Introducción a la Trigonometría

Taller 1

Objetivo: Recordar conceptos básicos trigonométricos

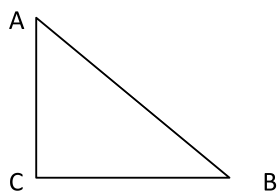
Un poco de Historia:

Los primeras grupos de la historia de la matemática que hicieron cálculos para dividir por ejemplos terrenos, como determinar el tiempo del día y mas adelante hacer cálculos astronómicos , de lo que se sabe están unos 600 años antes de Cristo y después de cristo pasan siglos y siglos para empezar a conocer los elementos matemáticos que comenzaron aparecer para resolver problemas de la necesidad de calcular y que de a poco se fueron formalizando en teorías. Para centrarnos en nuestro objetivo podemos mencionar algunos como son el calculo de la distancia de un faro a un barco en el mar, calcular alturas de cerros, o alturas de edificios , aplicaciones en astronomía.

Introducción Básica

Para comenzar se reconoce la figura geométrica del triangulo rectángulo, sabemos que tiene dos lados que se cortan perpendicularmente llamados catetos y la hipotenusa que es el lado opuesto al ángulo recto .

Consideremos el triangulo de la siguiente figura como referencia a lo que denotemos mas adelante



El cateto AC se anota como el lado b

El cateto CB se anota como el lado a

La hipotenusa AB se anota como c

Así también sabemos que para el triángulo rectángulo ABC se cumple el teorema de Pitágoras

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Este teorema relaciona los catetos con la hipotenusa, luego si se conocen las medidas de los catetos se puede saber la medida de la hipotenusa, por otro lado si se conoce la medida de un cateto y la hipotenusa se puede determinar la medida del otro cateto.

Sabemos también que el triangulo rectángulo tiene ángulos interiores donde uno de ellos mide 90º se dice en este caso que es el ángulo recto , y otros dos ángulos interiores formados por la hipotenusa y un cateto .

Se definió para este caso particular razones entre los catetos y razones entre la hipotenusa y los catetos como :

$\frac{b}{c} = \frac{cateto\ b}{hipotenusa}$, $\frac{a}{c} = \frac{cateto\ a}{hipotenusa}$, $\frac{b}{a} = \frac{cateto\ b}{cateto\ a}$, $\frac{a}{b} = \frac{cateto\ a}{cateto\ b}$, $\frac{c}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ a}$

$\frac{c}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ b}$

Si llamamos $\alpha = angulo\ CAB$, $\beta = CBA$ se definen las razones anteriores :

$sen\alpha = \frac{a}{c}$, $cos\alpha = \frac{b}{c}$,

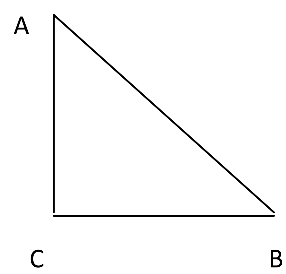
$sen\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$

$tan\ \alpha = \frac{a}{b}$, $tan\beta = \frac{b}{a}$

$cotag\ \alpha = \frac{b}{a}$, $cotg\ \beta = \frac{a}{b}$

$sec\alpha = \frac{c}{b}$, $sec\beta = \frac{c}{a}$

$cosec\ \alpha = \frac{c}{a}$, $cosec\ \beta = \frac{c}{b}$



Observación :

1) debe recordar que en este caso $\alpha + \beta = 90º$ o $\alpha = 90 - \beta$ o $\beta = 90 - \alpha$

2) notación:

$sen\ \alpha$ se lee seno del ángulo α

$\cos\alpha$ se lee coseno del ángulo β

$tang\ \alpha$ se lee tangente del ángulo α

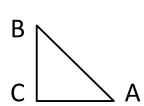
cotang α se lee cotangente del ángulo α

sec α secante del ángulo α

$cosec\ \alpha$ cosecante del ángulo α

De aquí se pueden hacer algunos cálculos considerando los siguientes ejemplos:

a) Sea triangulo ACB de la figura un **triangulo rectángulo isósceles** de cateto m



de aquí se tiene : CB = m , CA = m por lo tanto $c^2 = 2m^2 \Longrightarrow c = m\sqrt{2}$

Ademas $\alpha = \beta = 45º$

Así :

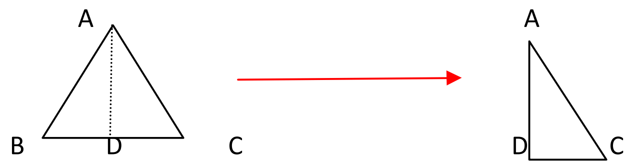
$sen45º = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos45º = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45º = \frac{m}{m} = 1$

Obs: En este caso sirve para no usar calculadora cuando el triangulo es isósceles rectangulo

Ejercicio: Calcule $cotang\ 45º, sec45º, cosec45º$

b) Consideremos ahora un **triángulo equilátero** de lado w

La mitad de este triangulo es un triangulo rectángulo en las cuales el angulo DCA es de 60º y el angulo DAC es de 30º



Aquí $DC = \frac{w}{2}\ y\ AD = \frac{\sqrt{3}}{2}\ w$ (AD se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ADC o al triangulo ABD)

Considerando el triángulo ADC se pueden hacer calculos sencillos como por ejemplo

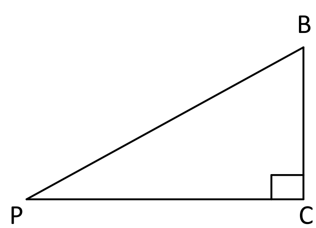
$sen60º = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}w}{w} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $cos60º = \frac{1}{2}$

$\text{sen } 30º = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}w}{w} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $cos30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio: Hacer el cálculo para las demás relaciones

Ejemplo: Un persona observa desde un punto P ubicado a nivel del suelo a una distancia de 35 mts de la base de un poste, la parte superior de esta con un ángulo de 30º determinar la longitud del poste:

Solución: Es recomendable para resolver este tipo de problemas hacer un bosquejo :



PC = 35 mts , ángulo CPB = 30º

De la grafica se observa que se conoce el cateto adyacente al ángulo de 30º , PC y se necesita conocer el cateto opuesto BC (longitud del poste) , de acuerdo a lo anterior es necesario determinar el cateto opuesto así buscamos la razón que permita resolver este problema , en este caso es :

$tang\ 30º = \frac{BC}{PC} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{35} \Rightarrow BC = \frac{35}{\sqrt{3}}$

Otro concepto básico necesario recordar es que para calcular **ángulos con calculadora** debemos saber la relación entre un ángulo medido en grados y el ángulo medido en radianes

Esto es si α^0 es un ángulo medido en grados y α^r es el mismo ángulo medido en radianes entonces: $\frac{\alpha^0}{\alpha^r} = \frac{180º}{\pi}$ esta relación permite transformar ángulos medidos en grado a radianes o de radianes a grado

De esta relación se puede observar algunas equivalencias: Si α^0 ángulo medido en grados y α^r ángulo medido en radianes entonces :

α^0	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	360º
α^r	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

Observación:

1)Para el uso de la calculadora con las razones trigonométricas es imprescindible saber si el ángulo esta medido en grado entonces entonces en este caso hay que tener la calculadora en **el modo DEG** y si esta medido en radianes la calculadora debe estar en **el modo RAD**

2) También hay que recordar que los valores de la relación seno y coseno varían entre -1 y 1

Ejercicio :

1) Haga cálculos de: $sen 35º$, $cos\frac{\pi}{5}$, $tag\frac{\pi}{7}$,

2) Determine el ángulo $0 < \alpha^0 < 90º$ si se sabe que $sen\alpha^0 = 0{,}3564$

Determine el angulo 0< $\beta^r < \frac{\pi}{2}$ si se sabe que $cos\beta^r = 0{,}323$

3) Determine el valor de $cotg\ \frac{\pi}{8}$, $\sec 56º$, $cosec\ \frac{\pi}{5}$

4) Determine el valor de la expresión: $\frac{sen 125º + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{tang\ 135º}$