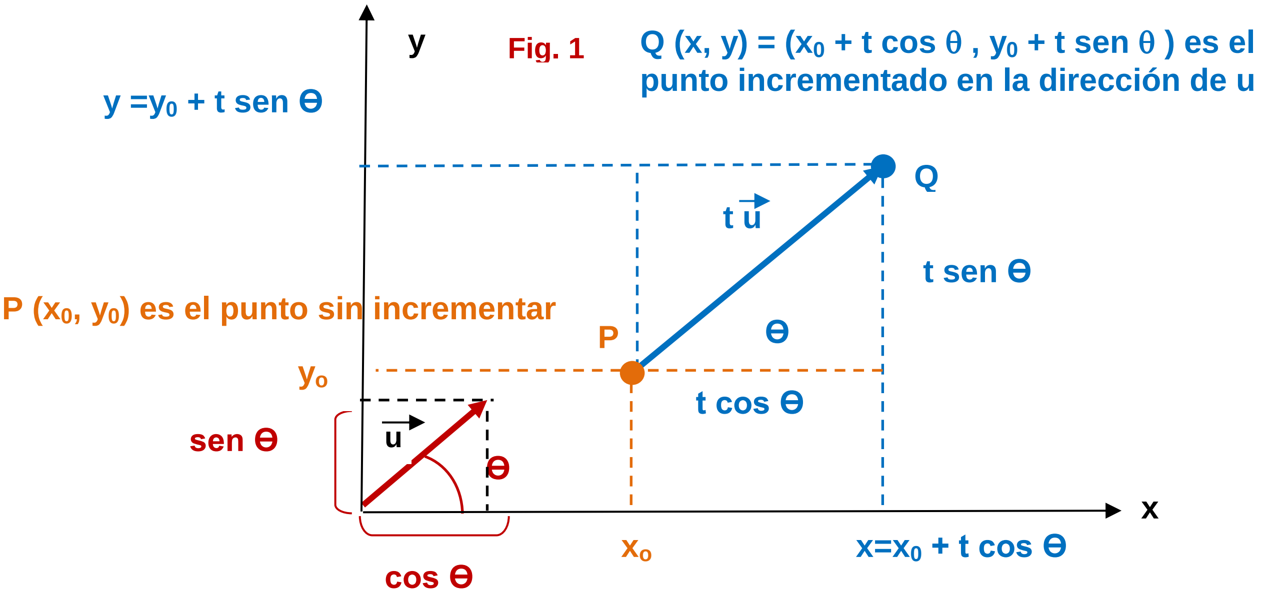
CAPÍTULO IV- PARTE C

DERIVADA DIRECCIONAL

Recordemos que las derivadas parciales de una función z = f(x,y) en un punto (x_0 ,y_0), indican cómo varía la función si se incrementa al punto (x_0 ,y_0), sólo en la dirección del eje x o del eje y . Y representan la pendiente de la recta tangente a la superficie en la dirección de x o de y.

Queremos averiguar cómo varía la función z = f(x, y) en el punto (x_0, y_0) si incrementamos este punto en una dirección cualquiera.

Esta dirección viene dada por un vector unitario u = cos θ i + sen θ j donde θ es el ángulo que forma con el eje positivo de las x . En este caso para diferenciarla de las derivadas parciales se la llama derivada direccional.



GRÁFICAMENTE, EN EL DOMINIO DE F:

$\vec{u}$ **= cos θ i + sen θ j o** $\vec{u}$ **= (cosϴ; sen ϴ)**
vector unitario que indica la dirección en la que se incrementa

t. $\vec{u}$ **= t cos θ i + t sen θ j**

es el vector incremento cuyo módulo es t siendo t > 0

$$|\mathbf{t\ u}| = \sqrt{\mathbf{t^2\ cos^2\theta + t^2\ sen^2\theta}} = \sqrt{\mathbf{t^2\ (\ cos^2\theta +\ sen^2\theta)}} = |t|$$

(x_0, y_0) es el punto sin incrementar

$f(x_0 + t\cos\theta,\ y_0 + t\,\text{cen}\,\theta)$ es el punto incrementado

Armemos ahora el límite del cociente incremental

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta\,, y_0 + t\,\text{sen}\,\theta) - f(x_0, y_0)}{t} =$$

Y este límite es de una variable. Si existe ese límite es la derivada de la función en la dirección de u

- **Definición de derivada direccional:**

Sea z = f (x,y) una función definida en una región abierta S del plano, (x_0 , y_0) un punto interior a S, y u un vector unitario definido como u = cos θ i + sen θ j , siendo θ el ángulo que forma con el eje de las x.

Si existe el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta\,, t\,\text{sen}\,\theta) - f(x_0, y_0)}{t} =$$

Se llama derivada de la función en el punto (x_0 , y_0), según la dirección del vector u, y se anota $D_u f(x_0, y_0)$

Ejemplo:

Hallar la derivada direccional de la siguiente función en el punto (1 , 1), según la dirección del vector

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z = x^2 + y^2$$

El punto sin incrementar es (1 , 1)

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

El punto incrementado es $\left(1 + t.\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1 + t.\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Reemplazando en el cociente incremental nos queda:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t.\cos\theta, y_0+t.\text{sen}\theta)-f(x_0,y_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+\frac{t}{\sqrt{2}})^2+(1+\frac{t}{\sqrt{2}})^2-2}{t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{2+\frac{4t}{\sqrt{2}}+t^2-2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t.(\frac{4}{\sqrt{2}}+t)}{t}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

Aclaración:

Las derivadas parciales son un caso particular de la derivada direccional.

Si $\theta = 0°$, el vector sería $\vec{u}=(1,0)$, y estaría sobre el eje x . Entonces el cociente incremental quedaría:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t, y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

Que sería la definición de la derivada parcial respecto de x.

Si $\theta = 90°$, el vector sería $\vec{u}=(0,1)$, y estaría sobre el eje y . Entonces el cociente incremental quedaría:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0, y_0+t.)-f(x_0,y_0)}{t}$$

Que sería la definición de la derivada parcial respecto de y.

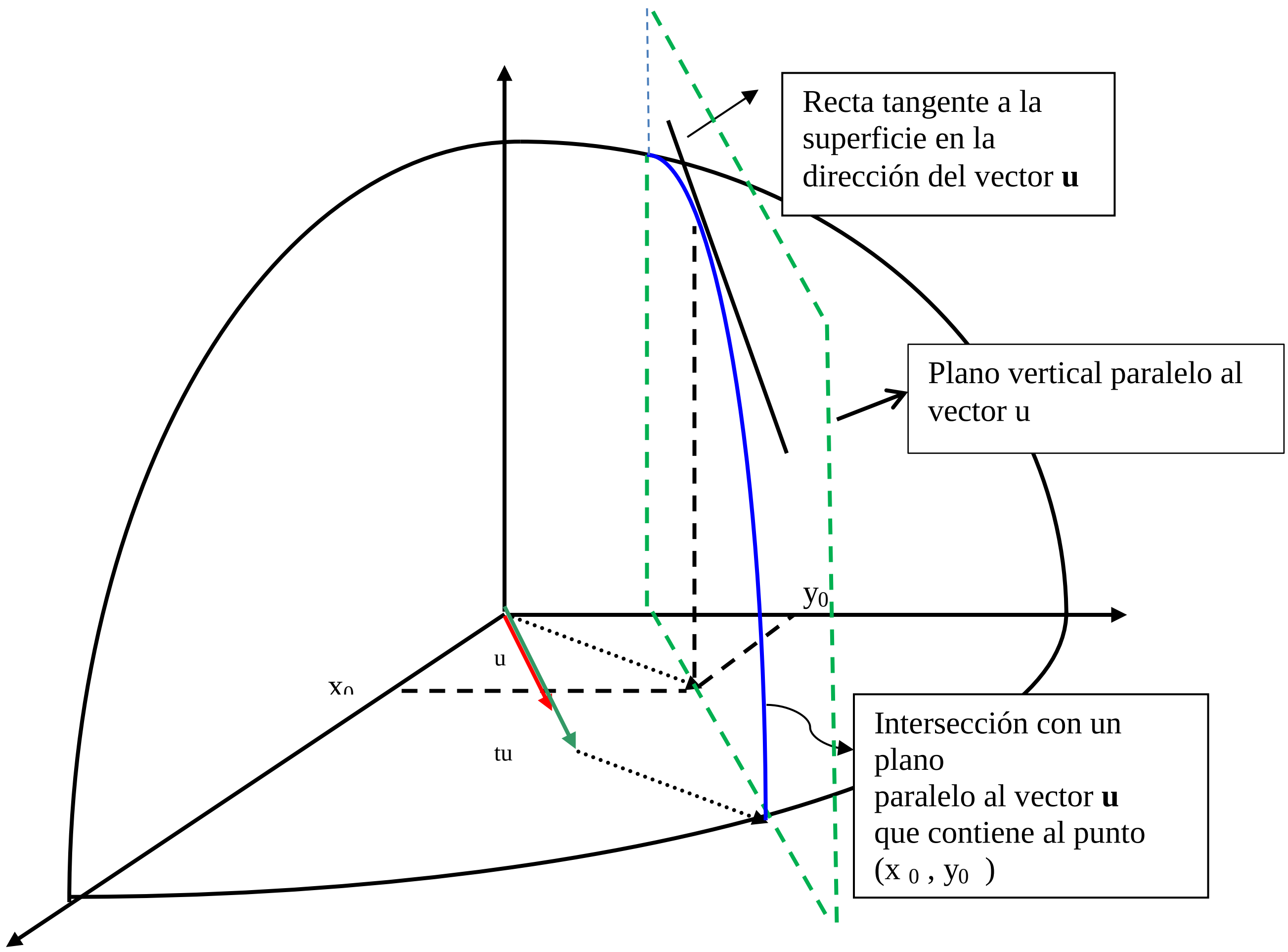
- **Interpretación Geométrica De La Derivada Direccional**

Vamos a interpretar gráficamente qué significa el valor de la derivada direccional

Incrementamos al punto (x_0 , y_0) en la dirección del vector **u** , y trazamos un plano vertical que contenga al punto sin incrementar y al incrementado **(en verde).**

La intersección de la superficie con dicho plano es una curva **(en azul**).

La derivada direccional representa la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto ($x_0,y_0,f(x_0,y_0)$)



- **Teorema De La Derivada Direccional:**

Sea $\vec{u} = (\cos\theta, \text{sen}\theta)$ el vector unitario, si z = f (x ,y) es diferenciable en (x_0 , y_0) entonces la derivada direccional en dicho punto en la dirección del vector u está dado por:

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).\text{sen}\theta$$

Ejemplo: Resolveremos el mismo ejercicio anterior para comparar resultados:

Hallar la derivada direccional de la siguiente función **$z= x^2 + y^2$** en el punto (1 , 1), según la dirección del vector

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).\text{sen}\theta$$

Reemplazando:

$D_u f(x_0, y_0) = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} + 2.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

Vemos que se obtiene el mismo valor. Pero esta fórmula sólo se puede usar cuando la función es diferenciable en el punto.

➢ VECTOR GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Definición :

Si existen las derivadas parciales primeras de la función z = f (x,y) en el punto (x_0,y_0), se puede formar el siguiente vector llamado *Vector Gradiente*:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\hat{j}$$

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

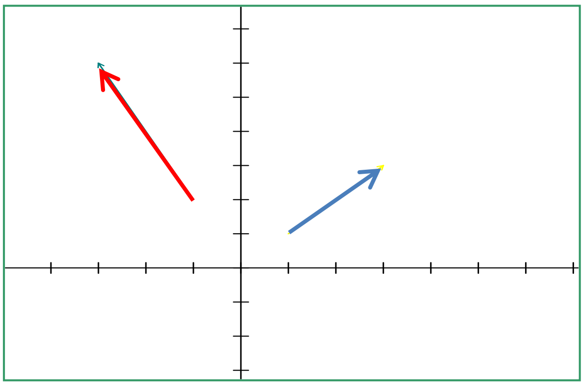
Como se ve, este vector está aplicado al punto (x_0,y_0) y por lo tanto se dibuja en el dominio de la función, es decir en el plano de planta, y aplicado en dicho punto.

Ejemplo: Dada la función $z = x^2 + y^2$

Hallar y graficar el vector gradiente en los puntos indicados: $\nabla f(x,y) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$

en (1,1) en (-1,2) sería: $\nabla f(1,1) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ $\nabla f(-1,2) = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$

Gráficamente: Observe que el vector gradiente está en el dominio de la función, y aplicado en el punto en el que se ha calculado.



➢ Derivada Direccional Como Producto Escalar

Si tenemos en cuenta que

$z = f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0)

El vector gradiente es $\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

y $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ un vector unitario

Entonces, la fórmula vista para la derivada direccional de la función $z = f(x,y)$ en (x_0, y_0)

$$D_u f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\operatorname{sen}\theta$$

Se podría escribir como producto escalar entre el vector gradiente y el vector unitario **u**

$$D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0).\vec{u}$$

Otra forma de resolver el producto escalar de dos vectores en el plano es:

$$D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0).\vec{u} = |\nabla f(x_0,y_0)|\,|\vec{u}|\cos(\propto)$$

Siendo α el ángulo que forma el vector unitario **u** con el vector gradiente

Pero como $|\vec{u}| = 1$, por lo tanto se deduce que:

$$D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0).\vec{u} = |\nabla f(x_0,y_0)|\cos(\propto)$$

En esta última expresión observamos que el valor de la derivada direccional depende del ángulo que forma el vector unitario **u** con el vector gradiente.

➢ PROPIEDADES DEL VECTOR GRADIENTE

Sea z= f (x,y) diferenciable en el punto (x_0,y_0)

Propiedad I:

Si las derivadas parciales en el punto (x_0,y_0) son nulas, entonces la derivada direccional en dicho punto, en cualquier dirección también es nula.

Propiedad II:

La dirección de máxima variación de f en el punto (x_0, y_0) viene dada por $\nabla f(x_0,y_0)$.

- **La función crece más rápidamente en la dirección y sentido del $\nabla f(x_0,y_0)$. El valor máximo de $D_u f(x_0,y_0)$ es $|\nabla f(x_0,y_0)|$**
- **La función decrece más rápidamente en la dirección y sentido contrario del $\nabla f(x_0,y_0)$. El valor mínimo de $D_u f(x_0,y_0)$ es $-1|\nabla f(x_0,y_0)|$**

Demostración:

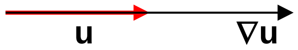
Ya hemos visto que

$$\mathbf{D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\vec{u} = |\nabla f(x_0, y_0)|\ \ cos}\ (\propto)$$

Pero el cos α es un valor acotado: $-1 < \cos\alpha < 1$ $\forall\alpha$

Por lo tanto :

Si $\alpha = 0^o$ es decir



entonces cos (0º) = 1 y la derivada direccional nos queda :

$\mathbf{D_u f(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)|}$ y este es el **valor máximo** que puede tomar la derivada

Quiere decir que si incrementamos la función en el punto (x_0,y_0) , **en la dirección y sentido del vector gradiente**, **la función crece más rápidamente**

Si $\alpha = 180^o$ es decir

entonces cos (180º) = - 1 y la derivada direccional nos queda :

$\mathbf{D_u f(x_0, y_0) = -1\ |\nabla f(x_0, y_0)|}$ y este es el **valor mínimo** que puede tomar la derivada

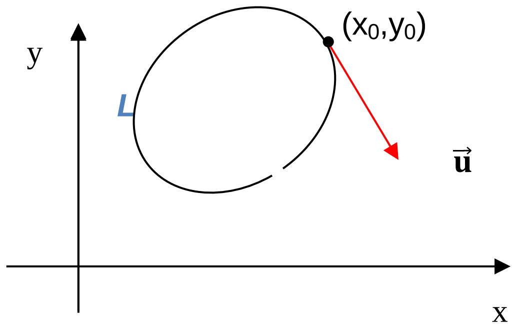
Quiere decir que si incrementamos la función en el punto (x_0,y_0) , en la dirección del vector gradiente pero sentido contrario , la función decrece más rápidamente.

Propiedad III:

Si $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0\,i + 0\,j$, entonces el $\nabla f(x_0,y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por el punto (x_0,y_0) .

Demostración:

En el dominio sea L una curva de nivel de la función z = f(x,y) que contiene al punto (x_0,y_0) , y $\vec{u}$ un vector unitario tangente a la curva L



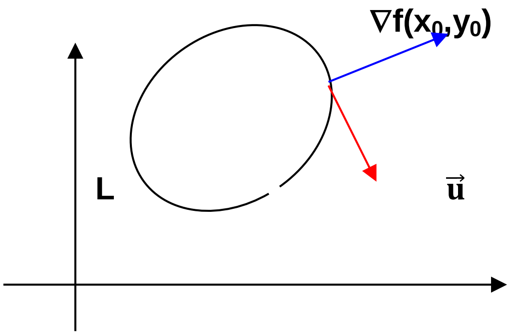
Calculemos la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$

$D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{u}$

Pero esta derivada es cero por que el punto se mueve sobre la curva de nivel de f, y por lo tanto los valores de la función no varían (vea definición de curva de nivel).

Luego $D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{u} = 0$

Pero por propiedad de producto escalar entre vectores, si este es cero y ninguno de los vectores es nulo, entonces son ortogonales entre sí, por lo tanto concluimos que $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular al vector $\vec{u}$ en el punto (x_0,y_0), y como $\vec{u}$ es tangente a la curva L, **el vector $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular a la curva L.**



<u>Ejemplos de aplicación de las propiedades del vector gradiente</u> :

Ejemplo 1

La temperatura en grados Celcius de una placa metálica es: $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$ Donde x e y se miden en centímetros, y T representa la temperatura en el punto (x,y)

En qué dirección, a partir del punto (2, -3) crece más rápidamente la temperatura?

Solución:

La dirección de máximo crecimiento está dada por el vector gradiente. Calculamos entonces el gradiente de

$T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$

$\nabla T(x,y) = -8x\, i - 2y\, j$ $\qquad$ $\nabla T(2,-3) = -16\, i + 6\, j$

Esta es la dirección en la cual la temperatura crece más rápidamente en ese punto.

Si queremos averiguar el ritmo de crecimiento máximo calculamos el módulo del gradiente:

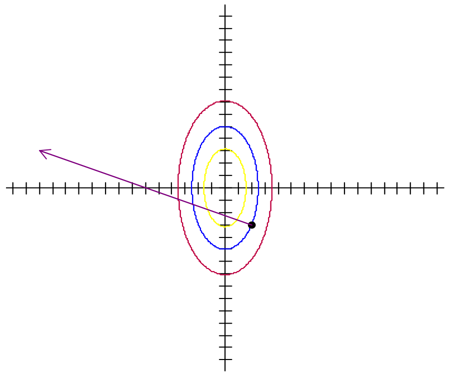
$\|\nabla T\| \approx 17.09^{\circ}$ por centímetro

Aclaración:

Hay que aclarar que el gradiente si bien da la dirección de máximo crecimiento en el punto (2,-3), no necesariamente apunta al punto más caliente de la placa.

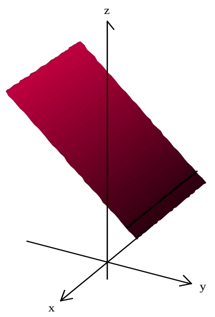
Apenas se abandone esa posición, la dirección de máximo crecimiento puede cambiar.

Gráficamente



Ejemplo 2:

Graficar la función $z = 7 - y$

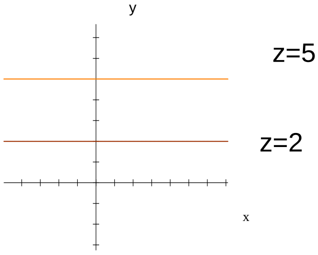


Las curvas de nivel de la superficie **$z = 7 - y$** , para $z = 2$ y para $z = 5$ son:

Para $z = 2$ **$y = 5$**

Para $z = 5$ **$y = 2$**

Gráficamente:

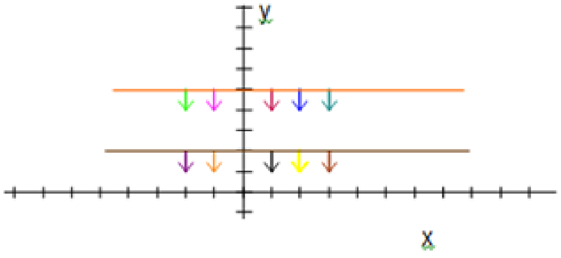


Trazamos las curvas de nivel de la superficie , y vemos que son rectas paralelas al eje **x**

Si calculamos los gradientes en los puntos:

(1,2) (2,2) (3,2) (-1,2) (-2,2) y (1,5) (2,5) (3,5) (-1,5) (-2,5)

Pero al calcular el vector gradiente $\nabla f(a,b) = 0\,i - 1\,j$



En este caso los vectores tienen el mismo módulo, y direcciones paralelas, por que la superficie es un plano paralelo al eje x, y el crecimiento es uniforme. Vemos que efectivamente es perpendicular a las curvas de nivel.

Aclaración:

Si la función fuera de tres variables , el vector gradiente en el punto P(x,y,z), es perpendicular a la superficie de nivel que pasa por dicho punto

Por ejemplo:

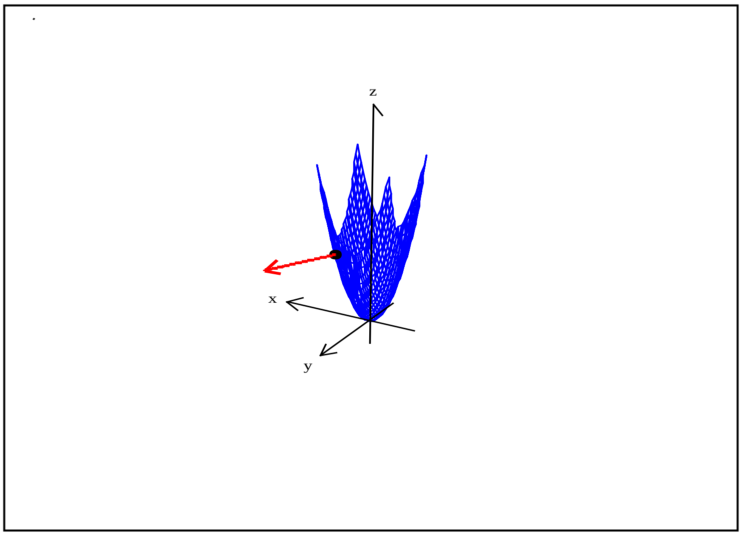
Sea $w = x^2 + y^2 - z$

Una superficie de nivel de esa función para $w = 0$ es $x^2 + y^2 - z = 0$

Calculemos el gradiente de w en el punto (2,2,8) que está sobre esa curva de nivel

$\nabla w\,(2,2,8) = 4\,i + 4\,j - 1\,k$

gráficamente:



Vemos que el vector gradiente de w , es perpendicular a la superficie de nivel de w , en dicho punto

Cuidado!

La gráfica es de la superficie de nivel, ya que la función w no se puede graficar por ser de tres variables

➢ PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE

Definición:

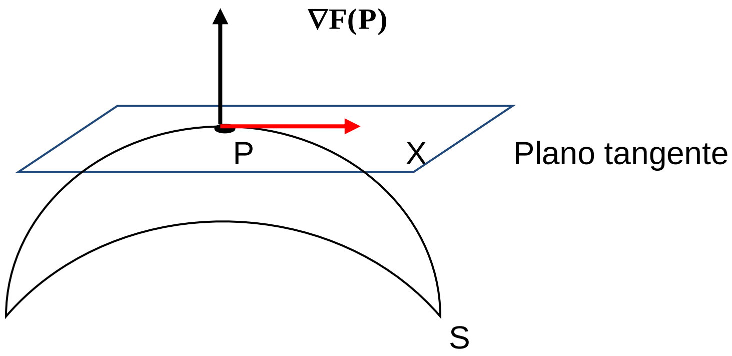
Sea F(x,y,z) = 0 una superficie S, diferenciable en el punto P(a,b,c) de la superficie , y $\nabla F(P) \neq (0,0,0)$.

El plano que pasa por P, y es normal al $\nabla F(P)$, es el plano tangente a la superficie S en P.

Nota: el plano tangente a una superficie existe si y sólo si la función es diferenciable en dicho punto, y contiene a todas las rectas tangentes a la superficie , en todas las direcciones posibles.

Ecuación del plano tangente

Para hallar la ecuación del plano tangente a S en el punto P(a,b,c) , tomamos un punto genérico en el plano X(x,y,z) y formamos el vector X – P = $(x-a)\hat{i}+(y-b)\hat{j}+(z-c)\hat{k}$ (en rojo)



El vector (X-P) está en el plano tangente, por lo tanto también es normal al $\nabla F(P)$, por lo tanto si calculamos el producto escalar entre ambos vectores debe dar cero por ser ortogonales:

$$\nabla F(P) \cdot (X-P) = 0$$

Reemplazando nos queda:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P).(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-b)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-c)=0$$

Esta es la ecuación del plano tangente

Ejemplo:

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z^2-2x^2-2y^2-12=0$ en el punto P(1,-1,4)

F(x,y,z) = $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4x \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(P) = -4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4y \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(P) = 8$$

Reemplazando en la fórmula nos queda:

-4.(x-1) + 4 .(y+1) + 8.(z-4) = 0

-4x + 4y + 8z - 24 = 0   ecuación del plano tangente

Nota:

Si la superficie S está dada en forma explícita, es decir **z = f(x,y),** para hallar la ecuación del plano tangente procedemos de la siguiente manera.

Igualamos a cero la fórmula para expresarla en forma implícita:

F(x,y,z) = f(x,y) –z = 0

Y ahora calculamos las derivadas,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

reemplazamos en la fórmula:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P).(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) - (z-c) = 0$$

Despejando z nos queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P).(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + c = z$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\mathbf{z = \frac{x^2 + 4y^2}{2}}$ en el punto (2,1,4)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 4$$

Reemplazando:

2.(x-2) + 4 .(y-1) + 4 = z **2x + 4y – 4 = z** **ecuación del plano tangente**