CAPÍTULO 1: ECUACIONES DIFERENCIALES

I. INTRODUCCIÓN

La formulación de problemas relacionados a física, química, biología, economía entre otras disciplinas, requieren la elaboración de un modelo matemático. Este modelo consta de la variable o las variables que describen la situación dada, junto con una o más ecuaciones, que relacionen dichas variables y sus derivadas. Estas ecuaciones reciben el nombre de ***ecuaciones diferenciales***.

Cuando trabajamos con ecuaciones algebraicas como por ejemplo $x^2 +2x+3 = 0$, resolverla es hallar valores numéricos de la variable x que satisfagan la ecuación. A diferencia del álgebra resolver una ecuación diferencial es hallar una ***función desconocida*** que satisfaga la ecuación.

La función desconocida puede depender de una o más variables independientes, esto nos permite clasificarlas según su tipo, las llamamos ***ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales en derivadas parciales respectivamente.***

. En ambos casos el estudio de ecuaciones diferenciales tiene los siguientes fines:

- **Hallar la ecuación diferencial que describe una situación física particular**
- **Encontrar la solución apropiada para esa ecuación**

II. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

1) DEFINICIÓN:

Una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas, se llama ecuación diferencial.

> ***Una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas, se llama ecuación diferencial.***

Ejemplos: $\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$ **La escribimos como F (x, y, y') = 0**

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ **La escribimos como F (y, y', y'') = 0**

Otra notación podría ser $y' + 3xy = 0$ **o** $y'' + 2y' - 4y = 0$

Vemos que en los ejemplos citados aparecen una derivada primera en el primer caso, y una derivada segunda en el segundo caso, esto da origen a una nueva clasificación:

- **ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL**. ***Llamamos orden de una ecuación diferencial al mayor orden de las derivadas que aparece en la ecuación***.

Ejemplo :

$\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden

2) SOLUCIÓN GENERAL:

Una función y = f(x) se denomina solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando se sustituyen la **variable y** por f(x), y **sus derivadas** por las derivadas de f correspondientes.

La clasificación según tipo y orden nos permitirán determinar la solución de la ecuación.

Existen una gran variedad de ecuaciones diferenciales y conforme a esto distintos métodos de resolución. Para el desarrollo de esta unidad se han seleccionada alguno de ellos, basados en la aplicación a la ingeniería como así también a los conocimientos que se pretende el alumno haya obtenido al iniciar el curso.

Hallar la solución de una ecuación diferencial es despejar de la ecuación la función desconocida, este procedimiento no siempre es sencillo, lo que da lugar a distintos métodos de resolución.

Analizaremos algunas ecuaciones cuya solución la podemos obtener en forma inmediata.

Vamos a comenzar por la forma más simple que puede tomar una ecuación diferencial.

Si la ecuación es de la forma $\frac{dy^n}{dx^n} = f(x)$ **basta con integrar n veces ambos miembros de la ecuación para obtener y(x). Este método de resolución se denomina <u>integración inmediata</u>.**

Los siguientes ejemplos son para n =1 y n =2

Ejemplo 1:

Hallar la solución general de la ecuación **$y'(x) = 2x$** o $\frac{dy}{dx} = 2x$

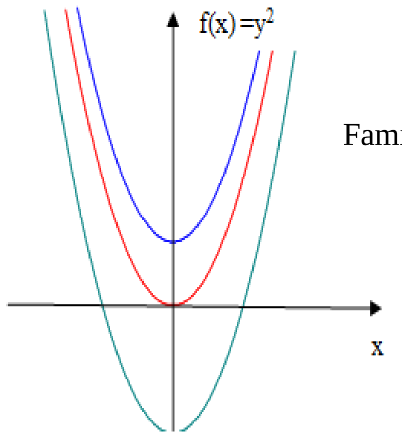
Si integramos miembro a miembro respecto de x obtenemos:

$\int y'(x)\, dx = \int 2x\, dx$ nos queda **$y(x) = x^2 + C$**

Por tratarse de una integral indefinida, aparece la constante C de integración. **Esta solución recibe el nombre de *solución general.***

Geométricamente la solución general de una ecuación diferencial sin importar el orden, corresponde a una familia de curvas en el plano

En el ejemplo 1, estas curvas son parábolas cuyo vértice dependerá del valor de la constante C. Vértice (0;C)



Familia de curvas con desplazamiento vertical

Podemos ahora dar la definición de solución general de una EDO:

> ***La solución general de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación diferencial y contiene tantas constantes arbitrarias como lo indique el orden de la ecuación.***

Si le damos valor a la constante, obtendremos una sola curva, dando origen a la **solución particular** de la ecuación diferencial, para obtener dicha solución imponemos condiciones que debe verificar la ecuación llamadas condiciones iniciales.

Si en nuestro ejemplo la condición inicial es que la solución (**y**) cumpla con lo siguiente:
y (0) = 3, esto es, para **x = 0** ; la **y** debe tomar el valor 3
reemplazando en la solución general, nos queda:

y (0) = 0 + C = 3 se deduce por la tanto que C debe tomar el valor 3

Solución particular: $y(x) = x^2 + 3$

Geométricamente corresponde a una parábola con eje de simetría x = 0, y ordenada al origen igual 3. Para obtener otra solución particular, debemos dar otras condiciones de contorno.

Ejemplo 2:

Dada la ecuación **$y'' = 4x$** o $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4x$ hallar la solución general.

Para despejar y(x) debemos integrar dos veces (porque es de segundo orden).

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int 4x.dx$$

Pero $\displaystyle\int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int y''.dx = y'$

La primera integración produce $y'(x) = 2x^2 + C_1$

Si integramos nuevamente obtenemos: $y(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + C_1.x + C_2$ **Solución general.**

Si queremos verificar que la solución obtenida es correcta, reemplazamos en la ecuación diferencial: derivamos la solución dos veces (como indica la definición de solución general)

$y(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + C_1.x + C_2$ derivamos una vez $y'(x) = 2x^2 + C_1$

Hacemos la derivada segunda **y** ,debe verificar la **EDO** (ecuación diferencial ordinaria)

$y''(x) = 4x^2$ verifica la ecuación.

Comparemos las soluciones generales de los ejemplos 1 y 2, en el primer caso la solución general contiene una constante C, mientras que en el otro aparecen dos constantes arbitrarias dado que se integró dos veces.

Para obtener una solución particular en el segundo ejemplo pedimos que verifique las condiciones:

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \textbf{condiciones iniciales}$$

En la solución $y(x) = \frac{2}{3}x^3 + C_1.x + C_2$ reemplazamos las condiciones iniciales.

$y(0) = \frac{2}{3}.0 + C_1.0 + C_2 = 2 \quad \rightarrow C_2 = 2$

$y'(0) = 2.0 + C_1 = 1 \quad \rightarrow C_1 = 1$

resulta: $y(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + 2$ **solución particular**

Como se debe obtener el valor de dos constantes, se deben plantear dos condiciones iniciales, estas condiciones se aplica una a la función y otra a su derivada

Si tenemos $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ despejar es ***integrar "n" veces.***

Con cada integración obtendremos una constante, las condiciones iniciales se aplicaran a la función, su derivada primera, su derivada segunda y a su derivad de orden (n-1).Esto se hace porque cada derivación permite eliminar una constante

Lo visto en los ejemplos, nos permite ampliar la definición de solución general:

> **La solución general de una ecuación diferencial es una familia de funciónes que satisface la ecuación diferencial y contiene tantas constantes arbitrarias como lo indique el orden de la ecuación.**

A continuación veremos los distintos métodos para resolver las EDO, según el orden de las mismas