Definición de Conjuntos

Nicolás González Martínez

9 de junio de 2015

1. $\mathbb{N}$: los números naturales poseen dos definiciones
   Sin cero $= \mathbb{N}^* : \{1, 2, 3, ...\} \Longleftrightarrow]0, \infty[$
   Con cero $= \mathbb{N} : \{0, 1, 2, 3, ...\} \Longleftrightarrow [0, \infty[$

2. $\mathbb{Z}$: los números enteros se definen como:
   $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$; donde $-\mathbb{N} = \{-n/n \in \mathbb{N}\}$

   El conjunto $\mathbb{Z}$ con las propiedades $+$ y $\cdot$ posee la clasificación de grupo, es decir:

   $i)$ es asociativo con la suma: $\Longleftrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$
   $i')$ es asociativo con la suma: $\Longleftrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

   $ii)$ existe un elemento neutro al cual llamaremos e: $\Longleftrightarrow a + e = a = e + a$
   $ii')$ existe un elemento neutro al cual llamaremos e: $\Longleftrightarrow a \cdot e = a = e \cdot a$

   $iii)$ existe un elemento inverso al cual llamaremos $-a$: $\Longleftrightarrow a + (-a) = e = (-a) + a$

   observación: $\mathbb{Z}$ posee la cualidad de ser conmutativo con la suma, es decir, $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\,(x + y = y + x)$
   observación: $\mathbb{Z}$ posee la cualidad de ser conmutativo con el producto, es decir, $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\,(x \cdot y = y \cdot x)$

3. $\mathbb{Q}$: son los números racionales y se definen como:
   $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}/p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0\}$

   observación: se define la relación $\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n} \Longleftrightarrow p \cdot n = q \cdot m$

   ¿ Como se suma en $\mathbb{Q}$?

   Dados $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ esto se resuelve de la siguiente manera: $\frac{pn + qm}{qn}$

   ¿ Como se multiplica en $\mathbb{Q}$?

   Dados $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$ esto se resuelve de la siguiente manera: $\frac{p \cdot m}{q \cdot n}$

4. ¿ Quien es $\mathbb{R}$?
   para la respuesta anterior definiremos los siguiente axiomas:

Axioma 1: $0, 1 \in \mathbb{R}$ donde $0 \neq 1$
Axioma 2: $(\mathbb{R}, +)$ es grupo abeliano (tarea: averiguar que significa Grupo Abeliano)
Axioma 3: $(\mathbb{R}, \cdot)$ es grupo abeliano
Axioma 4: Se define la propiedad distributiva: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\,(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$

Propiedades de $\mathbb{R}$

1: $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
2: $-(-a) = a$
3: $a \cdot b$ lo denotaremos desde ahora como ab
4: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
5: $a0 = 0$
6: $-(ab) = (-a)b = a(-b)$
7: $(-a)(-b) = ab$
8: $(a^{-1})^{-1} = a$
9: $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$