CAPÍTULO I:

I. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

Vemos que es una ecuación lineal respecto de la función desconocida y su derivada. Es lineal ya que ni la función y ni su derivada están elevadas a una potencia distinta de uno.

Las funciones P(x) y Q(x) son funciones continuas de x (la variable independiente de y) en un intervalo, o bien pueden ser constantes.

Si el segundo miembro es Q(x) =0 **la ecuación diferencial se llama** homogénea **en ese caso es posible resolverla** separando variables**.**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

Separamos variables $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)$

Si integramos esta expresión respecto de x obtenemos:

$$ln|y| = -\int P(x)\,dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx+C} = k\,e^{-\int p(x)dx} \quad \text{SG}$$

Vemos que su solución es una función exponencial.

Si Q(x) es distinta de 0 no se puede resolver aplicando separación de variables. Buscaremos una forma sencilla de evaluarla para poder despejar la función desconocida.

Método del Factor integrante

Para resolver la ecuación lineal de primer orden no homogénea, usamos un factor integrante u(x) tal que el primer miembro de la ED multiplicado por ese factor sea igual a la derivada del producto u(x) por y(x). Si esto es posible nos quedaría $\frac{d[u(x)y(x)]}{dx}$ si integramos esta expresión respecto de x resulta:

$\int \frac{d}{dx}[u(x).y(x)]dx = u(x).y(x)$ al integrar el primer miembro, obtenemos el producto u(x).y(x) de el cual podemos despejar la función desconocida y(x).

Cálculo de u(x):

Debemos encontrar la función desconocida u(x), para ello multiplicamos miembro a miembro en la ecuación:

$$u(x)\frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y = Q(x)u(x)$$

Trabajamos con el primer miembro:

Queremos hallar una u(x) tal que:

$$u(x)\frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y = \frac{d[u(x)y(x)]}{dx}$$

Desarrollamos la derivada del producto $\frac{d[u(x)y(x)]}{dx} = \frac{du(x)}{dx}y(x) + u(x)\frac{dy(x)}{dx}$

Una forma más sencilla de escribir estas ecuaciones es:

u(x).y'(x) + u(x) P(x) y(x) = [u(x) y(x)]' $\boxed{1}$

$[\,u(x).y\,(x)]' = u'(x).y(x) + u(x).y'(x)$ $\boxed{2}$ (notación que utilizaremos en el resto del desarrollo)

Si reemplazamos $\boxed{1}$ en $\boxed{2}$ vemos que:

$u(x)\,y'(x) + u(x)\,P(x)\,y(x) = u'(x)\,y(x) + u(x)\,y'(x)$

Cancelando los términos $u(x)y'(x)$, nos queda: $u(x)\,P(x)\,y(x) = u'(x)\,y(x)$

Agrupamos y sacamos factor común $y(x)$.

$y(x)[\,u'(x) - u(x)\,P(x)] = 0$

Como $y(x)$ es distinta de cero por ser la solución, deberá ser $u'(x) - u(x)\,P(x) = 0$ que es una ecuación diferencial homogénea, cuya solución vimos que es la función exponencial.

$$\boxed{u(x) = e^{\int P(x)dx}}$$

Siendo $u(x)$ el factor integrante buscado

Ejemplo 1:

Hallar la SG de $y' + 2y = 3x$

Para hallar la solución seguiremos los siguientes pasos:

1- Identificamos cual es la función $P(x)$, en el ejemplo es una constante, $P(x) = 2$

2- Calculamos el factor integrante $u(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$

3- Multiplicamos miembro a miembro la ecuación por este factor

$e^{2x}\,y' + 2\,e^{2x}\,y = e^{2x}\,3x$

4- Reconocemos el primer miembro como la derivada de un producto

$e^{2x}\,y' + 2y\,e^{2x} = [e^{2x}\,y]'$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$[\,e^{2x}\,y]' = e^{2x}\,3x$

5 –Integramos miembro a miembro respecto de x:

$$\int [e^{2x}y]'\,dx = \int e^{2x}\,3x\,dx$$

teniendo en cuenta que $[e^{2x}\,y]'\,dx = d\,[e^{2x}\,y]$ nos queda:

$$\int d[e^{2x}y] = \int e^{2x}\,3x\,dx \qquad \text{A}$$

Resolvemos la integral de ambos miembros

en el segundo miembro aplicamos integración por partes: $3\int e^{2x}.\,x\,dx$

$$u = x \qquad du = 1\,dx \qquad dv = e^{2x}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}\,e^{2x}$$

$$3\int e^{2x}.\,x\,dx = x.\frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = x.\frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} + C$$

Reemplazando en A , no queda:

$e^{2x}\,y(x) = 3/2x\,e^{2x} - 3/4\,e^{2x} + c$

depejamos y

$y(x) = e^{-2x}\,(3/2x\,e^{2x} - 3/4\,e^{2x} + c)$

$y(x) = 3/2x - 3/4 + ce^{-2x}$ Solución general

Ejemplo 2:

Hallar una solución de la ecuación diferencial: $y' - 3y = e^{2x}$

que verifique la condición $y(0) = 3$

Si comparamos con la ecuación lineal de primer orden vemos que $P(x) = -3$

El factor integrante será: $u(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

Multiplicamos miembro a miembro por e^{-3x}

$e^{-3x}\,y' - e^{-3x}\,3\,y = e^{-3x}\,e^{2x}$

$[e^{-3x}\,3\,y]' = e^{-x}$

Integramos: $\int [\,e^{-3x}y(x)]'\,dx = \int e^{-x}\,dx$

Obtenemos $e^{-3x}y(x) = -e^{-x} + c$

Despejamos $y(x) = -\,e^{3x}\,e^{-x} + c\,e^{3x} = -\,e^{2x} + c\,e^{3x}$

$y(x)= - e^{2x} + c\ e^{3x}$ Solución general

La solución particular la obtenemos reemplazando x por 0 e y por 3

$y(0) = -1 + c = 3$ despejamos c y obtenemos $c = 4$

$y(x) = - e^{2x} + 4\ e^{3x}$ Solución particular

Ejemplo 3:

$$y' + \frac{3x}{x^2+1} y = \frac{6x}{x^2+1}$$

$P(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ calculamos $u(x) = e^{\int \frac{3x}{x^2+1}dx}$ aplicando el método de sustitución

$u(x) = e^{\ln\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$

Multiplicamos miembro a miembro por u(x)

$$\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} y' + \frac{3x}{x^2+1}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} y = (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{6x}{x^2+1}$$

$$\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} y' + 3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} y = (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{6x}{x^2+1}$$

Vemos que el primer miembro corresponde a la derivada del producto entre el factor integrante y la función y(x), integramos esta expresión

$$\int [y.\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}]'\,dx = \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{6x}{(x^2+1)}\,dx$$

La integral del segundo miembro la resolvemos aplicando el método de sustitución y obtenemos:

$$y\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = 2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

despejamos y: $\boxed{y = 2 + \left(x^2+1\right)^{\frac{-3}{2}} c}$ Solución general

II- ECUACIONES REDUCIBLES A LINEALES

Una ecuación diferencial no lineal muy conocida, que se reduce a una lineal es la ecuación **diferencial de Bernoulli** $y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^{n}$

Para resolver esta ecuación haremos una sustitución que nos permitirá resolverla como una ecuación lineal mediante el factor integrante.

1) **En la ecuación** $y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^{n}$

   dividimos miembro a miembro por y^{n}

   $y'y^{-n} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x)$ $\boxed{1}$

2) **Hacemos una sustitución:** $z = y^{1-n}$ **si la nueva variable es z, para reemplazarla en la ecuación diferencial debemos calcular su derivada.**

   $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ **hemos aplicado la regla de la cadena dado que z = f(y) e y = f(x)**

   $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ **una notación más sencilla es** $z' = (1-n)\, y^{-n}\, y'$

3) **Remplazamos en la ecuación** $\boxed{1}$

   $\frac{1}{1-n} z' + P(x)\, z = Q(x)$

4) **) Multiplicamos ambos miembros por (1-n) nos queda:**

   $z' + (1-n).P(x).z = (1-n).Q(x)$

   Ecuación lineal de primer orden, donde z es la fc incógnita, donde u(x) es

   $e^{\int (1-n).P(x).dx}$

5) **La resolvemos utilizando el método del factor integrante, su solución será de la forma:**

   $z = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx}\, Q(x)\, dx$

de la sustitución $z = y^{(1-n)}$ despejamos y :

$$\boxed{y = z^{\frac{1}{1-n}}}$$

Ejemplo: $x.y' + x^2 y = x^2 y^3$

1) dividimos cada miembro por x, para llevarla a la forma normal (coeficiente de la derivada de mayor orden es 1)

   $y' + x\, y = x\, y^3$

2) dividimos por y^3

   $y^{-3} y' + x\, y^{-2} = x$

3) Hacemos la sustitución $z = y^{-2}$

   Calculamos $z' = -2\, y^{-3} y'$ si comparamos con el primer término del primer miembro vemos que: $y^{-3} y' = -\frac{1}{2} z'$

4) Reemplazamos en la ecuación

   $\frac{-1}{2} z' + x\, z = x$ y multiplicamos por –2

   $z' - 2xz = -2x$ Ecuación lineal

5) Resolvemos la ecuación: factor integrante $u(x) = e^{\int -2x\, dx} = e^{-x^2}$

   $e^{-x^2} z' - 2x\, e^{-x^2} .z = -2x e^{-x^2}$ la expresamos como derivada de un producto

   $[e^{-x^2} z]' = -2x e^{-x^2}$

5) Integramos miembro a miembro respecto de x y obtenemos:

   $e^{-x^2} z = e^{-x^2} + c$

   Despejamos $z = 1 + e^{x^2} C$

6) si $z = y^{-2}$ resulta: $\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{z}} = \left(1 + ce^{x^2}\right)^{\frac{-1}{2}}}$ Solución general