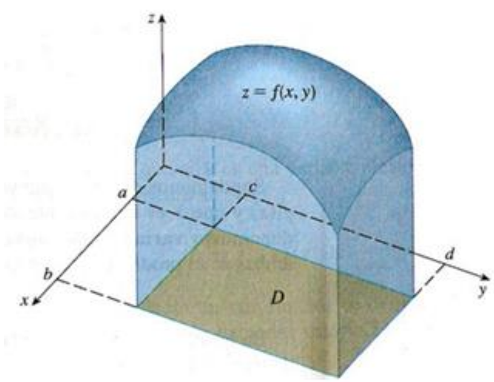
APLICACIONES DE INTEGRALES DOBLES

- CÁLCULO DE VOLUMEN
- CÁLCULO DE ÁREAS

1. CÁLCULO DE VOLUMEN

Sea $z = f(x,y)$ una función definida sobre una región D acotada del plano, tal que

$f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in D$



Queremos hallar el volumen del sólido limitado por debajo de la superficie y por encima de la región D.

Para ello usamos la siguiente fórmula:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dA$$

Para este cálculo nos pueden dar como dato:

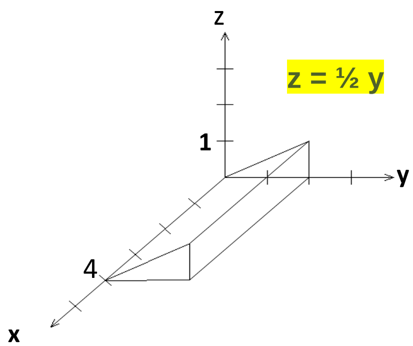
- a) La gráfica de la función y la región
- b) La función f(x, y) y las curvas que limitan la región
- c) Solo la función y debemos determinar la región

SIEMPRE DEBEMOS GRAFICAR LA REGIÓN

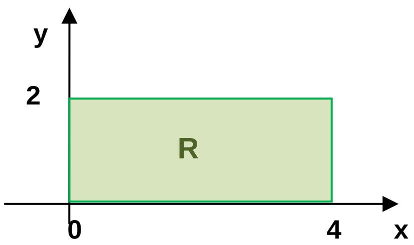
EJEMPLOS:

a) **Plantear y resolver las integrales dobles que permiten obtener el volumen de los siguientes sólidos en el primer octante**

1.

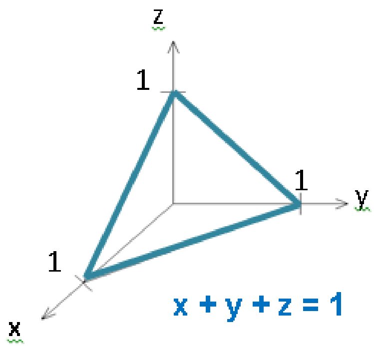


Región rectangular: $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 2$

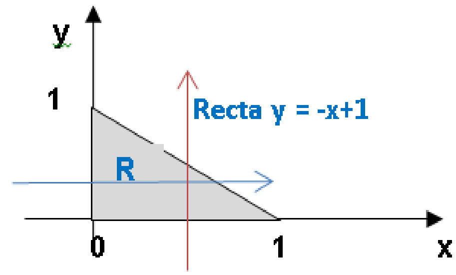


$$\iint_R \frac{1}{2} y \, dA = \int_0^4 \left[\int_0^2 \frac{1}{2} y \, dy \right] dx = \int_0^4 \left. \frac{y^2}{4} \right|_0^2 dx = \int_0^4 dx = x \Big|_0^4 = 4uv$$

2. Tenemos como dato la función, debemos buscar la ecuación de la traza:



Región no rectangular:



IMPORTANTE:

- El integrando es z = f(x, y)
- Los extremos de integración

$$\iint_R (1-x-y)\ dA = \underbrace{\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\ dx}_{\text{y- simple}} = \underbrace{\int_0^1\int_0^{1-y}(1-x-y)\,dx\ dy}_{\text{x -simple}}$$

Y- SIMPLE

$$\iint_R (1-x-y)\ dA = \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dydx = \int_0^1\left(y-xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx$$

$$\int_0^1\left(y-xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx = \int_0^1\left[(1-x)-x\,(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2-x\right)dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \boxed{(1/6)\ \text{uv}}$$

X –SIMPLE

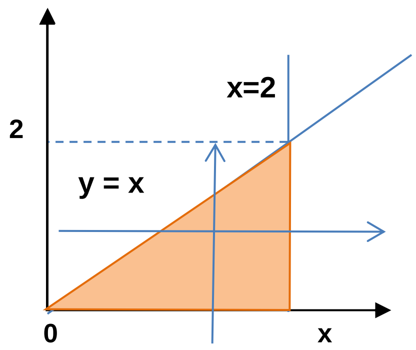
$$\iint_R (1-x-y)\ dA = \int_0^1\int_0^{1-y}(1-x-y)\,dx\ dy = \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}x^2-yx\right)\Big|_0^{1-y}dy$$

$$\int_0^1\left(1-y-\frac{1}{2}(1-y)^2-y\,(1-y)\right)dy = \int_0^1\left(-y+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y^2\right)dy = -\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}y^3\Big|_0^1 = \boxed{(1/6)\ \text{uv}}$$

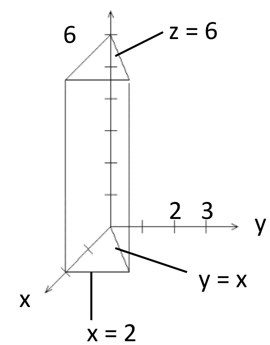
b

1. **Plantear la integral doble que permite calcular el volumen del sólido en el primer octante, limitado superiormente por z = 6 y lateralmente por los planos x = 2 e y = x (Practico)**

Región de integración



Gráficamente:

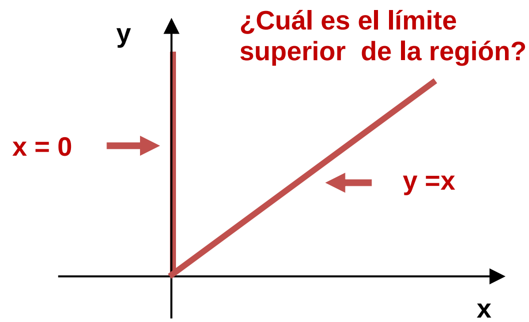


$$\iint_R 6\,dA = \int_0^2\int_y^2 6\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^x 6\,dy\,dx$$

$$\iint_R 6\,dA = \int_0^2\int_y^2 6\,dx\,dy = \int_0^2 6x\Big|_y^2 dy = \int_0^2 (12-6y)\,dy = 12y - 3y^2\Big|_0^2 = 12\,uV$$

2. **El sólido limitado superiormente por $z+y^2=4$ y lateralmente por los planos x = 0; y = x PRACTICO**

Con los datos graficamos la región

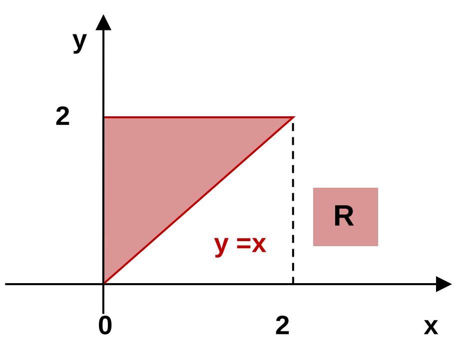


Buscamos las trazas con xy

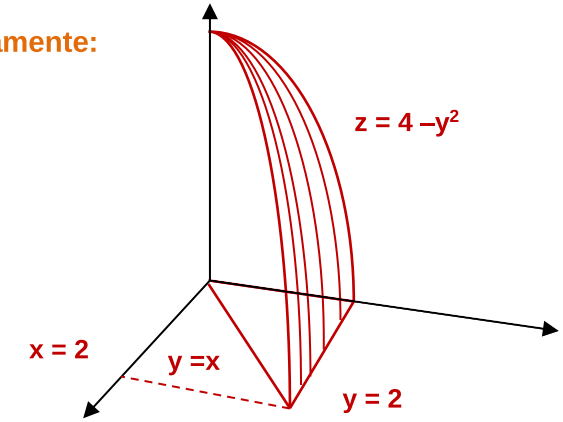
$\begin{cases} z = 4 - y^2 & \text{x es variable libre} \\ z = 0 \end{cases}$

$y^2 = 4 \longrightarrow |y| = 2$

y = -2; y = 2 esta es la traza para la región



Gráficamente:



Calculamos como y-simple: 0 ≤x ≤2 x ≤ y ≤ 2

$$\iint_R (4-y^2)dA = \int_0^2 \int_x^2 (4-y^2)\, dy\, dx = \int_0^2 (4y - \frac{y^3}{3})\Big|_x^2 dx = \int_0^2 \left[\left(8-\frac{8}{3}\right) - \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right] dx = \left(\frac{16}{3}x - 2x^2 + \frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^2$$

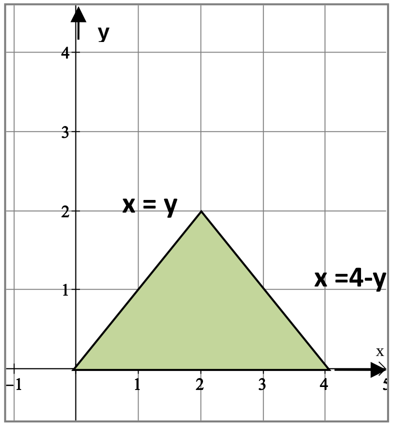
$$\left(\frac{16}{3}x - 2x^2 + \frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{3} - 8 + \frac{4}{3} = 4uv$$

Calculamos como x-simple: 0 ≤ x ≤ y 0 ≤ y ≤ 2

$$\iint_R (4-y^2)dA = \int_0^2 \int_0^y (4-y^2)\, dx\, dy = \int_0^2 (4x - y^2x)\Big|_0^y dy = \int_0^2 (4y - y^3)dy = \left(2y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8 - 4 = 4uv$$

3. **Plantear las integrales dobles para calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 6 - x - y$ y lateralmente por las rectas y = x e y = 4 – x y el eje x.**

Con los datos del enunciado, graficamos la región:

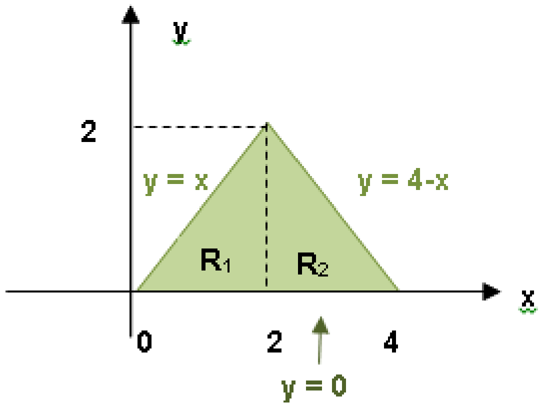


Para el x –simple y ≤ x ≤ 4-y 0 ≤ y ≤ 2

$$\int_0^2 \int_y^{4-y} (6-x-y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(6x - \frac{1}{2}x^2 - xy\right)\Big|_y^{4-y} dy = \int_0^2 \left(\left(6(4-y) - \frac{1}{2}(4-y)^2 - y(4-y)\right) - \left(6y - \frac{1}{2}y^2 - y^2\right)\right) dy$$

$$\int_0^2 (16 - 12y + 2y^2)dy = (16y - 6y^2 + \frac{2}{3}y^3)\Big|_0^2 = 32 - 24 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}\ \text{uv}$$

Esta región no es y- simple. Pero se puede dividir en dos regiones y-simple



Para R_1 : $0 \le y \le x$ $0 \le x \le 2$

$$\int_0^2\int_0^x (6-x-y)dy\,dx = \int_0^2 (6y - xy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^x dx = \int_0^2\left(6x - x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx = (3x^2 - \frac{3}{2}\frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = 12 - \frac{8}{2} = 8uv$$

Para R_2 : $0 \le y \le 4- x$ $2 \le x \le 4$

$$\int_2^4\int_0^{4-x}(6-x-y)dy\,dx = \int_2^4\left(6y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{4-x} dx =$$

$$= \int_2^4\left(6(4-x) - x(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2}\right)dx = \int_2^4 (16 - 6x + \frac{1}{2}x^2)\,dx =$$

$$= \int_2^4 (16 - 6x + \frac{1}{2}x^2)\,dx = (16x - 3x^2 + \frac{1}{6}x^3)\Big|_2^4 = \left(16 + \frac{32}{3}\right) - \left(20 + \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}uv$$

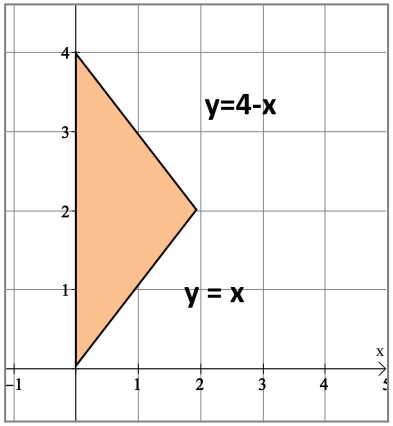
k

Sumando ambos resultados nos queda:

$$V = \frac{16}{3}uv + 8uv = \frac{40}{3}uv$$

4. Plantear las integrales dobles para calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 6 - x - y$ y lateralmente por las rectas y = x e y = 4 – x y el eje y.

Con los datos del enunciado, graficamos la región:

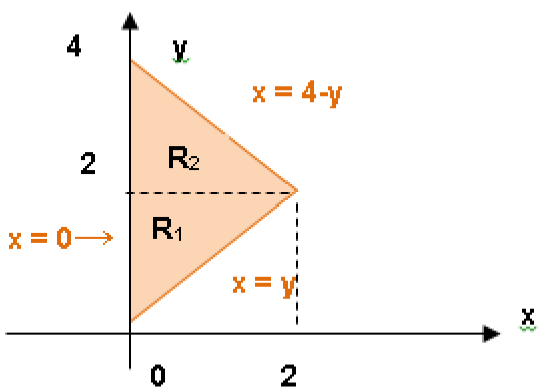


Para y –simple **$x \le y \le 4-x$** **$0 \le x \le 2$**

$$\int_0^2 \int_x^{4-x} (6-x-y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(6y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_x^{4-x} dx = \int_0^2 \left(\left(6(4-x) - \frac{1}{2}(4-x)^2 - x(4-x)\right) - \left(6x - \frac{1}{2}^2 - x^2\right)\right) dx$$

$$\int_0^2 \left(16 - 16x + 2x^2\right) dx = \left(16x - 8y^2 + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}\,uV$$

Esta región no es x-simple, pero podemos dividirla en dos regiones x-simples



c **Plantear la integral doble para calcular el volumen del sólido en el primer octante limitado superiormente por $2x + 3y + 6z = 6$**

En este caso sólo nos dan como dato la superficie, la región la determinamos con la traza en el plano de planta

Traza con el plano xy: $z = 1 - (1/3)\,x - (1/2)\,y$

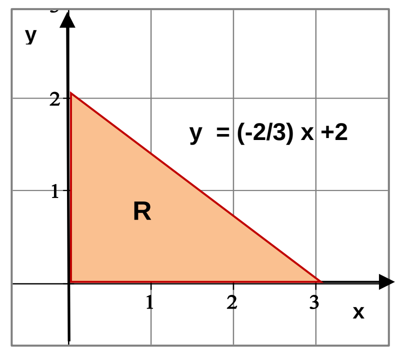
$z = 0 \;\longrightarrow\; y = -(2/3)\,x + 2$

Y-SIMPLE:

$0 \le x \le 3 \quad 0 \le y \le (-2/3x) + 2$

X -SIMPLE

$0 \le y \le 2 \quad 0 \le x \le (-3/2)\,y + 3$



Región y - simple

$$V = \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} \left(6 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) dy\, dx$$

Región x - simple

$$V = \int_0^2 \int_0^{-\frac{3}{2}y+3} \left(6 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) dx\, dy$$

CÁLCULO DE ÁREAS

Si queremos calcular el volumen de un cilindro de altura h y base D, se utiliza la fórmula:

V = área de la base . altura = área (D) . h

Si en particular la altura mide 1 , nos quedaría:

V = área (D) . 1 = área (D)

Vemos entonces que numéricamente el volumen coincide con el área de la base, si la altura es 1.

Si tenemos una superficie   z = f(x,y) = 1 (es un plano paralelo al plano x-y), definido sobre una región plana acotada D, se forma un sólido por debajo del plano y por encima de D, cuya altura es 1.

El volumen de ese cuerpo coincide con el área de su base, ya que la altura es igual a 1.

Por lo tanto :

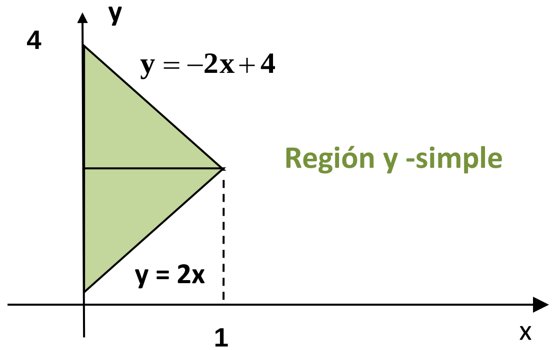
$$\text{Área (D)} \rightarrow V = \iint_D 1\, dA$$

SIEMPRE DEBEMOS HACER LA GRÁFICA DE LA REGIÓN $\Rightarrow$ **Y - SIMPLE** / **X - SIMPLE**

PARA DETERMINAR LOS EXTREMOS DE INTEGRACIÓN

1. Utilice integrales dobles para hallar el área de las regiones dadas

Fig.1

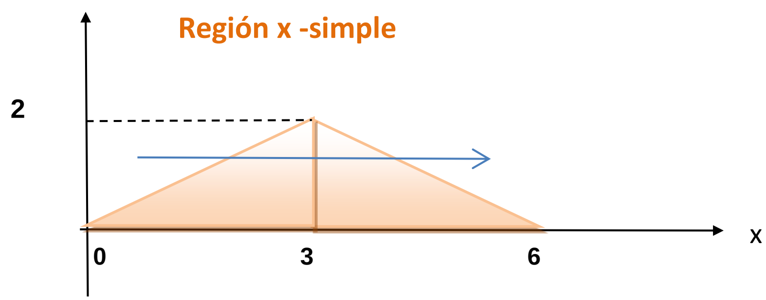


Región y -simple

$$A = \iint_D 1\,dA = \int_0^1 \int_{2x}^{-2x+4} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_{2x}^{-2x+4} dx$$

$$A = \int_0^1 (-2x+4-2x)\,dx = -2x^2+4x\Big|_0^1 = 2uA$$

Fig. 2



Si no me dan la ecuación de las rectas que limitan la región, las obtengo teniendo en cuenta los puntos que me dan como dato

Ecuación de la recta que pasa por los puntos (0; 0) y (3; 2)

$y = (2/3)\ x$ despejamos $x = (3/2)\ y$

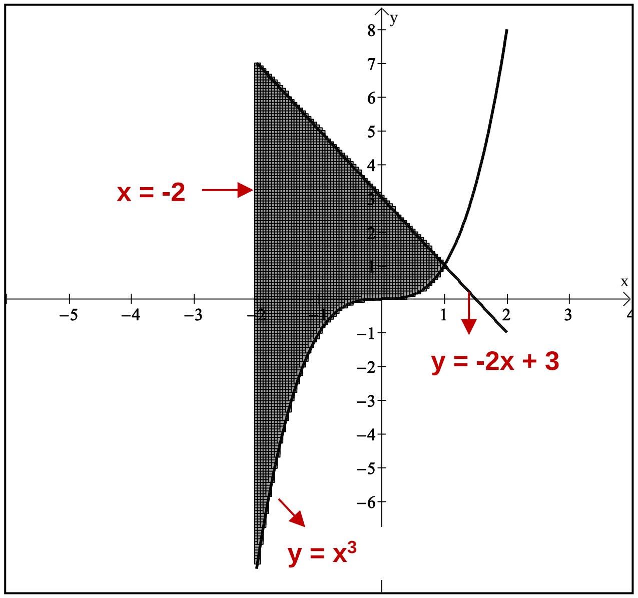
Ecuación de la recta que pasa por los puntos (6; 0) y (3; 2)

$y = (-2/3)\ x + 4$ despejamos $x = -(3/2)\ y + 6$

$$A = \iint_D 1\,dA = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}y}^{-\frac{3}{2}y+6} dx\,dy = \int_0^2 x\Big|_{\frac{3}{2}y}^{-\frac{3}{2}y+6} dy = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}y+6-\frac{3}{2}y\right) dy = -\frac{3}{2}y^2+6y\Big|_0^2 = 6\,uA$$

2. *Grafique las regiones y calcule el área en el orden más conveniente*

a) Región acotada por las curvas: $y = -2x + 3\,;\;\; y = x^3\,;\;\; x = -2$



El orden más conveniente es y – simple: $-2 \le x \le 1 \qquad x^3 \le y \le -2x + 3$

$$\iint_R dA = \int_{-2}^{1}\int_{x^3}^{-2x+3} dy\, dx = \int_{-2}^{1}\left(-2x+3-x^3\right)dx = -x^2+3x-\frac{1}{4}x^4\Big|_{-2}^{1} = \frac{7}{4}+14 = \frac{63}{4}\,uA$$

Las dos regiones x – simple son:

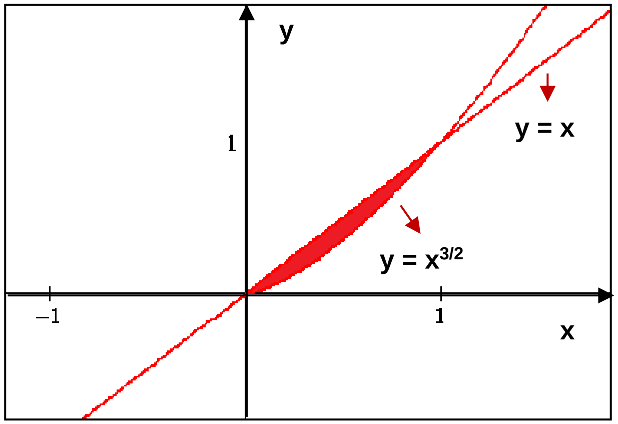
Región 1: $-8 \le y \le 1 \qquad -2 \le x \le y^{(1/3)}$ **Región 2:** $1 \le y \le 7 \qquad -2 \le x \le -(1/2)\,y+3/2$

$$\iint_R dA = \int_{-8}^{1}\int_{-2}^{\sqrt[3]{y}} dx\, dy + \int_{1}^{7}\int_{-2}^{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}} dx\, dy = \int_{-8}^{1}\left(y^{\frac{1}{3}}+2\right)dy + \int_{1}^{7}\left(-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}+2\right)dy = \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}+2y\Big|_{-8}^{1} - \left(-\frac{1}{4}y^2+\frac{7}{2}y\right)\Big|_{1}^{7}$$

$$\iint_R dA = \left[\left(\frac{3}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}.16-16\right)\right]-\left[\left(-\frac{49}{4}+\frac{49}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{7}{2}\right)\right] = \frac{27}{4}+9 = \frac{63}{4}\,uA$$

b) **Región acotada por** $y = x^{3/2}$, $y = x$

La región se puede considerar como y –simple o x – simple:



Región y - simple :

$$A = \iint_D 1\, dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} dy\, dx = \int_0^1 y\Big|_{x^{3/2}}^{x} dx = \int_0^1 \left(x - x^{3/2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{10}\, uA$$

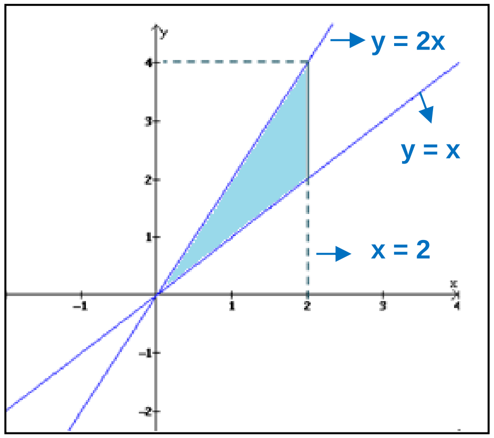
Región x - simple :

$$A = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} dx\ dy = \int_0^1 x\Big|_y^{y^{2/3}} dy = \int_0^1 \left(y^{\frac{2}{3}} - y\right) dy = \left(\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\, u\, a$$

$$y = \sqrt{x^3} \qquad y^2 = x^3 \qquad \sqrt[3]{y^2} = x$$

c) **Región acotada por** $y = 2x,\ y = x,\ x = 2$

Región y –simple: para $0 \le x \le 2$; $x \le y \le 2x$



$$\iint_R dA = \int_0^2 \int_x^{2x} dy\,dx = \int_0^2 (2x - x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^2 = 2uA$$

Tenemos dos regiones x –simple:

0 ≤ y ≤ 2; (½) y ≤ x ≤ y para 2 ≤ y ≤ 4; (½) y ≤ x ≤ 2

$$\text{Región 1}: \iint_{R_1} dA = \int_0^2 \int_{(1/2)y}^{y} dx\,dy = \int_0^2 \left(y - \frac{1}{2}y\right) dy = \frac{1}{4}y^2 \Big|_0^2 = 1uA$$

$$\text{Región 2}: \iint_{R_2} dA = \int_2^4 \int_{(1/2)y}^{2} dx\,dy = \int_2^4 \left(2 - \frac{1}{2}y\right) dy = 2y - \frac{1}{4}y^2 \Big|_2^4 = (8-4) - (4-1) = 1uA$$

Área de la región es: $\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = 2\,u\,A$