CÁLCULO II Ciclo lectivo 2022	UNIVERSIDAD DE MENDOZA FACULTAD DE INGENIERÍA

CAPÍTULO IV - PARTE D: EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

✓ ***Extremos absolutos***

Definición:

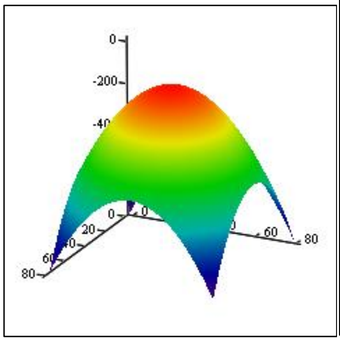
Sea z = f(x,y) una función de dos variables definida en una región cerrada y acotada S del plano x-y, y (a,b) un punto de S

f(a,b) es máximo absoluto en S ⇔ f(a,b) ≥ f(x,y) $\forall (x,y) \in S$

f(a,b) es mínimo absoluto en S ⇔ f(a,b) ≤ f(x,y) $\forall (x,y) \in S$

Observe que el máximo absoluto , es el mayor valor que toma la función en toda la región

Observe que el mínimo absoluto , es el menor valor que toma la función en toda la región

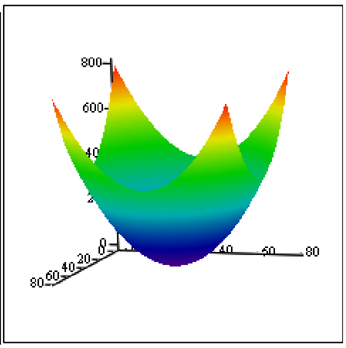


M1

$z= 4-x^2-y^2$

Tiene un máximo absoluto en (0,0)

f(0,0) es el máximo absoluto de f en S



M1

$z = x^2 + y^2$

Tiene un mínimo absoluto en (0,0)

f(0,0) es el mínimo absoluto de f en S

Teorema de los valores extremos

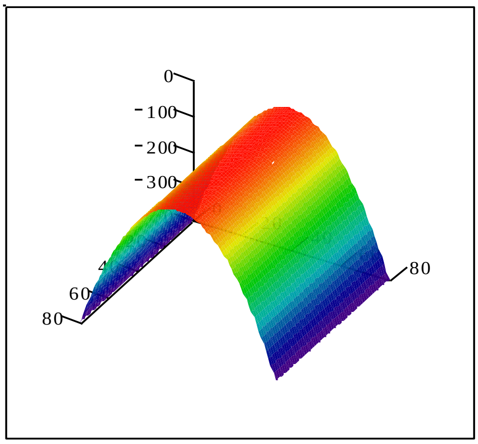
Enunciado:

Sea f(x,y) continua en una región S cerrada y acotada del plano x – y

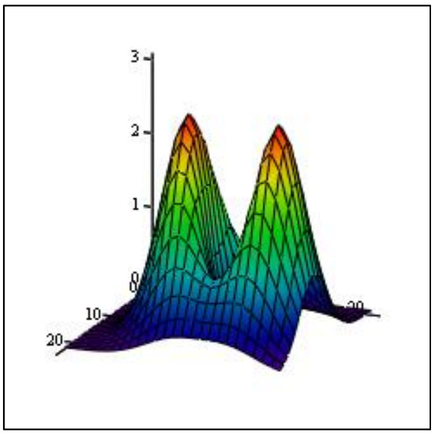
a) **Existe al menos un punto en S donde f alcanza un mínimo absoluto**
b) **Existe al menos un punto en S donde f alcanza un máximo absoluto**

Aclaraciones:

Observe que si el extremo absoluto existe, este es único. Pero puede pasar, que lo tome en varios puntos del dominio:



M2



M3

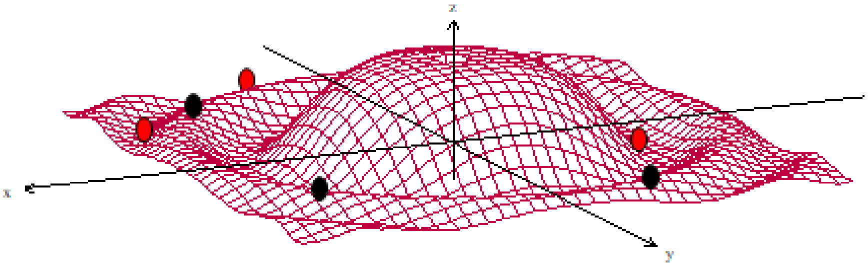
✓ ***Extremos locales***

Definición:

Sea f(x,y) una función definida en una región R que contiene al punto (a.b) en su interior

a) f tiene un mínimo local en (a,b) si f(x,y) ≥ f(a,b) para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a (a,b)

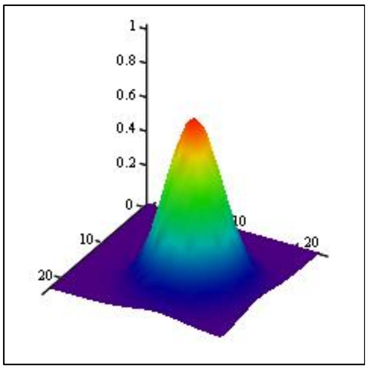
b) f tiene un máximo local en (a,b) si f(x,y) ≤ f(a,b) para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a (a,b)



Hemos marcado sólo algunos puntos, en los que se observa que hay un máximo local, ya que hay valores de la función que son mayores. Con los puntos rojos se indican algunos mínimos locales. En el (0,0) habría un máximo absoluto y local

Aclaración:

- **Si un extremo absoluto se presenta en un punto interior al dominio, es también local.**

1 

M2

$z = e^{-1(x^2+y^2)}$

En (0,0) hay un máximo absoluto y local. Ese valor es

Condición necesaria pero no suficiente para la existencia de extremos locales

Si la función z= f(x,y) tiene un extremo local en el punto (a,b) , y en dicho punto existen las derivadas parciales, entonces ambas derivadas parciales son nulas

Demostración:

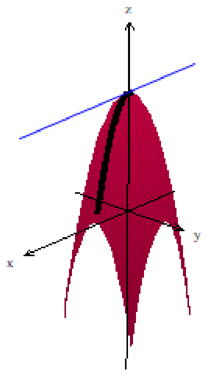
Intersectamos a la superficie con un plano paralelo al x-z, que contenga al punto (a,b)

La traza de la superficie, con ese plano, es una curva cuya ecuación es f(x,a) = g(x) (curva negra sobre la superficie)

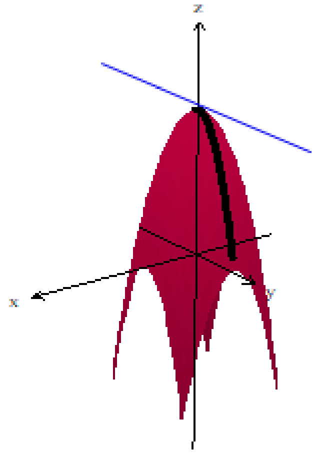
Como la superficie es diferenciable en (a,b), la curva g(x) es derivable, y si en dicho punto hay un extremo la derivada de g en a debe valer cero, es decir g'(a)=0

Por lo tanto g' (a) = $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$

Observe que la recta tangente es paralela al plano x - y



De igual manera, pero buscando la traza con un plano paralelo al z –y , se puede demostrar que $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$

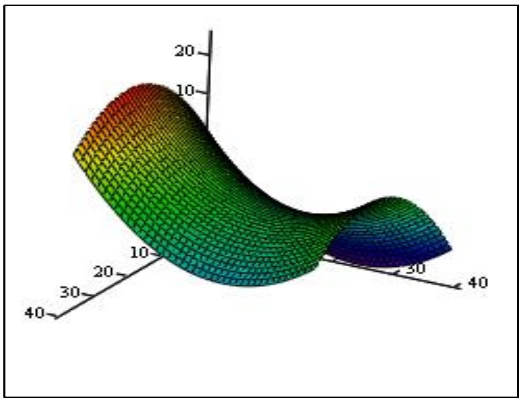


Observe que esta condición **no es suficiente** por que, que ambas derivadas parciales sean nulas no garantiza que tenga un extremo.

Por ejemplo $z = y^2 - x^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$



M3

En el punto (0,0) se cumple la condición

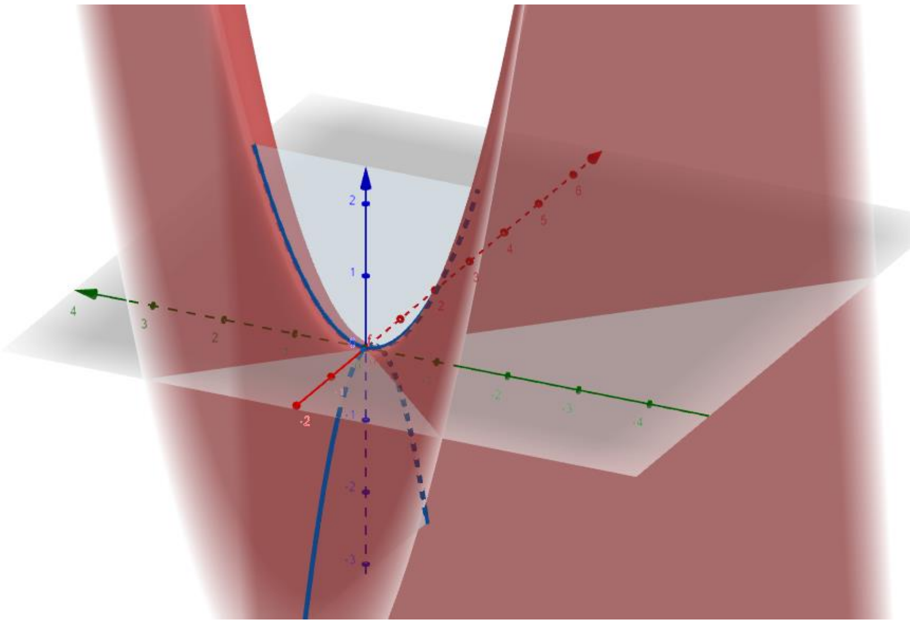
Pero no hay ni máximo ni mínimo, según lo

Indican las trazas de la superficie

Traza con el plano x-z: $z = - x^2$

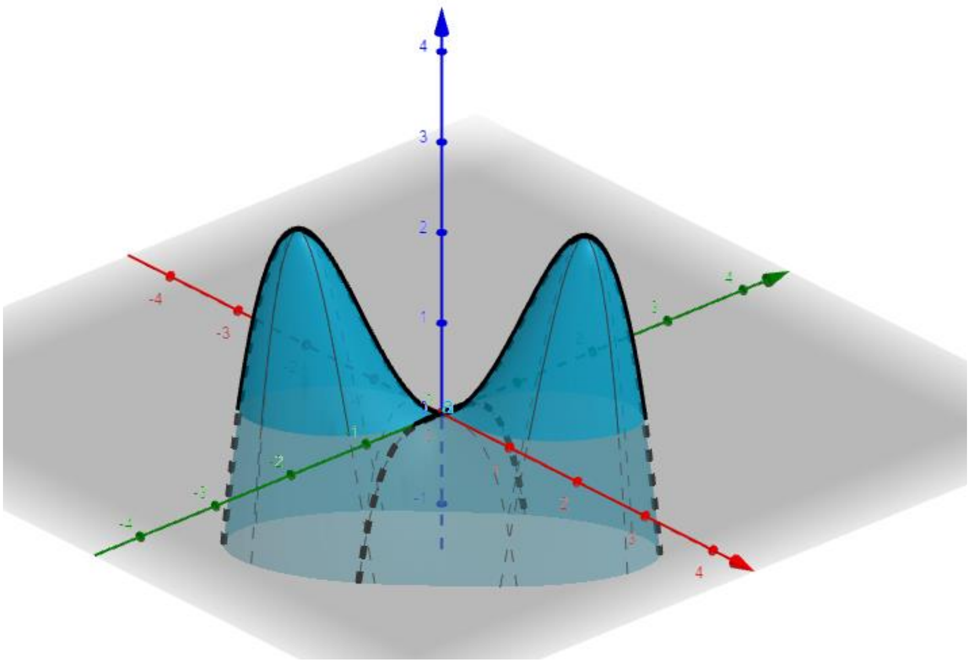
Traza con el plano y-z: $z = y^2$

Este punto se llama **PUNTO SILLA**



Otro ejemplo de punto silla

$$z = 4\,x\,y - x^4 - y^4$$



PUNTO CRÍTICO

Definición:

Sea z= f(x,y) una función definida en una región abierta S que contiene el punto (a,b). Dicho punto es punto crítico se si de alguna de las siguientes condiciones:

a) $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0$

b) Que alguna o ambas derivadas parciales no existan

Los extremos locales de una función solo se pueden presentar en puntos críticos

Ejemplo: calcular los puntos críticos de las siguientes funciones:

A**) z = x^2 + y^2 +2x -6y +6**

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 2x + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 2y - 6 = 0$$

Ambas derivadas parciales deben ser nulas por lo tanto, se plantea un sistema de ecuaciones:

2x + 2 = 0 $\Rightarrow$ x = - 1

2y -6 = 0 $\Rightarrow$ y = 3

Hay un solo punto crítico que es (-1, 3)

B) $\mathbf{z = \sqrt{x^2 + y^2}}$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.2y$$

Ambas derivadas no son nulas en ningún punto, ya que en (0,0) no están definidas pues se anula el denominador. Por lo tanto ese es el único punto crítico.

C) $\mathbf{z = \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2}}$

Para hallar los puntos críticos, calculamos las derivadas parciales y las igualamos a cero

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{0 - 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1.(1 + x^2 + y^2) - y.2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0$$

Nos queda el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1 + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema nos quedan $P_1(0;-1)$ $P_2(0;1)$

D) $z = x^2.y^2$

Buscamos los puntos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 2x.y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 2x^2.y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema vemos que hay infinitos punto críticos ya que todos los puntos de la forma (0,y) o (x,0) se anulan ambas derivadas.

E) z = x+1

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$$

Resolviendo el sistema vemos que no hay ningún punto en el que ambas derivadas se anulan, por lo tanto no tiene puntos críticos

✓ ***CALCULO DE EXTREMOS LOCALES***

a) Por comparación:

La idea es buscar primero los puntos críticos y luego hallar la imagen de esos puntos.
Después comparar ese valor hallado con las imágenes de todos los puntos en un entorno pequeño del punto.

Ejemplo:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

Buscamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2.\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.2x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2.\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.2y = 0$$

Resolviendo nos queda un solo punto crítico: P_c (0,0,0)

Calculamos ahora f(0,0) = 1

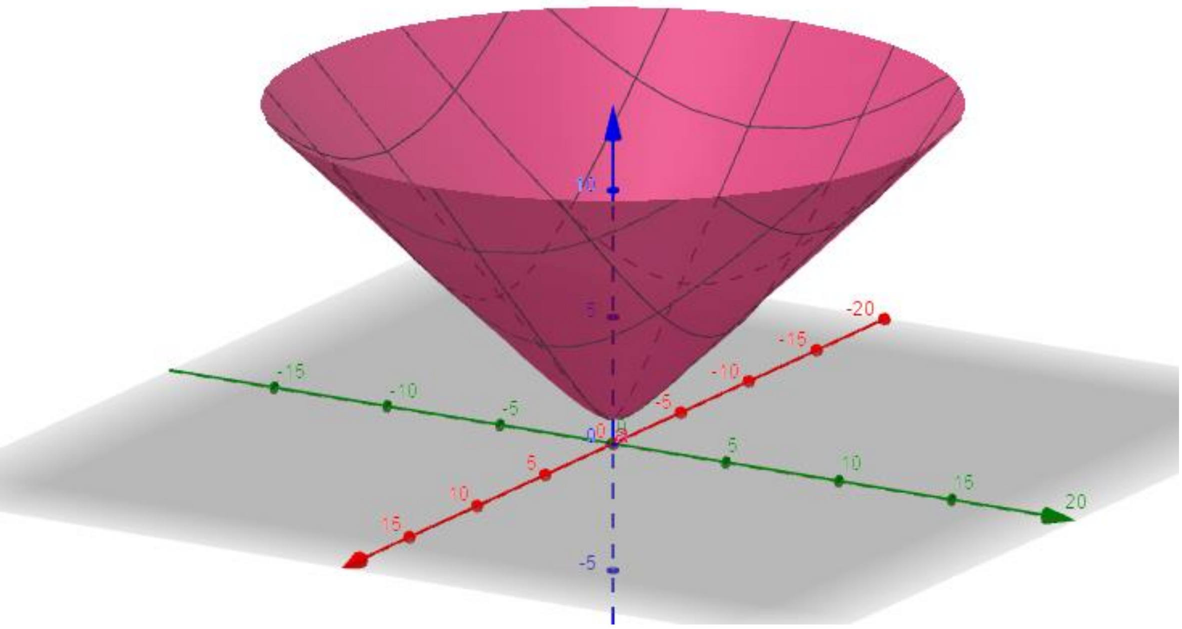
Comparamos :

$\forall(x, y)$ **si (x,y) ≠ (0,0) f(x,y) = $x^2 + y^2 + 1 > 1$**

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 1} > 1$$

Por lo tanto en (0,0) hay un mínimo local y absoluto y su valor es 1

Gráficamente:



b) Criterio de las derivadas segundas: Método del Hessiano

Este criterio se utiliza para determinar si hay extremos locales.

Enunciado:

Sea z=f(x,y) una función con derivadas parciales segundas continuas en un entorno del punto (a,b) y ambas derivadas parciales son nulas en dicho punto (es un punto crítico)

Sea $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2$ **el resultado del siguiente determinante:**

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} = H$$

a) Si H>0 ; y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \Rightarrow f(a,b)\,\text{es mínimo local}$

b) si H>0 ; y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \Rightarrow f(a,b)\,\text{es máximo local}$

c) si H<0 entonces hay un punto silla en (a,b)

d) si H = 0 entonces el criterio no decide

Ejemplo 1:

$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 4y^3 - 4x = 0$$

Resolviendo el sistema nos quedan tres puntos críticos: $P_1\,(0,0)$ $P_2\,(1,1)$ $P_3\,(-1,-1)$

Se arma el determinante :

$$\begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

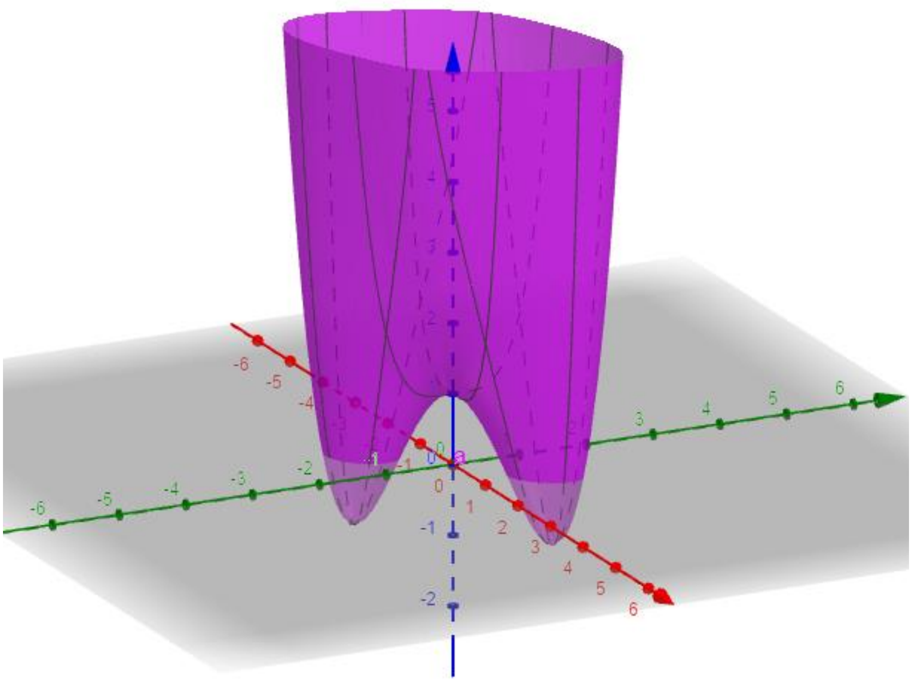
Se calcula en cada punto crítico

En (0,0) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ **hay punto silla**

En (1,1) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0$ **hay un mínimo**

En (-1,-1) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16$ **hay un mínimo**

Observe que para funciones de dos variables se puede dar que tenga dos mínimos y ningún máximo local



Ejemplo 2:

z= x^2 + y^2 +2x -6y +6

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 2x + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 2y - 6 = 0$$

Ambas derivadas parciales deben ser nulas por lo tanto, se plantea un sistema de ecuaciones:

2x + 2 = 0 $\Rightarrow$ x = - 1

2y -6 = 0 $\Rightarrow$ y = 3

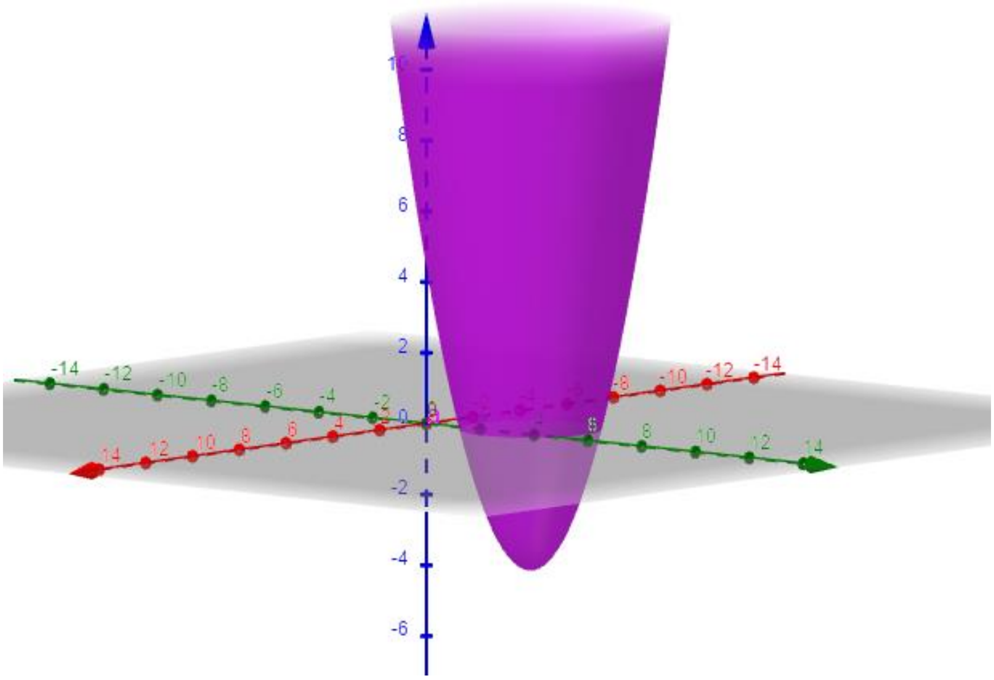
Hay un solo punto crítico que es (-1, 3)

Calculamos el Hessiano

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 2x + 2 \qquad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 2y - 6 \qquad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} = 2$$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ según el criterio aplicado hay un mínimo local en P(-1,3)



Ejemplo 3:

z= $x^2.y^2$

Buscamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 2x.y^2 = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 2x^2.y = 0$$

Resolviendo el sistema vemos que los puntos críticos eran todos los puntos sobre el eje x , y sobre el eje y

Calculamos las derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} = 2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} = 2x^2 \qquad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} = 4xy$$

Armamos el hessiano $\forall (0;y)$

H= $\begin{vmatrix} 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Armamos el hessiano $\forall (x;0)$

H= $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2x^2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Por lo tanto no sirve el método para ningún punto crítico

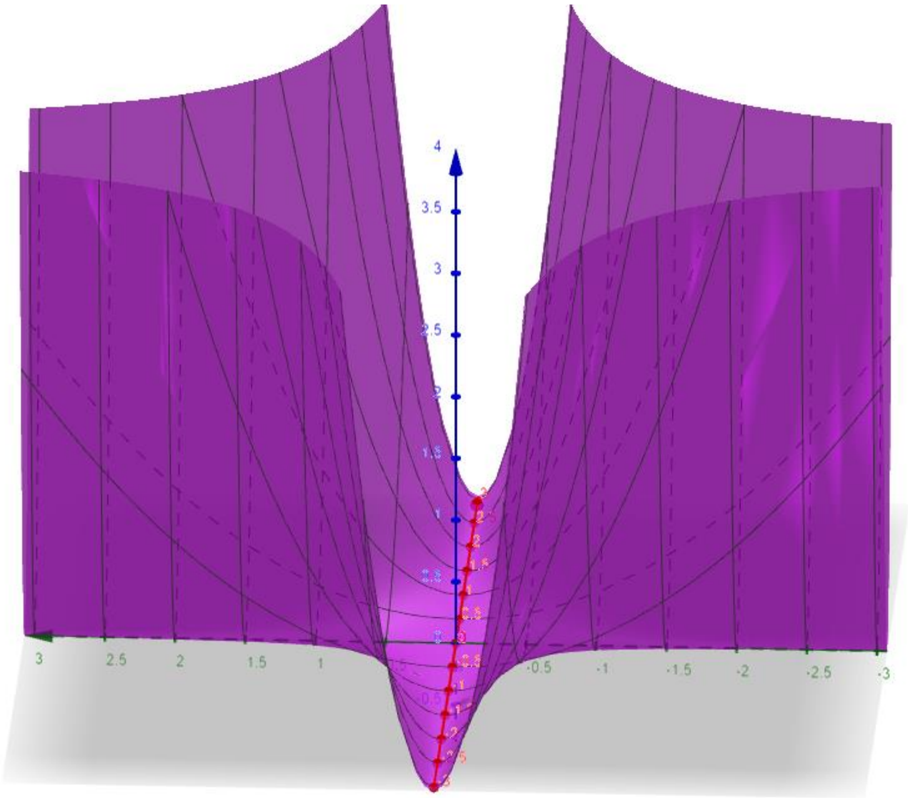
¿Qué podemos hacer?

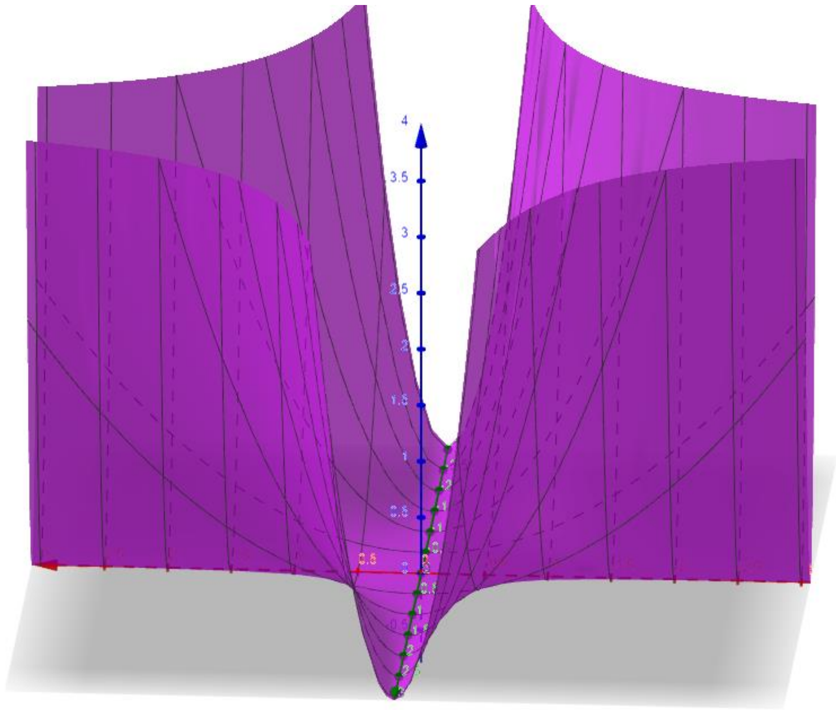
Podemos resolver el problema comparando el valor que la función toma en el punto crítico y en todos los otros puntos:

f(x,0)= 0

f(0,y) = 0

$\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq (\mathbf{x},\mathbf{0})$ **y** $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq (\mathbf{0},\mathbf{y})$ f(x,y) = $x^2 \cdot y^2 > 0$, por lo tanto en todos los puntos críticos hay un mínimo local y absoluto a la vez





Ejemplo 4

$$z = y^2 - x^3$$

Buscamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0$$

Resolviendo el sistema vemos que el único punto crítico es P(0;0)

Calculamos las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} = -6x \qquad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} = 0$$

Armamos el hessiano $\mathbf{P(0;0)}$

H= $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Por lo tanto no sirve el método

Qué podemos hacer?

Por comparación:

Como la función se anula en (0;0), estudiamos el signo de la función en un entorno de éste, por ejemplo en los ejes

$$\mathbf{f(0;y) = y^2 \geq 0}$$

$$\mathbf{f(x;0) = -x^3}$$

Desde el origen, la función crece sobre el eje y, y sobre el eje x decrece hacia la derecha y crece hacia la izquierda. Por lo tanto es un punto silla