo tiene ese anticuerpo. Si fuera así, la probabilidad de $Rh \cup (A \cap Rh) \cup (B \cap Rh)$ tendría probabilidad 1.2 (la suma de las probabilidades), lo cual es un absurdo dado que la probabilidad de un evento no puede exceder el valor de 1. Esto denota la importancia de ser precisos a la hora de definir los eventos. Definir el evento A como "la persona extraída **sólo** tiene el antígeno A" cambiaría todas las probabilidades dadas como dato.

- Por otro lado, puede haber confusión al pensar en que una persona elegida pueda tener una probabilidad de 40 % de tener el antígeno A, cuando en realidad, esa persona lo tiene o no lo tiene, sin ningún tipo de probabilidad. Es decir, si se focaliza en lo individual, el hecho de tener o no tener el antígeno A no es una cuestión aleatoria. Sin embargo, cuando se piensa en el conjunto, lo aleatorio pasa por la elección al azar, es decir, la probabilidad de 40 % corresponde a las chances de elegir entre todas las personas a una persona que tenga el antígeno A y no debe verse de forma individual.

Diagrama de Venn

Como en este ejercicio tenemos tres eventos mayoritarios que se vinculan entre sí, nos conviene usar como referencia un Diagrama de Venn que nos permita entender cómo escribir un evento en términos de los que ya son conocidos:



Otra serie de propiedades que nos serán de mucha utilidad son las leyes de De Morgan. Donde para dos conjuntos C y D se cumplen las siguientes ecuaciones:

- $\overline{C \cup D} = \overline{C} \cap \overline{D}$
- $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cup \overline{D}$

A partir de estas leyes, se pueden deducir las siguientes propiedades respecto de las probabilidades:

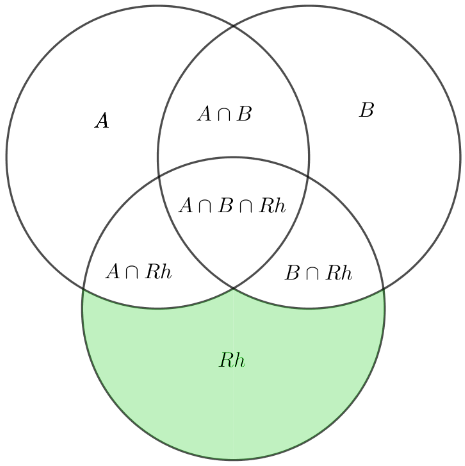
- $\mathrm{P}\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{C \cup D}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(C \cup D\right)$
- $\mathrm{P}\left(\overline{C} \cup \overline{D}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{C \cap D}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(C \cap D\right)$

Ítem a

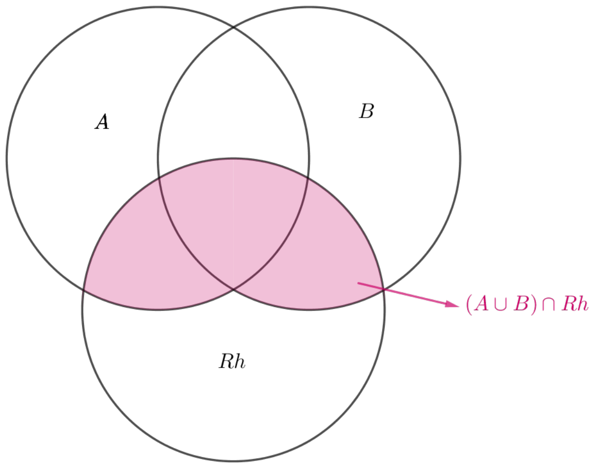
Nos piden la probabilidad de elegir a una persona que tenga 0 positivo como tipo de sangre, es decir, que no tenga ninguno de los antígenos A ni B, pero que sí tenga el antígeno Rh. Por lo tanto, podemos describir el evento de la siguiente manera:

$$0^{+} = \text{ la persona elegida tiene 0 positivo como grupo sanguíneo} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap Rh \qquad (82)$$

En el Diagrama de Venn podemos verlo del siguiente modo:



Es decir, podríamos considerarlo como todo lo correspondiente al evento Rh, aunque sin lo concerniente a A o B. Como conjuntos, podemos pensarlo como $Rh \setminus (A \cup B)$. Más aún, como de $A \cup B$ sólo se remueven los elementos de Rh, podríamos escribir el conjunto como $Rh \setminus ([A \cup B] \cap Rh)$. En el diagrama de Venn observamos el conjunto que se extrae e Rh:



Por lo tanto, podemos usar que el evento que se extrae está incluido en Rh para escribirlo como resta de probabilidades:

$$\mathrm{P}\left(0^{+}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap Rh\right) = \mathrm{P}\left(Rh \setminus [[A \cup B] \cap Rh]\right) = \mathrm{P}\left(Rh\right) - \mathrm{P}\left([A \cup B] \cap Rh\right) \tag{83}$$

Viendo el diagrama, podemos concluir además que $[A \cup B] \cap Rh = [A \cap Rh] \cup [B \cap Rh]$. Esto nos habilita a usar la propiedad conocida para la probabilidad de la unión:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(Rh\right) - \mathrm{P}\left([A \cup B] \cap Rh\right) &= \mathrm{P}\left(Rh\right) - \mathrm{P}\left([A \cap Rh] \cup [B \cap Rh]\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Rh\right) - \left[\mathrm{P}\left(A \cap Rh\right) + \mathrm{P}\left(B \cap Rh\right) - \mathrm{P}\left([A \cap Rh] \cap [B \cap Rh]\right)\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos logrado una expresión en términos de las probabilidades conocidas, salvo por la última resta ($\mathrm{P}\left([A \cap Rh] \cap [B \cap Rh]\right)$). Sin embargo, el conjunto puede categorizarse como los individuos que tienen el antígeno A, el antígeno Rh, el antígeno B y nuevamente el antígeno Rh. Por lo tanto, esta última condición es superflua y podemos escribirlo como $A \cap B \cap Rh$:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}\left(Rh\right) - \left[\mathrm{P}\left(A \cap Rh\right) + \mathrm{P}\left(B \cap Rh\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B \cap Rh\right)\right] = \\ \underbrace{\mathrm{P}\left(Rh\right)}_{0.6} - \underbrace{\mathrm{P}\left(A \cap Rh\right)}_{0.3} - \underbrace{\mathrm{P}\left(B \cap Rh\right)}_{0.3} + \underbrace{\mathrm{P}\left(A \cap B \cap Rh\right)}_{0.2} = 0.2\end{gathered}$$

Notar además que la consigna pide el **porcentaje** de personas con grupo sanguíneo 0 positivo. Por lo tanto, la respuesta final tiene que ser un valor entre 0 y 100, multiplicando la probabilidad (entre 0 y 1) por 100. Es decir, el porcentaje de personas con grupo sanguíneo 0 positivo es del 20 %.

Ítem b

En este caso, nos piden la probabilidad de elegir una persona con tipo de sangre 0 negativo, es decir, que no tiene **ninguno** de los tres antígenos. Es decir, podríamos describir al conjunto de la siguiente manera:

$$0^- = \text{ la persona elegida tiene 0 negativo como grupo sanguíneo} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{Rh} \tag{84}$$

Por lo tanto, usando las leyes de De Morgan, podemos calcular el complemento de esta intersección, que se corresponde con la unión de los complementos:

$$\mathrm{P}\left(0^-\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{Rh}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{Rh}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} \cup \overline{\overline{Rh}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(A \cup B \cup Rh\right) \tag{85}$$

Para este último término, se puede utilizar la propiedad de la probabilidad de la unión:

$$\mathrm{P}\left(\underbrace{A \cup B} \cup \underbrace{Rh}\right) = \mathrm{P}\left(A \cup B\right) + \mathrm{P}\left(Rh\right) - \mathrm{P}\left(\left[A \cup B\right] \cap Rh\right) \tag{86}$$

Para el primer término, se puede volver a aplicar la probabilidad de la unión. Para el último término, ya hemos visto en el ítem anterior que el conjunto $[A \cup B] \cap Rh$ se puede escribir como $[A \cap Rh] \cup [B \cap Rh]$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(B\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B\right) + \mathrm{P}\left(Rh\right) - \mathrm{P}\left(\underbrace{[A \cap Rh]} \cup \underbrace{[B \cap Rh]}\right) = \\ &= \mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(B\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B\right) + \mathrm{P}\left(Rh\right) - \left[\mathrm{P}\left(A \cap Rh\right) + \mathrm{P}\left(B \cap Rh\right) - \mathrm{P}\left(\underbrace{[A \cap Rh] \cap [B \cap Rh]}_{A \cap B \cap Rh}\right)\right] = \\ &= \mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(B\right) + \mathrm{P}\left(Rh\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B\right) - \mathrm{P}\left(A \cap Rh\right) - \mathrm{P}\left(B \cap Rh\right) + \mathrm{P}\left(A \cap B \cap Rh\right)\end{aligned} \tag{87}$$

Esta última expresión se puede interpretar del siguiente modo. Así como en la propiedad de la probabilidad de la unión se suman las probabilidades de los conjuntos y se resta la probabilidad de la intersección, dado que los elementos de este último conjunto fue contabilizado dos veces, en el caso de una unión de tres conjuntos, se procede de forma similar.

Al sumar las probabilidades de los conjuntos que se unen, los elementos de las intersecciones de a pares fueron contabilizados más de una vez, por lo que se restan las probabilidades de las tres intersecciones de a pares. Sin embargo, al restar las tres intersecciones de a pares, los elementos de la intersección triple fueron removidos enteramente ya que fueron sumados tres veces, pero restados también tres veces. Por lo tanto, se vuelve a sumar la intersección triple para que la probabilidad sea contabilizada de forma adecuada.

Por lo tanto, la probabilidad de elegir una persona con tipo de sangre 0 negativo se obtiene del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(0^-\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(A \cup B \cup Rh\right) \\ &= 1 - [\underbrace{\mathrm{P}\left(A\right)}_{0.4} + \underbrace{\mathrm{P}\left(B\right)}_{0.5} + \underbrace{\mathrm{P}\left(Rh\right)}_{0.6} - \underbrace{\mathrm{P}\left(A \cap B\right)}_{0.2} - \underbrace{\mathrm{P}\left(A \cap Rh\right)}_{0.3} - \underbrace{\mathrm{P}\left(B \cap Rh\right)}_{0.3} + \underbrace{\mathrm{P}\left(A \cap B \cap Rh\right)}_{0.2}] \\ &= 0.1\end{aligned}$$

Nuevamente, en términos de porcentaje, el 10 % de la población tiene 0 negativo como grupo sanguíneo.

Ítem c

En este caso, nos piden la probabilidad de elegir una persona con tipo de sangre A negativo. Es decir, tiene sólo el antígeno A:

$$A^- = \text{ la persona elegida tiene 0 negativo como grupo sanguíneo} = A \cap \overline{B} \cap \overline{Rh} \tag{88}$$

Del mismo modo que en el ítem a, en este caso hay un único antígeno (A) y por lo tanto, puede considerarse que el evento deseado coincide con la sustracción de la unión de los dos conjuntos restantes a dicho evento de referencia. Es decir,

$$\mathrm{P}\left(A^-\right) = \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{Rh}\right) = \mathrm{P}\left(A \setminus [B \cup Rh]\right) = \mathrm{P}\left(A \setminus [(B \cup Rh) \cap A]\right) = \mathrm{P}\left(A\right) - \mathrm{P}\left([B \cup Rh] \cap A\right) \tag{89}$$

Nuevamente, el segundo término se puede reescribir como una unión de intersecciones:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(A\right) - \mathrm{P}\left([B \cup Rh] \cap A\right) &= \mathrm{P}\left(A\right) - \mathrm{P}\left(\underbrace{[B \cap A]} \cup \underbrace{[Rh \cap A]}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(A\right) - \left[\mathrm{P}\left(B \cap A\right) + \mathrm{P}\left(Rh \cap A\right) - \mathrm{P}\left([B \cap A] \cap [Rh \cap A]\right)\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente expresión para la probabilidad deseada:

$$\mathrm{P}\left(A^-\right) = \underbrace{\mathrm{P}\left(A\right)}_{0.4} - \underbrace{\mathrm{P}\left(B \cap A\right)}_{0.2} - \underbrace{\mathrm{P}\left(Rh \cap A\right)}_{0.3} + \underbrace{\mathrm{P}\left(A \cap B \cap Rh\right)}_{0.2} = 0.1 \tag{90}$$

Nuevamente, en términos de porcentaje, el 10 % de la población tiene A negativo como grupo sanguíneo.

Ejercicio 24

En una pequeña ciudad se publican dos diarios Nuevos Aires y Opinión . El 40 % de los habitantes lee Nuevos Aires, el 23 % lee Opinión y el 8 % lee ambos.

a) ¿Cuál es el porcentaje de personas que lee diarios?

b) De los habitantes que leen diarios, ¿qué porcentaje lee Opinión?

c) Si se eligen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas lean diarios?

d) ¿Qué porcentaje de la población lee sólo Nuevos Aires?

Resolución

Eventos

Nuevamente, empezamos definiendo los eventos:

- N = la persona elegida lee el diario Nuevos Aires.
- O = la persona elegida lee el diario Opinión.
- D= la persona elegida lee diarios.

Datos

Los datos que son los siguientes:

- $\mathrm{P}(N) = 0.4$
- $\mathrm{P}(N) = 0.23$
- $\mathrm{P}(N \cap O) = 0.08$

Ítem a

Nos piden el porcentaje de personas que leen diarios, es decir, que lee alguno de los dos diarios de la ciudad. Por lo tanto, podemos calcular la probabilidad respectiva como unión de los eventos principales:

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(N \cup O) = \mathrm{P}(N) + \mathrm{P}(N) - \mathrm{P}(N \cap O) = 0.4 + 0.23 - 0.08 = 0.55 \tag{91}$$

Por lo tanto, en términos de porcentaje, un 55 % de la ciudad lee diarios.

Ítem b

En este caso nos piden una probabilidad condicional. Es decir, $\mathrm{P}\big(O|\, D\big)$. Para resolver la probabilidad condicional, se puede usar la definición:

$$\mathrm{P}\big(O|\, D\big) = \frac{\mathrm{P}(O \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\mathrm{P}(O \cap [N \cup O])}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\mathrm{P}(N)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0.23}{0.55} = 0.4182 \tag{92}$$

Es decir, el 41.82 % de las personas que leen diarios, leen el diario Opinión.

Ítem c

En este caso, debería considerarse que las dos personas seleccionadas al azar son distintas. Por lo tanto, si la primer persona seleccionada lee diarios, esta persona no debe estar incluida para la siguiente selección. Esto se podría calcular evaluando los casos favorables y casos posibles. Sin embargo, no tenemos el dato sobre la cantidad de casos posibles ya que no tenemos el tamaño de la población.

Ante esta dificultad, podemos tomarnos una licencia. Por más que no sepamos la cantidad de personas de la población, podemos asumir que el mismo es considerable, al tratarse de una ciudad. Por lo tanto, que no debería haber mucha diferencia entre considerar la extracción con reposición y sin reposición. Es decir, el hecho de que la primer persona elegida lea diarios no afecta la probabilidad de que la segunda también lo haga. En consecuencia, tomamos como hipótesis la independencia entre los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{la primer persona seleccionada lee diarios} \\ D_2 &= \text{la segunda persona seleccionada lee diarios} \end{aligned} \tag{93}$$

Donde ambos eventos tienen una probabilidad de 0.55. Por lo tanto, se puede considerar que

$$\mathrm{P}\left(D_1 \cap D_2\right) \overset{IND}{=} \mathrm{P}\left(D_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(D_2\right) = 0.55^2 = 0.3025 \tag{94}$$

Vamos a hacer el cálculo sin reposición para tamaños relativamente grandes de N (la cantidad de habitantes de la ciudad), donde el 55 % ($C = 0.55 \cdot N$) lee diarios. Veremos efectivamente que el valor de la probabilidad real ($\mathrm{P}\left(D_1 \cap D_2\right) = \dfrac{C \cdot (C-1)}{N \cdot (N-1)}$) no difiere numéricamente del valor obtenido con la hipótesis de independencia.

$$\begin{aligned} N = 10000 &\Rightarrow \mathrm{P}\left(D_1 \cap D_2\right) = \frac{C \cdot (C-1)}{N \cdot (N-1)} = 0.302475 \approx 0.3025 \\ N = 100000 &\Rightarrow \mathrm{P}\left(D_1 \cap D_2\right) = \frac{C \cdot (C-1)}{N \cdot (N-1)} = 0.3024975 \approx 0.3025 \\ N = 1000000 &\Rightarrow \mathrm{P}\left(D_1 \cap D_2\right) = \frac{C \cdot (C-1)}{N \cdot (N-1)} = 0.30249975 \approx 0.3025 \end{aligned} \tag{95}$$

Por lo tanto, considerando ya una población razonable para una ciudad (100000 personas), la diferencia entre la probabilidad real y la calculada con la hipótesis de independencia es ínfima.

En conclusión, se puede considerar que la probabilidad de que dos personas elegidas al azar lean diarios en dicha ciudad, es de 0.3025.

Ítem d

En este caso, nos piden la probabilidad de que una persona lea sólo Nuevos Aires. Esto lo podemos calcular removiendo a la probabilidad de que una persona lea este diario, la probabilidad de que lea ambos. Es decir,

$$\mathrm{P}\left(N \setminus [N \cap O]\right) = \mathrm{P}\left(N\right) - \mathrm{P}\left(N \cap O\right) = 0.4 - 0.08 = 0.32 \tag{96}$$

Por lo tanto, el 32 % de la población sólo lee Nuevos Aires.

Ejercicio 28

Un sistema de transmisión de energía eléctrica está compuesto por un transformador elevador T_1, dos líneas de transporte de energía L y dos transformadores reductores T_2.

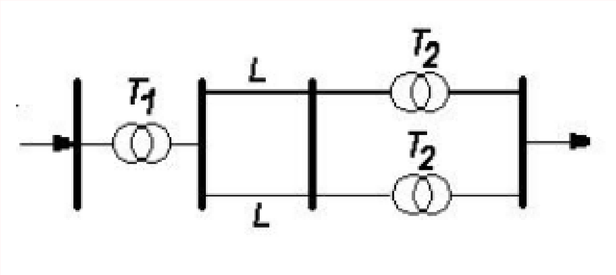


Figura 3: Descripción gráfica del sistema

El consumidor puede recibir por cualquier línea la potencia que necesite, pero el transformador reductor puede transmitir sólo el 50 % de la potencia requerida por el consumidor. La probabilidad de falla del transformador T_1 es $q_{T_1} = 0.05$, de una línea L es $q_L = 0.03$ y la del transformador T_2 es $q_{T_2} = 0.006$. Los fallos de todos los elementos se consideran sucesos aleatorios independientes. Determine la probabilidad de transmitir un porcentaje de la potencia requerida por el consumidor del:

a) 100 % b) 50 % c) 0 %

Sugerencias: Por ejemplo para que el consumidor pueda recibir el 100 % de lo que requiere debe funcionar correctamente el transformador elevador T_1, al menos una de las dos líneas L deben funcionar y no fallar ninguno de los dos transformadores reductores T_2.

Resolución

Eventos

Para realizar los cálculos, primero debemos definir los eventos:

- F_{T_1} = Funciona el transformador elevador.
- F_{L_1} = Funciona la primer línea.
- F_{L_2} = Funciona la segunda línea.
- $F_{T_2^1}$ = Funciona el primer transformador reductor.
- $F_{T_2^2}$ = Funciona el segundo transformador reductor.

Vale aclarar que todos estos eventos son independientes entre sí.
Podemos definir además:

- P_0 = Se transmite un 0 % de la potencia requerida.
- P_{50} = Se transmite un 50 % de la potencia requerida.
- P_{100} = Se transmite un 100 % de la potencia requerida.

Datos

- $\mathrm{P}\left(F_{T_1}\right) = 0.95 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{F_{T_1}}\right) = 0.05$.
- $\mathrm{P}\left(F_{L_1}\right) = \mathrm{P}\left(F_{L_2}\right) = 0.97 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{F_{L_1}}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{F_{L_2}}\right) = 0.03$.
- $\mathrm{P}\left(F_{T_2^1}\right) = \mathrm{P}\left(F_{T_2^2}\right) = 0.994 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{F_{T_2^1}}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{F_{T_2^2}}\right) = 0.006$.

Ítem a

Para calcular $\mathrm{P}\left(P_{100}\right)$, debemos expresar ese evento en función de los sucesos cuya probabilidad conocemos. Como dice la sugerencia, debe suceder lo siguiente:

- funcionar correctamente el transformador elevador T_1 $\left(F_{T_1}\right)$
- funcionar al menos una de las dos líneas L deben funcionar $\left(F_{L_1} \cup F_{L_2}\right)$
- no fallar ninguno de los dos transformadores reductores T_2 $(\overline{\overline{F_{T_2^1}} \cup \overline{F_{T_2^2}}})$.

Es decir, podemos describir el evento P_{100} del siguiente modo:

$$P_{100} = F_{T_1} \cap \left(F_{L_1} \cup F_{L_2}\right) \cap (\overline{\overline{F_{T_2^1}} \cup \overline{F_{T_2^2}}}) \tag{97}$$

Notar que utilizando leyes de De Morgan ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$) y el hecho de que para cualquier conjunto $\overline{\overline{A}} = A$, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\overline{\overline{F_{T_2^1}} \cup \overline{F_{T_2^2}}} = \overline{\overline{F_{T_2^1}}} \cap \overline{\overline{F_{T_2^2}}} = F_{T_2^1} \cap F_{T_2^2} \tag{98}$$

Es decir,

$$\mathrm{P}\left(P_{100}\right) = \mathrm{P}\left(F_{T_1} \cap \left[F_{L_1} \cup F_{L_2}\right] \cap \left[F_{T_2^1} \cap F_{T_2^2}\right]\right) \tag{99}$$

Como todos los eventos del miembro derecho son independientes, se puede factorizar la probabilidad en cada intersección:

$$\mathrm{P}\left(P_{100}\right) = \mathrm{P}\left(F_{T_1}\right) \cdot \mathrm{P}\left(F_{L_1} \cup F_{L_2}\right) \cdot \mathrm{P}\left(F_{T_2^1}\right) \cdot \mathrm{P}\left(F_{T_2^2}\right) \tag{100}$$

Luego, utilizando la propiedad de la probabilidad de la unión se obtiene:

$$\mathrm{P}\left(P_{100}\right) = \mathrm{P}\left(F_{T_1}\right) \cdot \left[\mathrm{P}\left(F_{L_1}\right) + \mathrm{P}\left(F_{L_2}\right) - \mathrm{P}\left(F_{L_1} \cap F_{L_2}\right)\right] \cdot \mathrm{P}\left(F_{T_2^1}\right) \cdot \mathrm{P}\left(F_{T_2^2}\right) \tag{101}$$

Por último, como L_1 y L_2 son independientes:

$$\mathrm{P}\left(P_{100}\right) = \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{T_1}\right)}_{0.95} \cdot \left[\underbrace{\mathrm{P}\left(F_{L_1}\right)}_{0.97} + \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{L_2}\right)}_{0.97} - \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{L_1}\right)}_{0.97} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{L_2}\right)}_{0.97}\right] \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{T_2^1}\right)}_{0.994} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{T_2^2}\right)}_{0.994} \approx 0.9377894 \tag{102}$$

Ítem b

En este caso hay que describir el evento P_{50} en función del funcionamiento o no de todos los componentes. Notemos que:

- el transformador T_1 tiene que funcionar $\left(F_{T_1}\right)$, sino se transmite 0 % de la potencia
- alguna de las líneas tiene que funcionar $\left(F_{L_1} \cup F_{L_2}\right)$, sino se transmite 0 % de la potencia
- tiene que funcionar sólo uno de los transformadores reductores $([F_{T_2^1} \cap \overline{F_{T_2^2}}] \cup [\overline{F_{T_2^1}} \cap F_{T_2^2}])$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente igualdad:

$$P_{50} = F_{T_1} \cap (F_{L_1} \cup F_{L_2}) \cap ([F_{T_2^1} \cap \overline{F_{T_2^2}}] \cup [\overline{F_{T_2^1}} \cap F_{T_2^2}]) \tag{103}$$

Nuevamente, la probabilidad se factoriza por independencia:

$$\mathrm{P}(P_{50}) = \mathrm{P}(F_{T_1}) \cdot \mathrm{P}(F_{L_1} \cup F_{L_2}) \cdot \mathrm{P}\left([F_{T_2^1} \cap \overline{F_{T_2^2}}] \cup [\overline{F_{T_2^1}} \cap F_{T_2^2}]\right) \tag{104}$$

Notar que en el ítem anterior, ya tenemos calculado $\mathrm{P}(F_{T_1}) = 0.95$ y $\mathrm{P}(F_{L_1} \cup F_{L_2}) = 0.97 + 0.97 - 0.97^2$. Además, como $[F_{T_2^1} \cap \overline{F_{T_2^2}}]$ y $[\overline{F_{T_2^1}} \cap F_{T_2^2}]$ son mutuamente excluyentes (ambas no pueden ocurrir al mismo tiempo), su probabilidad se escribe como la suma de las probabilidades.

$$\mathrm{P}\left([F_{T_2^1} \cap \overline{F_{T_2^2}}] \cup [\overline{F_{T_2^1}} \cap F_{T_2^2}]\right) = \mathrm{P}\left(F_{T_2^1} \cap \overline{F_{T_2^2}}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{F_{T_2^1}} \cap F_{T_2^2}\right) \underset{Ind}{=} \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{T_2^1}\right)}_{0.994} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{F_{T_2^2}}\right)}_{0.006} + \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{F_{T_2^1}}\right)}_{0.006} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{T_2^2}\right)}_{0.994} \tag{105}$$

Recopilando toda esta información, se obtiene:

$$\mathrm{P}(P_{50}) = \underbrace{\mathrm{P}(F_{T_1})}_{0.95} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(F_{L_1} \cup F_{L_2})}_{2 \cdot 0.97 - 0.97^2} \cdot [\underbrace{\mathrm{P}\left(F_{T_2^1}\right)}_{0.994} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{F_{T_2^2}}\right)}_{0.006} + \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{F_{T_2^1}}\right)}_{0.006} \cap \underbrace{\mathrm{P}\left(F_{T_2^2}\right)}_{0.994}] \approx 0.0113214 \tag{106}$$

Ítem c

Notar que como hay tres opciones para la potencia: 100 %, 50 % y 0 %, se tiene que $\mathrm{P}(P_{100}) + \mathrm{P}(P_{50}) + \mathrm{P}(P_0) = 1$. Entonces, en vez de revisar todos los casos respectivos a un 0 % de potencia, conviene utilizar los cálculos anteriores sabiendo que

$$\mathrm{P}(P_0) = 1 - \underbrace{\mathrm{P}(P_{100})}_{0.9377894} - \underbrace{\mathrm{P}(P_{50})}_{0.0113214} \approx 0.0508892 \tag{107}$$

Ejercicio 29

Un transmisor está enviando un mensaje mediante un código binario, es decir, una secuencia de **0** y **1**. Cada bit transmitido (**0** ó **1**) debe pasar por tres sistemas repetidores para llegar al receptor. En cada repetidor el bit enviado puede ser diferente del bit recibido (una inversión) con probabilidad 0.10. Supongamos que los repetidores operan independientemente uno de otro.

Transmisor $\rightarrow$ Repetidor1 $\rightarrow$ Repetidor2 $\rightarrow$ Repetidor3 $\rightarrow$ Receptor

a) Si se envía un **1** desde el transmisor, ¿cuál es la probabilidad de que el receptor reciba un **1**?

b) Supongamos que 70 % de todos los bits enviados desde el transmisor son **1**. Si un **1** es recibido por el receptor, ¿cuál es la probabilidad de que se haya enviado un **1**?

Resolución

Eventos

Es de suma importancia en esta primer guía definir claramente los eventos utilizados. Sobre todo en este ejercicio, es importante definirlos con cuidado y será evidente en la resolución.

- T_1 = el transmisor transmitió un **1**.
- T_0 = el transmisor transmitió un **0**.
- E_i = el i-ésimo repetidor cometió un error en la transmisión. $(1 \leq i \leq 3)$
- R_1 = el receptor recibió un **1**.
- R_0 = el receptor recibió un **0**.

Datos

Sabemos que $\mathrm{P}(E_i) = 0.1$. Por otro lado, los eventos E_i son independientes entre sí. Además, E_i es independiente de T_0 y T_1 ya que la probabilidad de que un repetidor invierta el dígito no se diferencia en casos de que se mande un **0** o un **1**.

Ítem a

Sabemos que se mandó un 1, por lo tanto todas las probabilidades se calculan bajo esta condición. Es decir, nos piden calcular $\mathrm{P}\big(R_1 | T_1\big)$. Por definición de probabilidad condicional,

$$\mathrm{P}\big(R_1 | T_1\big) = \frac{\mathrm{P}(R_1 \cap T_1)}{\mathrm{P}(T_1)} \tag{108}$$

La probabilidad del numerador describe el evento en el que se transmite un **1** y se recibe un **1**. Esto puede suceder en los siguientes escenarios:

- Ningún repetidor comete errores:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\ \text{Transmisor} & \longrightarrow & \text{Repetidor1} & \longrightarrow & \text{Repetidor2} & \longrightarrow & \text{Repetidor3} & \longrightarrow & \text{Receptor} \end{array} \tag{109}$$

  Escrito como evento, sería $T_1 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$.

  Observación: es importante mantener la intersección con el evento T_1, para eso notemos lo siguiente: Si se transmite un **0** (T_0), y no se cometen errores ($\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$), entonces se recibe un cero (R_0) ya que no hubo errores en la transmisión. Notar entonces que hay eventos dentro de $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$ que **no** están dentro de $T_1 \cap R_1$. Dicho de modo más coloquial, asegurar queno hubo errores en la transmisión, no asegura que se transmita y se reciba un **1**. Mientras que asegurar que no hubo errores en la transmisión **y** se transmite un **1**, se puede asegurar que se transmite y se recibe un **1**.

- Dos repetidores cometen errores y el otro acierta. En ese caso, los dos errores se compensan y se obtiene el dígito correcto. Esto ocurre de tres formas

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\ \text{Transmisor} & \longrightarrow & \text{Repetidor1} & \longrightarrow & \text{Repetidor2} & \longrightarrow & \text{Repetidor3} & \longrightarrow & \text{Receptor} \end{array}$$

En términos de eventos:

$$\begin{array}{c} (T_1 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) \\ (T_1 \cap E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) \\ (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \end{array} \tag{110}$$

En todos los otros escenarios, el receptor recibirá un **0**, ya que habrá un solo error o tres errores. Por lo tanto, se puede establecer la siguiente igualdad entre eventos:

$$R_1 \cap T_1 =$$
$$= (T_1 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (T_1 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) \cup (T_1 \cap E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) \cup (T_1 \cap E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}).$$

Como además todos los eventos de la unión son mutuamente excluyentes, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{P}(R_1 \cap T_1)}{\mathrm{P}(T_1)} = \frac{\mathrm{P}(T_1 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) + \mathrm{P}(T_1 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) + \mathrm{P}(T_1 \cap E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + \mathrm{P}(T_1 \cap E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3})}{\mathrm{P}(T_1)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(T_1 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})}{\mathrm{P}(T_1)} + \frac{\mathrm{P}(T_1 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(T_1)} + \frac{\mathrm{P}(T_1 \cap E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3)}{\mathrm{P}(T_1)} + \frac{\mathrm{P}(T_1 \cap E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3})}{\mathrm{P}(T_1)}$$

Recordar que los errores E_i y el evento T_1 son independientes, y los E_i son independientes entre sí. Por lo tanto, todas estas probabilidades se factorizan:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{P}(T_1) \cdot \mathrm{P}(\overline{E_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{E_2}) \cdot \mathrm{P}(\overline{E_3})}{\mathrm{P}(T_1)} + \frac{\mathrm{P}(T_1) \cdot \mathrm{P}(\overline{E_1}) \cdot \mathrm{P}(E_2) \cdot \mathrm{P}(E_3)}{\mathrm{P}(T_1)} + \\ &\frac{\mathrm{P}(T_1) \cdot \mathrm{P}(E_1) \cdot \mathrm{P}(\overline{E_2}) \cdot \mathrm{P}(E_3)}{\mathrm{P}(T_1)} + \frac{\mathrm{P}(T_1) \cdot \mathrm{P}(E_1) \cdot \mathrm{P}(E_2) \cdot \mathrm{P}(\overline{E_3})}{\mathrm{P}(T_1)} \end{aligned} \tag{111}$$

Por último, se simplifican todos los factores $\mathrm{P}(T_1)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R_1 | T_1) =& \underbrace{\mathrm{P}(\overline{E_1})}_{0.9} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\overline{E_2})}_{0.9} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\overline{E_3})}_{0.9} + \underbrace{\mathrm{P}(\overline{E_1})}_{0.9} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(E_2)}_{0.1} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(E_3)}_{0.1} + \\ & \underbrace{\mathrm{P}(E_1)}_{0.1} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\overline{E_2})}_{0.9} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(E_3)}_{0.1} + \underbrace{\mathrm{P}(E_1)}_{0.1} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(E_2)}_{0.1} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\overline{E_3})}_{0.9} \end{aligned} \tag{112}$$

$$= 0.9^3 + 3 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.756 \tag{113}$$

Ítem b

En este ítem nos agregan datos: $\mathrm{P}(T_1) = 0.7 \Rightarrow \mathrm{P}(T_0) = 0.3$. Ahora nos piden $\mathrm{P}(T_1 | R_1)$ (ya que **se sabe** que se recibió un **1**).

Por definición,

$$\mathrm{P}\left(T_1 \middle| R_1\right) = \frac{\mathrm{P}\left(T_1 \cap R_1\right)}{\mathrm{P}\left(R_1\right)} \tag{114}$$

La dificultad para calcular probabilidades respecto a R_1 es que es el último eslabón de la cadena de repeticiones. Por cómo progresa la transmisión, es más fácil pensar **desde** el transmisor **hasta** el receptor. Justamente, del ejercicio anterior, tenemos como dato $\mathrm{P}\left(R_1 | T_1\right)$ =0.756, que es justamente una **inversión** de la probabilidad condicional pedida $\mathrm{P}\left(T_1 | R_1\right)$.

Numerador

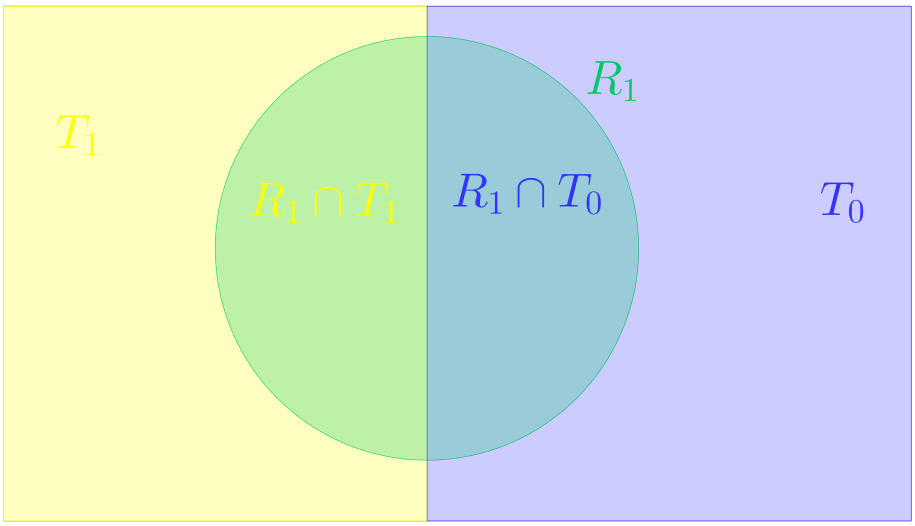
Para el numerador, notemos que podemos expresarlo en función de los datos:

$$\mathrm{P}\left(T_1 \cap R_1\right) = \mathrm{P}\left(T_1 \cap R_1\right) \cdot \frac{\mathrm{P}\left(T_1\right)}{\mathrm{P}\left(T_1\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(T_1 \cap R_1\right)}{\mathrm{P}\left(T_1\right)} \cdot \mathrm{P}\left(T_1\right) = \mathrm{P}\left(R_1 \middle| T_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(T_1\right). \tag{115}$$

Observación: Un error común es pensar que todas las probabilidades que se multiplican es porque los eventos son independientes. Sin embargo, R_1 y T_1 **NO** son independientes. Primero porque no se puede considerar un condicional $(R_1 | T_1)$ como un evento, y por otro lado, el hecho de que se transmita un **1**, **influye** sobre la probabilidad de que se reciba un **1**. **Moraleja:** No es oro todo lo que reluce y no es independiente todo lo que se multiplica. La multiplicación se da por el desarrollo del paso anterior utilizando la definición de probabilidad condicional.

Denominador

Para el denominador, usaremos el teorema de probabilidad total, según la siguiente figura:



Por lo tanto, el denominador se puede escribir del siguiente modo:

$$\mathrm{P}\left(R_1\right) = \mathrm{P}\left(R_1 \cap T_1\right) + \mathrm{P}\left(R_1 \cap T_0\right) \tag{116}$$

Recordar que es más fácil pensar en R_1 a partir de saber T_1 y T_0, por lo tanto, nuestro objetivo es expresar el denominador en términos de $\mathrm{P}\left(R_1 \middle| T_1\right)$ (que es dato) y $\mathrm{P}\left(R_1 \middle| T_0\right)$. Esto se obtiene con un desarrollo análogo al anterior:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(R_1\right) &= \mathrm{P}\left(R_1 \cap T_1\right) + \mathrm{P}\left(R_1 \cap T_0\right) = \mathrm{P}\left(R_1 \cap T_1\right) \cdot \frac{\mathrm{P}\left(T_1\right)}{\mathrm{P}\left(T_1\right)} + \mathrm{P}\left(R_1 \cap T_0\right) \cdot \frac{\mathrm{P}\left(T_0\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} \\ &= \underbrace{\mathrm{P}\left(R_1 \middle| T_1\right)}_{\text{Dato}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(T_1\right)}_{\text{Dato}} + \underbrace{\mathrm{P}\left(R_1 \middle| T_0\right)}_{?} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(T_0\right)}_{\text{Dato}}\end{aligned}$$

Cálculo de $\mathrm{P}\big(R_1|\, T_0\big)$

Falta calcular $\mathrm{P}\big(R_1|\, T_0\big)$. Podríamos calcularlo de forma similar al ítem a), contando todas las transmisiones posibles en las que se transmite un **0** y se recibe un **1**. Sin embargo, vamos a utilizar una propiedad de la probabilidad condicional: $\mathrm{P}\big(A|\, B\big) = 1 - \mathrm{P}\big(\overline{A}|\, B\big)$. En este caso,

$$\mathrm{P}\big(R_1|\, T_0\big) = 1 - \mathrm{P}\big(\overline{R_1}|\, T_0\big) = 1 - \mathrm{P}\big(R_0|\, T_0\big) \tag{117}$$

Entonces sólo resta calcular $\mathrm{P}\big(R_0|\, T_0\big)$. Para ahorrar cálculos, afirmo que $\mathrm{P}\big(R_0|\, T_0\big) = \mathrm{P}\big(R_1|\, T_1\big)$, y ahora será explicado. Sabiendo que se transmite un cero, los casos en los que se recibe un cero es que haya:

- Cero errores $(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})$
- Dos errores:
  - $\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3$
  - $E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3$
  - $E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}$

Por lo tanto, la probabilidad condicional se escribe del mismo modo que el ítem anterior:

$$\frac{\mathrm{P}\left(R_0 \cap T_0\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(T_0 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}\right) + \mathrm{P}\left(T_0 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3\right) + \mathrm{P}\left(T_0 \cap E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3\right) + \mathrm{P}\left(T_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(T_0 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} + \frac{\mathrm{P}\left(T_0 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} + \\ + \frac{\mathrm{P}\left(T_0 \cap E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} + \frac{\mathrm{P}\left(T_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)}$$

$$\underset{\text{IND}}{=} \frac{\mathrm{P}\left(T_0\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_1}\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_2}\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_3}\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} + \frac{\mathrm{P}\left(T_0\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_1}\right)\mathrm{P}\left(E_2\right)\mathrm{P}\left(E_3\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} + \\ + \frac{\mathrm{P}\left(T_0\right)\mathrm{P}\left(E_1\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_2}\right)\mathrm{P}\left(E_3\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)} + \frac{\mathrm{P}\left(T_0\right)\mathrm{P}\left(E_1\right)\mathrm{P}\left(E_2\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_3}\right)}{\mathrm{P}\left(T_0\right)}$$

$$= \mathrm{P}\left(\overline{E_1}\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_2}\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_3}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{E_1}\right)\mathrm{P}\left(E_2\right)\mathrm{P}\left(E_3\right) + \mathrm{P}\left(E_1\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_2}\right)\mathrm{P}\left(E_3\right) + \mathrm{P}\left(E_1\right)\mathrm{P}\left(E_2\right)\mathrm{P}\left(\overline{E_3}\right) \\ = 0.756.$$

Respuesta

Por lo tanto, $\mathrm{P}\big(R_0|\, T_0\big) = \mathrm{P}\big(R_1|\, T_1\big) = 0.756 \Rightarrow \mathrm{P}\big(R_1|\, T_0\big) = 1 - \mathrm{P}\big(R_0|\, T_0\big) = 0.244$. Ahora tenemos todos los datos para calcular la probabilidad pedida:

$$\mathrm{P}\big(T_1|\, R_1\big) = \frac{\overbrace{\mathrm{P}\big(R_1|\, T_1\big)}^{0.756} \cdot \overbrace{\mathrm{P}\left(T_1\right)}^{0.7}}{\underbrace{\mathrm{P}\big(R_1|\, T_1\big)}_{0.756} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(T_1\right)}_{0.7} + \underbrace{\mathrm{P}\big(R_1|\, T_0\big)}_{0.244} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(T_0\right)}_{0.3}} = 0.87848 \tag{118}$$

Observación (Bayes): Notar que, como se remarcó antes, en este ejercicio es más intuitivo pensar la recepción de un dígito condicional a una transmisión (por ejemplo, $\mathrm{P}\big(R_1|\, T_1\big)$), pero nos piden la probabilidad condicional invertida (es decir, $\mathrm{P}\big(T_1|\, R_1\big)$). En estos casos, conviene recordar el teorema de Bayes, en el que se expresa una probabilidad condicional en términos de sus inversiones. Es decir, se puede obtener directamente:

$$\mathrm{P}\big(T_1|\, R_1\big) = \frac{\mathrm{P}\big(R_1|\, T_1\big) \cdot \mathrm{P}\left(T_1\right)}{\mathrm{P}\big(R_1|\, T_1\big) \cdot \mathrm{P}\left(T_1\right) + \mathrm{P}\big(R_1|\, T_0\big) \cdot \mathrm{P}\left(T_0\right)} \tag{119}$$

De todos modos, $\mathrm{P}\left(R_1 | T_1\right)$ y $\mathrm{P}\left(R_1 | T_0\right)$ requieren los mismos cálculos auxiliares desarrollados. Por otro lado, el poder de la deducción permite obtener la misma expresión cuando la fórmula no se recuerda

Observación (Probabilidad condicional): No confundir $\mathrm{P}\left(A | B\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A} | B\right)$ con $\mathrm{P}\left(A | B\right) = 1 - \mathrm{P}\left(A | \overline{B}\right)$. Es decir, se puede demostrar que siempre y cuando se mantenga constante el condicionante (en este caso, dado por B) una probabilidad condicional cumple todos los axiomas de probabilidad, es decir:

- $\mathrm{P}\left(S | B\right) = 1$
- $\mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 | B\right) = \mathrm{P}\left(A_1 | B\right) + \mathrm{P}\left(A_2 | B\right)$ si A_1 y A_2 son mutuamente excluyentes.
- $\mathrm{P}\left(A | B\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A} | B\right)$

Notar que en todas las propiedades, B se mantiene **fijo**.

Ejercicio 30

En un proceso de producción de artículos de goma se consideran de buena calidad a aquellos que no son ni excesivamente duros ni excesivamente blandos. Se ha efectuado un estudio estadístico determinándose que el 5 % de los artículos son excesivamente blandos (EB) y el 4 % son excesivamente duros (ED). El 15 % de los artículos ED se vende al público, mientras que el 98 % de los EB no sale a la venta. Se sabe además que la probabilidad de que un artículo de buena calidad no salga a la venta es 0.01.

1. ¿Qué porcentaje de artículos se vende al público?
2. ¿Qué porcentaje de artículos que salen a la venta son de mala calidad?

Resolución

Lo primero que debemos observar es que otra forma equivalente de plantear la primera pregunta es la siguiente: Si se toma un artículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se venda al público? Partiendo de esta reformulación, consideremos el caso de tomar un artículo al azar y definamos los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} EB &= \text{el artículo es excesivamente blando,} && (120)\\ ED &= \text{el artículo es excesivamente duro,} && (121)\\ B &= \text{el artículo es de buena calidad,} && (122)\\ V &= \text{el artículo sale a la venta.} && (123)\end{aligned}$$

En términos de estos eventos, podemos expresar la información del enunciado de la siguiente manera:

$$\mathrm{P}\left(EB\right) = 0.05,\ \mathrm{P}\left(ED\right) = 0.04, \tag{124}$$

$$\mathrm{P}\big(V\big|\, ED\big) = 0.15,\ \mathrm{P}\big(\overline{V}\big|\, EB\big) = 0.98,\ \mathrm{P}\big(\overline{V}\big|\, B\big) = 0.01. \tag{125}$$

Podríamos responder la pregunta del ejercicio rápidamente. Sin embargo, vamos a exprimir al máximo la información que nos da el enunciado y obtener todas las probabilidades relevantes. El esfuerzo extra vale la pena, pues permite realizar verificar la consistencia de los cálculos realizados. Asimismo, atacaremos el problema de dos formas que, si bien equivalentes, son ligeramente distintas en el papel.

Forma 1:

Usando el hecho de que B, EB y ED forman una partición, es decir, son disjuntos y su unión es igual al espacio muestral, tenemos que:

$$\mathrm{P}\left(EB\right) + \mathrm{P}\left(ED\right) + \mathrm{P}\left(B\right) = 1 \Rightarrow \mathrm{P}\left(B\right) = 1 - \mathrm{P}\left(EB\right) - \mathrm{P}\left(ED\right) = 0.91. \tag{126}$$

Por otro lado, dado que un artículo sale a la venta o no,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\big(V\big|\, ED\big) = 0.15 &\quad\Rightarrow\quad \mathrm{P}\big(\overline{V}\big|\, ED\big) = 0.85, && (127)\\ \mathrm{P}\big(\overline{V}\big|\, EB\big) = 0.98 &\quad\Rightarrow\quad \mathrm{P}\big(V\big|\, EB\big) = 0.02, && (128)\\ \mathrm{P}\big(\overline{V}\big|\, B\big) = 0.01 &\quad\Rightarrow\quad \mathrm{P}\big(V\big|\, B\big) = 0.99. && (129)\end{aligned}$$

Tabla 1: Probabilidades de la Guía 2 - ejercicio 30

Evento	ED	EB	B	**TOTAL**
V	0.0060	0.0010	0.9009	0.9079
$\overline{V}$	0.0340	0.0490	0.0091	0.0921
TOTAL	0.0400	0.0500	0.9100	**1.0000**

Luego,

$$\mathrm{P}\big(V|\,ED\big) = \frac{\mathrm{P}\,(V \cap ED)}{\mathrm{P}\,(ED)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}\,(V \cap ED) = \mathrm{P}\big(V|\,ED\big)\mathrm{P}\,(ED) = 0.006, \tag{130}$$

$$\mathrm{P}\big(\overline{V}|\,ED\big) = \frac{\mathrm{P}\,\big(\overline{V} \cap ED\big)}{\mathrm{P}\,(ED)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}\,\big(\overline{V} \cap ED\big) = \mathrm{P}\big(\overline{V}|\,ED\big)\mathrm{P}\,(ED) = 0.034, \tag{131}$$

$$\mathrm{P}\big(\overline{V}|\,EB\big) = \frac{\mathrm{P}\,\big(\overline{V} \cap EB\big)}{\mathrm{P}\,(EB)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}\,\big(\overline{V} \cap EB\big) = \mathrm{P}\big(\overline{V}|\,EB\big)\mathrm{P}\,(EB) = 0.049, \tag{132}$$

$$\mathrm{P}\big(V|\,EB\big) = \frac{\mathrm{P}\,(V \cap EB)}{\mathrm{P}\,(EB)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}\,(V \cap EB) = \mathrm{P}\big(V|\,EB\big)\mathrm{P}\,(EB) = 0.001, \tag{133}$$

$$\mathrm{P}\big(\overline{V}|\,B\big) = \frac{\mathrm{P}\,\big(\overline{V} \cap B\big)}{\mathrm{P}\,(B)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}\,\big(\overline{V} \cap B\big) = \mathrm{P}\big(\overline{V}|\,B\big)\mathrm{P}\,(B) = 0.0091, \tag{134}$$

$$\mathrm{P}\big(V|\,B\big) = \frac{\mathrm{P}\,(V \cap B)}{\mathrm{P}\,(B)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}\,(V \cap B) = \mathrm{P}\big(V|\,B\big)\mathrm{P}\,(B) = 0.9009. \tag{135}$$

Ahora tenemos toda la información necesaria, pero dispersa en un gran número de ecuaciones. Por ello, es bueno resumirla como aparece en la Tabla 1. Obsérvese que esta tabla permite verificar simplemente la consistencia de los cálculos, sumando cada fila y cada columna para comprobar que no nos hayamos equivocado.

Forma 2:

Otra manera de encarar el problema es mediante un grafo de árbol como el de la Fig. 4. Las cuentas a hacer son exactamente las mismas que antes, pero la representación gráfica puede ayudar.

Se puede verificar que en la Fig. 4 se cumple la regla 2. En dicha figura, en azul aparecen los datos del ejercicio. En rojo aparecen las probabilidades calculadas gracias a la regla 3. Finalmente, en verde aparecen las probabilidades determinadas a partir de la regla 4. A partir de estos resultados, podemos reconstruir la Tabla1.

Ahora estamos en condiciones de responder todas las preguntas que se nos hicieran acerca de la situación planteada en este problema. En particular, podemos responder las dos preguntas del enunciado:

1. Inmediatamente a partir de la Tabla 1,

$$\mathrm{P}\,(V) = 0.9079. \tag{136}$$

También podemos sumar todas las hojas del árbol en la Fig. 4 que contengan el evento V.

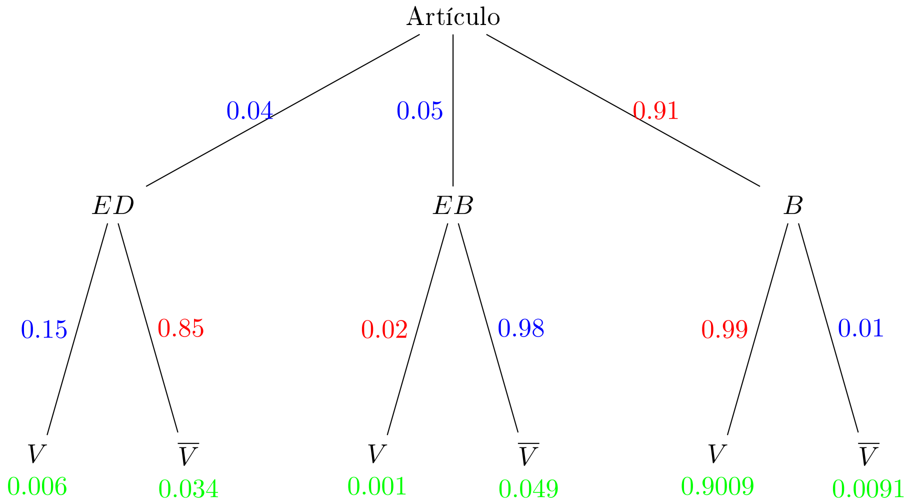


Figura 4: Diagrama de árbol para la Guía 2 - ejercicio 30

2. La respuesta es simple dados los datos en la tabla de probabilidades:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{B}\middle|\, V\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(\overline{B}\cap V\right)}{\mathrm{P}\left(V\right)} = \frac{\mathrm{P}\left((ED\cup EB)\cap V\right)}{\mathrm{P}\left(V\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(ED\cap V\right)+\mathrm{P}\left(EB\cap V\right)}{\mathrm{P}\left(V\right)} \\ &= \frac{0.006+0.001}{0.9079} = \frac{10}{1297} \approx 0.0077. \end{aligned} \tag{137}$$

Ejercicio 33

Ocho personas, entre las que se encuentran Jorge y Alejandro, se forman en una fila para acceder a una caja registradora. Si la fila se formó al azar calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

a) Jorge y Alejandro están uno detrás del otro

b) Entre Jorge y Alejandro hay dos personas

Resolución

Eventos

Primero definimos el espacio muestral:

$$S = \{\text{posibles ordenamientos de las 8 personas en una fila}\} \tag{138}$$

Luego definimos los eventos cuya probabilidad vamos a calcular:

$$E = \{\text{Jorge y Alejandro se ubican en posiciones contiguas}\} \tag{139}$$

$$F = \{\text{Hay dos personas entre Jorge y Alejandro}\} \tag{140}$$

Sin embargo, quizás nos convenga pensarlo en términos de la posición en la que se ubican Jorge y Alejandro. Es decir, definir los eventos para $1 \leq i \leq 8$:

$$A_i = \{\text{Alejandro se encuentra en la} i\text{-ésima posición}\} \tag{141}$$

$$J_i = \{\text{Jorge se encuentra en la} i\text{-ésima posición}\} \tag{142}$$

Datos

Obviamente, consideramos que dos personas distintas no pueden estar en la misma posición. Por ejemplo, $A_i \cap J_i = \emptyset$ ya que no pueden estar tanto Jorge como Alejandro en la misma posición. Es decir, A_i y J_i son mutuamente excluyentes si la posición i se mantiene constante.

Por otro lado, la misma persona no puede estar en dos lugares al mismo tiempo. Por ejemplo, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Es decir, A_i y A_j (al igual que J_i y J_j) son mutuamente excluyentes si $i \neq j$.

Calculemos entonces el cardinal de S, para ello, pensaremos en la cantidad de opciones que hay para cada posición de la fila. Para la primer posición hay 8 personas que puedan ocupar dicho lugar, **para cada una de esas opciones**, quedan 7 personas que pueden ocupar la segunda posición de la fila. **Para cada selección** de las primeras dos posiciones, quedan 6 personas que pueden ocupar el tercer lugar. Es decir,

$$\underset{\textbf{Posición 1}}{\underline{\text{8 opciones}}}\ \underset{\textbf{Posición 2}}{\underline{\text{7 opciones}}}\ \underset{\textbf{Posición 3}}{\underline{\text{6 opciones}}}\ \underset{\textbf{Posición 4}}{\underline{\text{5 opciones}}}\ \underset{\textbf{Posición 5}}{\underline{\text{4 opciones}}}\ \underset{\textbf{Posición 6}}{\underline{\text{3 opciones}}}\ \underset{\textbf{Posición 7}}{\underline{\text{2 opciones}}}\ \underset{\textbf{Posición 8}}{\underline{\text{1 opción}}} \tag{143}$$

Por lo tanto el cardinal de S es

$$\#S = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! \tag{144}$$

Vale aquí hacer una aclaración. Los valores se multiplican ya que en realidad, se suma la misma cantidad varias veces. Por eso se hace énfasis en la frase "por cada una". Es decir, **cada una** de las 8 opciones para la primer posición suma 7 opciones para la segunda posición. Por eso las primeras dos posiciones suman $8 \cdot 7 = 56$ opciones. Nuevamente, **por cada una** de estas selecciones se suman 6 opciones para la tercer posición y resultan en $8 \cdot 7 \cdot 6$ opciones para las primeras tres posiciones, y así sucesivamente.

Ítem a

Para resolver el ítem a, debemos calcular la probabilidad del evento definido como E. Como las distintas formaciones son equiprobables, se puede usar la regla de Laplace para hallar la probabilidad de E:

$$\mathrm{P}(E) = \frac{\#E}{\#S} \tag{145}$$

Usando las definiciones de A_i y J_i, podemos describir el evento E en términos de una unión de eventos mutuamente excluyentes, que permita calcular el cardinal de E como una suma. Teniendo ya el cardinal de S (casos posibles), cuando se calcula el cardinal de E (casos favorables), se asume que el evento E se cumple y, **bajo esta condición**, se cuentan la cantidad de maneras en las que se pueden distribuir las personas. Es decir, para este conteo, se considera que Alejandro y Jorge están en posiciones contiguas y se analiza la cantidad de formas en las que se distribuyen las otras 6 personas. Para comenzar, vamos a asumir que Alejandro está antes en la fila que Jorge. En este caso, las opciones son las siguientes:

$$\begin{array}{lcccccccc}
A_1 \cap J_2: & \frac{\text{Alejandro}}{\textbf{Posición 1}} & \frac{\text{Jorge}}{\textbf{Posición 2}} & \frac{\text{6 opciones}}{\textbf{Posición 3}} & \frac{\text{5 opciones}}{\textbf{Posición 4}} & \frac{\text{4 opciones}}{\textbf{Posición 5}} & \frac{\text{3 opciones}}{\textbf{Posición 6}} & \frac{\text{2 opciones}}{\textbf{Posición 7}} & \frac{\text{1 opción}}{\textbf{Posición 8}} \\
A_2 \cap J_3: & \frac{\text{6 opciones}}{\textbf{Posición 1}} & \frac{\text{Alejandro}}{\textbf{Posición 2}} & \frac{\text{Jorge}}{\textbf{Posición 3}} & \frac{\text{5 opciones}}{\textbf{Posición 4}} & \frac{\text{4 opciones}}{\textbf{Posición 5}} & \frac{\text{3 opciones}}{\textbf{Posición 6}} & \frac{\text{2 opciones}}{\textbf{Posición 7}} & \frac{\text{1 opción}}{\textbf{Posición 8}} \\
A_3 \cap J_4: & \frac{\text{6 opciones}}{\textbf{Posición 1}} & \frac{\text{5 opciones}}{\textbf{Posición 2}} & \frac{\text{Alejandro}}{\textbf{Posición 3}} & \frac{\text{Jorge}}{\textbf{Posición 4}} & \frac{\text{4 opciones}}{\textbf{Posición 5}} & \frac{\text{3 opciones}}{\textbf{Posición 6}} & \frac{\text{2 opciones}}{\textbf{Posición 7}} & \frac{\text{1 opción}}{\textbf{Posición 8}} \\
A_4 \cap J_5: & \frac{\text{6 opciones}}{\textbf{Posición 1}} & \frac{\text{5 opciones}}{\textbf{Posición 2}} & \frac{\text{4 opciones}}{\textbf{Posición 3}} & \frac{\text{Alejandro}}{\textbf{Posición 4}} & \frac{\text{Jorge}}{\textbf{Posición 5}} & \frac{\text{3 opciones}}{\textbf{Posición 6}} & \frac{\text{2 opciones}}{\textbf{Posición 7}} & \frac{\text{1 opción}}{\textbf{Posición 8}} \\
A_5 \cap J_6: & \frac{\text{6 opciones}}{\textbf{Posición 1}} & \frac{\text{5 opciones}}{\textbf{Posición 2}} & \frac{\text{4 opciones}}{\textbf{Posición 3}} & \frac{\text{3 opciones}}{\textbf{Posición 4}} & \frac{\text{Alejandro}}{\textbf{Posición 5}} & \frac{\text{Jorge}}{\textbf{Posición 6}} & \frac{\text{2 opciones}}{\textbf{Posición 7}} & \frac{\text{1 opción}}{\textbf{Posición 8}} \\
A_6 \cap J_7: & \frac{\text{6 opciones}}{\textbf{Posición 1}} & \frac{\text{5 opciones}}{\textbf{Posición 2}} & \frac{\text{4 opciones}}{\textbf{Posición 3}} & \frac{\text{3 opciones}}{\textbf{Posición 4}} & \frac{\text{2 opciones}}{\textbf{Posición 5}} & \frac{\text{Alejandro}}{\textbf{Posición 6}} & \frac{\text{Jorge}}{\textbf{Posición 7}} & \frac{\text{1 opción}}{\textbf{Posición 8}} \\
A_7 \cap J_8: & \frac{\text{6 opciones}}{\textbf{Posición 1}} & \frac{\text{5 opciones}}{\textbf{Posición 2}} & \frac{\text{4 opciones}}{\textbf{Posición 3}} & \frac{\text{3 opciones}}{\textbf{Posición 4}} & \frac{\text{2 opciones}}{\textbf{Posición 5}} & \frac{\text{1 opción}}{\textbf{Posición 6}} & \frac{\text{Alejandro}}{\textbf{Posición 7}} & \frac{\text{Jorge}}{\textbf{Posición 8}}
\end{array} \tag{146}$$

Notemos que cada una de estas opciones da como resultado 6! combinaciones posibles. Por ejemplo, $\mathrm{P}(A_1 \cap J_2) = \frac{6!}{8!} = \frac{1}{56}$, y esta probabilidad es equivalente para todas las combinaciones que tienen a Jorge y Alejandro en posiciones contiguas.

Además, podemos notar que todas estas opciones son mutuamente excluyentes ya que tanto Jorge como Alejandro no pueden estar en la misma posición al mismo tiempo. Por lo tanto, la probabilidad de la unión de todos estos conjuntos da como resultado la suma de las probabilidades respectivas. Es decir,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left([A_1 \cap J_2] \cup [A_2 \cap J_3] \cup [A_3 \cap J_4] \cup [A_4 \cap J_5] \cup [A_5 \cap J_6] \cup [A_6 \cap J_7] \cup [A_7 \cap J_8]\right) = \\
&= \mathrm{P}\left(\textstyle\bigcup_{k=1}^{7} [A_k \cap J_{k+1}]\right) = \textstyle\sum_{k=1}^{7} \mathrm{P}(A_k \cap J_{k+1}) = \\
&= \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}
\end{aligned} \tag{147}$$

De forma completamente análoga se pueden calcular los casos en los que Jorge está antes que Alejandro y están en posiciones contiguas:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left([J_1 \cap A_2] \cup [J_2 \cap A_3] \cup [J_3 \cap A_4] \cup [J_4 \cap A_5] \cup [J_5 \cap A_6] \cup [J_6 \cap A_7] \cup [J_7 \cap A_8]\right) = \\
&= \mathrm{P}\left(\textstyle\bigcup_{k=1}^{7} [J_k \cap A_{k+1}]\right) = \textstyle\sum_{k=1}^{7} \mathrm{P}(J_k \cap A_{k+1}) = \\
&= \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}
\end{aligned} \tag{148}$$

Por lo tanto, considerando los siguientes eventos

- $AJ = \{\text{Alejandro está antes que Jorge}\}$
- $JA = \{\text{Jorge está antes que Alejandro}\}$

(claramente son mutuamente excluyentes) podemos concluir lo siguiente:

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(E \cap AJ) + \mathrm{P}(E \cap JA) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \tag{149}$$

Por lo tanto, $\mathrm{P}(E) = \frac{1}{4}$.

Otra forma de pensarlo: Del mismo modo que consideramos antes que cuando se suman muchas veces la misma cantidad de casos, la cantidad total termina escribiéndose como una multiplicación, podríamos en este caso considerar que se pueden calcular por separado cuestiones puntuales de las combinaciones que estamos evaluando.

Por ejemplo, la probabilidad de E la podemos calcular de forma más sintética del siguiente modo:

- Hay 7 formas de elegir las posiciones de Alejandro y Jorge si están en orden consecutivo.
- Por cada una de estas selecciones de posiciones, hay $2!$ formas de permutar a Alejandro y Jorge.
- Por cada una de estas selecciones de posiciones fijas para Jorge y Alejandro, hay $6!$ formas de ubicar al resto de las personas en la fila.

Por lo tanto, la probabilidad de E es

$$\mathrm{P}(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{7 \cdot 2! \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4} \tag{150}$$

A medida que se va ganando práctica, esta estrategia termina siendo la más utilizada para contabilizar casos. Por ejemplo, si en la fila también estuviera Pedro, podríamos considerar las formas en las que Jorge, Alejandro y Jorge están en posiciones consecutivas (como evento podríamos llamarlo C_3). Con esta misma propuesta, la probabilidad de C_3 se puede calcular teniendo en cuenta lo siguiente:

- Hay 6 formas de elegir las posiciones de Pedro, Alejandro y Jorge si están en orden consecutivo.
- Por cada una de estas selecciones de posiciones, hay $3!$ formas de permutar a Pedro, Alejandro y Jorge.
- Por cada una de estas selecciones de posiciones fijas para Pedro, Jorge y Alejandro, hay $5!$ formas de ubicar al resto de las personas en la fila.

Por lo tanto, la probabilidad de C_3 es

$$\mathrm{P}(C_3) = \frac{\#C_3}{\#S} = \frac{6 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{3}{28} \tag{151}$$

Aunque vale aclarar que no es siempre tan simple, ya que algún término puede olvidarse. Por ejemplo, si no se cuentan las permutaciones, la probabilidad obtenida es errónea. Por lo tanto, siempre hay que tener la seguridad de estar cubriendo todos los casos y que además, **éstos sean mutuamente excluyentes.**

Ítem b

De manera similar al ítem anterior, vamos a contabilizar primero la cantidad de formas que pueden tomar sus posiciones Jorge y Alejandro, de forma de dejar dos personas entre ellos. Nuevamente, asumiremos sólo para empezar, que Alejandro está antes que Jorge en la fila:

$A_1 \cap J_4$:	Alejandro	6 opciones	5 opciones	Jorge	4 opciones	3 opciones	2 opciones	1 opción
	Posición 1	**Posición 2**	**Posición 3**	**Posición 4**	**Posición 5**	**Posición 6**	**Posición 7**	**Posición 8**
$A_2 \cap J_5$:	6 opciones	Alejandro	5 opciones	4 opciones	Jorge	3 opciones	2 opciones	1 opción
	Posición 1	**Posición 2**	**Posición 3**	**Posición 4**	**Posición 5**	**Posición 6**	**Posición 7**	**Posición 8**
$A_3 \cap J_6$:	6 opciones	5 opciones	Alejandro	4 opciones	3 opciones	Jorge	2 opciones	1 opción
	Posición 1	**Posición 2**	**Posición 3**	**Posición 4**	**Posición 5**	**Posición 6**	**Posición 7**	**Posición 8**
$A_4 \cap J_7$:	6 opciones	5 opciones	4 opciones	Alejandro	3 opciones	2 opciones	Jorge	1 opción
	Posición 1	**Posición 2**	**Posición 3**	**Posición 4**	**Posición 5**	**Posición 6**	**Posición 7**	**Posición 8**
$A_5 \cap J_8$:	6 opciones	5 opciones	4 opciones	3 opciones	Alejandro	2 opciones	1 opción	Jorge
	Posición 1	**Posición 2**	**Posición 3**	**Posición 4**	**Posición 5**	**Posición 6**	**Posición 7**	**Posición 8**

(152)

Es decir, hay 5 formas de elegir las posiciones que ocupan Alejandro y Jorge, para cada una de estas selecciones, 2! formas de permutarlos en la fila y para cada una de estas configuraciones, 6! formas de distribuir a las otras personas. Por lo tanto, la probabilidad de F viene dada por:

$$\mathrm{P}\left(F\right) = \frac{\#F}{\#S} = \frac{5 \cdot 2! \cdot 6!}{8!} = \frac{5}{28} \tag{153}$$

Ejercicio 37

Se sacan dos cartas al azar de un mazo de cartas españolas (48 cartas, no se toman en cuenta los comodines). Hallar la probabilidad de que:

a) las dos cartas sean de espadas.

b) una sea de espadas y la otra de copas.

c) las dos sean del mismo palo.

d) las dos sean de distinto palo

Resolución

Este ejercicio lo haremos de dos maneras:

- **Con orden:** Considerando orden entre las extracciones. Es decir, hay una primera y una segunda extracción del mazo.
- **Sin orden:** Considerando que las extracciones son simultáneas. Es decir, no hay noción de una primera y una segunda extracción del mazo, sino que se extrae un subconjunto del mazo de tamaño 2.

Para cada una de las situaciones, veremos que las probabilidades tienen los mismos valores pero hay diferencias conceptuales que vamos a abordar para determinar el motivo. Comenzaremos asumiendo que hay orden y haremos un apartado para el caso sin orden.

Eventos

En este caso, el espacio muestral lo llamaremos S_c:

$$S_c = \{\text{formas de extraer de forma sucesiva 2 cartas de un mazo de 48 cartas}\} \tag{154}$$

Dentro de este espacio muestral, consideramos los siguientes eventos, para $1 \leq i \leq 2$:

- E_i = la i-ésima carta extraída es de espadas.
- C_i = la i-ésima carta extraída es de copas.
- B_i = la i-ésima carta extraída es de bastos.
- O_i = la i-ésima carta extraída es de oros.

Notar que estas definiciones sólo tienen sentido cuando se trata de el caso en el que hay una primera y una segunda extracción. Por eso diferenciamos los eventos definidos en uno y otro caso.

Además, definimos:

- E=ambas cartas son de espada.
- EC=una carta es de espadas y la otra de copas.
- MP= ambas cartas son del mismo palo.
- DP= las cartas son de distinto palo.

Datos

Podemos asumir que todas las cartas tienen la misma probabilidad de salir en cada extracción y que por lo tanto, el espacio muestral es equiprobable. Por lo tanto, para cualquier probabilidad calculamos el cardinal del espacio muestral. Como para la primer extracción hay 48 opciones posibles y para cada una de esas opciones hay 47 opciones para la segunda extracción, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\text{48 opciones}}{\textbf{Extracción 1}}\ \frac{\text{47 opciones}}{\textbf{Extracción 2}} \Rightarrow \#S_c = 48 \cdot 47 \tag{155}$$

Ítem a

Para calcular la probabilidad de que ambas sean espadas(E), se puede poner en términos de los eventos ya definidos calculando la probabilidad de $E_1 \cap E_2$. Usando la regla de Laplace, en los casos favorables se extraen cartas entre las 12 de espadas que hay en el mazo. Sin embargo, al extraer una espada en la primer extracción, la segunda extracción tiene 11 espadas que pueden ser elegidas, es decir:

$$\frac{\text{12 espadas}}{\textbf{Extracción 1}}\ \frac{\text{11 espadas}}{\textbf{Extracción 2}} \Rightarrow \#(E_1 \cap E_2) = 12 \cdot 11 \Rightarrow \mathrm{P}\left(E\right) = \mathrm{P}\left(E_1 \cap E_2\right) = \frac{12 \cdot 11}{48 \cdot 47} = \frac{11}{188} \tag{156}$$

Ítem b

Para calcular la probabilidad de que una de las cartas sea de espadas y la otra de copas(EC), debemos considerar que esto puede suceder en 2 órdenes distintos ($E_1 \cap C_2$ y $C_1 \cap E_2$). Estos eventos son mutuamente excluyentes y por lo tanto, se pueden calcular ambas probabilidades por separado para luego sumarlas. En este caso, al extraerse una espada, la cantidad de copas se mantiene en 12 y viceversa.

$$\begin{aligned}
E_1 \cap C_2 :\ & \frac{\text{12 espadas}}{\textbf{Extracción 1}}\ \frac{\text{12 copas}}{\textbf{Extracción 2}} \Rightarrow \#(E_1 \cap C_2) = 12 \cdot 12 \Rightarrow \mathrm{P}\left(E_1 \cap C_2\right) = \frac{12 \cdot 12}{48 \cdot 47} = \frac{3}{47} \\
C_1 \cap E_2 :\ & \frac{\text{12 copas}}{\textbf{Extracción 1}}\ \frac{\text{12 espadas}}{\textbf{Extracción 2}} \Rightarrow \#(C_1 \cap E_2) = 12 \cdot 12 \Rightarrow \mathrm{P}\left(C_1 \cap E_2\right) = \frac{12 \cdot 12}{48 \cdot 47} = \frac{3}{47}
\end{aligned} \tag{157}$$

Por lo tanto, podemos concluir que la probabilidad de sacar una copa y una espada es:

$$\mathrm{P}\left(EC\right) = \mathrm{P}\left(E_1 \cap C_2\right) + \mathrm{P}\left(C_1 \cap E_2\right) = \frac{3}{47} + \frac{3}{47} = \frac{6}{47} \tag{158}$$

Ítem c

Para el ítem c, vamos a dividir el evento en el que ambas cartas son del mismo palo (MP) en 4 eventos mutuamente excluyentes:

- $E_1 \cap E_2$: Ambas son de espadas.
- $C_1 \cap C_2$: Ambas son de copas.
- $B_1 \cap B_2$: Ambas son de bastos.
- $O_1 \cap O_2$: Ambas son de oros.

La primera de estas probabilidades ya fue calculada, dando como resultado $\mathrm{P}\left(E_1 \cap E_2\right) = \frac{11}{188}$. Más aún, el razonamiento es el mismo para los otros 3 palos, ya que cada uno de estos eventos excluyentes tiene la misma cantidad en el mazo. Por lo tanto,

$$\mathrm{P}\left(MP\right) = \mathrm{P}\left(E_1 \cap E_2\right) + \mathrm{P}\left(C_1 \cap C_2\right) + \mathrm{P}\left(B_1 \cap B_2\right) + \mathrm{P}\left(O_1 \cap O_2\right) = \frac{11}{188} + \frac{11}{188} + \frac{11}{188} + \frac{11}{188} = \frac{11}{47} \tag{159}$$

Ítem d

Para el ítem d, puede ser muy complicado escribir a DP en función de eventos como E_i, C_i, B_i y O_i ya que las combinaciones son muchas. En este caso, conviene notar que el evento DP (distinto palo) es el complemento de MP, ya que sólo se contemplan dos extracciones. Por lo tanto:

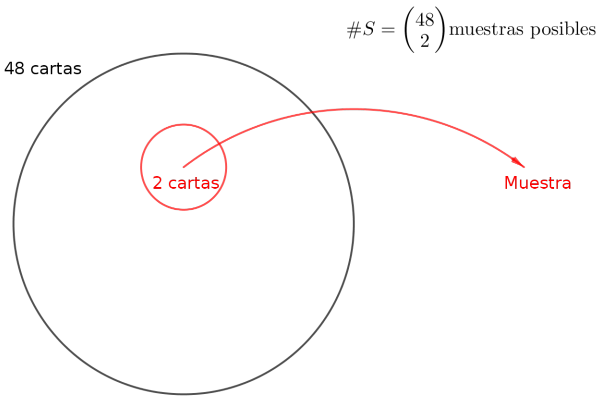
$$\mathrm{P}(DP) = \mathrm{P}\left(\overline{MP}\right) = 1 - \mathrm{P}(MP) = 1 - \frac{11}{47} = \frac{36}{47} \tag{160}$$

Resolución sin orden

Para la resolución sin orden, resolveremos sólo los ítems a y b, ya que los ítems c y d se pueden deducir de forma análoga a partir del ítem a. En este caso, asumiremos un distinto espacio muestral S_s:

$$S_s = \{\text{formas de extraer de forma simultánea 2 cartas de un mazo de 48 cartas}\} \tag{161}$$

Como en este caso no hay orden en la extracción, el cardinal de S_s se calcula con un número combinatorio, ya que no se cuentan las distintas permutaciones:

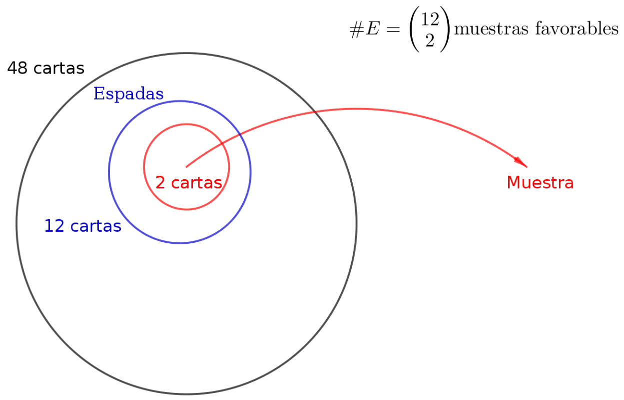


Notar que en este caso la cantidad de casos totales es distinta al caso en el que se considera orden entre las extracciones. Justamente, el cardinal de S_s es básicamente igual al de S_c, salvo que se divide por 2! para descontar las distintas permutaciones.

Además, definimos menos eventos en este caso, ya que no se le agrega orden a las extracciones:

- E=ambas cartas son de espadas.
- EC=una carta es de espadas y la otra de copas.

Por lo tanto, para el item a, se pueden calcular los casos favorables asegurando que las extracciones vienen del conjunto de espadas, es decir:

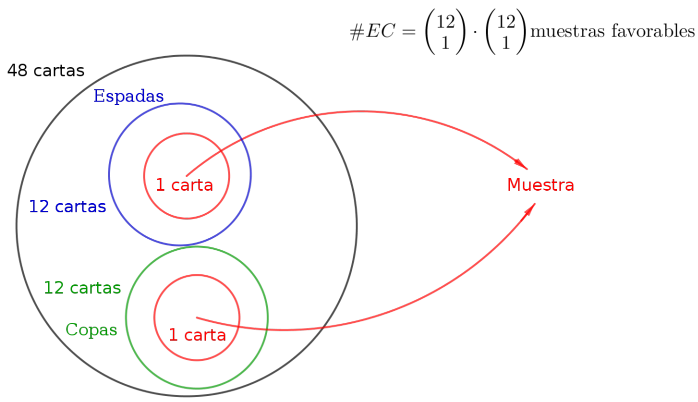


Por lo tanto,

$$\mathrm{P}(E) = \frac{\#E}{\#S_s} = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{48}{2}} = \frac{\frac{12!}{\cancel{2!}\cdot 10!}}{\frac{48!}{\cancel{2!}\cdot 46!}} = \frac{12\cdot 11}{48\cdot 47} = \frac{11}{188} \tag{162}$$

Es decir, aunque se contabilice sin orden, la probabilidad de extraer dos espadas se mantiene con el mismo valor ya que se compensan las correcciones por las distintas permutaciones.

Para el ítem b, la compensación es distinta, ya que no tenemos una noción de primera y segunda extracción. Sin embargo, ya no tenemos que dividir el evento en $E_1 \cap C_2$ y $C_1 \cap E_2$, por lo tanto, el cardinal de EC se calcula del siguiente modo:



Es decir,

$$\mathrm{P}(EC) = \frac{\#EC}{\#S_s} = \frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{48}{2}} = \frac{12\cdot 12}{\frac{48!}{2!\cdot 46!}} = \frac{2\cdot 12\cdot 12}{48\cdot 47} = \frac{6}{47} \tag{163}$$

En este caso, la compensación se debe a que las permutaciones removidas por el orden, no se ven reflejadas en el numerador. Pero es justamente esa cantidad de permutaciones la cantidad de permutaciones que deben contarse cuando la extracción se hace con orden.

Por lo tanto, para algunos casos, considerar orden o no entre las extracciones es indistinto siempre y cuando esa decisión se mantenga a lo largo de los cálculos.