Capítulo II

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR

Si $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)…a_1(x)$ y $a_0(x)$ son funciones con dominio común, una ecuación de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0 y=R(x)$$

Es una ecuación diferencial lineal de orden n.

Si R(x) = 0 recibe el nombre de Ecuación diferencial homogénea o incompleta.

Si R(x) $\neq$ 0 es no homogénea.

$a_n(x)$, $a_{n-1}(x)…a_1(x)$ y $a_0(x)$ pueden ser funciones o constantes.

- ### ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

Ecuación diferencial lineal de segundo orden es de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)\,y=R(x)$$

En forma más sencilla podemos escribirla como: **y’’(x) + P(x) y’(x) + Q(x) y = R(x)**

Esta es la definición de una ecuación lineal de segundo orden, si es homogénea, la escribimos como:

y’’(x) + P(x) y’(x) + Q(x) y = 0

Para entender las características de la solución general comenzaremos por definir independencia lineal

y luego veremos un teorema que nos permitirá relacionar esta definición con la solución de la ecuación.

INDEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES:

Dadas dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, decimos que ***son linealmente dependientes si y solo si una de ellas es múltiplo constante de la otra, es*** **decir**

$y_1 = k\, y_2$ **o** $\frac{y_1}{y_2} = \frac{k\,.y_2}{y_2} = k$ **el cociente entre ellas da una constante**

En caso contrario se dicen linealmente independiente

Ejemplo 1:

Sean $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 4x$, dos funciones cualesquiera

Para ver si son linealmente dependientes o no, hacemos el cociente entre ellas:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

Son linealmente dependientes porque el cociente dio una constante

Ejemplo2:

Si $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = \cos x$

El cociente $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \mathbf{tg\,x} \neq \mathbf{cte}$ es una función por lo tanto son linealmente independientes (debemos notar que si invertimos el orden del cociente su resultado seguirá siendo una constante o una función.)

1. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2° ORDEN HOMOGÉNEA

Solución general

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x)\, y = 0$ con $P(x)$ y $Q(x)$ continuas en un intervalo I.

Si $y(x)$ es una solución cualquiera de la ecuación, entonces existen números c_1 y c_2 tales que:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x) \qquad \forall x \in I$$

El teorema afirma que cuando hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, la solución general es la combinación lineal de dichas funciones.

IMPORTANTE:

Recordemos que la solución de una ecuación diferencial, contiene tantas constantes como lo indica su orden, por eso en la solución general aparecen c_1 y c

Ejemplo:

Dada la ecuación diferencial **$y'' - 4y = 0$**

Verificar que las funciones $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$
son linealmente independientes y solución de la ecuación diferencial.

Verificamos si **$y_1 = e^{2x}$** es solución de la ecuación diferencial: $y''(x) - 4y = 0$

$y_1 = e^{2x}$ $\quad y'_1 = 2e^{2x}$ $\quad y''_1 = 4e^{2x}$

$4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ verifica, por lo tanto es solución.

Para $y_2(x) = e^{-2x}$ tenemos.
$y'_2 = -2e^{-2x}$
$y''_2 = -2(-2)e^{-2x} = 4e^{-2x}$ reemplazamos en la ecuación
$4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ verifica.

Debemos determinar la independencia lineal, para ello hacemos el cociente:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{2x}}{e^{-2x}} = e^{4x} \neq \text{cte}$$

Las funciones e^{2x} y e^{-2x} son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.
Según el teorema **$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ es la solución general**

Cualquier otra solución deberá ser combinación lineal de ellas
$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ $\quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$ $\quad y'' = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x}$
Reemplazando en la ED verifica
$y'' - 4y = 0$
$4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} - 4(c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}) = 0$

I. ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

Dada la ecuación diferencial **$y''(x) + p\, y'(x) + q\, y = 0$**

donde P(x) = p = cte. y Q(x) = q = cte.

queremos hallar su solución general, sabemos que por tratarse de una ecuación de segundo orden estará formada por la suma de dos funciones linealmente independientes. Para encontrar estas funciones vamos a tener en cuenta la solución de la ecuación lineal homogénea de primer orden que sabemos es la función exponencial, y la proponemos como solución de la ecuación de segundo orden.

Proponemos como solución **$y = k\, e^{mx}$** donde m es un número real cualquiera.

Si en verdad es la solución debería verificar la ecuación diferencial homogénea.

Reemplazamos **$y = k\, e^{mx}$ $y' = k\, m\, e^{mx}$ $y'' = k\, m^2\, e^{mx}$ en la ED**

$(k\, m^2\, e^{mx}) + p\, (k\, m\, e^{mx}) + q\, (k e^{mx}) = 0$

Sacamos $k\, e^{mx}$ factor común **$k\, e^{mx}\, (m^2 + p\, m + q) = 0$**

Para que se verifique la igualdad, deberá ser $m^2 + p\, m + q = 0$ dado que **$k\, e^{mx} \neq 0$** por ser la solución propuesta.

$m^2 + p\, m + q = 0$ es una ecuación de segundo grado llamada ecuación característica, y las soluciones de ella nos dan los valores m_1 y m_2, que serían los exponentes de la solución propuesta **$y_1 = k\, e^{m_1 x}$** **$y_2 = k\, e^{m_2 x}$**

Si tenemos en cuenta que la ecuación caracteríatica es una cuadrática, entonces sabemos que las soluciones posibles son:

a) Raíces reales distintas
b) Raíces reales iguales
c) Raíces complejas conjugadas

El tema ahora es analizar si esas soluciones son o no linealmente independientes

a) RAÍCES REALES DISTINTAS:

$m^2 + p\, m + q = 0$ sus soluciones son **$m1 \neq m2$**

Reemplazamos cada una de las raíces en la solución propuesta

$y_1 =$ $c_1 e^{m_1 x}$

y_2 = $c_2e^{m_2x}$

$\frac{c_1e^{m_1}}{c_2e^{m_2}} = ce^{(m_1-m_2)x} \neq cte$ y_1 e y_2 son linealmente independientes.

la solución general será la suma de estas dos funciones,

$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$ **Solución general para raíces distintas**

Ejemplo 1 :

Hallar la solución general de la ecuación diferencial **$y'' - 3y' + 2y = 0$**

1) La ecuación característica correspondiente a esta ecuación es $m^2 - 3m + 2 = 0$ cuyas raíces son $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$
2) Las soluciones son **$y_1 = c_1e^{2x}$ e $y_2 = c_2e^{x}$**
3) Hacemos el cociente $\frac{c_1e^{2x}}{c_2e^{x}} = ce^{x}$ verificamos su independencia lineal
4) La solución general es de la forma: **$y = c_1e^{2x} + c_2e^{x}$ solución general para raíces distintas**

b) RAÍCES REALES IGUALES:

$m^2 + p\,m + q = 0$ sus soluciones son $m1 = m2$

Para comprender mejor este punto, veremos primero un ejemplo.

Ejemplo 1:

Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$

1) Ecuación característica asociada a la ecuación es: $m^2 - 6m + 9 = 0$ cuyas raíces son:

   $m_1 = 3$ y $m_2 = 3$ tenemos raíces repetidas o coincidentes.
2) Las soluciones serían **$y_1 = c_1e^{3x}$ e $y_2 = c_2e^{3x}$**
3) Hacemos el cociente $\frac{c_1e^{3x}}{c_2e^{3x}} = c$ nos da una constante por lo tanto hay dependencia lineal

Sabemos que la solución de la ecuación es la combinación de dos funciones linealmente independientes, y en este caso tenemos solo una solución.

Para que el cociente nos dé distinto de constante una de las funciones tendría que estar multiplicada por una función que llamaremos g(x) , para que sean linealmente independientes es decir:

$$\frac{\mathbf{g(x)e^{3x}}}{\mathbf{e^{3x}}} = \mathbf{g(x)}$$

<u>Cálculo de la solución general para raíces repetidas:</u> (solos)

Proponemos como solución $\mathbf{y = g(x)e^{3x}}$ y la reemplazamos en la ecuación diferencial.

$$\mathbf{y = g.e^{3x}}$$

$$\mathbf{y' = g'.e^{3x} + 3\,g.e^{3x}}$$

$$\mathbf{y'' = g''.e^{3x} + 3\ g'.e^{3x} + 3\,g'.e^{3x} + 9\,g.e^{3x} = g''.e^{3x} + 6\ g'.e^{3x} + 9\,g.e^{3x}}$$

Reemplazamos en ED y'' – 6y' + 9y = 0

$$\mathbf{(g''.e^{3x} + 6\ g'.e^{3x} + 9\,g.e^{3x}) - 6.(g'.e^{3x} + 3\,g.e^{3x}) + 9.g.e^{3x} = 0}$$

Sacamos **e** $^{\mathbf{3x}}$ factor común :

$$\mathbf{e^{3x}[g'' + 6\ g' + 9\,g - 6.g'. - 18\,g + 9.g] = 0}$$

Nos queda que $\mathbf{e^{3x}[g''(x)] = 0}$ **por lo tanto g''(x)=0**

Si g''(x) es cero, entonces g'(x)=k integrando g'

$$\mathbf{\int g'(x)dx = \int kdx = k\,x}$$

Su solución es de la forma g(x) = k x, (vamos a considerar que k = 1) reemplazamos g(x) en la solución propuesta y obtenemos: $y_1 = \mathbf{x\,e^{3x}}$

La solución general entonces es $y = \mathbf{C_1\,x\,e^{3x} + C_2\,e^{3x}}$

<u>Ejemplo 2</u>:

Hallar la solución general de la ecuación diferencial y'' – 4y' + 4y = 0

1) Ecuación característica asociada a la ecuación es: $m^2 - 4m + 4 = 0$ cuyas raíces son:

   $m_1 = 2$ y $m_2 = 2$ tenemos raíces repetidas o coincidentes.

2) Las soluciones serían $\mathbf{y_1 = c_1 e^{2x}}$ **e** $\mathbf{y_2 = c_2\,x\,e^{2x}}$

Hacemos el cociente para ver si son linealmente independientes

$$\frac{C_1 e^{2x}}{C_2\ x\, e^{2x}} = \ C\, x^{-1}$$

no da una constante por lo tanto hay independencia lineal

La solución general es : $y = C_1\ e^{2x} + C_2\, x\, e^{2x}$

c) **Raíces complejas conjugadas:**

$m_1 = a + j\,b$ y $m_2 = a - j\,b$

Si las raíces son complejas conjugadas, corresponde al caso de raíces distintas.

La solución general tiene la forma

$$y = C_1\ e^{(a+bj)x} + C_2\ e^{(a-bj)x}$$

$$y = C_1\ e^{ax}\ e^{(bj)x} + C_2\, e^{ax}\ e^{(-bj)x} \qquad \textbf{A}$$

Como la solución es la suma de funciones reales linealmente independientes, se trabaja sobre la exponencial que es compleja. teniendo en cuenta las fórmulas de Euler:

$$e^{bx\,j} = \cos bx + j \operatorname{sen} bx$$

$$e^{-bx\,j} = \cos bx - j \operatorname{sen} bx$$

Reemplazando en A y agrupando nos queda:

$y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$ **solución general para raíces complejas conjugadas**

Cada una de las soluciones planteadas son linealmente independientes ya que su cociente da tg(bx)

Ejemplo :

Hallar la solución general de la ecuación diferencial y'' – 4'y +5y = 0

1) Ecuación característica asociada a la ecuación es: $m^2 - 4m + 5 = 0$ cuyas raíces son

   $m_1 = 2 + j$ y $m_2 = 2 - j$ tenemos raíces complejas conjugadas.

   Es decir $a = 2$ (parte real) $b = 1$ (parte imaginaria)

2) Las solución general es

$y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$

reemplazando a y b nos queda

$y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x$

Resumiendo todo lo visto

Solución general de la ED Lineal de 2do orden

$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$	**raíces distintas**
$y = c_1 x e^{mx} + c_2 e^{mx}$	**raíces repetidas.**
$y = c_1 e^{ax} \cos(b x) + c_2 e^{ax} \operatorname{sen}(b x)$	**raíces complejas conjugadas**