# CAPÍTUO III - Parte A : FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

## FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES (Campos escalares )

Recordemos la definición general de función real

**Definición:**

**Sean A y B dos conjuntos**

**Una relación f de A en B es una función si y solo si se cumplen las condiciones:**

**1°) Existencia:** $(\forall x \in A)(\exists y \in B)/(x;y) \in f$

**Todo elemento de A tiene una imagen en B**

**2°) Unicidad:** $(x;y) \in f \wedge (x;z) \in f \Rightarrow y = z$

**Cada elemento de A tiene una sola imagen en B**

**Esta definición es general, y CUALQUIER FUNCIÓN que se defina debe verificarla.**
La diferencia entre los distintos tipos de funciones que verán a lo largo de su carrera, está en la naturaleza de los elementos de los conjuntos A y B , los cuales se relacionan a partir de una condición.

- **Funciones reales de una variable**

En Cálculo I, trabajamos con funciones reales de una variable, las cuales las definimos de la siguiente manera:

**f: D →R dada por y = f(x) siendo $D \subset R$**

**Ejemplo :** **y = 3x+1**

- **Funciones reales de dos variables:**

Consideremos un conjunto **D** incluido en el plano ( $R^2$ ), es decir:

$$D = \{(x,y) : (x,y) \in R^2\}$$

Definimos una **función real de dos variables** de la siguiente manera:

**f: D → R        dada por z= f(x,y)        con D $\subset$ R$^2$**

que a cada par de valores (x,y) del dominio ( D ), le hace corresponder como imagen un número real que indicaremos con la letra **z**.

Ejemplo: $\mathbf{z = x^2 + 2y}$

En este caso **x** e **y** son variables independientes, y **z** es la variable dependiente.

Este tipo de funciones se dice de **dos variables** porque tiene **dos variables independientes**

- **Funciones reales de tres variables:**

Consideremos un conjunto **D** incluido en el espacio tridimensional ( R$^3$ ), es decir:

$$\mathbf{D = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in R^3\}}$$

Definimos una **función real de tres variables** de la siguiente manera:

**f: D → R        dada por w= f(x,y,z)        con D $\subset$ R$^3$**

En este caso **x,y,z** son variables independientes, y **w** es la variable dependiente

**Ejemplo: w = 3x+5y**

- **Definición De Función De Varias Variables :**

**En general se pueden definir funciones reales de n variables independientes de la siguiente manera:**

**Sea D={($x_1$ , $x_2$ ,…, $x_n$) : ($x_1$ , $x_2$ ,…, $x_n$) $\in$ R$^n$ }**

**f: D → R        con D $\subset$ R$^n$**

**que a cada ene-upla ($x_1$ , $x_2$ ,…, $x_n$) de valores del dominio ( D ), le hace corresponder como imagen un único número real que indicaremos con la letra z.**

**En símbolos:**

**f: D → R                siendo D $\subset$ R$^n$**

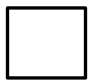
**($x_1$ , $x_2$ ,…, $x_n$) → z = f ($x_1$ , $x_2$ ,…, $x_n$)**

En esta materia, trabajaremos en general con funciones de dos variables, pero todo lo que veamos se puede extender a varias variables.

**Ejercitación :**

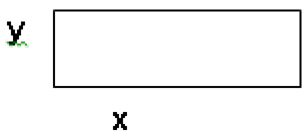
Analice los siguientes ejemplos de cuántas variables es cada función, y escriba la función correspondiente:

- La función que se usa para calcular el área de un cuadrado cuyo lado mide **x (cm)**

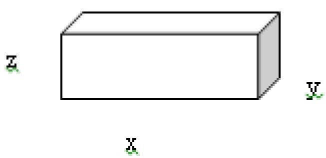
  **Área (x) = $x^2$**

- La función que se usa para calcular el área de un rectángulo cuya base mide **x (cm),** y cuya altura mide **y (cm),**

  **Área (x,y) = x. y**

- La función que se usa para calcular el volumen de un prisma rectangular cuyas medidas son: ancho base **y(cm),** largo base **x (cm)** y la altura **z (cm)**

  **Volumen (x, y ,z) = x . y. z**

- **Dominio de una función de dos variables**

Dada una función de dos variables **z = f(x,y)**, el dominio es el conjunto de valores (x,y) , para los cuales su imagen es un número real incluido en el codominio.

En símbolos:

$$D = \{ (x,y) : (x,y) \in R^2 ,\ f(x,y) \in R \}$$

### Ejemplo 1:

$z = x^2 + y^2$

en este caso vemos que por las operaciones que afectan a las variables independientes , estas pueden tomar cualquier valor, por lo tanto decimos que el dominio es todo el plano **$R^2$**

**$D = R^2$**

### Ejemplo 2:

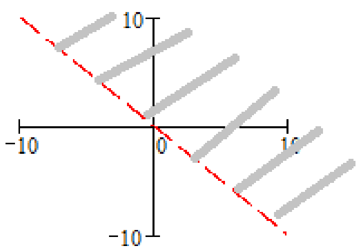
**$z = \ln(x+y)$ $\quad$ $D = ?$**

por haber un logaritmo sabemos que el argumento no puede ser nulo ni negativo, por lo tanto

**$x + y > 0 \qquad y > -x$**

**es decir** $\quad$ **$D = \{(x , y) : (x,y) \in R^2 ,\ y > -x \}$**

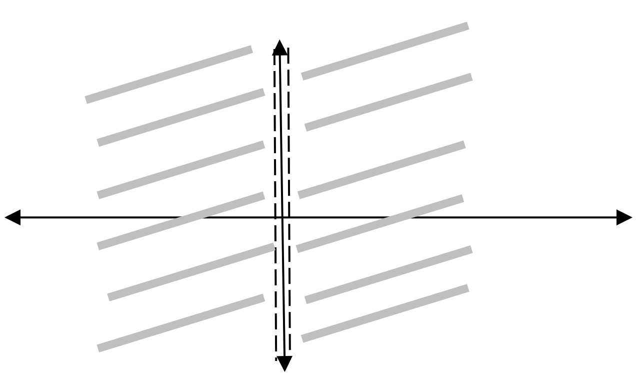
**gráficamente:**




### Ejemplo 3:

$z = \dfrac{y}{x}$ $\quad$ **por haber un cociente el denominador no puede ser nulo, por lo tanto**

**$D = \{(x , y) : (x,y) \in R^2 ,\ x \neq 0 \}$**



**Ejemplo 4:**

$z = \sqrt{(\,x^2 + \,y^2 - 4)}$

**por haber una raíz de índice par el radicando no puede ser negativo, entonces:**

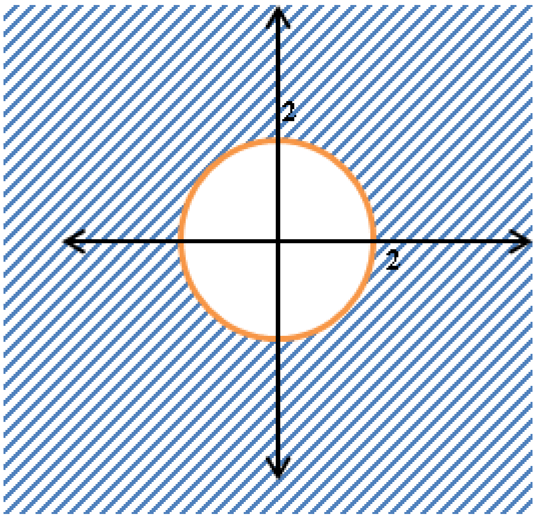
$x^2 + \,y^2 - 4 \geq 0$

$x^2 + \,y^2 \geq 4$ **es una circunferencia de radio 2**

**Entonces el dominio es**

**D = {(x , y ) : (x,y) $\in$ R$^2$ , $x^2 + \,y^2 - 4 \geq 0$ }**

**Gráficamente:**




- **Representación gráfica de funciones de dos variables**

En **R**, dada una función y = f(x) la gráfica es el conjunto de *puntos* (x,y) del plano, para los cuales y = f(x) . Se obtienen **curvas planas en el espacio R$^2$**.

En **R$^2$** , dada una función z = f(x,y), la gráfica es el conjunto de puntos (x,y,z) del espacio, para los cuales z = f(x,y). Esta gráfica da una ***superficie* en el espacio R$^3$**.

**Advertencia: NO TODA SUPERFICIE EN EL ESPACIO ES LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES. Por ejemplo x = 4 es un plano vertical paralelo al eje y , pero no cumple con la condición de unicidad.**

Las formas que pueden tener las ***superficies*** que representan gráficamente una función de dos variables, son muy variadas, Pueden ser planos o no.
En el caso de funciones de más de dos variables independientes, **no se puede graficar,** ya que el espacio en el que nos movemos es de tres dimensiones.

**Ahora cómo graficamos superficies en el espacio?**

En realidad es muy complicado graficar a mano, superficies en el espacio. Generalmente se usan programas como winplot, mathcad, matemática, geogebra, etc.
Sin embargo vamos a realizar gráficas sencillas a mano.
Para ello usamos la misma técnica utilizada para planos , es decir con **trazas** :
***Recuerde que las* trazas*, son la* intersección de la superficie *con los* planos coordenados o con planos paralelos** a los **planos coordenados*.***
**Estas se obtienen planteando un sistema de ecuaciones como se hizo anteriormente.**
Veremos los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1:**
**Graficar el siguiente plano x+y+2z = 4**
Para graficar superficies en el espacio, se usan **las trazas de la superficie**

Vamos a hallar sus trazas, para ello se plantea un sistema de ecuaciones con las ecuaciones de la superficie, y las ecuaciones de los planos coordenados.
**Traza con el plano x-y :**

$$\begin{cases} x+y+2z = 4 \\ z = 0 \ \text{( ecuación del plano x-y)} \end{cases}$$

sustituyendo nos queda: $x + y = 4$
despejando encontramos la traza que es : **$y = 4 - x$ un recta en el plano x-y**

**Traza con el plano x-z :**

$$\begin{cases} x+y+2z= 4 \\ y = 0 \ \text{(ecuación plano x-z)} \end{cases}$$

sustituyendo nos queda: $x+ 2z =4$

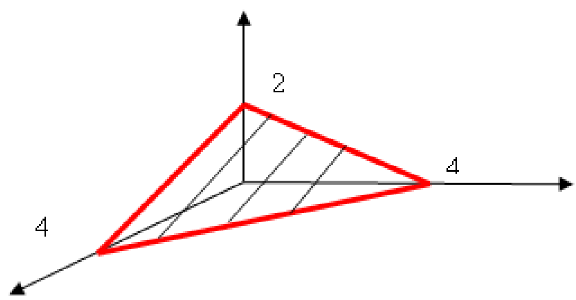
despejando encontramos la traza que es $z = \frac{4-x}{2}$ **un recta en el plano x-z**

**Traza con el plano y-z :**

$$\begin{cases} x+y+2z= 4 \\ x = 0 \quad \text{(ecuación del plano y-z)} \end{cases}$$

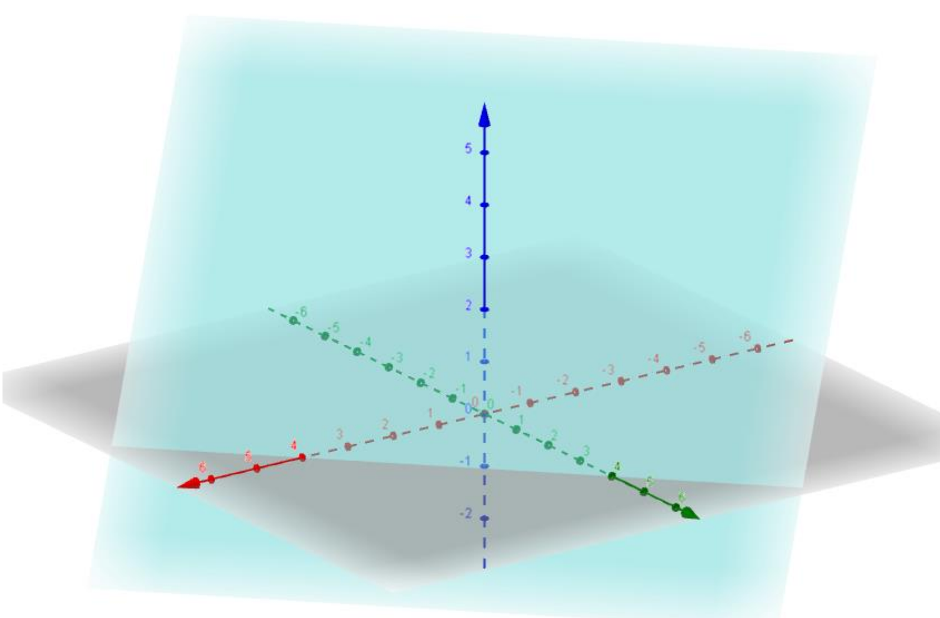
sustituyendo nos queda: $y+ 2z =4$

despejando encontramos la traza que es $z = \frac{4-y}{2}$ **es un recta en el plano y-z**

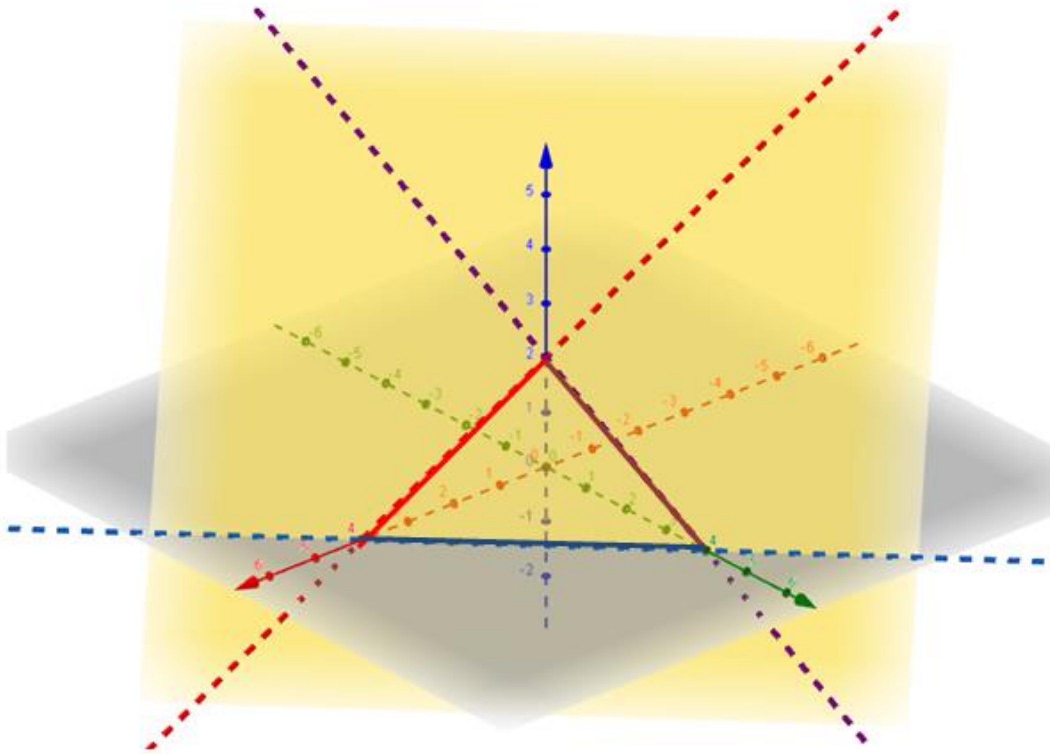



**Recuerde que estamos graficando la parte del plano que queda dento del primer octante**

**En Geogebra**



Observando el gráfico, si marcamos las trazas veríamos el mismo triángulo que nos quedó arriba



**Ejemplo 2:**

Graficar la siguiente superficie **$z = 4 – y^2$** **x es variable libre**

Calculamos las trazas:

**Traza con el plano x-y :**

$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

sustituyendo nos queda: **$y^2 = 4$** **$| y | = 2$ que son dos rectas $y = 2$ $y = -2$ en el plano** x-y

**Traza con el plano x-z :**

$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

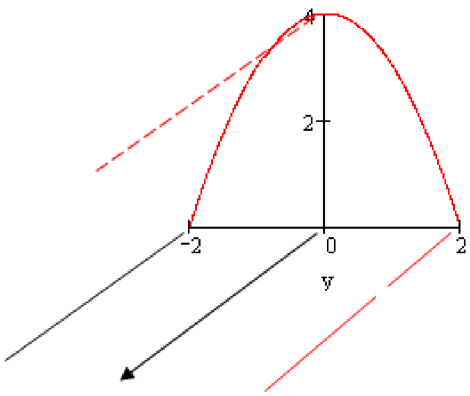
Sustituyendo nos queda **$z = 4$** que es una recta en el plano x-z

**Traza con el plano y-z:**

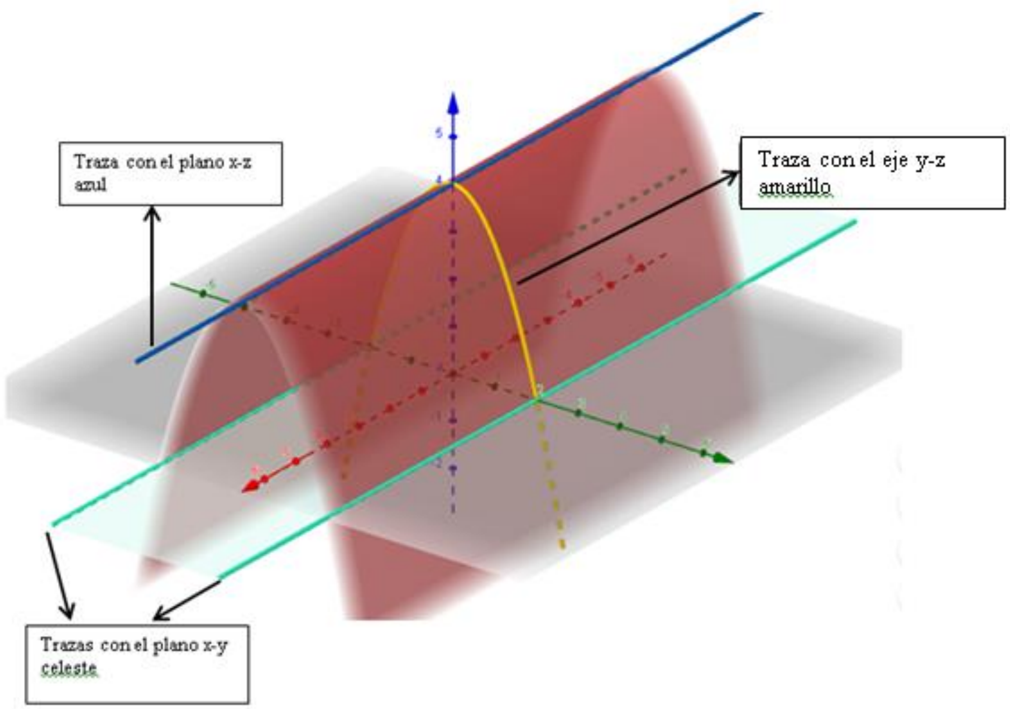
$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

como x es variable libre no figura, por lo tanto no podemos reemplazar quiere decir que la traza es

$\mathbf{z = 4 - y^2}$ que es una parábola en el plano y-z




Con geogebra



## Ejemplo 3:

$z = x^2 + y^2$

**Traza con el plano x-z :**

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ \mathbf{y = 0} \end{cases}$$

Sustituyendo nos queda $\mathbf{z = x^2}$ que es una parábola en el plano x-z

**Traza con el plano y-z:**

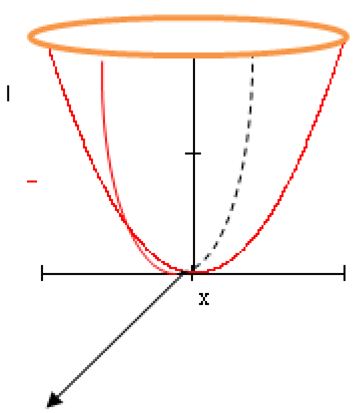
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ \mathbf{x = 0} \end{cases}$$

Sustituyendo nos queda $\mathbf{z = y^2}$ que es una parábola en el plano y-z

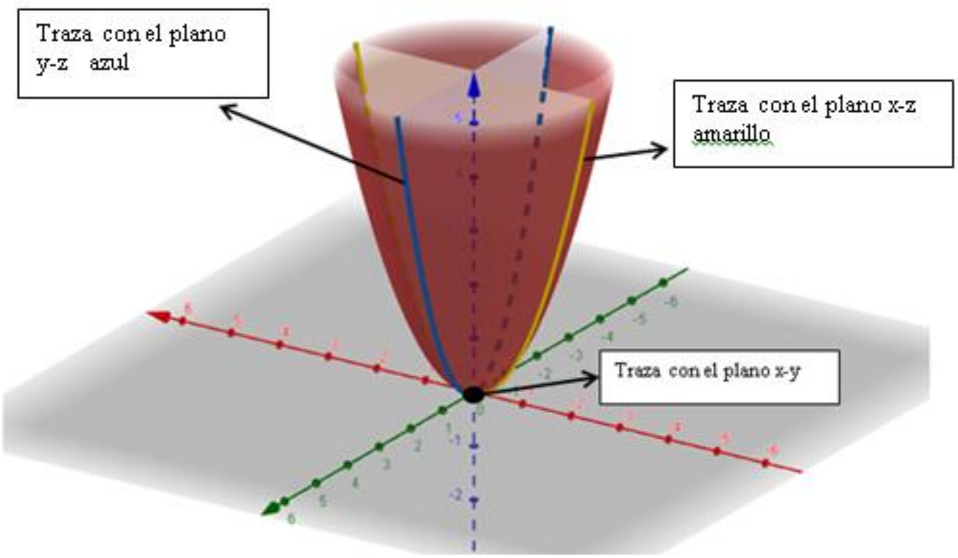
**Traza con el plano x-y :**

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ \mathbf{z = 0} \end{cases}$$

Sustituyendo nos queda $\mathbf{x^2 + y^2 = 0}$ que es el punto (0,0) en el plano x-y




En geogebra




## Curvas de nivel de una superficie

**Definición:**

**Dada una función z=f(x,y), se llaman curvas de nivel a la proyección en el plano x-y, de las trazas de la superficie con planos paralelos al x-y, cuya ecuación es :**

$$\boxed{f(x,y) = c}$$

En el ejemplo anterior del paraboloide:

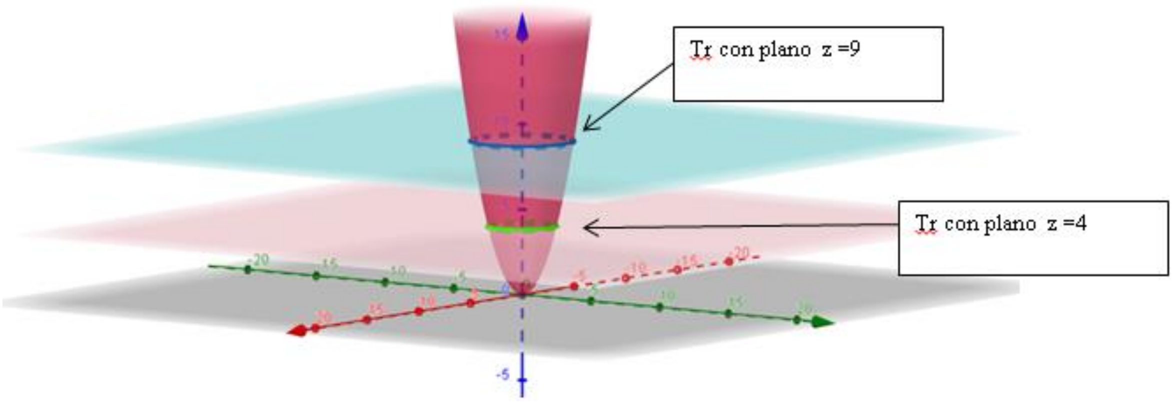
Se sustituye en la fórmula de la superficie distintos valores de z, y se van obteniendo distintas curvas, que son las **trazas con planos paralelos al plano x-y** a distinta alturas:

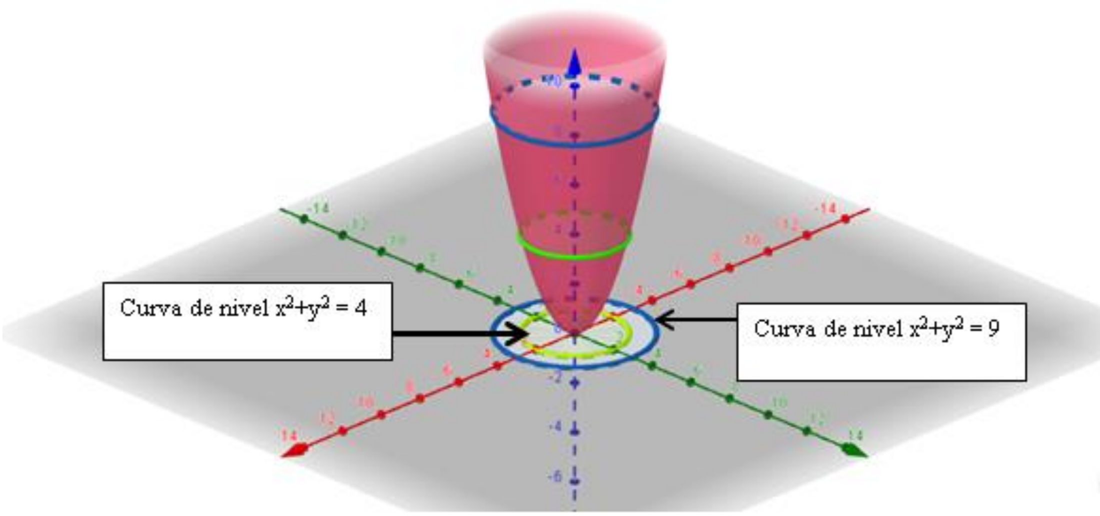
$z = 1$ nos queda $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$ que es una circunferencia de radio 1

$z = 4$ nos queda $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ que es una circunferencia de radio 2

$z = 9$ nos queda $\mathbf{x^2 + y^2 = 9}$ que es una circunferencia de radio 3

Gráficamente:

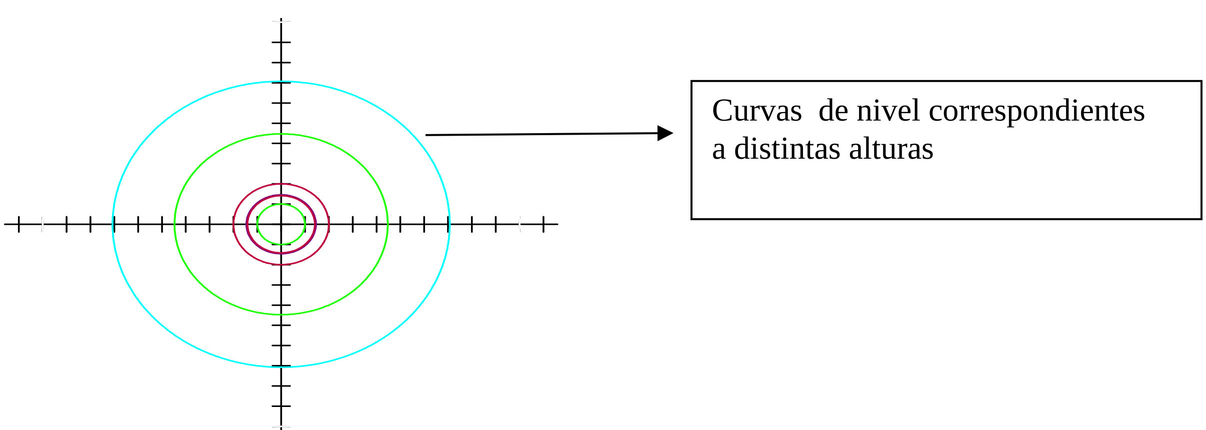



***Cuidado*:**

**Las trazas NO son las curvas de nivel.**

**Las curvas de nivel son la proyección en el plano x-y de esas trazas**



**Note que en todos los puntos de la curva de nivel la función se mantiene constante .**
Dibujando diferentes *curvas de nivel*, correspondientes a las alturas constantes
$c_1$, $c_2$, .....$c_n$, podemos obtener un ***mapa de contorno*** de la superficie **z = f (x, y)** .

***Un* mapa de contorno** muestra la variación de z con respecto a x e y , por el espaciado entre las curvas de nivel .
Mucho espacio entre las curvas de nivel , indica que z, varía lentamente, mientras que un espaciado pequeño indica un cambio rápido en z.
Para proyectar una buena ilusión tridimensional en un mapa de contorno es importante elegir valores de c de forma que estén espaciados uniformemente.

## APLICACIONES DE LAS CURVAS DE NIVEL

Las curvas de nivel tienen mucha aplicación en distintas áreas de las ciencias experimentales:

- Ejemplo 1: **Topografía:**

Las curvas de nivel representan un corte horizontal en un terreno a una altura determinada. La distancia entre corte y corte es siempre la misma.
El número de cada curva de nivel indica la altura que tiene el terreno sobre el nivel del mar. Todos los puntos por donde pasa una curva de nivel se encuentran en la misma altura.

Cuando las curvas de nivel están muy próximas nos indican que el relieve de esa zona tiene mucha pendiente; al contrario, si están muy separadas, nos indican que hay poca pendiente. La cima de una montaña siempre se representa con una curva muy cerrada y pequeña.

### Ejemplo 1

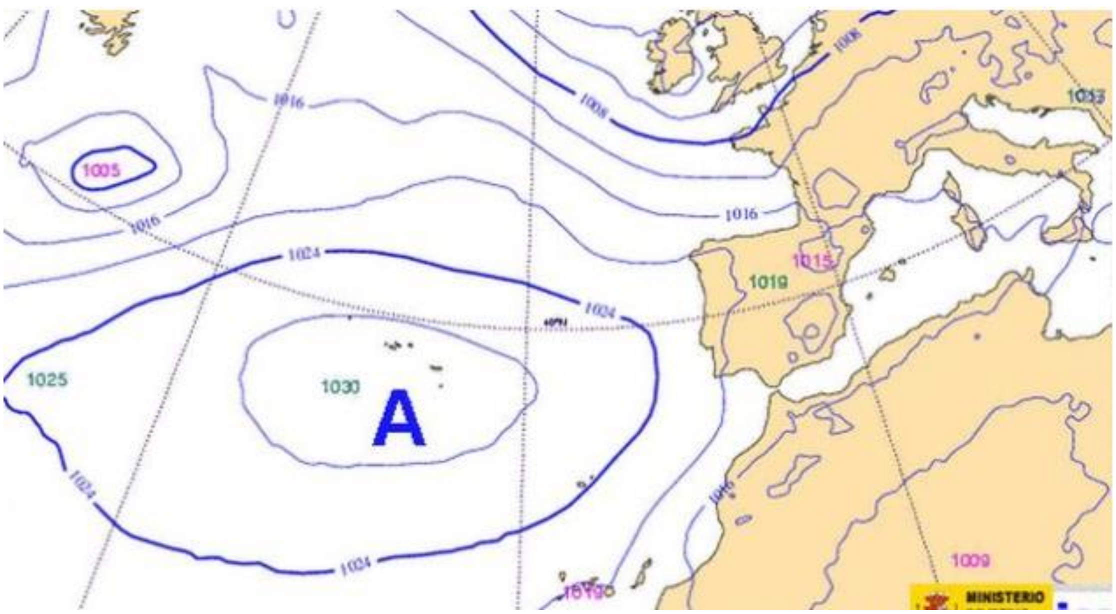
### Pronósticos meteorológicos

**La propia palabra isobara, en su origen etimológico, nos indica precisamente: igual presión.** Es la curva que une todos los puntos de una región que tienen la misma presión atmosférica.

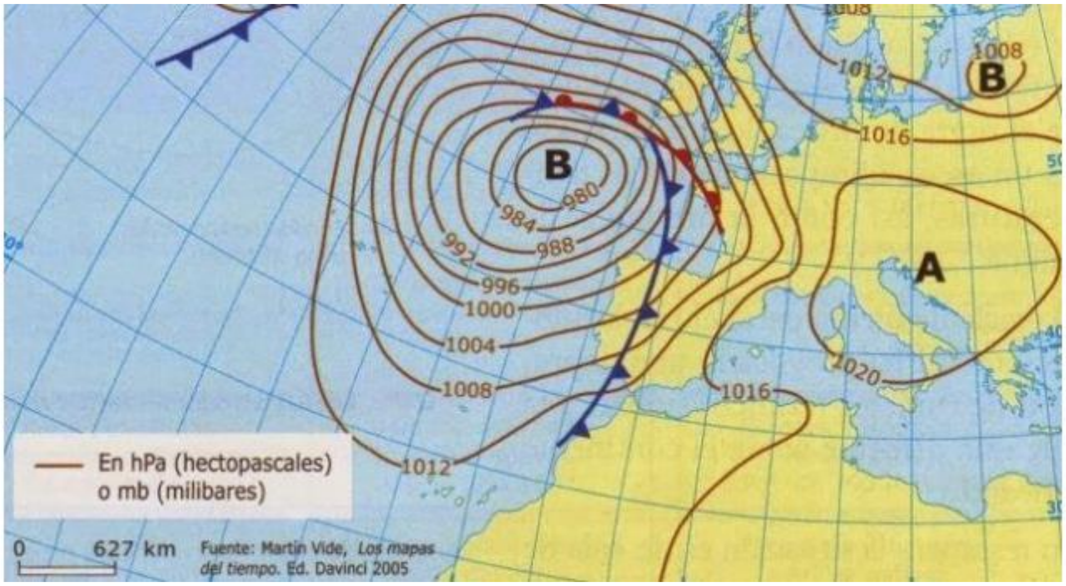
Por tanto, todo lo que queda englobado bajo esa isobara comparte un mismo tiempo atmosférico: **régimen de vientos, estado del cielo o presión.**

Las isobaras nos aportan mucha información sobre la presión que tenemos sobre nosotros**,** el viento que soplará donde estamos y si el tiempo se mantiene estable o, por el contrario, se tornará lluvioso.

**La presión media es de 1.013 milibares.** Por debajo de ella, hablamos de borrascas o bajas presiones y por encima nos encontramos en una situación de calma y de estabilidad. **Cuanto más alta es, mayor es la estabilidad. El récord se encuentra en 1050 mb o milibares.**




En este mapa satelital vemos que las isobaras, que son las líneas que forman y definen el área de influencia de las altas presiones, están muy separadas.
Eso significa que existe una estabilidad total, no hay grandes diferencias de presión entre los distintos puntos geográficos, por lo tanto buen tiempo, muy estable y vientos suaves
En esta otra imagen satelital sobre las Islas Azores:




Vemos **un buen número de líneas juntas, cada una representa una borrasca cuya presión más baja medida se encuentra en torno a los 980 mb.**

Al estar tan cerca la una de la otra, esto nos indica que hay un cambio de presión entre unas y otras muy brusco. Cuando esto ocurre, tenemos inestabilidad, que se traduce en vientos. **Los vientos serán más intensos** cuanta mayor proximidad tengamos entre unas y otras isobaras.