CAPÍTULO III- TEMA B: LÍMITE DOBLE

➢ CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN EL ESPACIO

Entorno de un punto

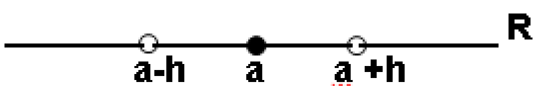
En R :

Sea x = a un punto de la recta real, y h un número real positivo

El entorno de un punto x = a , con amplitud h, se define como el conjunto de puntos de la recta, cuya distancia al centro **a** es menor que **h**. En símbolos:

$$E(a, h) =\{ x / x \in R ,\ a-h < x < a+h \} \text{ o } E(a, h)= (a-h; a+h)$$

Gráficamente es un intervalo abierto



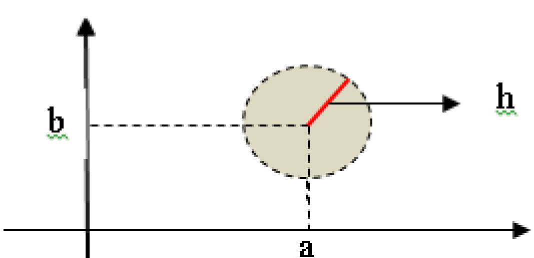
En R^2 :

Sea **A (a , b)** un punto del plano , y **h** un número real positivo.

El entorno de un punto A = (a, b) , con amplitud h, se define como el conjunto de puntos del plano, cuya distancia al centro A es menor que h. En símbolos:

$$E(A, h)=\{ (x,y) / (x,y) \in IR^2,\ \ d((x,y) , A) < h \}$$

Gráficamente es un disco abierto de radio h.

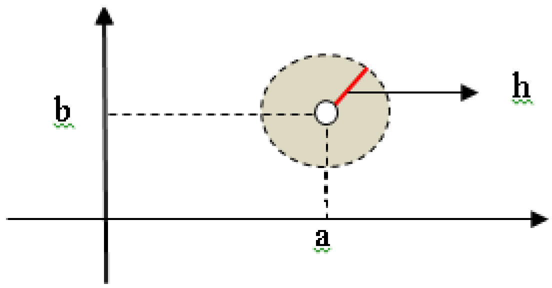


Entorno reducido:

En IR^2 :

$$E^*(A, h)=\{ (x,y) / (x,y) \in IR^2,\ \ d((x,y) , A) < h ,\ \wedge (x,y) \neq (a,b) \}$$

Gráficamente



Punto de acumulación de un punto en el espacio

Sea **S** una región del plano (S $\subset$ IR^2) y A = (a,b) que pertenece a IR^2.

A(a,b) es punto de acumulación de S , si y solo si, en todo entorno reducido del punto A, hay al menos un elemento de S.

En símbolos:

A es punto de acumulación de S $\Leftrightarrow \forall E^*(A,h), E^*(A,h) \cap S \neq \phi$

- ## LÍMITE DOBLE

Veremos ahora el concepto de límite para funciones de dos variables.

En realidad el concepto es muy similar a lo visto para una variable.

Tenemos una función **z = f(x,y)** y el punto **A (a,b)** de acumulación de su dominio

Al igual que para funciones de una variable, queremos averiguar cómo se comportan los valores de la función z = f(x,y) cuando (x,y) tiende a (a,b) o sea cerca de A , NO en A

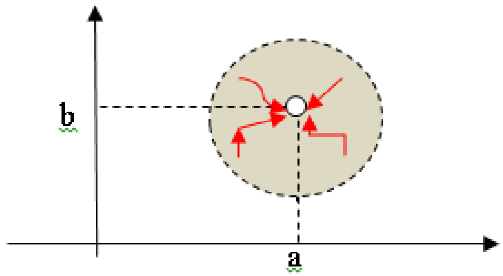
Al igual que para fc de una variable: en límite NO interesa lo que pasa en el punto sino cerca del punto

Simbólicamente lo expresamos de la siguiente manera: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) =$

Ahora **¿qué significa (x,y) →(a,b)?**

El punto (x,y) es un punto del plano que pertenece a un **E *(A, ∂),** y debemos aproximarlo al punto A.

Pero el punto (x,y) puede moverse **siguiendo cualquier camino hacia A**, por que se mueve en el plano.



¿Qué significa que f(x,y) tiende al número L en (a,b)?

Significa que cuando los puntos (x.y) del entorno reducido, tienden al punto (a,b) POR TODOS LOS CAMINOS POSIBLES en el dominio de f, las imágenes de esos puntos se van aproximando cada vez más al número L

Definición de límite doble

> Decimos que la función f(x,y) tiene límite finito y único L , en el punto (a,b) , si y sólo si al tomar todos los caminos posibles para mover cada punto (x,y) del entorno reducido hacia (a,b), los valores z de la función van aproximándose tanto como se quiera al número L.
>
> En símbolos: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

Si al tomar un camino las imágenes tienden a un valor, y tomando otro camino tienden a otro valor distinto entonces **EL LÍMITE NO EXISTE**.

Propiedades del límite doble

Son válidas las mismas propiedades que vimos para funciones de una variable:

Sean f(x,y) y g(x,y) dos funciones que tienen límite finito y único en el punto A(a,b):

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$$

a) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L_1 + L_2$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y).g(x,y)] = L_1.L_2$$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}\left[\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\dfrac{L_1}{L_2}$ **si $L_2 \neq 0$**

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}\sqrt[n]{f(x,y)}=\sqrt[n]{L_1}$ **si n es par entonces debe ser $L_1 \geq 0$**

- **También es válido el concepto de infinitésimos en el punto (a,b):**

f(x,y) es un infinitésimo en (a , b) ⇔ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=0$

- **Y de límites notables, por ejemplo**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{(x+y)}=1$$

- **Pero no se puede usar regla de L'Hopital en fc. multivariables**

- **Formas de cálculo del límite doble**

a) Sustitución directa:

Para calcular un límite doble se reemplaza a **x** e **y** , por los valores a los que tienden

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3xy+x^2)=3.1.2+(1)^2=7$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)}(e^{x\acute{y}})=e^{2.(-1)}=e^{-2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\ln(x+y)=\ln 0=\infty$ **en este caso no existe límite finito**

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

en este caso da indeterminado, para salvar la indeterminación podemos factorizar

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y).(x+y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x+y) = 2 = L$$

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y}\left(\frac{0}{0}\right)$$

En este caso no se puede simplificar, pero podemos aplicar límites notables, y nos quedaría que el límite es 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y} = 1$$

Aclaración:

Si no se puede factorizar, o no se sabe cómo hacerlo, existen otras formas de determinar si existe o no el límite

La idea es transformar a la función de dos variables en una función de una variable, y poder salvar así la indeterminación con todos los métodos ya sabidos.

b) Límites reiterados o iterados

Como el punto (x,y) se puede aproximar al punto A(a,b) siguiendo cualquier camino, vamos a elegir un camino particular. Vamos a mover al punto siguiendo caminos paralelos a los ejes x e y.

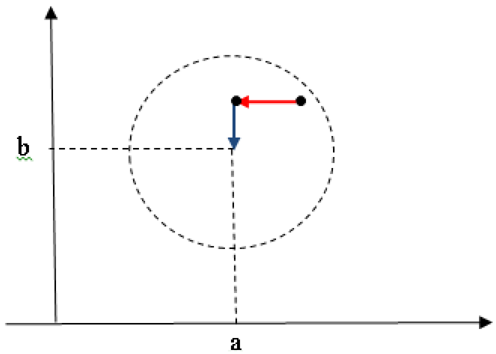
Son dos los caminos que tomaremos:

- **Límite L_{12}** :

  movemos al punto (x,y) paralelamente al eje **x (es decir hacemos tender primero la x al valor a)**, y luego lo movemos paralelamente al eje **y (hacemos tender la y al valor b)**.

Gráficamente:

en el plano x-y

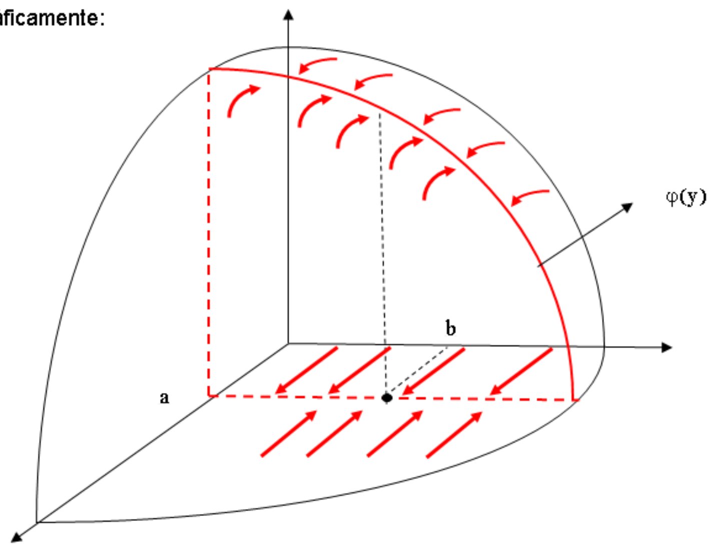


En el ejercicio sería:

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$$

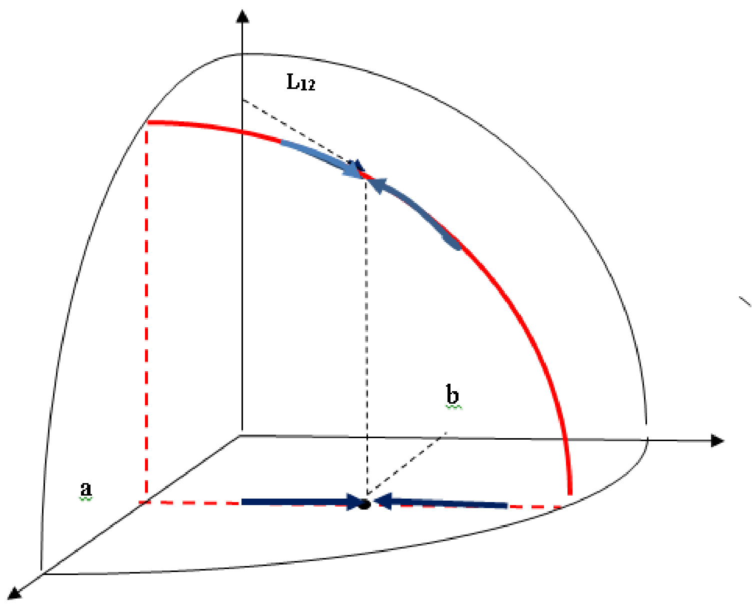
$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = L_{12}$$

Gráficamente:



En el plano los puntos se corren hacia la recta x = a, y los puntos correspondientes de la superficie se mueven hacia la curva $\varphi(\mathbf{y})$

Ahora hacemos que y →b



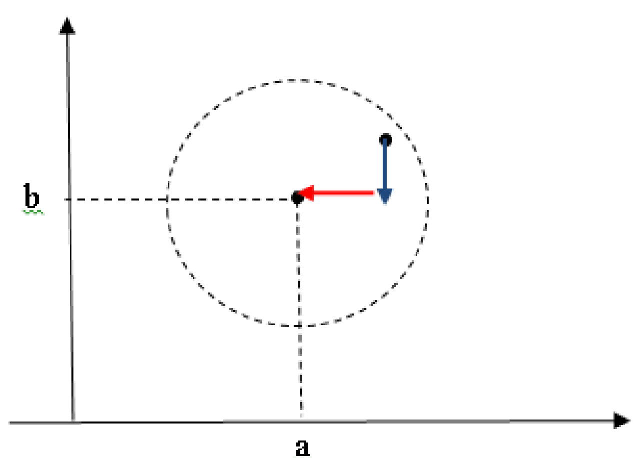
Los puntos (a,y) tienden ahora al punto (a,b), y los correspondientes puntos que están en la curva $\varphi(\mathbf{y})$ tienden a un mismo punto, cuya ordenada es L_{12}

- **Límite L_{21}:**

  Primero movemos al punto (x,y) paralelamente al eje **y (hacemos tender la y al valor b)**, y luego lo movemos paralelamente al eje **x (es decir hacemos tender la x al valor a)**.

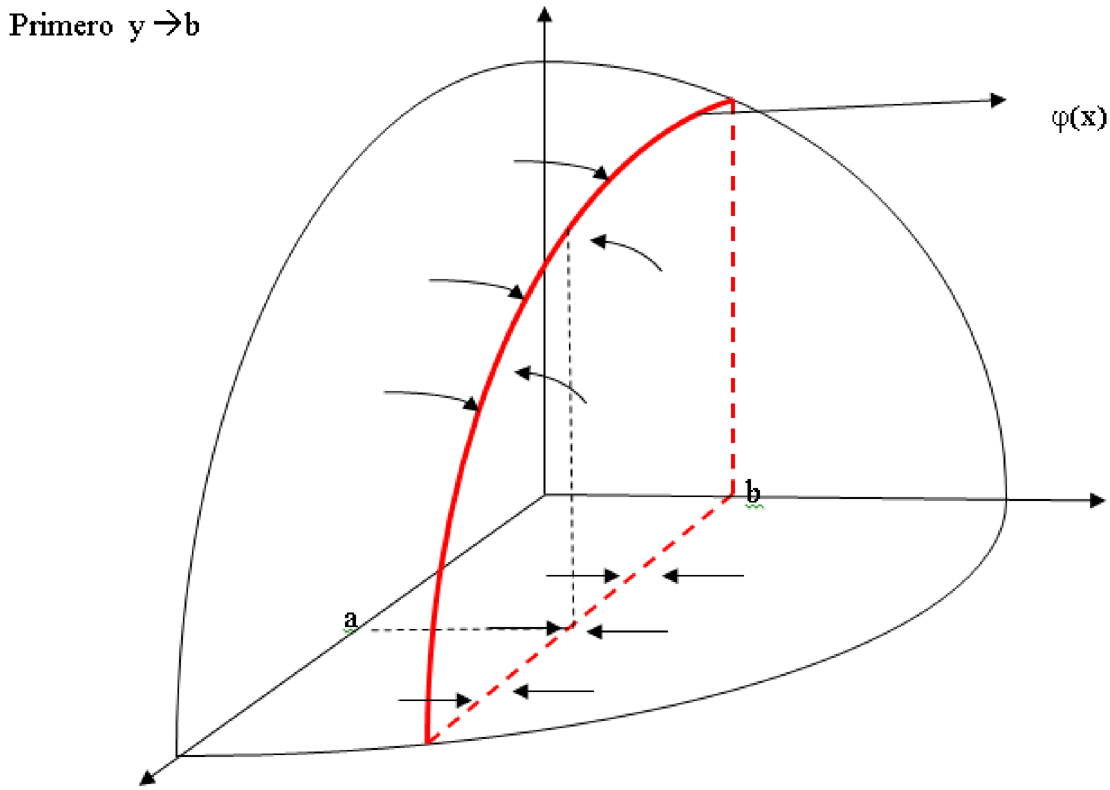
Gráficamente:

en el plano x-y

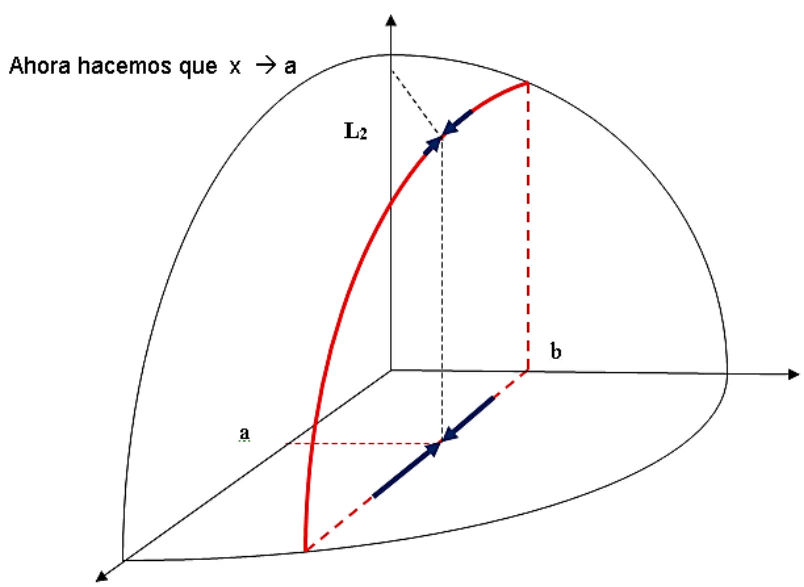


En el ejercicio sería:

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim_{x\to a} \varphi(x) = L_{21}$$



Todos los puntos de la superficie tienden a la curva $\varphi(\mathbf{y})$



Importante:

En este caso hemos tomado dos caminos particulares.

- **Si $L_{12} \neq L_{21}$ PODEMOS ASEGURAR QUE NO EXISTE LÍMITE,** ya que si existiera debe dar lo mismo por todos los caminos posibles

- **Si $L_{12} = L_{21}$ NO PODEMOS ASEGURAR NADA,** porque sólo hemos probado por dos caminos.

Ejemplo I:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-y^2-x}{x^2-y^2-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

Tomamos límites reiterados, calculamos primero L_{12}

$$L_{12} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 1}\frac{1-y^2-x}{x^2-y^2-1}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{-y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

$$L_{21} = \lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 0}\frac{1-y^2-x}{x^2-y^2-1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2}$$

Como $L_{12} \neq L_{21}$ **ASEGURAMOS QUE NO EXISTE LÍMITE**

Ejemplo II:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$L_{12} = \lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}\right] = \lim_{y\to 1}\frac{-(y-1)^2}{(y-1)^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

$$L_{21} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 1}\frac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 1} 1 = 1$$

Como $L_{12} \neq L_{21}$ **ASEGURAMOS QUE NO EXISTE LÍMITE**

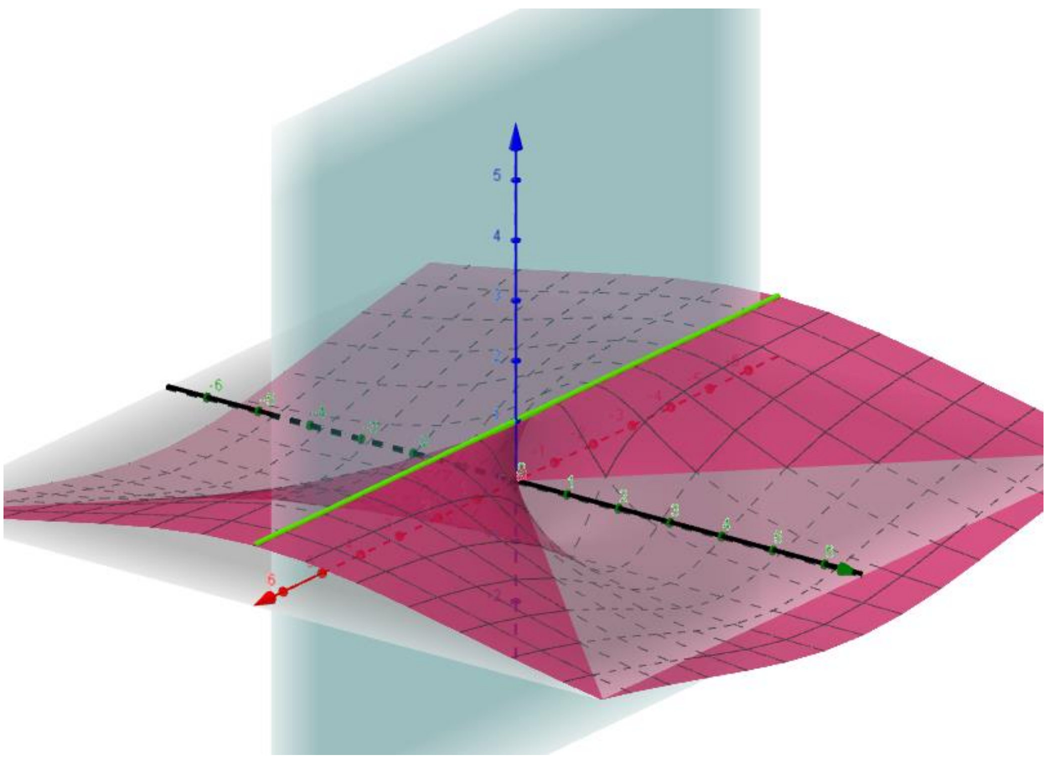
Ejemplo III:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$L_{12} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

$$L_{21} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Como $L_{12} \neq L_{21}$ **ASEGURAMOS QUE NO EXISTE LÍMITE**



Ejemplo IV:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.y}{x^2 + y^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$L_{12} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x.y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$L_{21} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x.y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Si $L_{12} = L_{21}$ **NO PODEMOS ASEGURAR NADA,** porque sólo hemos probado por dos caminos.

Qué hacemos en este caso , aplicamos el otro método de límites direccionales.

c) Límites direccionales

En este caso movemos al punto (x,y) hacia el punto A(a,b) siguiendo cualquier camino, por supuesto que pase por el punto A.

Supongamos que la fórmula del camino elegido es **y = g(x).** Sustituimos en la fórmula de la función f(x,y) a la **y** por la ecuación del camino

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y=g(x)}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x,g(x)) = L_1$$

Si L_1 y los reiterados son distintos aseguramos que no existe límite. Pero si da igual, no podemos asegurar nada y debemos probar por otro camino.

Ejemplo V:

En el ejemplo anterior $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x.y}{x^2+y^2}\left(\frac{0}{0}\right)$

Tomemos por ejemplo todos los caminos rectos que pasen por (0,0), es decir **y = mx**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{x.y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x.mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Esto quiere decir que el valor del límite depende de la pendiente de la recta que se tome, por lo tanto **NO EXISTE EL LÍMITE.**

Ejemplo VI:

Verifique que no existe el límite doble indicado

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.y}{x^4+y^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

Tomamos primero límites reiterados:

$$L_{12} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2.y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$L_{21} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2.y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Si $L_{12} = L_{21}$ **NO PODEMOS ASEGURAR NADA,** porque sólo hemos probado por dos caminos.

Qué hacemos en este caso , aplicamos el otro método de límites direccionales.

Tomemos por ejemplo todos los caminos rectos que pasen por (0,0), es decir **y = mx**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2.mx}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^2(x^2+m^2)} = 0$$

Coincide con los límites reiterados pero NO PODEMOS ASEGURAR NADA, POR QUE SÓLO HEMOS PROBADO TRES CAMINOS.

Tomamos otro camino, por ejemplo parábola, y = x^2

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^2.y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2.x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

En este caso da distinto, por lo tanto **no existe el límite**

➢ CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Una función z = f (x,y) es continua en el punto (a , b), interior de una región S (abierta) si y sólo si la función está definida en dicho punto , y es igual al límite doble de la función cuando (x,y) → (a,b).

Es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Una función z = f (x,y) es continua en la región S si y sólo si es continua en cada punto de S (abierta)

Propiedades de las funciones continuas

Si **k** es un número real y, **f (x,y) y g(x,y)** son funciones de dos variables continuas en el punto (a,b) , entonces las siguientes funciones también son continuas en (a,b) :

a) **k.f(x,y)**
b) **f(x,y) . g(x,y)**
c) **f(x,y) ± g(x,y)**
d) $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ **si g(a,b) ≠ 0**

Estas propiedades permiten garantizar la continuidad de las funciones polinómicas y racionales en cada punto de su dominio.

Ejemplos:

I) Analice la continuidad de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $z = x \cdot y^2$ en el punto (1,3)

veamos si tiene imagen: f (1,3) = 9 **sí tiene imagen**

Calculamos ahora su límite en ese punto:

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} x.y^2 = 9$$

Vemos que coincide el valor de la imagen con el del límite , por lo tanto **SÍ ES CONTINUA EN DICHO PUNTO**

b) $z = \dfrac{1}{x-y}$ en el punto (4 ,2)

Su dominio es $\mathbf{D = \{(x, y) \in IR^2 \,/\, x \neq y\}}$

Primero veamos si tiene imagen: f (4,2) = $\frac{1}{2}$ **sí tiene imagen**

Calculamos ahora su límite en ese punto:

$$\lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{2}$$

Vemos que coincide el valor de la imagen con el del límite , por lo tanto **SÍ ES CONTINUA EN DICHO PUNTO**

II) Verifica que la siguiente función no es continua en el punto indicado:

$$z = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Primero veamos si tiene imagen: f (0 ,0) = 0 **sí tiene imagen**

Calculamos ahora su límite en ese punto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$ para salvar la indeterminación tomamos reiterados:

$$L_{12} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$L_{21} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Por lo tanto **NO TIENE LÍMITE DOBLE, NO ES CONTINUA EN DICHO PUNTO**