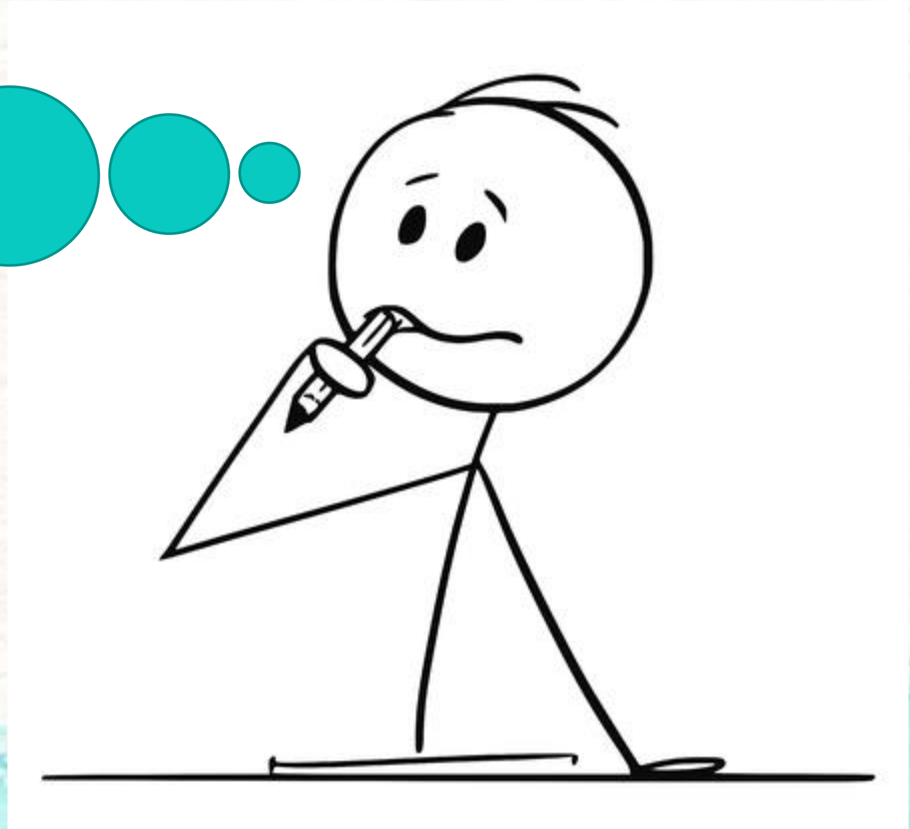
CÁLCULO II

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL?

Una ecuación que contiene una ***función desconocida*** y ***una o más de sus derivadas,*** se llama ecuación diferencial



¿Qué significa resolver una ecuación diferencial?

Es hallar una función desconocida que satisface la ecuación

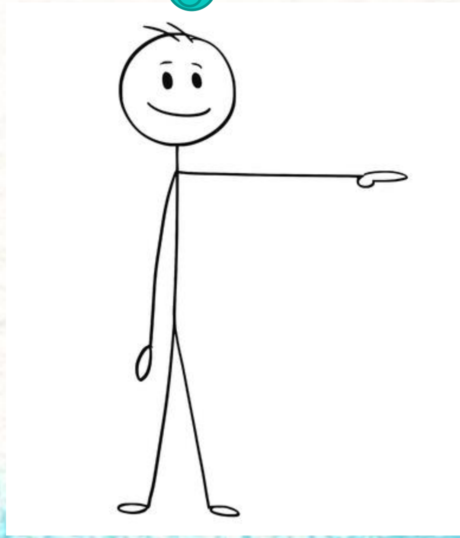
La función depende de una sola variable independiente

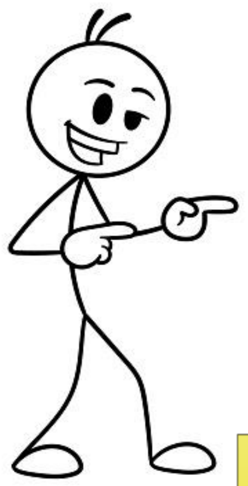
ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

La función depende de varias variables independientes

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Sólo vamos a trabajar con este tipo de Ecuaciones Diferenciales





EJEMPLOS DE EDO (ECUACIONES DIFRENCIALES ORDINARIAS)

$$\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$$

La escribimos como

$$F(x, y, y') = 0$$

Otra notación podría ser:

$$y' + 3xy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

La escribimos como

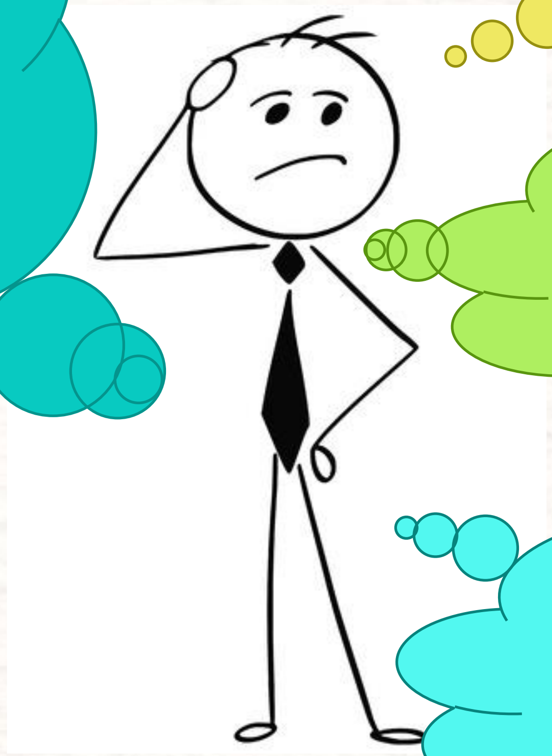
$$F(y, y', y'') = 0$$

Otra notación podría ser:

$$y'' + 2y' - 4y = 0$$

¿QUÉ ES EL ORDEN DE UNA EDO?

Llamamos orden de una ecuación diferencial al mayor orden de las derivadas que aparece en la ecuación



$$\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$$

EDO de primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

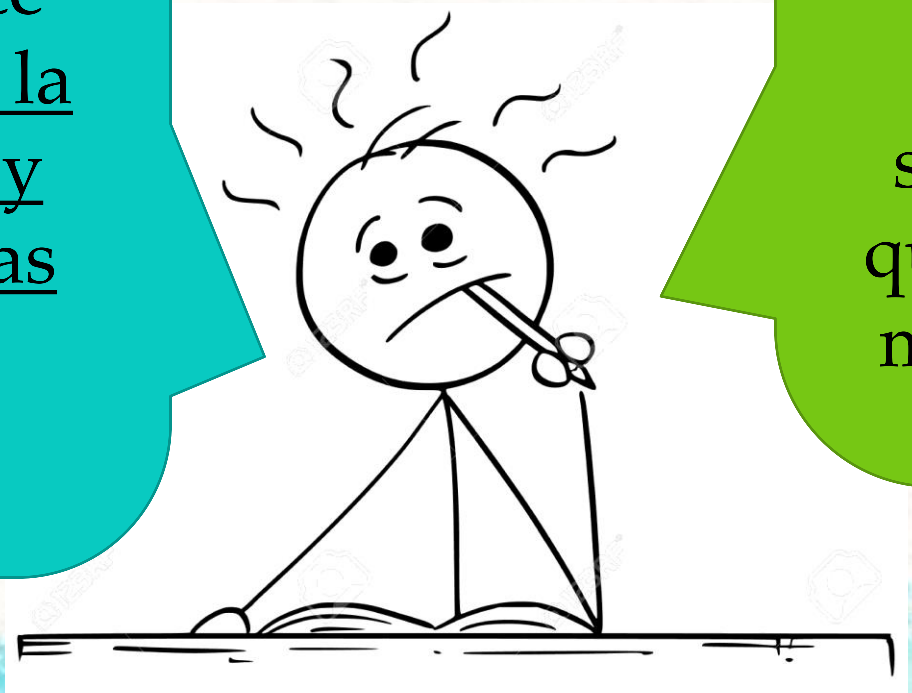
EDO de segundo orden

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0$$

EDO de tercer orden

¿QUÉ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE UNA EDO?

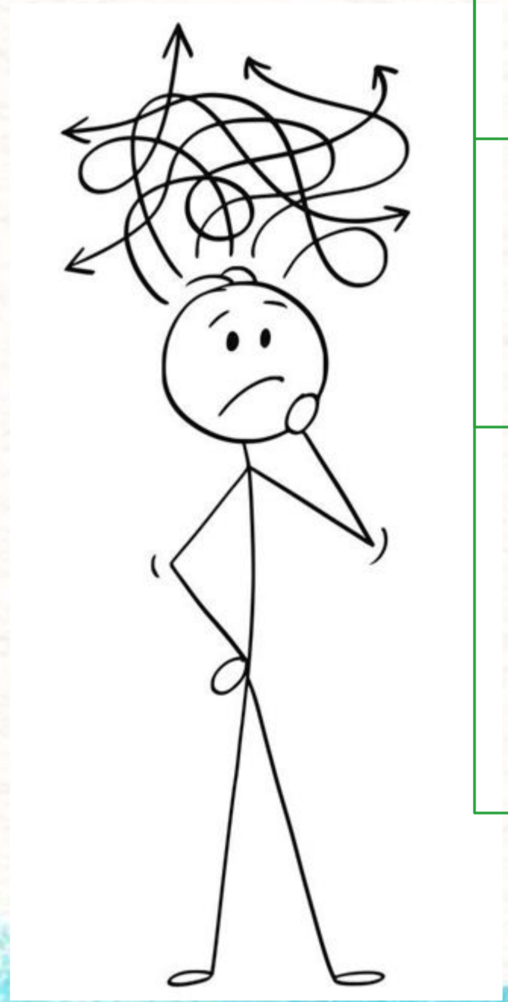
Una función y=f(x) se denomina solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando se sustituye la variable ***y*** por ***f(x)***, y sus derivadas por las derivadas de *f(x)* correspondientes



Hallar la solución de una ecuación diferencial es despejar de la ecuación la función desconocida, este procedimiento no siempre es sencillo, lo que da lugar a distintos métodos de resolución

¿QUÉ MÉTODOS USAMOS PARA RESOLVER EDO DE PRIMER ORDEN?

INTEGRACIÓN INMEDIATA



La ecuación es de la forma $\frac{dy^n}{dx^n} = f(x)$

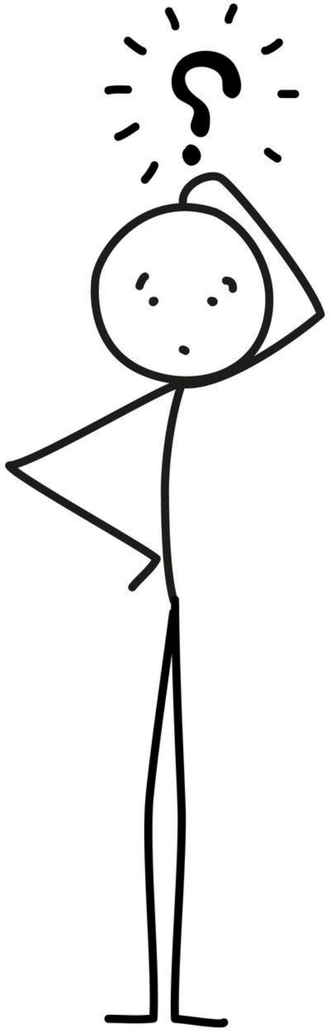
Se integra ***n*** veces ambos miembros de la ecuación para obtener la solución general $y = \int f(x)dx + C$

Ejemplo: hallar la solución general de $y'(x) = 2x$

Integramos ambos miembros: $\int y'(x)\, dx = \int 2x\, dx$

Nos queda: $y(x) = x^2 + C$

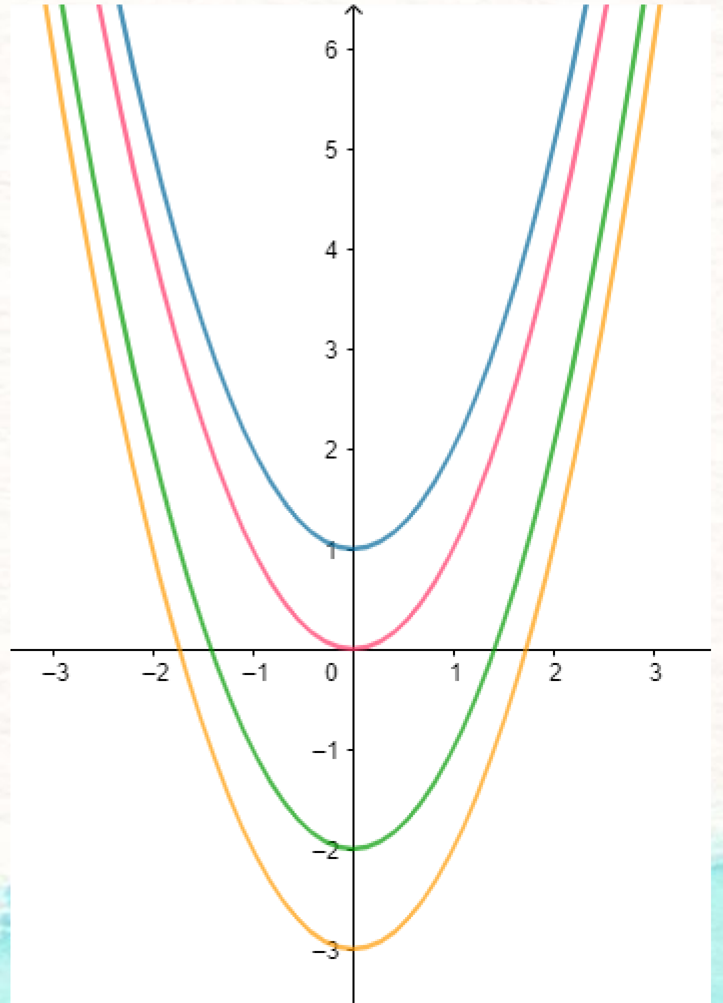
¿CÓMO SE INTERPRETA LA SOLUCIÓN GENERAL?



Geométricamente la solución general de una ecuación diferencial sin importar el orden, corresponde a una ***familia de curvas en el plano***

En el ejemplo anterior, las curvas son parábolas cuyo vértice dependerá del valor de ***C***

Vértice (0 ; C)



DEFINICIÓN DE SOLUCIÓN GENERAL DE UNA EDO

La solución general de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación diferencial y <u>contiene tantas constantes arbitrarias como lo indique el orden de la ecuación</u>

¿QUÉ ES LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE UNA EDO?

Si le damos un valor a la constante, obtenemos una sola curva, lo que origina una ***solución particular***

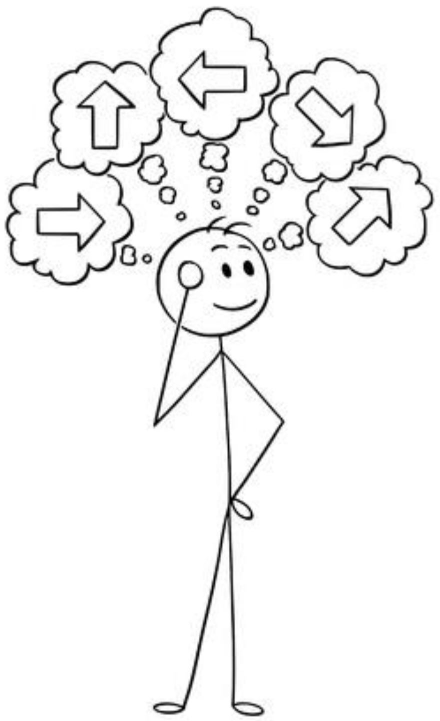
Seguimos con nuestro ejemplo…
La solución debe cumplir que
y(0)=3
Esto significa que si x=0, entonces y=3, lo reemplazamos en la ecuación general…

Para obtener la solución particular imponemos condiciones que debe verificar la ecuación, éstas se denominan ***condiciones iniciales***

Ecuación general: $y(x) = x^2 + C$
Reemplazamos: $y(0) = 0 + C = 3$
Entonces ***C=3***
Solución Particular: $\boldsymbol{y(x) = x^2 + 3}$

¿QUÉ MÉTODOS USAMOS PARA RESOLVER EDO DE PRIMER ORDEN?

SEPARACIÓN DE VARIABLES



La ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$ se llama de ***variables separables***, si $H(x, y)$ se puede escribir como ***producto de una función que dependa de la variable x, y otra función que dependa solamente de la variable y***

Podemos escribir

$H(x, y) = g(x) \cdot \varphi(y)$

donde $\varphi(y) = \frac{1}{f(y)}$

La ecuación diferencial queda: $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$

Las variables pueden ser separadas de modo que el primer miembro depende una de las variables y el segundo miembro de la restante:

$\mathrm{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$

Integramos ambos miembros y obtenemos:

$$\int \mathrm{f(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx$$

Aclaración: $\frac{dy}{dx}.\,dx = y'dx = dy$ por definición de diferencial

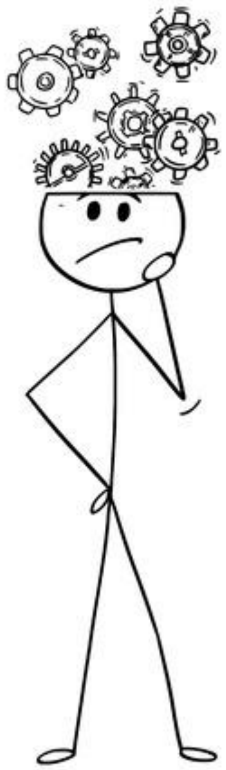
Por lo que lo expresamos como: $\int \mathrm{f(y)}\,dy = \int g(x)\,dx + C$

Si ***f*** y ***g*** son integrables, ***F*** y ***G*** sus primitivas respectivas entonces nos queda

$F(y) = G(x) + C$

¿QUÉ MÉTODOS USAMOS PARA RESOLVER EDO DE PRIMER ORDEN?

SEPARACIÓN DE VARIABLES



Ejemplo: Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = 6xy$ hallar la solución general

1. Separamos las variables $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 6x$

2. Multiplicamos ambos miembros por dx: $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = 6xdx$

   (nos queda $\frac{1}{y}dy = 6xdx$)

3. Reemplazamos e integramos miembro a miembro $\int \frac{1}{y}dy = \int 6xdx$

   Nos queda $ln|y| = 3x^2 + C$

4. Despejamos y: $y = e^{3x^2+C} = e^{3x^2} \cdot e^{C}$, teniendo en cuenta que $e^{C} = k$, la solución general queda: $y = k\, e^{3x^2}$