Trabajo Práctico 4-Parte C : EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

1. **Calcular los puntos críticos de las siguientes funciones:**
   - a) $z= x^2 + y^2 +2x - 6y + 6$ **(en el apunte de teoría)**
   - b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **(en el apunte de teoría)**
   - c) $z = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$

   Solución:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -10x + 4y + 16 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$x = 8 \quad y = 16$$

   Hay un solo punto crítico P(8;16)

2. **Determinar extremos locales por comparación:**
   - a) $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$ **En la teoría**
   - b) $f(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

   Buscamos primero los puntos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-\left(x^2+y^2\right)}.(-2)x = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{-\left(x^2+y^2\right)}.(-2)y = 0 \end{cases}$$

   Hay un solo punto crítico P(0,0)

3. **Analice los extremos y puntos silla de las siguientes funciones usando el método del Hessiano**
   - a) $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ **(en la teoría)**
   - b) $z = x^2 + y^2 +2x - 6y + 6$ **(en la teoría)**
   - c) $z = x^2.y^2$ **(en la teoría)**
   - d) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$

   Solución

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x + 8 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -10y - 10 = 0 \end{cases}$$ **Punto crítico es P(4;-1)**

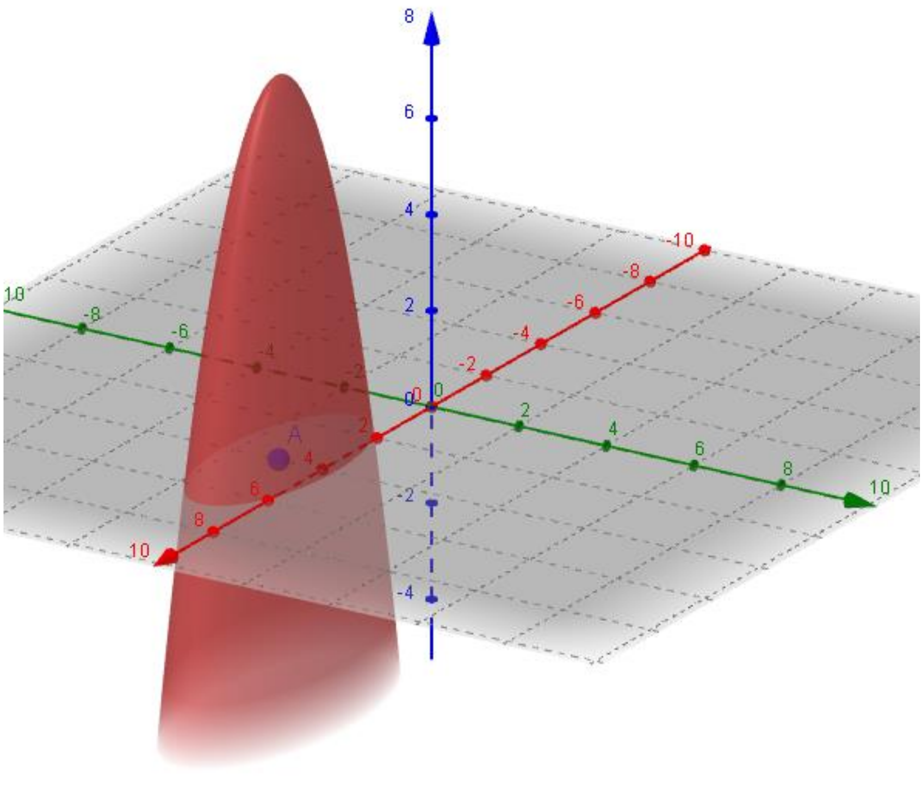
Calculamos ahora las derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Como no queda ninguna varable donde reemplazar las coordenadas del punto crítico , armamos el Hessiano directamente

$$H = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

Y como la derivada segunda de x o de y , son negativas hay un máximo local en ese punto



e) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 + 4y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

Punto crítico son P(0;0) Q(4/3, 4/3)

Calculamos ahora las derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4$$

armamos el Hessiano directamente

En P sería

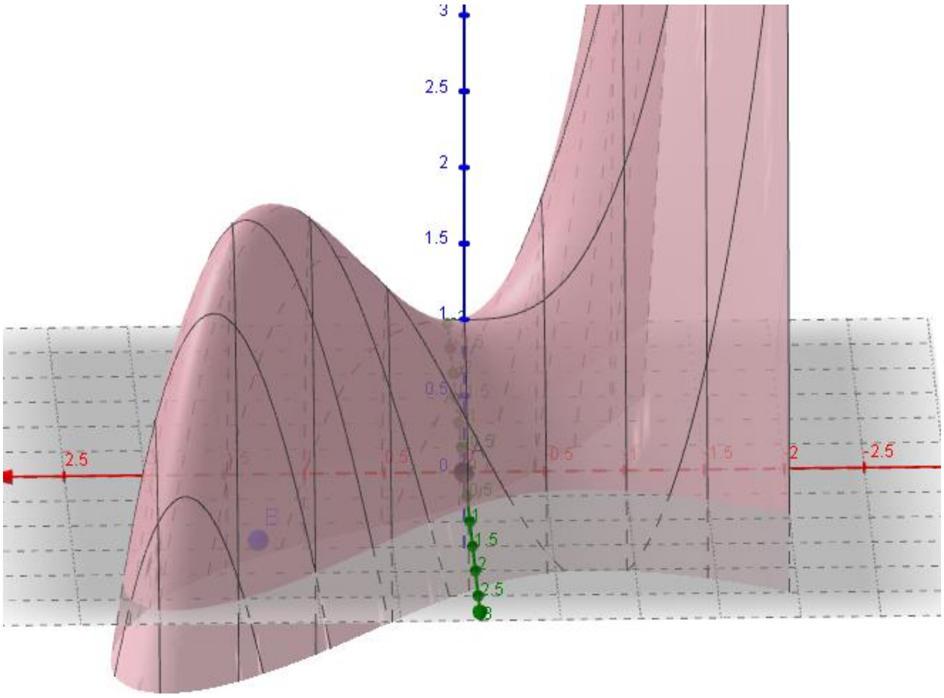
$$H = \begin{vmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -16$$

Por ser negativo hay un punto silla

En Q sería

$$H = \begin{vmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Hay un máximo local



f) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Punto crítico son P(0;0) Q(1,1)

Calculamos ahora las derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$$

armamos el Hessiano directamente

En P sería

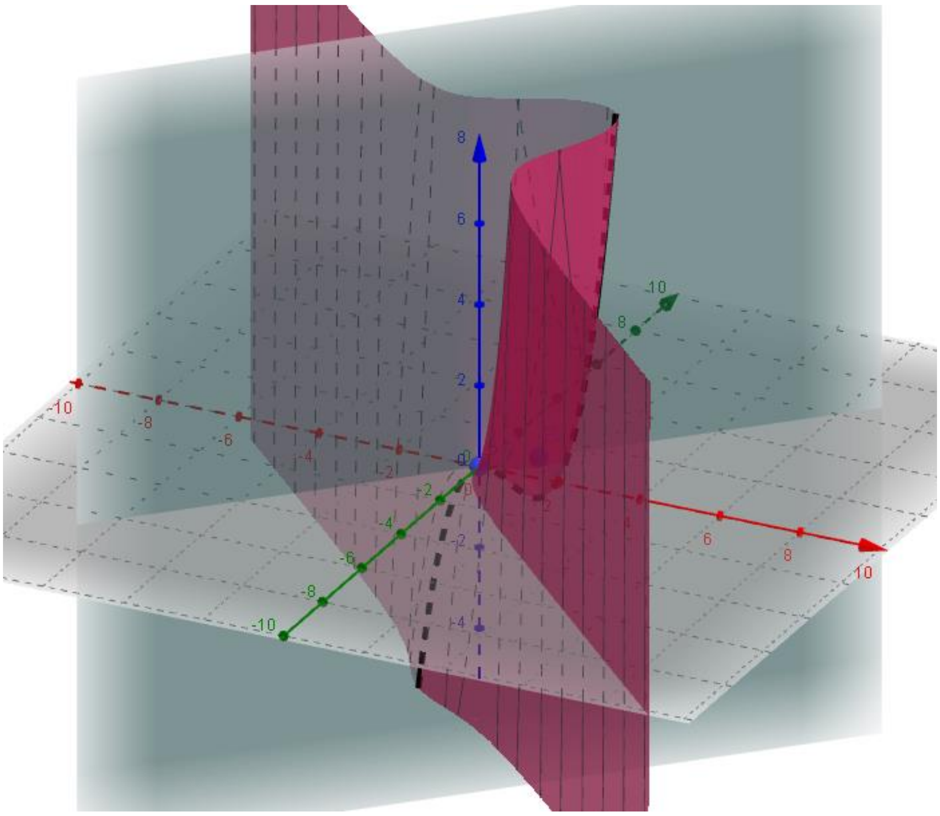
$$H = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

Por ser negativo hay un punto silla

En Q sería

$$H = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$$

Hay un máximo local



g) $f(x,y) = x^3 + y^3$

h) $f(x,y) = 120x + 120y - xy - x^2 - y^2$

i) $f(x,y) = \dfrac{3x^2+1}{2} - x\left(x^2 + y^2\right)$

---

4. Decida si hay un máximo o mínimo relativo, o un punto silla, en el punto crítico (x_0, y_0), o si la información es insuficiente para determinarlo.

a) $g_{xx}(x_0,y_0) = -1$, $g_{yy}(x_0,y_0) = 1$, $g_{xy}(x_0,y_0) = 6$

b) $g_{xx}(x_0,y_0) = -1$, $g_{yy}(x_0,y_0) = -8$, $g_{xy}(x_0,y_0) = 2$

c) $g_{xx}(x_0,y_0) = 4$, $g_{yy}(x_0,y_0) = 9$, $g_{xy}(x_0,y_0) = 6$
