CAPÍTULO I: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

TRABAJO PRÁCTICO N°1 - B

Modelos matemáticos con aplicación a ciencias experimentales

En muchas ocasiones se desea describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos fenómenos de la vida real.

La descripción matemática de una sistema de fenómenos se llama modelo matemático, y se construye con ciertos objetivos, como el de entender qué ocurrirá en el futuro o qué ocurrió en el pasado.

Para la realización de un modelo matemático sobre un sistema, primero hay que identificar todas las variables que intervienen, y posteriormente de qué manera estas variables se relacionan.

A continuación estudiaremos algunos modelos matemáticos clásicos en diferentes áreas de las Ciencias Experimentales

➢ Modelos de población

Supongamos que P (t) es el número de individuos de una población (humanos, insectos, bacterias) en un tiempo t, que tiene tasas constantes de natalidad y mortandad, que indicaremos β y α respectivamente.

Supóngase que se desea conocer la tasa de cambio de una población con respecto al tiempo, (sabemos que los índices de natalidad y mortandad son constantes y la variación será proporcional al tamaño de la población.

Debemos traducir el problema a un lenguaje matemático:

$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ .donde k es una constante que depende de la población

- **Ejemplo:**

Una población de bacterias se ve disminuida por la ingesta de un antibiótico, si la variación de la población sigue la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$.

Cuál es la solución de la ecuación diferencial del ejercicio, si inicialmente (t=0), existen 10.000 bacterias y luego de la toma del antibiótico a las 15 hs existen 7.500 bacterias. Cuántas bacterias hay en 24 hs?

Datos del problema son :

La ecuación diferencial es: $\frac{dP}{dt} = k\, P(t)$

t = 0 hs **P(0)= 10000 bacterias**

t=15 hs **P(15)= 7500 bacterias**

Qué se pide: la población de bacterias a las 24hs es decir cuando t = 24 hs

Solución

Para resolver usamos separación de variables:

$$\frac{dP}{dt}\, dt = k\, P(t)\, dt$$

Recuerde que $\frac{d\,P}{d\,t}\, dt = dP$

$$\int \frac{1}{P}\, dP = \int k \;\; dt$$

$\ln|P| = k\,t + C \quad \rightarrow \quad e^{k\,t+C} = P(t) \quad \rightarrow e^{k\,t}\, C = P(t)$ **S G**

Debemos hallar el valor de **k** y de **C,** para que sólo quede en función de t, y podamos hallar la población para cualquier valor de t

Para ello usamos las condiciones iniciales

t = 0 **P(0)= 10000 bacterias** $e^{0\,k}\, C = 10000 \;\rightarrow\; C = 10000$

t=15 hs **P(15)= 7500 bacterias** $e^{15\,k}\; 10000 = 7500 \;\rightarrow\; 15\,k \ln e = \ln\left(\frac{75}{100}\right)$

$$k = \frac{\ln(\frac{3}{4})}{15} = -0.02$$

Reemplazando en la ED $e^{-0.02\,t} . 10000 = P(t)$

Con esta fórmula podemos saber qué población de bacterias habrá en un tiempo t determinado

Si t = 24 hs entonces $e^{-0.02\,.24} . 10000 = P(24)$

P = 6188 bacterias respuesta al problema

➢ Decaimiento radioactivo

El término vida media de un isótopo se usa para medir la estabilidad de una sustancia radiactiva, específicamente, la vida media es el tiempo que tardan la mitad de los átomos presentes en una cantidad de sustancia, en desintegrarse.

Si una sustancia tiene una vida media más larga que otra significa que su isótopo es más estable.

La vida media de una sustancia radiactiva puede ser modelada mediante una ecuación diferencial ordinaria teniendo en cuenta que la razón a la que disminuye la cantidad de una sustancia radiactiva **dA/dt,** es proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva **A,** se establece el siguiente problema de valor inicial (P.V.I.):

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad A(0) = A_0$$

Donde A_0 es la cantidad original de la sustancia., k una constante que depende de la sustancia.

.

- **Ejemplo:**

Se sabe que la vida media del carbono C-14 radiactivo es aproximadamente de 5600 años. Con estos datos, se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de C-14. Determinar la edad del fósil.

Solución:

Si A(t) es la cantidad de C-14 la ecuación diferencial que representa la situación

Es: $\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{k\,A}$ $\quad$ *siendo* $\mathbf{A\,(0) = A_0}$ la resolvemos por variables separables

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\,dt = k\,dt \qquad \frac{1}{A}\,dA = k\,dt \qquad \int \frac{1}{A}\,dA = \int k\,dt$$

$$\ln|A| = k\,t + C \qquad e^{k\,t+C} = A(t) \qquad e^{k\,t}\,.\,C = A(t) \quad \text{SG}$$

Debemos averiguar el valor de C y de la constante de desintegración k, para ello usamos las condiciones iniciales

Si **t = 0** sabemos que $e^0\,.\,C = A(0) = A_0$ $\quad$ entonces $\quad C = A_0$

Además si **t = 5600** , $\mathbf{A(5600)} = \frac{1}{2}\,A_0$ (es igual a la mitad de la cantidad inicial)

, reemplazamos $e^{5600\,k}\,.\,A_0 = \frac{1}{2}\,A_0$ despejamos **k**

$5600\,k\ \ln e = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ entonces $\mathbf{k} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5600} = -0.00012$

Reemplazamos $e^{-0.00012\,t}\,.\,\mathbf{A(0)} = \mathbf{A(0)}\,\frac{1}{1000}$ despejamos t

$$-0.00012\,t\ln e = \ln\frac{1}{1000}$$

$$t\,. = \frac{ln\,\frac{1}{1000}}{-0.00012} \cong 57564\ \ años$$

- **Ley de enfriamiento de Newton**

La ley empírica de enfriamiento / calentamiento de Newton establece que la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo, y la del medio que lo rodea (la temperatura ambiente)

Si denotamos por T(t) a la temperatura en el tiempo t, y T_a la temperatura del ambiente, entonces, la ley de enfriamiento de Newton determina que :

$$\frac{dT}{dt} = -\,k\,(T(t) - T_a)$$

- **Ejemplo:**

Un tarro de crema, inicialmente a 25°C, se va a enfriar colocándola en el pórtico donde la temperatura es de 0°C. Suponga que la temperatura de la crema ha descendido a 15°C después de 20 min. Cuándo estará a 5°C?

Solución

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dT}{dt} = -\,k\,(T(t) - T_a) = -\,k\,(T - 0)$$

Para resolver usamos separación de variables:

$$\frac{dT}{dt}\,dt = -\,k\,T\,dt$$

$$\int \frac{1}{T}\,dT = \int -k \quad dt$$

$$\ln|T| = -k\,t + C \quad \rightarrow \quad e^{-k\,t+C} = T \quad \rightarrow e^{-k\,t}\,C = T(t)$$

Debemos hallar el valor de k y de C

Para ello usamos las condiciones iniciales

t = 0 **T(0)= 25 °C** $e^{0}\,C = 25 \;\rightarrow\; C = 25$

t = 20 **T(20)= 15 °C** $e^{-20\,k}\;25 = 15 \;\rightarrow\; -20\,k\ln e = \ln\left(\frac{15}{25}\right)$

$$k = \frac{\ln(\frac{3}{5})}{-20} = 0.0255$$

Reemplazando en la ED $e^{-0.0255\,t}.25 = T(t)$

$$e^{-0.0255\,t}.25 = 5$$

Como queremos saber cuándo estará la temperatura a 5°C , reemplazamos a t por 5 y despejamos t

$$-0.0255\,t\,.\ln e = \ln\left(\frac{5}{25}\right)$$

$$t = \frac{\ln(\frac{5}{25})}{-0.0255} = \frac{\ln(\frac{5}{25})}{-0.0255} = 63.11\ \text{min}$$

PROBLEMAS

1. **Un cultivo tiene una cantidad de bacterias P_0. Cuando t =1h la cantidad de bacterias es $3.P_0$ .Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias P(t) en el momento t calcule el tiempo necesario para quintuplicar la cantidad inicial de microrganismos**

2. **La sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de 5 °C. Mientras se encontraba realizando la autopsia de una víctima de asesinato ,el propio forense es asesinado .A las 10 AM el ayudante**

del forense descubre el cadáver a una temperatura de 23 °C A las 12 AM su temperatura es de 17 °C .Suponiendo que el forense tenía en vida la temperatura normal es de 36 °C ,calcular a qué hora fue asesinado ?

3. **Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20°C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo.**
   Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los 90°C, si se sabe que su temperatura aumento 2°C en un segundo. Cuánto tardará la barra en alcanzar los 98°C?

4. **Debido a la caza furtiva de ballenas una población de éstas de 3000 especímenes que viven en los mares del sur han quedado 2500 en dos años. Si la variación de la cantidad de ballenas sigue la ecuación diferencial de población**
   $\frac{dP}{dt} = k\,P(t)$ **. Cuántas ballenas habrá en 5 años**

5. **Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 hs su masa disminuyó en un 3%. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de 24 hs**