CAPÍTULO IV - PARTE B : FUNCIÓN DIFERENCIABLE

Repaso:

Diferencial en una variable

Sea f(x) una función derivable en un entorno del punto x, y Δx un incremento pequeño . Diferencial de una función correspondiente al incremento Δx de la variable independiente, es el producto f'(x) . Δx

En símbolos:

dy = f '(x). Δx

en forma diferencial nos queda: dy = f '(x). dx

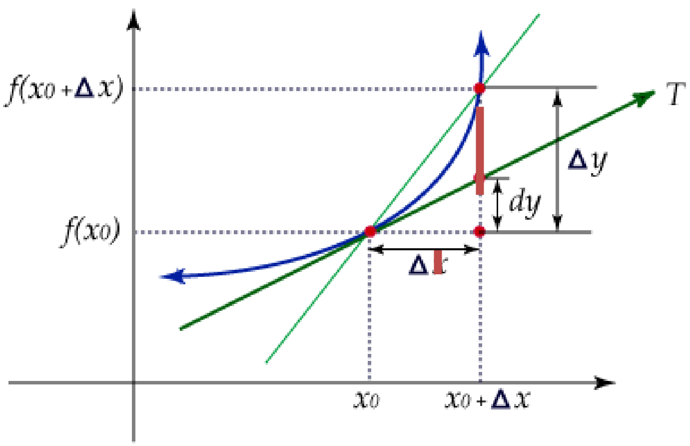
Función diferenciable en un punto, para funciones de una variable

En funciones de una variable independiente y = f(x) , una función es diferenciable si su incremento lo podemos expresar como: **Δy = dy + φ(x)** o sea, el incremento es igual a la diferencial más un infinitésimo.

Si reemplazamos Δy, por su fórmula $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ y a la dy por $dy = f'(x)\, \Delta x$ nos queda la fórmula anterior: $\mathbf{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x)\, \Delta x + \varphi(x)}$

Y gráficamente representa el incremento de ordenada que le corresponde a la recta tangente cuando se incrementa en Δx, al punto inicial.

En el gráfico vemos que la condición de diferenciabilidad significa que si Δx → 0 entonces Δy ≈ dy



Interpretación gráfica de la diferenciabilidad

El **Δy representa el incremento de la función, mientras que dy, representa el incremento de la recta tangente**

Por lo tanto decir que $\Delta y \approx dy$ (muy cerca del punto de contacto), significa que la función se comporta casi igual que su recta tangente, es decir, que gráficamente la curva de f y la recta tangente son casi coincidentes…. ES DECIR , LA CURVA ES CASI RECTA (LISA) EN UN ENTORNO PEQUEÑO DEL PUNTO DE TANGENCIA. No hay variaciones bruscas; puntos angulosos, puntos cuspidales, rectas tangentes verticales,

En funciones de una variable; si existe la derivada, la fc es diferenciable en dicho punto

- **DIFERENCIAL EN UN PUNTO, PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES**

Sea z= f(x;y) una función de dos variable, **si existen las derivadas parciales de la función en el punto $(x_0;y_0)$, *la diferencial de la función* se define como:**

$$\boxed{dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y}$$

Y las diferenciales de las variables independientes**:**

$$\boxed{dx = \Delta x \qquad dy = \Delta y}$$

Quedando la definición:

$$\boxed{dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy}$$

Para calcular la diferencial de una función en un punto (x,y) <u>basta con que existan las derivadas parciales en dicho punto.</u>

Ejemplo:

La diferencial total para la función $f(x,y) = \sqrt{2x^3 + y^2}$, la obtenemos calculando las derivadas parciales:

$$dz = \frac{\partial\sqrt{2x^3 + y^2}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\sqrt{2x^3 + y^2}}{\partial y}\Delta y \Rightarrow dz = \frac{1}{2}\frac{6x^2}{\sqrt{2x^3 + y^2}}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{2x^3 + y^2}}\Delta y$$

La diferencial la podemos calcular por ejemplo, en el punto (2,3) para Δx = Δy = 0,1

$dz = \frac{12}{\sqrt{25}}(0{,}1) + \frac{3}{\sqrt{25}}(0{,}1) = 0{,}3$ Con la interpretación geométrica, veremos qué significa este valor

- **FUNCIÓN DIFERENCIABLE EN UN PUNTO**

Definición:

Dada una función z = f(x,y), si incrementamos simultáneamente x en Δx e y en Δy, podemos calcular el incremento total de z de la siguiente manera:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

La función de z = f (x,y) es diferenciable en (x, y) , si su incremento se puede expresar como:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

Siendo ε_1 y ε_1 **dos infinitésimos para** $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

Decimos que una función es diferenciable en una región R, si es diferenciable en todo punto (x,y) de R.

- **OBSERVACIÓN IMPORTANTE**

Esta expresión se podría escribir de la siguiente manera:

$$\Delta z = \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y}_{\text{dz}} + \underbrace{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}_{\text{infinitésimo}}$$

$$\Delta z = \mathbf{dz} + \boldsymbol{\varepsilon_1}\ \Delta x + \ \boldsymbol{\varepsilon_2}\ \Delta y$$

La cual puede ser escrita como : $\Delta \mathbf{z} - \ \mathbf{dz} = \boldsymbol{\varepsilon_1}\ \Delta \mathbf{x} + \ \boldsymbol{\varepsilon_2}\ \Delta \mathbf{y}$

Esta expresión quiere decir que si la función es diferenciable en (x;y) , el incremento total de z se diferencia de la diferencial en un infinitésimo cuando Δx y Δy tienden a 0

Ejemplo:

Determinar si la función **f(xy) = x^2 y** es diferenciable en todo su dominio.

1) Calculamos primero **Δz:**

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = x^2 y + 2xy\Delta x + (\Delta x)^2 y + x^2 \Delta y + 2x\Delta y\Delta x + (\Delta x)^2 \Delta y$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) =$$

$$x^2 y + 2xy\Delta x + \Delta x^2 y + x^2 \Delta y + 2x\Delta y\Delta x + \Delta x^2 \Delta y - (x^2 y)$$

$$\Delta z = 2xy\Delta x + \Delta x^2 y + x^2 \Delta y + 2x\Delta y\Delta x + \Delta x^2 \Delta y$$

2) Calculamos la diferencial

$$\mathbf{dz} = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\ \Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\ \Delta y$$

$$\mathbf{dz} = 2xy\ \Delta x + \ x^2\ \Delta y$$

3) restamos miembro las dos expresiones halladas para ver si se cumple que

$$\Delta z - \mathbf{dz} = \boldsymbol{\varepsilon_1}\ \Delta x + \ \boldsymbol{\varepsilon_2}\ \Delta y$$

$$\Delta z = 2xy\Delta x + \Delta x^2 y + x^2 \Delta y + 2x\Delta y\Delta x + \Delta x^2 \Delta y$$

$\mathbf{dz} = \mathbf{2xy\,\Delta x} + \mathbf{x^2\,\Delta y}$

Al restar miembro a miembro los términos en rojo se cancelan, y nos queda

$\mathbf{\Delta z - dz = \Delta x^2\,y + 2x\Delta y\Delta x + \Delta x^2\,\Delta y}$

En el segundo miembro sacamos factor común Δx o Δy según se pueda, para ver si podemos dejar dos términos que tengan la forma $\boldsymbol{\varepsilon_1}\,\mathbf{\Delta x} + \boldsymbol{\varepsilon_2}\,\mathbf{\Delta y}$

$\mathbf{\Delta z - dz = \Delta x\,[\,\Delta x\cdot y + 2x\Delta y] + \Delta y\,[\Delta x]^2}$

Si lo que está en los corchetes son infinitésimos cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, entonces se cumpliría la definición.

Calculamos entonces los límites:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[\Delta x\ y + 2x\,\Delta y\ ] = 0 + 0 = 0 \quad \to \Delta x\ y + 2x\,\Delta y\ = \varepsilon_1$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[(\Delta x)^2\ ] = 0 = 0 \quad \to (\Delta x)^2\ = \varepsilon_2$$

Por lo tanto SI ES DIFERENCIABLE EN CUALQUIER PUNTO (x,y)

- **Condición necesaria de diferenciabilidad**

Si la función z = f(x,y) es diferenciable en un punto (x , y) entonces es continua en dicho punto

f(x , y) es diferenciable $\Longrightarrow$ continua es (x , y)

Demostración:

Por ser f (x,y) diferenciable en **(x , y),** sabemos que

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \qquad \boxed{1}$$

Donde ε_1 y ε_2 son infinitésimos para $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ $\boxed{2}$

Y teniendo en cuenta que **Δz = f (x + Δx , y + Δy) – f (x,y)**

Podemos igualar $\boxed{1} = \boxed{2}$

$$\mathbf{f(\,x+\Delta x\,,y+\Delta y)-\,f\,(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\,\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}$$

Sacando factor común Δx y Δy nos queda

$$\mathbf{f(\,x+\Delta x\,,y+\Delta y)-\,f\,(x,y)=\Delta x\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\varepsilon_1\right]+\Delta y\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\varepsilon_2\right]}$$

Ahora calculemos el límite para $(\Delta x\,,\Delta y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})$ a cada término

$\lim\limits_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \mathbf{f\,(x+\Delta x,y+\Delta y)=}$ es el limite que queremos averiguar

$\lim\limits_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \mathbf{f\,(x,y)=f(x,y)}$ por ser constante

$\lim\limits_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \mathbf{\Delta x=0}$

$\lim\limits_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \mathbf{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$ por ser constante

$\lim\limits_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \boldsymbol{\varepsilon_1=0}$ por ser un infinitésimo

$\lim\limits_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \mathbf{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$ por ser constante

$\lim\limits_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \boldsymbol{\varepsilon_2=0}$ **por ser un infinitésimo**

Reemplazando nos queda

$$\lim_{(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)} \mathbf{f\,(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=0\,\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+0\right]+0\,\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+0\right]=0}$$

despejando

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \mathbf{f}\,(\mathbf{x}+\Delta \mathbf{x}, \mathbf{y}+\Delta \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$ **lo que significa que es continua**

Esta condición significa que si una función no es continua en un punto, implica que no es diferenciable, porque se trata de una condición necesaria.
Pero ser continua no es suficiente dado que NO GARANTIZA que sea diferenciable.

- **Condición suficiente de diferenciabilidad (pero no necesaria)**

Si la función z = f(x,y) tiene derivadas parciales primeras continuas en un punto (x,y) entonces la función es diferenciable en dicho punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;\; y \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$ **son continuas** $\Longrightarrow$ **f es diferenciable en (x, y)**

Esta es una condición suficiente **no necesaria**, se pueden presentar funciones que no cumplan esta condición y sin embargo son diferenciables.

Ejemplo:

Demuestre que la función **f(x,y) = y.e^{x} – 2x.y** es diferenciable en todo su dominio
Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,e^{x} - 2y \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x} - 2x$$ son continuas para todo (x,y) por lo tanto la función es diferenciable en todo su dominio.

Si la condición anterior no se cumple, como no es una condición necesaria, debemos determinar si la función es diferenciable aplicando la definición de diferenciabilidad.

- ***INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL***

Hemos visto que las derivadas parciales en un punto, representan gráficamente la pendiente de las rectas tangentes a la superficie, en la dirección del eje x , y del eje y.

Si existen las rectas tangentes a la superficie en el punto P, y la función es diferenciable en dicho punto, el plano que determinan todas ellas se llama **plano tangente a la superficie en el punto P.**

El plano tangente es el lugar geométrico de todas las rectas tangentes a la superficie en el punto P(a,b,f(a,b))) veremos más adelante que hay más rectas tangentes)

Que existan las derivadas parciales en un punto, NO garantiza que exista plano tangente a la superficie. Pero si la función es DIFERENCIABLE, esto SÍ garantiza que existe plano tangente.

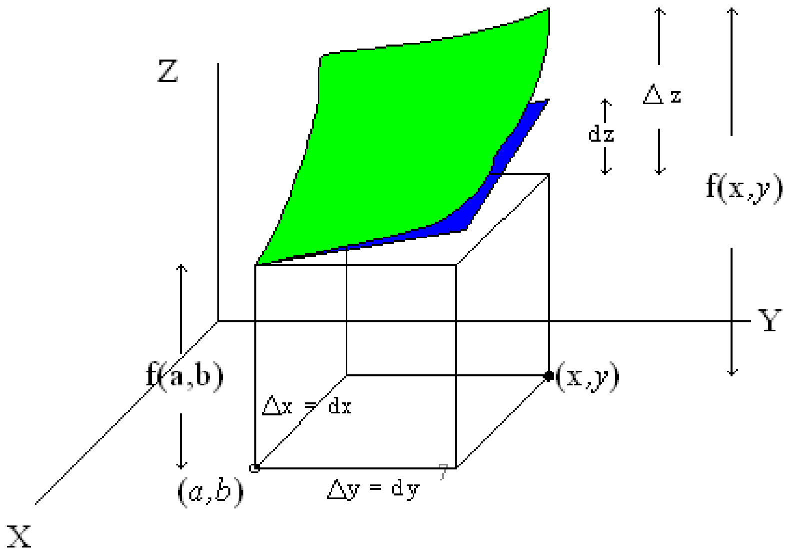
Veremos ahora la interpretación gráfica:

z =f(x,y) una superficie (en verde)

(a,b) punto sin incrementar

(x,y) punto incrementado

Plano en azul es el plano tangente a la superficie en el punto (a,b,f(a,b))



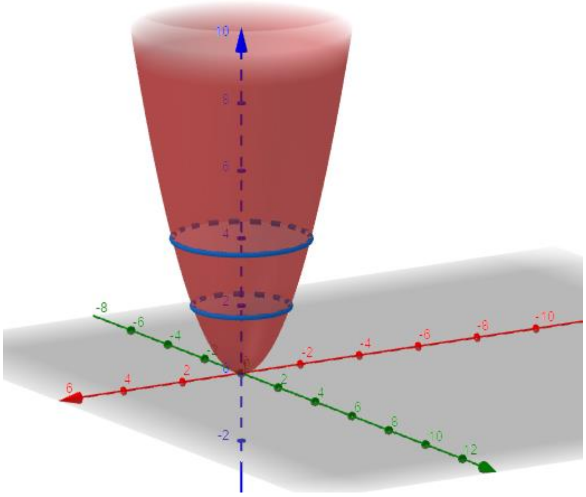
Vemos en el gráfico que el Δz representa el incremento sufrido por la superficie, mientras que dz representa el incremento sufrido por el plano tangente.

Si la función es diferenciable, en un entorno pequeño del punto (a,b) , la superficie y el plano tangente prácticamente coinciden.

Esto implica que si la función es diferenciable en un punto, es casi plana en dicho punto, es decir no presenta puntas ni aristas.

Por ejemplo:

La función z= $x^2 + y^2$ es diferenciable en cualquier punto, porque es lisa, casi plana (no presenta aristas ni puntas)



Ahora cómo analizamos si una función es o no diferenciable en un punto, sin hacer su gráfica? veremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Determinar si la función **f(xy) = x^2 y – 3xy** es diferenciable en todo su dominio.

Solución:

Aplicamos la condición suficiente pero no necesaria de diferenciabilidad. Es decir calculamos sus derivadas parciales y vemos si son continuas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 3x$$

Vemos que ambas derivadas parciales son continuas en cualquier punto (x;y), por lo tanto SI ES DIFERENCIABLE EN TODO SU DOMINIO

Ejemplo 2:

Determinar si la función $\mathbf{f(x,y)} = \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}}$ es diferenciable en todo su dominio

Solución:

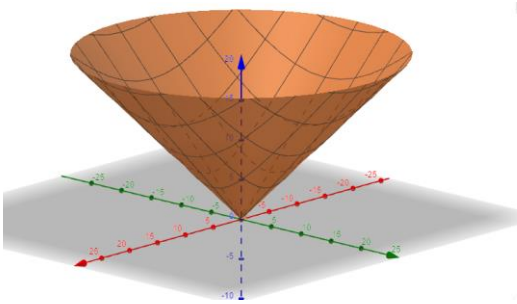
Aplicamos la condición suficiente pero no necesaria de diferenciabilidad. Es decir calculamos sus derivadas parciales y vemos si son continuas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Vemos que ambas derivadas parciales son continuas en todo punto (x,y)≠ (0,0).

En (0,0) las derivadas no son continuas, por que no están definidas en (0,0), por lo tanto no puede ser diferenciable en (0,0)



Vemos que gráficamente la superficie en (0,0) no es diferenciable, por que no es casi plana en dicho punto (interp

Ejemplo 3:

Analice si la función $\mathbf{f(x,y) = -1.\sqrt{|x.y|}}$ es diferenciable en (0,0), por definición?

Calculamos las derivadas parciales por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1\sqrt{|\Delta x.0|} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-1\sqrt{|0.\Delta y|} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0$$

Calculamos $\mathbf{dz} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.\Delta y = 0 + 0 = 0$

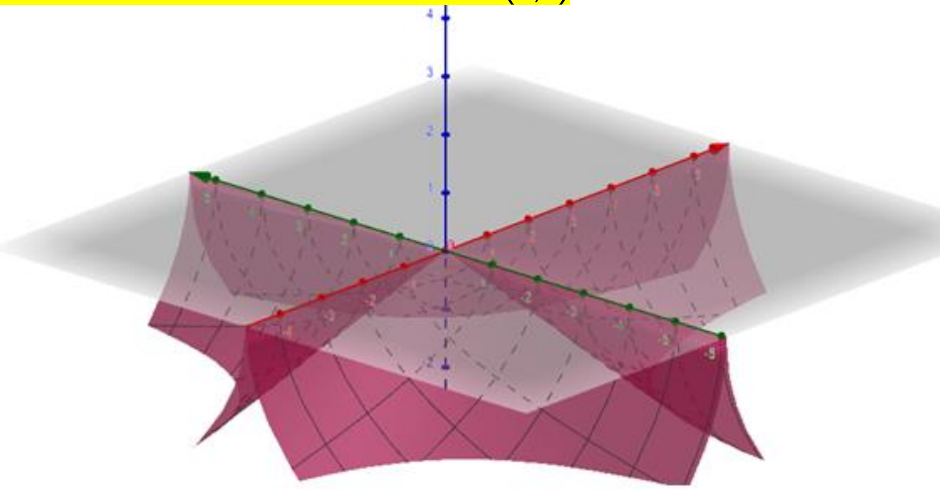
Calculamos ahora incremento total:

Δz = f (0+ Δx , 0 + Δy) – f (0,0) = f (Δx , Δy) – f (0,0) = $-1.\sqrt{|\Delta x.\Delta y|} - 0$

En este caso $\Delta z - dz = -\mathbf{1}.\sqrt{|\Delta x.\Delta y|} - \mathbf{0} = -\mathbf{1}.\sqrt{|\Delta x.\Delta y|}$ -

Pero , no podemos expresar a $-\mathbf{1}\,.\sqrt{|\Delta x\,.\,\Delta y|}$ como $\Delta x.\varepsilon_1 + \Delta y.\varepsilon_2$

Por lo tanto no es diferenciable en (0,0)



Gráficamente vemos que en un entorno de (0,0) la función no es casi plana

- ✓ ***APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL***

Como en el caso de funciones de una variable, la diferencial se utiliza para cálculo de errores y aproximaciones.

Ejemplo:

El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm. respectivamente, con un posible error en la medición de 0,1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del volumen del cono.

Solución

Para calcular el error tenemos en cuenta:

$(x + \Delta x , y + \Delta y) \Rightarrow$ valor exacto

$(x , y) \Rightarrow$ valor medido

$\Delta x , \Delta y \Rightarrow$ error en la medición

Cuando calculamos con estos valores la función, el error en el valor medido, se propaga $\Delta z \Rightarrow$ error propagado, este valor no lo podemos conocer, utilizamos como aproximación **dz**

El volumen de un cono es función del radio y de la altura $V(r, h) = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$

La diferencial total es: $dV(r, h) = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = \frac{2\pi r h}{3}\Delta r + \frac{\pi r^2}{3}\Delta h$

Puesto que los errores son del orden de $\pm 0{,}1$cm tenemos que $|\Delta x| \le 0{,}1$ y $|\Delta y| \le 0{,}1$. Para estimar el máximo error en el volumen, tomamos el máximo error en las medidas de r y h.

Reemplazamos: $dV = \frac{500\pi}{3} 0{,}1 + \frac{100\pi}{3} 0{,}1 = 20\pi$

De esta forma el máximo error en el volumen es de aproximadamente $20\pi \approx 63\ cm^3$

Si queremos obtener el error relativo: $\frac{dV}{V} = \frac{20\pi}{\frac{\pi 100.25}{3}} = 0{,}024$ representa $2{,}4\ \%$ error porcentual

➢ REGLAS DE DERIVACIÓN:

✓ *REGLA DE LA CADENA* : *DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA*

Sean x = x(t) e y= y(t) dos funciones derivables en t y sea z = f(x,y) diferenciable en (x(t),y(t)) Entonces la función compuesta z = f (x (t) , y (t)) es derivable en t y su derivada está dada por la fórmula :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{dy}{dt}$$

Ejemplo:

$z = 3x^2 y + y . \text{sen } x$ pero $x = 4t$ e $y = 3t^2$

vemos que z depende de x e y

pero x depende a su vez de t, lo mismo sucede con y, por lo tanto z depende también de t

Si queremos calcular la derivada de z respecto de , respetamos la dependencia de cada variable:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (6\,x\,y + y\,.\,\cos x\,)\,.\,4 + (3\,x^{2} + \operatorname{sen} x\,)\,6\,t$$

reemplazando **x** e **y** en función de **t** nos queda:

$$\frac{dz}{dt} = (\,6.\,4\,t\,.\,3\,t^{2} + 3\,t^{2}\,.\,\cos 4t\,)\,.\,4 + (\,3\,.\,16\,t^{2} + \operatorname{sen} 4t\,)\,6t$$

$$\frac{dz}{dt} = (72\,t^{3} + 3\,t^{2}\,.\,\cos 4t\,)\,.\,4 + (\,48\,t^{2} + \operatorname{sen} 4t\,)\,6t$$

Esta fórmula se puede generalizar a otras situaciones, por ejemplo que **z** dependa de dos variables z= f (x ,y) pero **x** e **y** dependen también de dos variables **s** y **t** , es decir:

z = f (x, y) pero x = x (t, s) y = y (t, s)

entonces podemos calcular las derivadas parciales de z respecto de t y respecto de s de la siguiente manera:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

- ✓ ***DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA DE DOS VARIABLES***

Si z es una función implícita de **x** e **y**, definida mediante la ecuación F(x , y , z) = 0 , procedemos de manera similar a la anterior:

F(x,y,z) = 0 donde z= f(x,y) entonces

F(x , y , f(x,y)) = 0 es una función compuesta

Derivamos respecto de **x** ambos miembros utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

pero : $\frac{dx}{dx} = 1$ y $\frac{dy}{dx} = 0$ por que y no depende de x

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

despejando $\frac{\partial z}{\partial x}$ nos queda:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

Si derivamos respecto de **y** ambos miembros nos queda:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{pero : } \frac{dx}{dy} = 0 \qquad \frac{dy}{dy} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

despejando $\frac{\partial z}{\partial y}$ nos queda:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

Ejemplos:

1. $F(x,y,z) = 3x + 2xz^2 - z.\,e^{y} = 0$ donde $z = f(x,y)$, calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3+2z^2}{4xz - e^y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-z.e^y}{4xz - e^y}$$

2. También se puede aplicar para funciones implícitas de una variable

   $F(x, y) = x \,.\, \text{sen}\, y + x^2 .y$ donde $y = f(x)$, calcular $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\text{sen}y + 2xy}{x\,.\cos x + x^2}$$