CAPÍTULO II

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN COMPLETAS

En estas ecuaciones también llamadas no homogéneas el segundo miembro es distinto de cero.

y''(x) + P(x) y'(x) + Q(x)y = R(x)

Si consideramos las funciones **P(x) y Q(x) constantes**, decimos que es una ecuación lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

La escribimos como: y''(x) + p y'(x) + q y = R(x)

La función R(x) debe ser continua en un intervalo I

I. SOLUCIÓN GENERAL

La solución general de una ecuación no homogénea estará formada por la suma de dos soluciones, una general correspondiente a la ecuación homogénea asociada y otra particular correspondiente a la no homogénea

- Si hacemos R(x) = 0 obtenemos la ecuación homogénea asociada y''(x) + P(x) y'(x) + Q(x) y = 0. A su solución la llamamos **solución complementaria** y la escribimos **yc**
- Buscamos otra solución que verifique y''(x) + P(x) y'(x) + Q(x) y = R(x). A esta solución la llamamos propuesta o particular y la escribimos $\mathbf{y_p}$

La solución general de la ecuación no homogénea es la suma de las dos soluciones anteriores

$y(x) = y_c + y_p$ ***con y_c e y_p linealmente independientes***

¿Por qué linealmente independientes?

Hemos visto que dos funciones son linealmente dependientes si y solo si una es múltiplo constante de la otra.

Si la solución particular es la misma que la solución de la homogénea (salvo una constante) cuando reemplacemos en la ecuación obtendríamos siempre cero en el segundo miembro y no R(x) que es lo pedido.

EJEMPLO:

$\mathbf{y = y'' + y' - 6y = 2e^{5x}}$ **donde** **p=1** **q=-6** **y R(x)=** $\mathbf{2e^{5x}}$

Ecuación homogénea asociada es $y'' + y' - 6y = 0$

cuya solución general es: $y_c = c_1 e^{-3x} + c_2\, e^{2x}$

Cualquier función múltiplo de e^{-3x} **o de** e^{2x} **reemplazada en la ecuación da siempre cero en el segundo miembro. Debemos encontrar otra función linealmente independiente a las que conforman la solución general, de tal modo, que al reemplazarla obtengamos R(x).**

Existen dos métodos para hallar y_p

1) ***Método de coeficientes indeterminados***
2) ***Método de variación de parámetros***

II. MÉTODOS PARA HALLAR LA SOLUCIÓN PARTICULAR

1) *Método de coeficientes indeterminados*

Este método es muy sencillo, pero tiene la limitación que sólo es aplicable cuando R(x) es del tipo:

a) ***Exponencial.***
b) ***Polinómica***
c) ***Seno o coseno***

¿Por qué para estas funciones solamente?

Básicamente este método consiste en proponer una función del mismo tipo que R(x) pero con uno o más coeficientes indeterminados. Cuando reemplacemos la solución propuesta en la ecuación diferencial, las derivadas serán funciones exponenciales, polinómicas o trigonométricas según lo sea R(x). El valor de los coeficientes se obtiene por comparación.

Analizaremos cada caso a partir de un ejemplo

a) *R(X) ES UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL*

Cuando R(x) es exponencial, se pueden presentar tres casos:

R(x) es linealmente independiente de las soluciones de la ecuación homogénea

R(x) es linealmente dependiente de una de las soluciones de la ecuación homogénea

R(x) es linealmente dependiente de las soluciones de la ecuación homogénea

EJEMPLO 1:

R(x) es linealmente independiente de las soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + y' - 6y = 2\,e^{5x}$$

- **Cálculo de y_c:**

  $y'' + y' - 6y = 0$ **su ecuación característica es $m^2 + m - 6 = 0$**

Las raíces de esta ecuación vimos que son $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$ raíces reales distintas

La solución general de la homogénea es: $\mathbf{y_c = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-3x}}$

- **Cálculo de y_p:**

Ahora el segundo miembro es una exponencial cuyo exponente es 5x, verificamos la independencia lineal $\frac{e^{2x}}{e^{5x}} = e^{-3x}$ $\frac{e^{-3x}}{e^{5x}} = e^{-8x}$ **distintos de cte son linealmente independientes**

Proponemos como solución $y_p = a\, e^{5x}$ ***donde a es el coeficiente que debemos determinar.***

Reemplazamos en la ecuación diferencial: $y'' + y' - 6y = 2\,e^{5x}$

$\mathbf{y_p = a\, e^{5x}}$ $\mathbf{y'_p = 5a\, e^{5x}}$ $\mathbf{y''_p = 25a\, e^{5x}}$

$25\,a\,e^{5x} + 5\,a\,e^{5x} - 6\,a\,e^{5x} = 2e^{5x}$

$24\,a\,e^{5x} = 2\,e^{5x} \rightarrow 24\,a = 2$ por lo tanto $a = 1/12$

La solución general es: $y(x) = \underbrace{C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-3x}}_{y_c} + \underbrace{\frac{1}{12} e^{5x}}_{y_p}$

Verificación:

Si queremos verificar que la solución obtenida es la correcta, reemplazamos en la ecuación diferencial:

$(c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + 1/12\,e^{5x})'' + (c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + 1/12\,e^{5x})' - 6\,(c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + 1/12\,e^{5x}) = 2\,e^{5x}$

$4\,c_1\,e^{2x} + 9\,c_2\,e^{-3x} + 25/12\,e^{5x} + 2c_1\,e^{2x} - 3\,c_2\,e^{-3x} + 5/12\,e^{5x} - 6\,c_1\,e^{2x} - 6\,c_2\,e^{-3x} - 6/12\,e^{5x} = 2\,e^{5x}$

Sacamos factor común las exponenciales:

$\mathbf{e^{2x}}(4\,c_1 + 2c_1 - 6\,c_1) + \mathbf{e^{-3x}}(9\,c_2 - 3\,c_2 - 6\,c_2) + \mathbf{e^{5x}}(25/12 + 5/12 - 6/12) = 2\,e^{5x}$

Vemos que se anulan los dos primeros términos del primer miembro porque estas funciones corresponden a la solución de la ecuación homogénea, por lo tanto nos queda:

$$e^{5x}(25/12 + 5/12 - 6/12) = 2\,e^{5x}$$

$e^{5x}(2) = 2\,e^{5x}$ comprobamos que es solución de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 2:

R(x) es linealmente dependiente de una de las soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + y' - 6y = 4\,e^{2x}$$

El primer miembro es el mismo que en el ejemplo anterior, pero $R(x) = 4e^{2x}$

$y_c = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x}$ contiene el término e^{2x} significa que hay una dependencia lineal con R(x)

Si se propone $y_p = a\,e^{2x}$ al reemplazar en la EDO quedaría igual a cero.

En este caso aplicamos lo visto en homogéneas, cuando hay una dependencia lineal debemos multiplicar por x a la solución

$$y_p = a\,x\,e^{2x}$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial para encontrar el coeficiente indeterminado **a**:

$$y'' + y' - 6y = 4\,e^{2x}$$

$y_p = a\,x\,e^{2x}$ $y'_p = a\,e^{2x} + 2ax\,e^{2x}$ $y''_p = 2a\,e^{2x} + 2a\,e^{2x} + 4ax\,e^{2x}$

$(2a\,e^{2x} + 2a\,e^{2x} + 4ax\,e^{2x}) + (a\,e^{2x} + 2ax\,e^{2x}) - 6ax\,e^{2x} = 4\,e^{2x}$

Sumando los términos en rojo y cancelando los términos en verde

nos queda:

$5\,a\,e^{2x} = 4\,e^{2x} \rightarrow 5\,a = 4$ de donde $a = 4/5$ entonces la solución particular es $y_p = 4/5\,x\,e^{2x}$

La solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + \frac{4}{5}\,x\,e^{2x}$$

Las funciones obtenidas son todas linealmente independientes.

EJEMPLO 3:

R(x) es linealmente dependiente de las soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' - 2y' + y = 3\,e^x$$

Para hallar la solución particular, primero debemos encontrar la solución general de la ecuación homogénea

- **Cálculo de yc:**

  $y'' - 2y' + y = 0$ su ecuación característica es $m^2 - 2m + 1 = 0$

  las raíces de esta ecuación son $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$ raíces reales iguales

  La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x$

- **Cálculo de yp:**

  Debemos proponer una solución linealmente independiente de la solución general, para que el cociente de la solución propuesta con cada una de las funciones **e^x y $x\,e^x$** sea distinto de constante

  No podemos proponer $y_p = a\,e^x$ ni $y_p = a\,x\,e^x$ por la dependencia lineal

  $$\frac{axe^x}{xe^x} = a \quad ; \quad \frac{a\,e^x}{e^x} = a \quad \text{son linealmente dependientes}$$

  Como hay dependencia lineal multiplicamos por x^2

$$y_P = a\,x^2\,e^x$$

$y_p = a\,x^2\,e^x$ $\qquad$ $y'_p = 2a\,x\,e^x + ax^2\,e^x$ $\qquad$ $y''_p = 2\,a\,e^x + 2ax\,e^x + 2ax\,e^x + ax^2 e^x$

Reemplazamos esta solución en la ecuación: **$y'' - 2y' + y = 3\,e^x$**

$(a2e^x + 4\,axe^x + a\,x^2\,e^x) - 2(2axe^x + a\,x^2\,e^x) + a\,x^2\,e^x = 3e^x$

Sacamos factor común:

$x^2 e^x\,(a - 2a + a) + x\,e^x\,(4a - 4a) + 2\,a\,e^x = 3\,e^x$

Nos queda:

$2\,a\,e^x = 3\,e^x \rightarrow a = 3/2$

La solución general es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x$$

Verificación:

$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + 3 x e^x + 3/2 x^2 e^x$

$y'' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + 3 e^x + 3 x e^x + 3 x e^x + 3/2 x^2 e^x$

Reemplazamos:

$c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x + 3e^x + 6xe^x + 3/2x^2 e^x - 2c_1 e^x - 2c_2 e^x - 2c_2 x e^x - 6xe^x - 3x^2 e^x + c_1 e^x + c_2 xe^x + 3/2x^2 e^x = 3e^x$

Cancelamos términos y nos queda: $3e^x = 3 e^x$ se verifica la ecuación.

b) *R(X) ES UNA FUNCIÓN POLINÓMICA:*

Cuando R(x) es fc polinómica, se pueden presentar tres casos:

R(x) es linealmente independiente de las soluciones de la ecuación homogénea

R(x) es linealmente dependiente de una de las soluciones de la ecuación homogénea

R(x) es linealmente dependiente de las soluciones de la ecuación homogénea

EJEMPLO 1:

R(x) es linealmente independiente de las soluciones de la ecuación homogénea

$y'' + y' - 6y = 3x - 2$ R(x)= $3x - 2$ polinomio de grado 1

- **Cálculo de yc:**

  $y'' + y' - 6y = 0$ su ecuación característica es $m^2 + m - 6 = 0$

  las raíces de esta ecuación son $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$ raíces reales distintas

  La solución general de la homogénea es $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

- **Cálculo de yp:**

En la solución general tenemos dos funciones exponenciales, el cociente de estas funciones con R(x) es distinto de constante. Proponemos una solución del mismo tipo que R(x) es decir un polinomio de grado uno con coeficientes indeterminados:

$y_p = a\,x + b \rightarrow$ ahora tenemos dos coeficientes indeterminados

Si $y_p = a\,x + b$ es solución debe verificar la ecuación diferencial: **$y'' + y' - 6y = 3x - 2$**

$(a\,x + b)'' + (a\,x + b)' - 6\,(a\,x + b) = 3x - 2$

Calculamos las derivadas:

$(a\,x + b)' = a$

$(a\,x + b)'' = 0$

Reemplazamos: $a - 6ax - 6b = 3x - 2$ ordenamos para comparar los términos semejantes

Ordenamos: $-6ax + (a - 6b) = 3x - 2$

Comparamos: $-6ax = 3x \rightarrow -6a = 3$ de donde **$a = -\frac{1}{2}$**

$$a - 6b = -2$$

$$-1/2 - 6b = -2 \rightarrow b = \tfrac{1}{4}$$

Vemos que quedaron determinados los coeficientes a y b

la solución particular de la ecuación no homogénea es $y_p = -1/2\,x + 1/4$

La solución general es:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2\, e^{-3x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$$

EJEMPLO 2:

R(x) es linealmente dependiente de una de las soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + 3y' = 8x + 5$$

- **Cálculo de yc:**

$y'' + 3\,y' = 0$ su ecuación característica es $m^2 + 3m = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = 0$ y $m_2 = -3$ raíces reales distintas

La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1 + c_2\, e^{-3x}$

Si observamos la ecuación diferencial, vemos que no figura el término sin derivar, cuando esto ocurre una de las raíces es cero, lo que produce un término constante en la solución de la ecuación homogénea asociada

- **Cálculo de yp:**

El segundo miembro es un polinomio, para determinar y_p debemos tener en cuenta que y_c contiene al término constante, si proponemos un polinomio de grado 1 se va a repetir este término, en este caso para que sean linealmente independientes debemos multiplicar la solución propuesta por x. Si multiplicamos por x, el polinomio resultante será de grado 2, proponemos:

$$\mathbf{y_p = x\,(ax+ b) = a\,x^2 + bx}$$

Reemplazamos y_p en la ecuación diferencial: $\mathbf{y'' + 3y' = 8x + 5}$

$(ax^2+ bx)'' + 3\,(ax^2+ bx)' = 8x + 5$

$y = a\,x^2 + bx$

$y' = 2a\,x + b$

$y'' = 2a$

$(2\,a) + 3(2ax+b) = 8x+5$

Agrupamos y ordenamos:

$2\,a + 6ax + 3b = 6ax + (2\,a+3b) = 8x + 5$

Comparando:

$6ax = 8x \rightarrow 6\,a = 8 \rightarrow a = 4/3$

$2\,a + 3\,b = 5$

$2.4/3 + 3b = 5 \rightarrow b = 7/9$

nos queda: $y_p = 4/3\,x^2 + 7/9\,x$

La solución general es:

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2\,e^{-3x} + \frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{9}x}$$

c) *R(X) ES UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA:*

Cuando el segundo miembro es una función trigonométrica sen kx, cos kx proponemos como solución

$$\mathbf{y_p = A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}\,(kx)}$$

Cuando el segundo miembro es una función trigonométrica sen kx, cos kx proponemos como solución

$$\mathbf{y_p = A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}\,(kx)}$$

pero esta puede variar según las raíces de la homogénea

- Si la ecuación característica de la ED homogénea asociada tiene soluciones reales distintas o iguales, la solución propuesta para la no homogénea es

  y_p **= A cos (kx) + B sen (kx)**

- Si la ecuación característica de la ED homogénea asociada tiene soluciones complejas conjugadas de la forma z= a ± b j, y b ≠ k, entonces la solución propuesta para la no homogénea es y_p **= A cos (kx) + B sen (kx)**
- Si la ecuación característica de la ED homogénea asociada tiene soluciones complejas conjugadas de la forma z= a ± b j, y b = k, entonces la solución propuesta para la no homogénea es y_p **= A x cos kx + B x sen kx** (es decir se multiplica por x)

EJEMPLO 1:

R(x) es linealmente independiente de las soluciones de la ecuación homogénea

y’’ – 4 y’ –5y = 5 cos x   k = 1

- **Cálculo de yc:**

  y’’ – 4y’- 5y = 0 su ecuación característica es $m^2 - 4m - 5 = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = 5$ y $m_2 = -1$ raíces reales distintas

La solución general de la homogénea es:

$$yc = c_1\, e^{5X} + c_2\, e^{-X}$$

- **Cálculo de yp:**

Proponemos y_p = A cos x + B sen x **vemos que la solución propuesta es una combinación de las dos funciones**, en este ejemplo k=1

Si y_p es solución, deberá verificar la ecuación y’’ – 4y’- 5y = 0

calculemos las derivadas:

y_p = A cos x + B sen x y'_p = -A sen x + B cos x y''_p = -A cos x - B sen x

Reemplazamos

(A cos x + B sen x)’’ – 4 (A cos x + B sen x)’ – 5(A cos x + B sen x) = 5 cos x

-A cos x – B sen x + 4A sen x –4 B cos x – 5A cos x – 5 B sen x = 5 cos x

como se trata de determinar los coeficientes, sacamos igual que en el ejemplo anterior, factor común :

cos x (-A –4B –5A) + **sen x** (-B + 4A –5B) = 5 cos x

Como el segundo miembro no contiene la función sen x, deberá ser:

$$\begin{cases} -B + 4a - 5B = 0 \\ -A - 4B - 5A = 5 \end{cases}$$

resolvemos el sistema $\begin{cases} 4A - 6B = 0 \\ 6A - 4B = 5 \end{cases}$

nos queda $A = -15/26$ y $bB = -5/13$

entonces $y_p = -15/26 \cos x - 5/13 \operatorname{sen} x$

La solución general es:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} - \frac{15}{26}\cos(x) - \frac{5}{13}\operatorname{sen}(x)}$$

EJEMPLO 2:

R(x) es linealmente dependiente de una de las soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x \qquad k = 2$$

- **Cálculo de yc:**

$y'' + 4y = 0$ su ecuación característica es $m^2 + 4 = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = 2j$ y $m_2 = -2j$ raíces imaginarias

La solución general de la homogénea es:

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x \qquad \text{aquí vemos que} \quad b = 2 \ \text{y} \ k = 2$$

- **Cálculo de yp:**

Si proponemos $y_p = A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$ la solución propuesta es linealmente dependiente de la solución de la homogénea, por lo tanto **multiplicamos por x la solución y_p**

$y_p = A\, x \cos 2x + B\, x \operatorname{sen} 2x$

$y'_p = A \cos 2x - 2A\, x \operatorname{sen} 2x + B \operatorname{sen} 2x + 2B\, x \cos 2x$

$y'_p = -2A \operatorname{sen} 2x - 2A \operatorname{sen} 2x - 4A\, x \cos 2x + 2B \cos 2x + 2B \cos 2x - 4Bx \operatorname{sen} 2x$

Derivamos y reemplazamos:

$-2A \operatorname{sen} 2x - 2A \operatorname{sen} 2x - \mathbf{4A\, x \cos 2x} + 4B \cos 2x - 4Bx \operatorname{sen} 2x + 4A\, x \cos 2x + \mathbf{4B\, x \operatorname{sen} 2x} = 3 \operatorname{sen} 2x$

Los términos rojos se cancelan y los celestes también, nos queda

$-4A \operatorname{sen} 2x + 4B \cos 2x = 3 \operatorname{sen} 2x$

como en el segundo miembro no aparece la función cos 2x, deberá ser b = 0, nos queda:

$-4A \operatorname{sen} 2x = 3 \operatorname{sen} 2x \rightarrow -4A = 3 \quad \therefore A = -3/4$

La solución general es:

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x) - \frac{3}{4} x.\cos(2x)$$

Las tres funciones obtenidas son linealmente independientes.

En general si en la solución particular aparece una función, que también es solución del homogéneo, debe multiplicarse por x

R(x)	Raíces m_1 , m_2	Solución propuesta y_p
x^n	$m_1 \neq m_2$	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
x^n	$m_1 = m_2$	$x (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$
cos k x o sen k x	reales $m_1 \neq m_2$ o $m_1 = m_2$	A cos k x + B sen k x
cos k x o sen k x	$m_1 = a + b\,j$ $m_2 = a - b\,j$ si $k \neq b$	A cos k x + B sen k x
cos k x o sen k x	$m_1 = a + j\,b$ $m_2 = a - j\,b$ si $k = b$	x (A cos k x + B sen k x)
e^{ax}	$m_1 \neq m_2$ si $a \neq m_1$ y $a \neq m_2$	$A\,e^{ax}$
e^{ax}	$m_1 \neq m_2$ si $a = m_1$ o $a = m_2$	$A\,x\,e^{ax}$
e^{ax}	$m_1 = m_2$ si $a \neq m_1$	$A\,e^{ax}$
e^{ax}	$m_1 = m_2$ si $a = m_1$	$A\,x^2 e^{ax}$

2) *Método de variación de parámetros*

Este método se puede aplicar sin importar la naturaleza de R(x), recordemos que en el método anterior tenía restricciones dado que no se puede aplicar a una función cuya derivada no sea del mismo tipo.

El método consiste en reemplazar en la solución complementaria (solución de la homogénea) las constantes c_1 y c_2 por funciones escalares que llamaremos $v_1(x)$ y $v_2(x)$.

Al reemplazar las constantes por funciones, obtenemos una solución particular de la ecuación, por eso el método recibe el nombre de variación de constantes o parámetros.

Llamamos y_p a esta nueva combinación.

$$y_p = v_1\, y_1 + v_2\, y_2 \quad \text{(son todas funciones de x)}$$

Para conocer y_p, debemos hallar las funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$.

Al reemplazar la solución particular en la ecuación diferencial, nos queda un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas **son las derivadas de las funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$**. Como tenemos dos funciones desconocidas, necesitamos dos condiciones que deben cumplir v_1 y v_2

La solución propuesta será solución si se cumplen las condiciones:

$$\begin{cases} v_1'\, y_1 + v_2'\, y_2 = 0 \\ v_1'\, y_1' + v_2'\, y_2' = R(x) \end{cases}$$

Donde: v'_1 y v'_2 son las derivadas de las funciones desconocidas (incógnitas)

y_1 e y_2 son las soluciones de la ecuación homogénea asociada

y'_1 e y'_2 son las derivadas de las soluciones de la ecuación homogénea asociada

Si el sistema se resuelve por el método de determinantes queda:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$v_1' = \frac{-y_2 R(x)}{W(x)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 R(x)}{W(x)}$$

Donde W(x) es el wronskiano del sistema:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = W$$

NOTA: El Wronskiano se usa para determinar la dependencia o independencia lineal de varias funciones. Si W=0 significa que las funciones son linealmente dependientes

Para despejar las funciones, se debe integrar

$$\boxed{v_1(x) = \int \frac{-y_2(x)R(x)dx}{W(x)}} \quad \text{y} \quad \boxed{v_2(x) = \int \frac{y_1(x)R(x)dx}{W(x)}}$$

Luego la solución general será: $y = y_c + y_p$

$$y = \boxed{C_1.y_1 + C_2.y_2} + \boxed{v_1.y_1 + v_2.y_2}$$

EJEMPLO 1:

$$y'' + y = tg\ x$$

- **Cálculo de yc:**

Ecuación característica $m^2 + 1 = 0$

Raíces: $m_1 = j$ y $m_2 = -j$ son imaginarias a=0 y b=1

por lo tanto la solución complementaria es:

$$y_c = c_1 \cos x + c_2\ \text{sen}x.$$

siendo $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \text{sen } x$.

- **Cálculo de yp:**

Proponemos como solución $y_p = v_1 \cos x + v_2\ \text{sen } x$.

Armamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} v'_1\, y_1 + v'_2\, y_2 = 0 \\ v'_1\, y'_1 + v'_2\, y'_2 = R(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x\ v'_1 + \text{sen } x\ v'_2 = 0 \\ -\text{sen } x\ v'_1 + \cos x\ v'_2 = tg\ x \end{cases}$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & senx \\ tgx & cosx \end{vmatrix}}{W} = \frac{-tgx.senx}{W} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -senx & tgx \end{vmatrix}}{W} = \frac{tgx.cosx}{W}$$

Siendo: $W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

$v_2' = \cos x \,.\, tg\, x$ integramos $v_2 = \int \cos x\, tg\, x\, dx = -\cos x$

$v_1' = -\operatorname{sen} x.\, tg\, x$ integramos $v_1 = \int -\operatorname{sen}x\, tg\, x\, dx = \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + tg\, x|$

cáculo de la integral de v1:

$$-\int senx.tgx.dx = -\int \frac{sen^2 x}{cosx}.dx = -\int \frac{1-cos^2 x}{cosx}.dx = -\int (secx - cosx).dx$$

$$-\int (secx - cosx).dx = \int cosx.dx - \int secx.dx = senx - \int \frac{secx.(secx+tgx)}{secx+tgx}.dx =$$

$$senx - \int \frac{secx.(secx+tgx)}{secx+tgx}.dx = senx - \int \frac{sec^2 x + secx.tgx}{secx+tgx} = senx - \ln|secx + tgx|$$

La solución particular es $y_p = v_1 \cos x + v_2 \operatorname{sen} x$

$$y_p = [\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + tg\, x|] \cos x + [-\cos x] \operatorname{sen} x$$

La solución general es $y = y_c + y_p$

$y = (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \cos x\, [\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + tg\, x|] - \cos x \operatorname{sen} x$

EJEMPLO 2:

$y'' + y = \sec x$

- **<u>Cálculo de yc:</u>**

La ecuación homogénea asociada es igual que en el caso anterior, su solución es por lo tanto:

$y_c = c_1 \cos x + c_2$ senx.

$y_1 = \cos x$ $\quad$ $y_2 = \text{sen } x$

- **Cálculo de yp:**

$y_p = v_1 \cos x + v_2$ sen x.

armamos el sistema de ecuaciones, para ello calculamos las derivadas de

$\mathbf{y_1 = \cos x} \qquad \mathbf{y_2 = sen\ x}$

$\mathbf{y'_1 = -sen\ x} \qquad \mathbf{y'_2 = \cos x}$

$$\begin{cases} y_1\ v'_1 + y_2\ v'_2 = 0 \\ y'_1\ v'_1 + y'_2\ v'_2 = \sec x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x\ v'_1 + \text{sen } x\ v'_2 = 0 \\ -\text{sen } x\, v'_1 + \cos x\ \ v'_2 = \sec x \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ -\text{sen } x & \cos x \end{vmatrix} \cos^2 x + \text{sen}^2\, x = 1$$

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \text{sen } x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{W} = -\sec x\ .\text{sen } x$$

$$v'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\text{sen } x & \sec x \end{vmatrix}}{W} = \cos x\,.\sec x$$

Para hallar v_1 y v_2 debemos integrar

$$v_1 = -\int \sec x\,.\text{sen } x\, dx = -\int \frac{\text{sen } x}{\cos x}\, dx$$

$$u = \cos x \qquad du = -\text{sen } x\ dx \qquad -\int \frac{-1}{u}\, du = \ln|\cos x|$$

$$v_1 = -\int \sec x\,.\text{sen } x\, dx = \ln|\cos x|$$

$$v_2 = -\int \sec x\,.\cos\ x\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos x}\, dx = x$$

La Solución particular es $\mathbf{y_p = \cos x\,.\ln|\cos x| + x\ sen\ x}$

Luego la solución general es

$$\mathbf{y = y_c + y_p = \boxed{C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x} + \boxed{\cos x \,.\, \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x}}$$