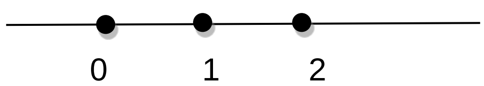
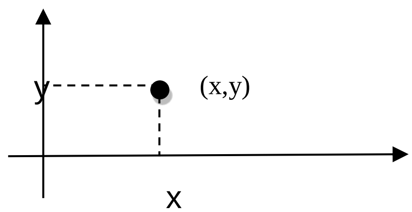
CAPÍTUO III : PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

➢ Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas.

Una vez que se ha especificado una unidad de medida, un número x $\in$ **R** puede ser usado para
representar un punto en una línea.



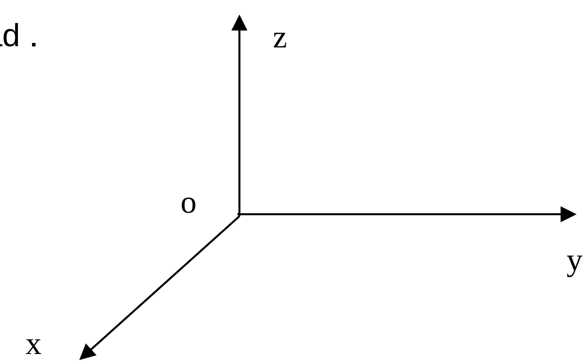
un par (x,y) $\in$ $\mathbf{R}^2$ se puede usar para representar un punto en un plano



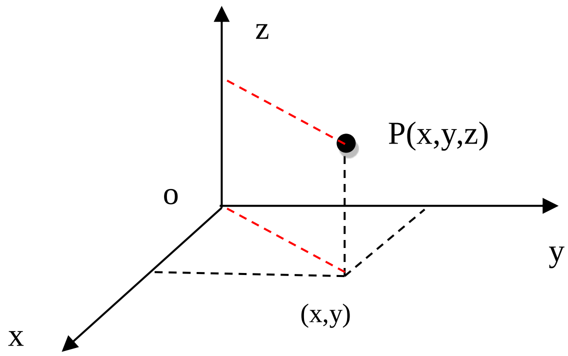
De manera análoga, una terna (x,y, z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ se puede usar para representar un punto en el espacio tridimensional.

Para ello tomamos un punto fijo cualquiera **o,** llamado origen, y tres planos distintos, mutuamente perpendiculares, que pasan por **o**. Los planos se intersecan en pares en tres rectas (ejes) mutuamente perpendiculares que pasan por **o** llamados eje **x**, eje **y** , y eje z.

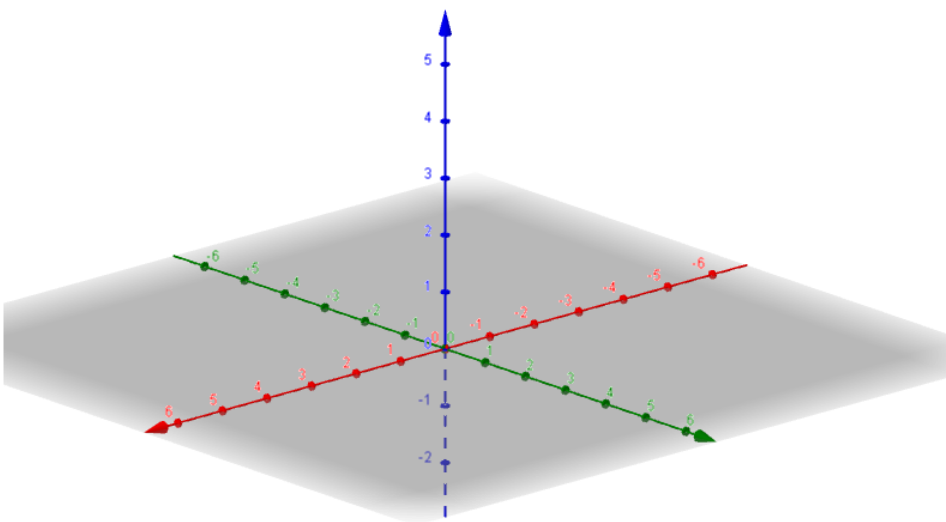
Para hacer la representación gráfica de los tres ejes, podemos trazar el eje **y** , y el eje **z** de frente y la parte positiva del eje **x** se representa en una dirección inclinada, para simular profundidad .



Si queremos ubicar un punto determinado en el espacio, P (x , y , z), dibujamos primero el punto (x,y) en el plano **x-y**, desde este punto, dibujamos un segmento paralelo al eje **z,** y orientado de acuerdo al signo de z y de longitud z, como se muestra en la figura



En geogebra



Eje x (rojo) **Eje y (verde)** **Eje z (azul)**

Los ejes tomados de a dos, determinan planos llamados **planos coordenados.** En total son 3 planos que dividen al espacio en 8 sectores llamados **octantes.** El octante que corresponde a valores positivos de los ejes se llama **primer octante.**

Vamos a definir la ecuación de los planos coordenados

<u>Plano x-z</u>:

Es el conjunto de puntos del espacio (x.y.z) , cuyo valor de *y* es siempre cero. Por lo tanto su ecuación es

$$\boxed{y = 0}$$

<u>Plano y-z</u>:

Es el conjunto de puntos del espacio (x.y.z) , cuyo valor de *x* es siempre cero. Por lo tanto su ecuación es

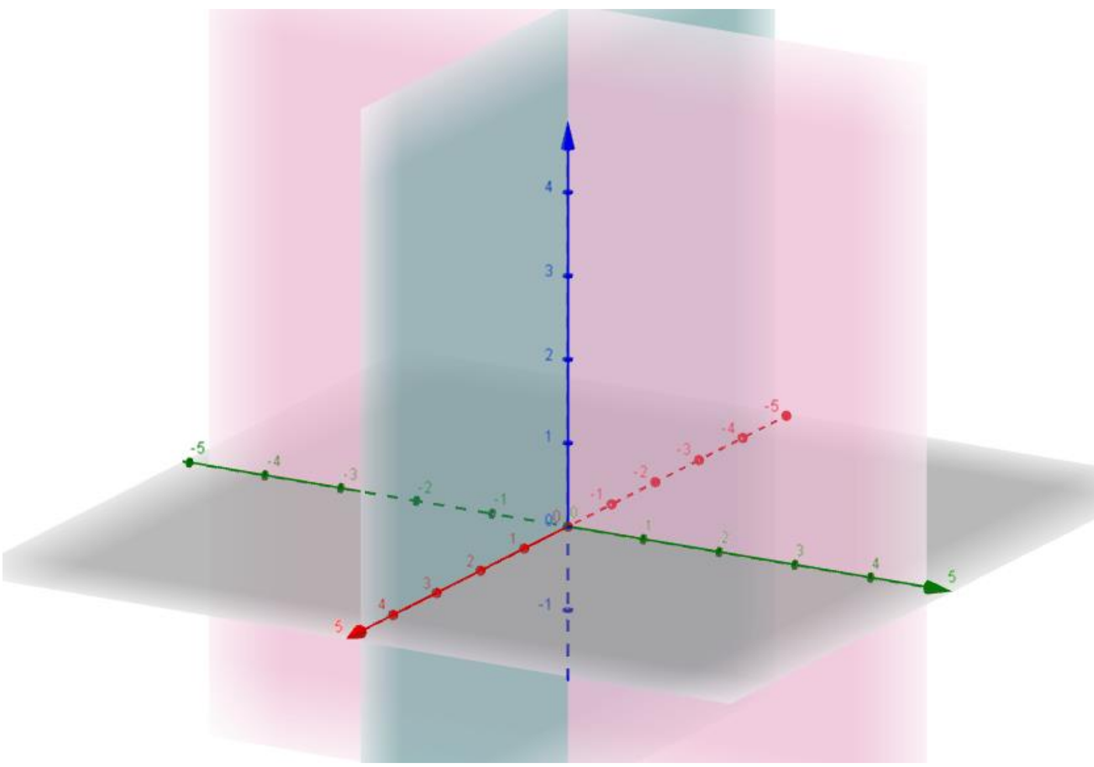
$$\boxed{x = 0}$$

<u>Plano x-y</u>:

Es el conjunto de puntos del espacio (x.y.z) , cuyo valor de *z* es siempre cero. Por lo tanto su ecuación es

$$\boxed{z = 0}$$

En Geogebra:



Plano x-y (gris) **Plano x-z (celeste)** Plano y- z (rosado)

➢ Superficies en el Espacio

Definición:

Una superficie en el espacio, es el conjunto de puntos del espacio que verifican alguna condición, la cual está dada generalmente por una ecuación $F(x,y,z)=0$.

Hay una infinidad de superficies, pero veremos ahora algunas superficies particulares en el espacio, que usaremos mucho:

Planos en el espacio:

Definición:

Es el conjunto de puntos (x,y,z) del espacio que cumplen con la siguiente ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde A, B, C son números reales, llamados coeficientes principales, y D es el término independiente.

Si D = 0 significa que el plano contiene al origen de coordenadas (0,0,0), si D ≠0 el plano no contiene al origen

Ejemplos:

$x + y + 2z = 4$	A=1	B =1	C= 2	D= -4
$y + x = 1$	A = 1	B = 1	C = 0	D = -1

Los planos pueden tener posiciones particulares en el espacio.:

A. **PLANOS PARALELOS O CONTENER A LOS EJES CARTESIANOS**

B. **PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS**

C. **PLANOS NO PARALELOS NI A LOS EJES NI A LOS PLANOS COORDENADOS**

Veremos ahora cada caso

A. PLANOS PARALELOS O CONTENER A LOS EJES CARTESIANOS

En este caso, se distingue por que **uno solo de los coeficientes principales es nulo**.

Ejemplo: Graficar el siguiente plano **y + x =1**

Los coeficientes son: **A = 1** **B = 1** **<u>C = 0</u>** **D = -1**

la variable que no está en la ecuación se llama **<u>variable libre</u>, en este ejemplo la variable libre es z, <u>esto significa que el plano es paralelo al eje z, o lo contiene</u>**

Para graficar superficies en el espacio, se usan **las trazas de la superficie**

Definición de trazas

Las* trazas*,* son las curvas de intersección de la superficie con los planos coordenados, o con planos paralelos a los planos coordenados*.

Como las trazas son la intersección del plano con los planos coordenados, para hallar las trazas debemos resolver un sistema de ecuaciones

<u>Traza con el plano x-z</u>:

$$\begin{cases} y + x = 1 & \textbf{A} \quad \text{(ecuación del plano a graficar)} \\ y = 0 & \textbf{B} \quad \text{(ecuación del plano coordenado x-z)} \end{cases}$$

sustituyendo B en A, nos queda: **0+x = 1 ,**

por lo que la traza es x = 1 que es la ecuación de una recta en el plano x-z

<u>Traza con el plano y-z</u> :

$$\begin{cases} y + x = 1 & \textbf{A} \quad \text{(ecuación del plano a graficar)} \\ x = 0 & \textbf{A} \quad \text{(ecuación del plano coordenado y-z)} \end{cases}$$

sustituyendo B en A, nos queda: **y+0 = 1 ,** por lo que la traza es : **y = 1** **que es la ecuación de una recta en el plano y-z**

Traza con el plano x-y :

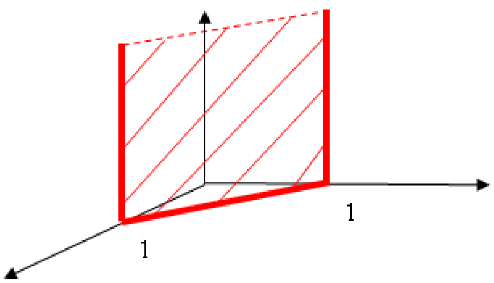
$$\begin{cases} y + x = 1 & \text{(ecuación del plano a graficar)} \\ z = 0 & \text{(ecuación del plano coordenado x-z)} \end{cases}$$

En este caso no se puede sustituir a la z por 0 porque no aparece en la ecuación,

por lo que la traza es **la recta cuya ecuación es y + x =1**

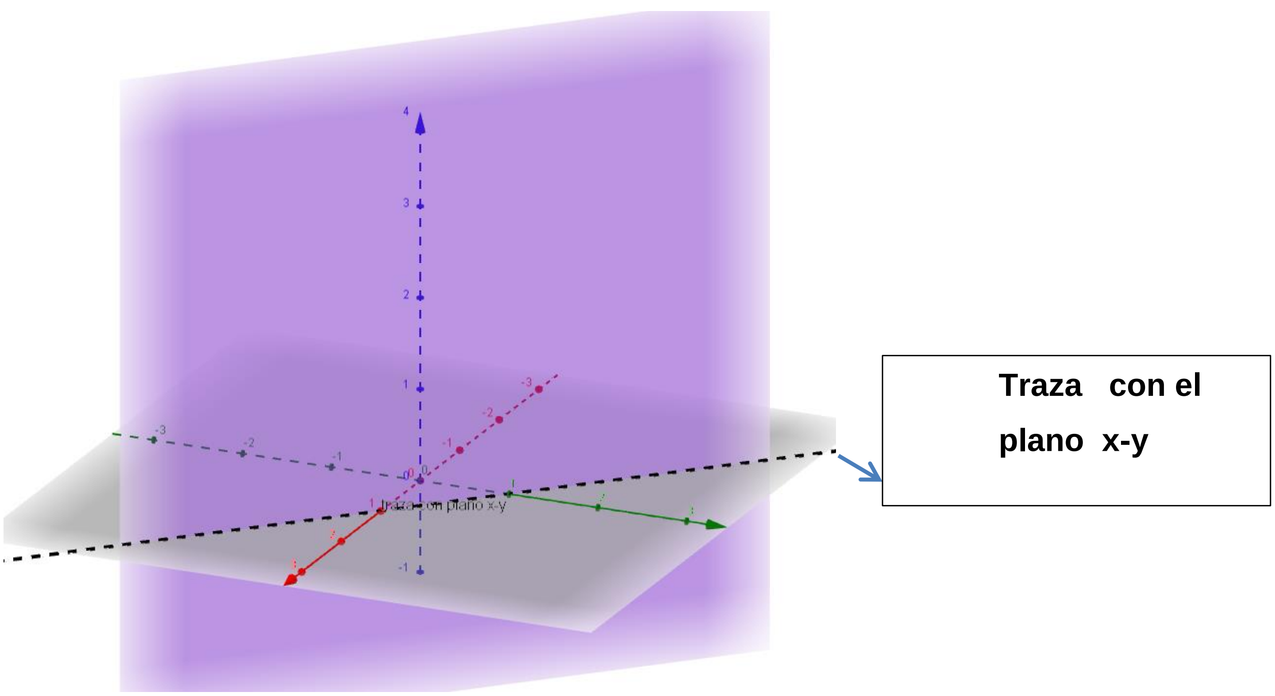
Despejando la y nos queda : **y = 1 – x** **que es la ecuación de una recta en el plano x-y**

Gráficamente: se ha dibujado sólo la parte del plano que queda en el primer octante



.

En Geogebra:



Ejercicio 1

Siguiendo los pasos del ejercicio anterior, graficar el siguiente plano $x + 2z = 4$ a mano usando trazas. Luego realizar el grafico con Geogebra y comparar

Al finalizar el ejercicio responder:

a) **Cual es la variable libre en este caso?**
b) **Cómo está ubicado el plano respecto de los ejes cartesianos?**

Ejercicio 2

Siguiendo los pasos del ejercicio anterior, graficar el siguiente plano $-x + y = 0$ a mano usando trazas. Luego realizar el grafico con Geogebra y comparar

Al finalizar el ejercicio responder:

a) **Cual es la variable libre en este caso?**
b) **Cuánto vale el coeficiente D? Qué indica ese valor sobre la posición del plano?**
c) **Cómo está ubicado el plano respecto de los ejes cartesianos?**

B. PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS

En este caso se distingue por que hay **dos coeficientes principales nulos**

Ejemplo:

$\boxed{z = 4}$ **A = 0 B = 0 C = 1 D = - 4**

Las variables libres son **x** e **y,** por lo tanto es un plano paralelo al plano **x-y**

Para graficar

Traza con el plano x-y :

$$\begin{cases} z = 4 & \text{(ecuación del plano a graficar)} \\ z = 0 & \text{(ecuación del plano coordenado x-y)} \end{cases}$$

En este caso si igualamos nos queda $0 = 4$, lo que es ABSURDO!! Esto quiere decir que no existe intersección. Por eso es paralelo al dicho plano x-y (variables libres)

Traza con el plano x-z :

$$\begin{cases} z = 4 & \text{(ecuación del plano a graficar)} \\ y = 0 & \text{(ecuación del plano coordenado x-z)} \end{cases}$$

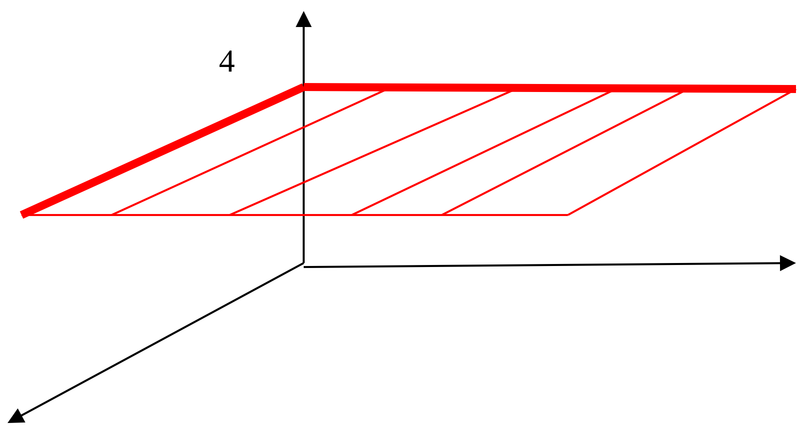
En este caso no se puede sustituir a la **y** por 0 porque no aparece en la ecuación, por lo que la traza es **la recta cuya ecuación es z= 4** (recta que está en el plano **x-z** , y es paralela al eje **x**, y corta al eje z en **z=4**)

<u>Traza con el plano y-z</u> :

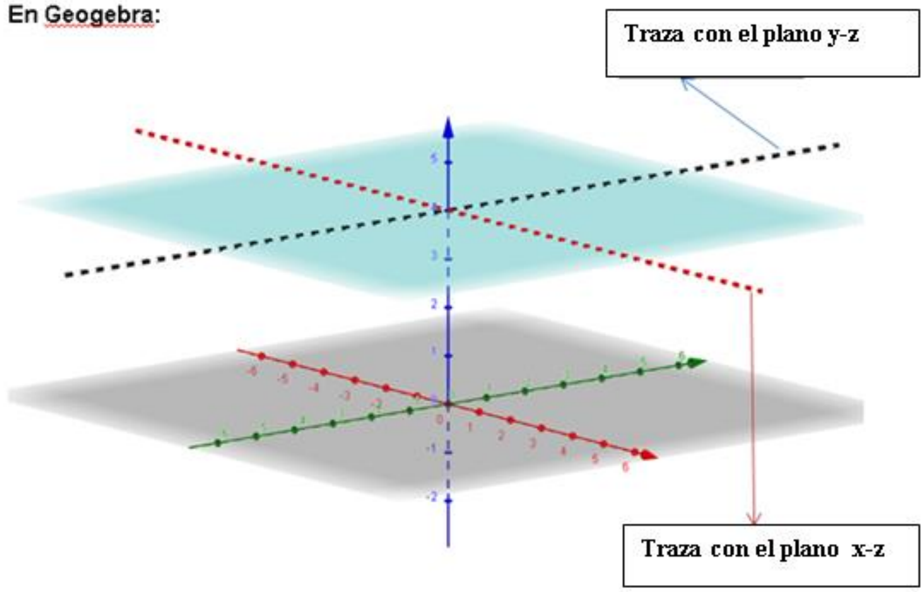
$$\begin{cases} z = 4 & \textbf{(ecuación del plano a graficar)} \\ x = 0 & \textbf{(ecuación del plano coordenado y-z)} \end{cases}$$

En este caso no se puede sustituir a la **x** por 0 porque no aparece en la ecuación, por lo que la traza es **la recta cuya ecuación es z= 4** (recta que está en el plano **y-z** , y es paralela al eje **y**, y corta al eje z en **z=4**)

Gráficamente:



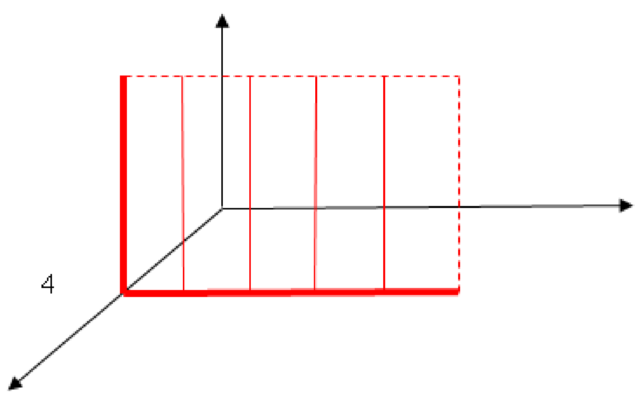
En Geogebra:



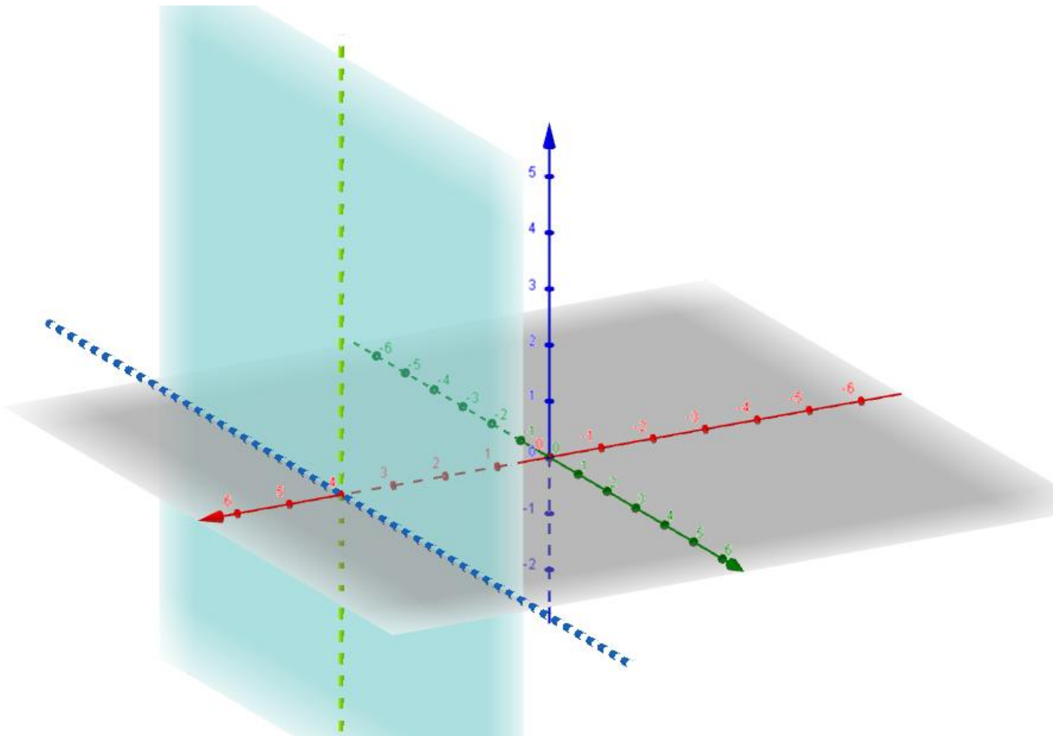
Ejemplo 2:

Graficar el plano $\boxed{x = 4}$ **A = 1** **B = 0** **C = 0** **D = -10**

Es la ecuación de un plano paralelo al plano **z-y .** Aquí las variables libres son **z** e **y.** En este caso particular, como es un plano paralelo al plano **z-y,** todos los puntos que pertenecen al plano tienen la forma **P(4,y,z)** , por lo tanto la traza con el plano **z-x** es una recta paralela al **eje z** , y corta al eje x en 4 , y la traza con el plano **x-y** es una recta paralela al **eje y**



En Geogebra



Ejercicio 3:

Siguiendo los pasos del ejercicio anterior, graficar el siguiente plano $x = 3$ a mano usando trazas. Luego realizar el gráfico con Geogebra y comparar

Al finalizar el ejercicio responder:

a) **Cuáles son las variables libres en este caso?**

b) **Cómo está ubicado el plano respecto de los planos cartesianos ?**