## CAPÍTULO I: ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

## MÉTODOS DE RESOLUCIÓN:

### 1. INTEGRACIÓN DIRECTA:

Este método es el visto en la introducción

**Si la ecuación de primer orden es de la forma** $\frac{dy}{dx}=f(x)$ **, nos basta con integrar ambos miembros de la ecuación para obtener la solución general** $y=\int f(x)dx+c$**.**

### EJERCICIO 1:

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales por integración directa y encontrar la solución particular que satisfaga las condiciones dadas. Verifique reemplazando en la ecuación diferencial

a) $\frac{dy}{dx}=x^2+x-2 \qquad y(0)=2$

b) $\frac{dy}{dx}=\ln x \qquad y(1)=1$

c) $\frac{dy}{dx}=x.(x^2+9)^{1/2} \qquad y(-4)=0$

### 2. SEPARACIÓN DE VARIABLES:

La ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx}=H(x,y)$ se llama **separable, o de variables separables**, si $H(x,y)$ se puede escribir como producto de una función que dependa de la variable x, y otra función que dependa solamente de la variable y, de esta manera podemos escribir $H(x,y)=g(x).\varphi(y)=\frac{g(x)}{f(y)}$ **donde** $\varphi(y)=\frac{1}{f(y)}$

La ecuación diferencial nos queda de la forma $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{f(y)}$

las variables pueden ser separadas de modo que el primer miembro dependa de una de las variables y el segundo miembro de la restante, nos queda:

$$f(y)\frac{dy}{dx}=g(x)$$

Si integramos miembro a miembro obtenemos: $\int f(y)\frac{dy}{dx}dx=\int g(x)dx$

Aclaración: $\frac{dy}{dx}.dx = y'.dx = dy$ por definición de diferencial

La expresamos como: $\int f(y)dy = \int g(x)dx + C$

Si f y g son integrables, y F y G sus primitivas respectivas entonces nos queda:

**F (y) = G(x) + C**

Encontrar la solución es despejar la variable **y** de la función **F (y)**

## EJEMPLO 1:

Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = 6xy$ hallar la solución general

**1-** Separamos variables $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 6x$

**2-** Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por dx

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = 6xdx$ si tenemos en cuenta que $\frac{dy}{dx}dx = y'\,dx = dy$

**3-** Reemplazamos e integramos miembro a miembro

$\int \frac{1}{y}dy = \int 6xdx$ Nos queda **$\ln|y| = 3x^2 + C$**

**4-** Despejamos y

$$y = e^{3x^2+C} = e^{3x^2}e^{C}$$

**Teniendo en cuenta que $e^{C} = k$ , la solución general nos queda:** $y = k\,e^{3x^2}$

En este tipo de ecuaciones diferenciales no siempre es posible despejar la variable dependiente, o resulta complicado hacerlo, la solución general en esos casos estará dada en forma implícita.

## EJEMPLO 2:

Hallar la solución particular de la ecuación diferencia $x^2\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{3y^2+1}$ que verifique la condición inicial **y(2) = 1**

**1-** Separamos variables y multiplicamos miembro a miembro por dx

$$(3y^2+1)\frac{dy}{dx}dx = \frac{x^2+1}{x^2}dx$$

**2-** Integramos $\int$ **(3y²+1) dy** = $\int \frac{x^2+1}{x^2}dx$ nos queda:

$$y^3 + y = \int (1 + \frac{1}{x^2})dx$$

**$y^3 + y = x – 1/x + C$ solución general**

Vemos que no podemos despejar y de la solución general, por lo tanto la dejamos expresada en forma implícita.

**3**- Para obtener la solución particular debemos hallar el valor de C , tal que la solución verifique la condición inicial.

Si reemplazamos **y (2) =1** esto es para **x =2 y =1**,

$$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + C \quad \rightarrow \quad 1^3 + 1 = 2 - \frac{1}{2} + C \quad \rightarrow \quad 2 - 2 + \frac{1}{2} = C$$

resulta **C = 1/2**

**$y^3 + y = x – 1/x +1/2$ solución particular**

## EJEMPLO 3:

Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $\mathbf{x\,y\,dx + e^{-x^2}(y^2-1)\,dy = 0}$ que verifique la condición inicial **y(0) = 1**

$$\mathbf{e^{-x^2}(y^2-1)\,dy = x\,y\,dx =}$$

$$\mathbf{\frac{(y^2-1)}{y}\,dy = x\,e^{x^2}\,dx}$$

$$\mathbf{\int (y - \frac{1}{y})\,dy = \int x\,e^{x^2}\,dx} \quad (\text{por sustitución})$$

$$\mathbf{\frac{y^2}{2} - \ln|y| = \frac{-1}{2}\,e^{x^2} + C}$$

$\mathbf{(y^2 - \ln|y| + e^{x^2} = C}$ **SG**

Para hallar la particular reemplazamos a x por 0 , y a la y por 1

**1+0+1=C → C = -2**

Reemplazando $\mathbf{(y^2 - \ln|y| + e^{x^2} = -2}$ **SP**