Ejercicio 1

Caminada aleatoria simetrica.

Supongamos el siguiente juego: se lanza una moneda en forma reiterada y el jugador gana 1 peso si sale cara y pierde 1 peso si sale ceca.

1. Se define el proceso estocastico $X_n : n \in \mathbb{N}$ donde X_n es el dinero que tiene el jugador al cabo de n jugadas (se supone $X_0 = 0$). Definir el recorrido de X_n y el espacio de estados del proceso (valido para todo valor de n)

Sabemos que cada paso notemoslos i, si la moneda no esta cargada y asumiendo que son independientes entre si:

$$P(Z_i = \text{Gana}) = 0.5 \Rightarrow \text{son } i.i.d.$$

$$Z_i = \{\text{Gana} \to 1, \text{Pierde} \to -1\}$$

En palabras esto seria que todas las tiradas de moneda tienen una probabilidad de ganar de 0.5, por lo que el valor esperado de n tiradas, viene dado por:

Es un proceso de Markov pues las probabilidades son i.i.d. Por lo tanto la plata que se tiene en la jugada n depende *solamente* de lo que se tiene en la tirada anterior $n - 1$

Entonces los posibles valores de X_n son:

$$\boxed{X_n = (+1).k + (-1).(n - k) = 2k - n, k \in \mathbb{N}_0}$$

El recorrido:

$$\boxed{R_{X_n} = \{-n, -n + 2, -n + 4, ..., n\}}$$

Duda que tuve: porque se le suman k pares? no podria terminar en n + 1?

Notemos con un ejemplo rapido:

Si parto en 0 y tengo que si o si hacer 3 jugadas, *no tengo forma de volver a* 0 entonces tiene sentido que la paridad sea la misma que la cantidad de jugadas (si se le suma 2k a un numero mantiene su paridad)

Por lo tanto si partimos en 0 y queremos saber la probabilidad de volver a 0, y se hacen 3 jugadas va a ser 0 esa probabilidad

2. Obtener la distribucion de probabilidades de X_n

Como mencionamos anteriormente en caso de querer volver a un valor que no mantiene la paridad de n (cantidad de jugadas), la probabilidad de llegar a ese punto va a ser 0

Ademas de esto solo nos interesa el paso anterior ya que como son eventos i.i.d., no nos interesa toda la historia

$$P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x_n = x_{n-1} \pm 1 \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Luego la distribucion de X_n la obtenemos usando que $X_n = 2k - n$

Como k es la cantidad de exitos, podemos deducir la distribucion ya que su probabilidad es 0.5

$$K \sim \text{Binomial}(\text{Trials} = n, p = 0.5)$$

$$P(X_n = x_n) = P(2K - n = x_n) = P\left(K = \frac{x_n + n}{2}\right) = \text{BinomialPDF}(x = K, n = n, 0.5)$$

$$k \in \{-n, 2 - n, 4 - n, ..., n\}$$

3. Expresar la variable X_n como suma de variables iid

Esto es sencillo, de hecho lo habiamos escrito asi anteriormente:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

4. Calcular $E[X_n], V[X_n]$

$$E[X_n] = nE[Z_i] = n(0.5(-1) + 0.5(1)) = n0 = 0$$

$$V[Z_i] = E[Z_i^2] - E^2[Z_i] \Rightarrow E[X_n^2] = n\left(0.5(-1)^2 + 0.5(1)^2\right) = n1 = n$$

Ejercicio 2

Caminata aleatoria general

Extiende al ejercicio anterior, pero esta vez asumiendo que la moneda puede estar *cargada*, osea que la probabilidad de que salga cara es $p \in (0, 1)$

1. Obtener la distribucion de probabilidades de X_n

$$Z_i \in \{-1, 1\}$$

Pero esta vez:

$$P(Z_i = 1) = p, P(Z_i = -1) = 1 - p$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} Z_i = \text{Igual al anterior (la probabilidad no afecta el recorrido)}$$

Lo que si va a cambiar es la distribucion, como las probabilidades cambian, ahora la Binomial que representa a x va a ser otra

Siendo k la cantidad de victorias:

$$K \sim \text{Binomial}(n, p)$$

Entonces la distribucion de X_n nos quedaria:

$$X_n = 2k - n \Rightarrow K = \frac{X_n + n}{2}$$

$$P(X_n = x) = \text{BinomPDF}(x = k, n, p)$$

2. Calcular la esperanza y la varianza

Esto es sencillo, *igual que siempre*:

Tener en cuenta que es la suma de las esperanzas de cada uno de los experimentos

$$E[Z_i] = (+1)p + (-1)(1 - p) = 2p - 1 \Rightarrow E[X_n] = nE[Z_i] = n(2p - 1)$$

$$V[Z_i] = p + 1 - p + (2p-1)^2 \Rightarrow V[X_n] = nV[Z_i] = n(4p^2 - 4p) = 4np(p-1)$$

Ejercicio 3

Suponga un proceso estocastico en tiempo discreto con espacio de eestados discreto definido de la siguiente manera:

$$X_{n+1} = X_n + Z_n$$

Para n tomando los valores 0, 1, 2, ..., y con $X_0 = 0$. Las variables aleatorias Z_n se suponen iid con recorrido: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ con funcion de probabilidad $p_Z(z) = P(Z = z); p_Z(-2) = p_Z(2) = 0.1; p_Z(1) = p_Z(-1) = 0.25; p_Z(0) = 0.3$

1. Obtener la distribucion de probabilidades de X_n para n tomando los valores 1, 2 y 3.

Usando el dato:

- $n = 1$:

$$X_{0+1} = X_0 + Z_0 = Z_0 \Rightarrow X_1 = Z_0$$

- $n = 2$

$$X_2 = X_1 + Z_1 = Z_0 + Z_1$$

- $n = 3$

$$X_3 = X_2 + Z_2 = Z_0 + Z_1 + Z_2$$

Luego ver calculo de distribucion en programa que nos da literalmente todos los casos

```
Z_vals = [-2, -1, 0, 1, 2]

# Probabilidades
Z_probs = [0.1, 0.25, 0.3, 0.25, 0.1]

def inicializar_Z():
    dist = {}
    for i in range(len(Z_vals)):
        dist[Z_vals[i]] = Z_probs[i]
    return dist

def convolve(dist1, dist2):
    result = {}
    for val1 in dist1:
        for val2 in dist2:
            suma = val1 + val2
            prob = dist1[val1] * dist2[val2]
            if suma in result:
                result[suma] += prob
            else:
                result[suma] = prob
    return result

def calcular_Xn(Z_dist, n):
    dist = Z_dist
    for _ in range(n-1):
```

```
        dist = convolve(dist, Z_dist)
    return dist

Z_dist = inicializar_Z()

n = int(input("Ingrese n: "))

Xn = calcular_Xn(Z_dist, n)

def mostrar(dist, nombre):
    print("Distribución de", nombre)
    for k in sorted(dist.keys()):
        print("X =", k, "-> P =", round(dist[k], 4))
    print("")

mostrar(Xn, f"X{n}")
```

Si queremos escribir como suma de las Z_i hariamos:

$$X_i = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$$

2. Calcular $E[X_n], V[X_n]$

Como las Z_i son i.i.d., la varianza de la suma va a ser la suma de las varianzas, es decir que todas las variables aleatorias van a tener la misma varianza y la misma esperanza

$$E[X_n] = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} Z_k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{[Z_k]}_{0} = 0$$

$$V[X_n] = V\left[\sum_{k=0}^{n-1} Z_k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} V[Z_0] = \sum_{k=0}^{n-1} V[Z_0] = nV[Z_0] = nE[Z_0^2] = n(4(0.2) + 1(0.5)) = 1.3n$$

Ejercicio 4 - Caminata aleatoria Gaussiana

Otra extension de los ejercicios anteriores es cuando la cantidad perdida o ganada en cada jugada es una variable aleatoria continua. En particular, supongamos que la cantidad ganada en la jugada k-esima es una VA $G_k \sim N(0, 1)$. Mas aun, asuma que las G_k son i.i.d.. Se define el proceso estocastico $X_n : n \in \mathbb{N}$ donde X_n es el dinero que tiene el jugador al cabo de n jugadas (se supone $X_0 = 0$)

1. Recorrido de X_n y el espacio de estados del proceso

- En este caso los pasos son variables aleatorias pero continuas, por lo tanto usamos las formulas cerradas, no necesitamos usar Convolucion

$$X_n \sim N(0, n)$$

$$R_{X_n} = \mathbb{R} \to \text{Pues puede tomar cualquier valor}$$

2. Obtener la distribucion de probabilidades de X_n

Esta mencionada anteriormente, *pero* si queremos escribir la funcion acumulada, seria:

$$P(X_n \leq n) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \to \text{Acordarse 'x menos la media dividido el desvio'}$$

3. Calcular $E[X_n], V[X_n]$

$$E[X_n] = \mu = 0$$

$$V[X_n] = n$$

Ejercicio 8 - Procesos de Poisson

Suponga que en cierto banco se atiende, en promedio durante una parte del dia, a cuatro clientes cada seis minutos segun un proceso de Poisson. Calcular la probabilidad de que:

1. Puedan atenderse a seis o mas clientes en seis minutos
2. Se empleen mas de tres minutos en atender a un cliente
3. El tiempo de atencio a un cliente este comprendido entre dos y cuatro minutos
4. El tiempo que insuma atender 10 clientes sea menor a 10 minutos

Muy importante: Recordar que en los *procesos de Poisson*, λ representa eventos por unidad de tiempo, por lo que en este caso:

$$4 \text{ Clientes cada 6 minutos} \Rightarrow \frac{4}{6} \text{ Clientes por unidad de tiempo (mins)}$$

Luego una vez tenemos λ por unidad de tiempo, podemos decir que $T \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, siendo T la unidad de tiempo (minuto)

Definimos: $C : \text{Cantidad de clientes atendidos}$

$$\boxed{P(C(t) \leq 6) = \text{Poiscdf}(\lambda \times 6) \Rightarrow P(C(t) > 6) = 1 - \text{Poiscdf}(\lambda \times 6) = 0.21486}$$

Retomamos T, nos piden la probabilidad de que se empleen mas de 3 minutos en atender a 1 cliente, quiere decir que la distancia en tiempo entre eventos sea mayor a 3 unidades de minutos:

$$\boxed{P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3) = 1 - \text{ExpoCDF}(\lambda) = 0.13532}$$

Luego me piden el tiempo de atencion a un cliente este entre dos y cuatro minutos, en este caso volvemos a usar la misma distribucion T pues es la que nos indica la distancia en tiempo entre dos eventos

$$P(2 < T < 4) = P(T < 4) - P(T < 2) = \text{ExpoCDF}(x = 4, \lambda) - \text{ExpoCDF}(x = 2, \lambda)$$

$$P(2 < T < 4) = 0.9305258126197583 - 0.7364204344410559 = 0.1941053$$

$$\boxed{\text{P}(2 < \text{T} < 4) = 0.1941}$$

Me piden que el tiempo que insuma atender 10 clientes sea menor a 10 minutos.

Ojo porque cuando piden muchos eventos en un tiempo determinado, tenemos que usar Poisson

Esto esta mal:

$$P(T = 1) = \text{ExpoPDF}(x = 1, \lambda) = 0.3422$$

Esto es lo que corresponde hacer:

Como piden el tiempo que insuma atender 10 clientes sea *menor a 10 minutos* hay que tener en cuenta el caso en el que atienden a MAS de 10 clientes:

$$P(T_{10} \leq 10) = P(C(t) \geq 10) = 1 - P(C(t) < 10) = 1 - P(C(t) \leq 9)$$

$$1 - \text{PoisCDF}(\lambda \times 10) = 0.13737$$

$$\boxed{P(T_{10} \leq 10) = 0.13737}$$

Ejercicio 13

Tres supermercados S_1, S_2, S_3 compiten por los clientes. Una investigacion determina que al comenzar el mes de agosto los tres supermercados tienen igual cantidad de clientes. Al finalizar el mes se observa que:

1. S_1 conserva el 80% de sus clientes y gana el 10% y el 2% de los clientes de S_2, S_3
1. S_2 conserva el 70% de sus clientes y gana el 14% y el 8% de los clientes de S_1, S_3
1. S_3 conserva el 90% de sus clientes y gana el 6% y el 20% de los clientes de S_1, S_2

Sea $\mathbb{P}$ la matriz cuadrada de elementos p_{ij}, donde p_{ij} es la probabilidad de que un cliente del supermercado S_i se pase al supermercado S_j al cabo de un mes.

1. Construir la matriz de transicion $\mathbb{P}$, con los datos del problema

Esto es incorrecto:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.02 \\ 0.14 & 0.7 & 0.08 \\ 0.06 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Lo que estoy haciendo aca es que la columna dice el origen, mientras que la fila es el destino pero es la revez:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.14 & 0.06 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.02 & 0.08 & 0.9 \end{pmatrix}$$

2. Si $\mathbb{P}^n$ es la matriz cuyo elemento de la posicion i, j indica la proporcion de clientes que se pasaron de S_i a S_j al cabo de n meses, determine que porcentaje de clientes se pasaron de $S_2 \to S_3$ al cabo de 2 meses

Nos queda, haciendo la potencia en la calculadora y obteniendo la posicion $(2, 3)$:

$$\text{El porcentaje de clientes que } S_2 \to S_3 \text{ al cabo de 2 meses} = 0.326$$

3. Sea $\vec{p}(0) = \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}\right)$ el vector fila cuyos elementos indican la proporcion de clientes que tenia inicialmente cada supermercado. El producto $A\mathbb{P}^n$ indica la proporcion de clientes de cada supermercado al cabo de n meses.

Por codigo obtenemos:

- 1 año: $\vec{p}(12) = (0.19056464217402852, 0.24282981204838205, 0.5666055457775896)$
- 2 años: $\vec{p}(24) = (0.17863451653371634, 0.23889188846628787, 0.5824735949999964)$
- 3 años: $\vec{p}(36) = (0.17773767147277136, 0.238602152570176, 0.5836601759570534)$

Notemos que a largo plazo va a converger la proporcion de clientes de cada supermercado

Ejercicio 17

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$ y matriz de transicion de probabilidades dada por:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $P(X_2 = a|X_1 = b, X_0 = c)$

Como es una cadena de Markov, la probabilidad de X_2 solo depende del paso anterior, por lo tanto:

$$P(X_2 = a|X_1 = b, X_0 = c) = P(X_2 = a|X_1 = b)$$

Esta probabilidad es “La probabilidad de $X_2 = a$ sabiendo que $X_1 = b$” entonces sale facilmente con la matriz de transicion de probabilidades. Como el espacio de estados es $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$ entonces las “filas” y las “columnas” de las matrices representan esas transiciones

$$P(X_2 = a|X_1 = b) = P(X_n + 1 = a \mid X_n = b) = \text{Origen: b} \to \text{Destino: a} = \mathbb{P}[1][0] = 1$$

2. Calcular $P(X_{35} = a|X_{33} = a)$

$$P(X_{35} = a|\ X_{33} = a) \Rightarrow \text{Haces dos pasos y terminas en el mismo lugar}$$

El “Hacer dos pasos” quiere decir que si elevo la matriz al cuadrado, voy a obtener esas probabilidades

$$\mathbb{P}^2[a][a] = \mathbb{P}^2[0][0] \underbrace{=}_{\text{por codigo}} 0.49$$

3. Estimar $P(X_{200} = a|\ X_0 = b)$

$$\mathbb{P}^{200}[b][a] = 0.3704$$

Ejercicio 25

Cada materia que cursa un alumno en una universidad tiene tres oportunidades para dar el examen final. Suponga que la **probabilidad de aprobar el examen final es siempre p**. Sea X_n la variable aleatoria que da el **número de oportunidades** que tiene el alumno en el período **n**. El recorrido de X_n es el conjunto {0,1,2,3} siendo el valor cero el estado que se alcanza cuando se aprueba el examen final (claramente un estado absorbente). El **estado 3** corresponde al que se tiene una vez **aprobada la cursada**. Cuando no se aprueba en la última de las instancias se produce una transición del estado 1 al 3 (la materia se recursa)

1. Modelar la evolucion de este proceso como una cadena de Markov obteniendo la matriz de probabilidades de transicion de un paso

- Entonces se empieza en 3 $\Rightarrow X_0 = 3$
- Con probabilidad p se pasa directo a 0 en todos los estados, con probabilidad $p - 1$ se pasa al estado $n - 1$
- En la ultima de las instancias, si desaprobas, pasas a 3 denuevo
- Si ya estas en cero, no tenes chance de irte a otro lado

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

2. En el caso de que el estado inicial es 3, la distribucion de probabilidades es $(0, 0, 0, 1)$. Obtener la distribucion de probabilidades para los primeros tres periodos y conjeturar sobre su forma para todo n. Analizar su valor limite

Esto seria calcular si o si a mano la multiplicacion de matrices para los 3 casos. No lo voy a hacer pero es eso

Ejercicio 2 en clase - 01/10/25

Un musico toca solo dos instrumentos (guitarra y piano) y se aburre con mucha facilidad y salta de uno a otro:

- Si un dia toca la guitarra, al dia siguiente toca el piano
- Si un dia toca el piano, al dia siguiente toca la guitarra

1. Calcular la matriz de transicion $\mathbb{P}$ de la cadena y graficar el diagrama de estados

2. Si comienza tocando la guitarra, calcular la probabilidad de que al dia n toque el piano.

$$\mathbb{P}^n = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ si } n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ si } n = 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{Es facil ver que no es regular}$$

3. Hallar el autovector a izquierda de $\mathbb{P}$ de autovalor 1.

$$(\pi) = (\pi) \times \mathbb{P} = \begin{cases} (a,b) = (a,b)(01 \quad 10) \\ a + b = 1 \end{cases}$$

<u>**OJO**</u>: Como no es regular, no sirve el autoevctor a izquierda

4. Hallar la distribucion estacionaria de la cadena de Markov

Como $\neg\exists \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n$ (todas sus coordenadas oscilan en $\{0, 1\}$) la cadena no tiene distribucion estacionaria

Ejercicio 4 en clase - 01/10/25

Diego comienza un juego de sucesivas apuestas. En cada partida, pierde \$1 con probabilidad $\frac{1}{4}$, gana \$1 con la misma probabilidad. En el resto de los casos, mantiene su fortuna. Comienza con 2 y el juego se termina cuando sus ganancias hacen ascender este capital a 4 (es decir, gana) o cuando su fortuna se agota (es decir, pierde).

1. Calcular el espacio de estados, describir el diagrama de fases de la cadena y calcular la matriz de transición.

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la teoria tenemos que:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k \times k} & 0 \\ \mathbb{F} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

Asique vamos a organizarla para que quede con el mismo orden:

- Arriba a la izquierda las absorbentes:

$$\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Luego la matriz $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{M} = (\mathbb{I}_3 - \mathbb{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Luego calculamos $\mathbb{G} = \mathbb{M} \times \mathbb{F}$

$$\mathbb{G} = \mathbb{M} \times \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Notemos que tiene sentido que sea $\frac{1}{2}$ *porque ambas tienen la misma probabilidad*

2. Calcular la probabilidad de que tarde 3 apuestas en ganar.
3. Calcular la probabilidad de que tarde 3 apuestas en perder.
4. Calcular la probabilidad de que el juego termine en 3 apuestas.
5. Calcular la probabilidad de que el juego dure por lo menos 4 partidas.
6. Calcular la probabilidad de que el juego termine porque Diego gana.
7. Calcular la probabilidad de que el juego termine porque Diego pierde.
8. Calcular el valor esperado de la cantidad de veces que Diego tiene 1 como capital antes de que el juego termine.
9. Considerar $T_1 =$ cantidad de apuestas hasta que Diego tiene 1 como capital. ¿Cuál sería su recorrido?