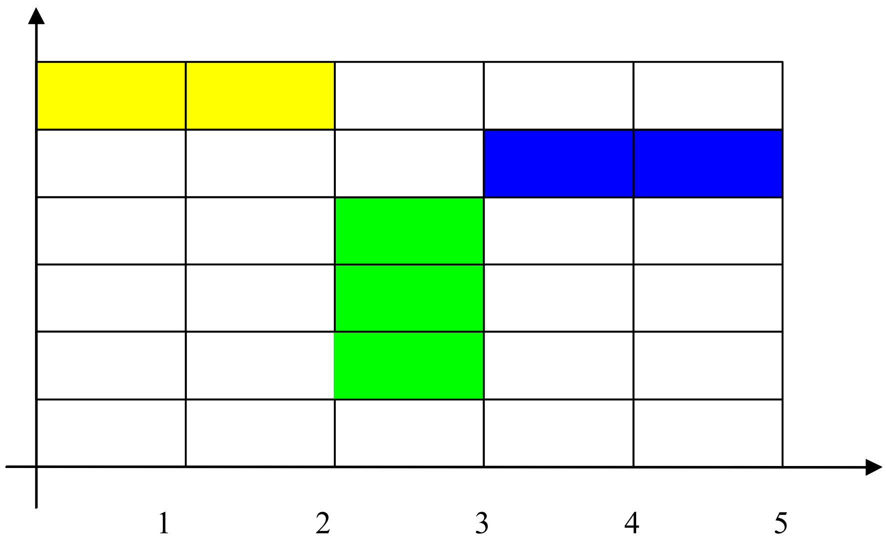
FUNCIONES REALES

La noción de relación es usado continuamente en el diario vivir.
Así por ejemplo
1. Cada jugador de futbol pertenece a un sólo equipo

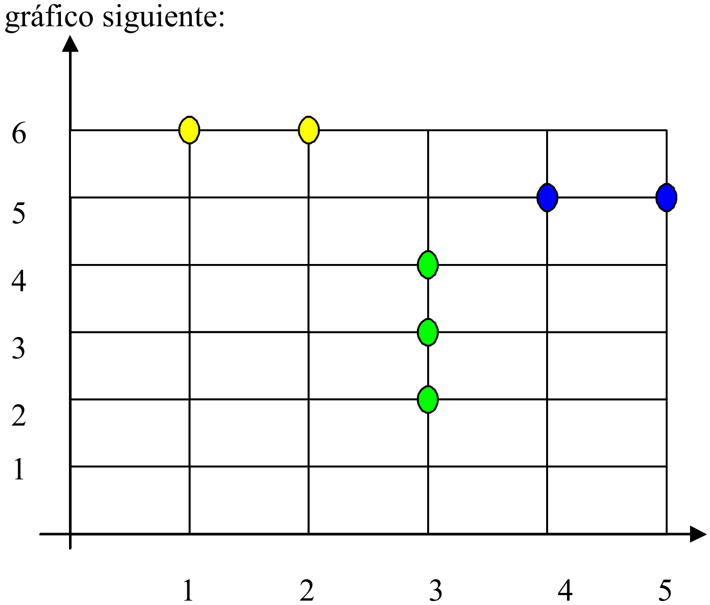
2. Considere el siguiente gráfico que representa la batalla naval



Ubiquemos cada posición de cada barco como sigue:

Barco Amarillo dos casilleros : (1,6) ;(2,6)
Barco Azul de dos casilleros : (4,5) ; (5,5)
Barco Verde de tres casilleros : (3,2);(3,3);(3,4)

Observa que este mismo juego puede ser representado por un par de ejes coordenados como lo indica el gráfico siguiente:



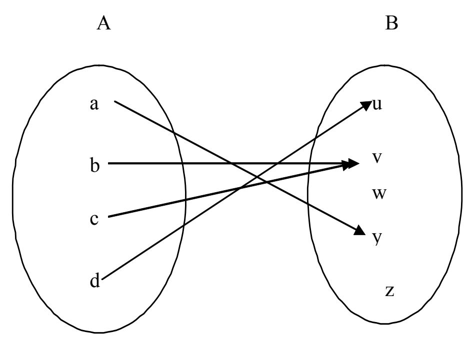
Sobre el eje horizontal se representan los elementos del Dominio y sobre el eje vertical los elementos del Recorrido.

3. En geometría básica se han estudiado distintas relaciones, como por ejemplo la longitud de una circunferencia depende del radio de ella L=2π r, el area de la circunferencia depende también del radio de ella $A = \pi r^2$, el área de un triágulo de altura fija h depende de la base A=$\frac{1}{2}$ b*h siendo b la base.

De aquí en adelante en todos nuestros ejemplos consideraremos conjuntos formados por elementos de los números reales

Def: (Función) Se dice que una correspondencia f entre un conjunto A y un conjunto B es una función si a cada elemento de A le asocia un único elemento de B.

Notación: $f : A \longrightarrow B$ tal $y = f(x)$



De acuerdo el grafico podemos decir
$f(a) = y$, $f(b) = v$, $f(c) = v$, $f(d) = u$
Como dijimos anteriormente A lo llamaremos de aquí en adelante Dominio de la función y que anotamos $Dom f$, por otra parte existe un subconjunto del conjunto de llegada B, que lo llamaremos Recorrido y que anotamos $Rec f$. Formalizamos ahora estos dos conjuntos definiendo:

a) Dom $f = \{x \,/ \exists!\, y \in B, y = f(x)\}$
b) Rec $f = \{y \in B \,/\, x \in A,\ y = f(x)\}$

Observacion:
1.- Sabemos que para definir una función se deben tener
el conjunto de partida A , el de llegada B , y la correspondencia $y = f(x)$, sin embargo en muchas ocaciones la definiremos solamente por medio de la correspondencia $y = f(x)$

entenderemos en este caso que hay un conjunto de partida y un conjunto de llegada no especificado.

2.- Al recorrido de una función tambien se le llama conjunto IMAGEN y se anota Im f. Para aclarar un poca mas el punto 1 de esta observacion veamos los siguientes ejemplos

a) $f(x) = \frac{2x-3}{x}$
b) f : [2,8] $\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x-3}{x}$
c) f :] 2,8[$\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x-3}{x}$

Aqui las funciones de a), b) y c) no son la misma, observe que en a) no se especifica el dominio, en este caso se asume que el dominio que debemos considerar es aquel conjunto que contiene todos los puntos que hacen que f sea una función. Para b) tenemos que el dominio es el [2,8] y para c) se tiene que el dominio es] 2,8 [.

Es bueno reflexionar sobre el significado de la notación $f(x)$, para ello consideremos el siguiente ejemplo
Ejemplo 1: Sea $f(x)$=$\frac{3x-1}{x^2-1}$ y analicemos algunas preguntas básicas
a) ¿Cual es la imágen del 3 ?
b) ¿Cual es el intercepto de la gráfica de $f(x)$ con el eje X ?
c) ¿ Cual es el intercepto de la gráfica de $f(x)$ con el eje Y ?
d) ¿Que elemento de dominio (si es que existe) esta relacionado con el 2 ?

Estas mismas preguntas las podemos hacer usando una notacion simbólica

a) Determine $f(3)$
b) Determine si existe x en el Dom $f(x)$ tal que $f(x)=0$ (o y=0)
c) Determine si existe y $\in$ Rec f tal que $y = f(0)$
d) Determine $x \in$ Dom$f$ tal que $f(x)$=2 (o $y = 2$)

Respuesta:
a) $f(3) = 1$
b) $x = \frac{1}{3}$
c) $f(0) = 1$
d) $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$

Ahora deberiamos estar en mejores condiciones para hacer mas formal el estudio de las funciones.
Ejemplo 2 . Sea $f(x)$=$\frac{2x-1}{4-x^2}$
a) Determinar el dominio de $f(x)$
b) Determinar el recorrido de $f(x)$
c) Determine los interceptos con los ejes coordenados.

Respuesta:

a) Determinar el dominio, equivale a establecer condiciones para que la expresión $\frac{2x-1}{4-x^2} \in \mathbb{R}$

luego se tiene : $4 - x^2 \neq 0$ $x \neq 2$ y $x \neq -2$

Por lo tanto el domonio de la función es $\mathbb{R} - \{2,-2\}$

b) Para determinar el recorrido despejamos x en términos de y, como $y = \frac{2x-1}{4-x^2}$

$4y - yx^2 = 2x - 1 \Rightarrow yx^2 + 2x - (4y+1)=0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+4y(1+4y)}}{2y} \Rightarrow$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{4y^2+y+1}}{y}$ y como $4y^2+y+1>0$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$ se tiene entonces que el recorrido $\mathbb{R}$.

Observe que para y=0 existe x=$\frac{1}{2} \in Dom\, f(x)$.

c) Debemos realizar dos operaciones a saber:

i) Intercepto con el eje X : Resolver $f(x) = 0$. Luego se tiene $\frac{2x-1}{4-x^2}=0 \Rightarrow$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

ii) Intercepto con el eje Y : Evaluar $f(0)$. Luego se tiene que $f(0) = -\frac{1}{4}$, asi escribimos que el intercepto con el eje Y es el punto $(0, -\frac{1}{4})$.

El gráfico siguiente representa a $f(x) = \frac{2x-1}{4-x^2}$

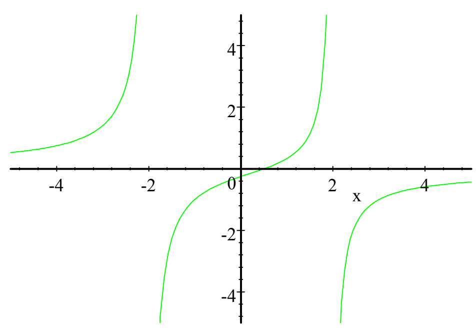


fig 3

Observe que la grafica de la Fig 4 representa una **función creciente** en cada intervalo, esto significa que a medida que x crece entonces y tambien crece. Este concepto se estudia con mayor detalle en Calculo Diferencial.

Cada vez que le definan una función en la forma f:A→ B tal que y=$f(x)$ debe tener en cuenta que A=$Dom\, f$ y Rec$f$ $\subseteq$ B, esto ultimo es a lo que se debe poner atencion en el sentido que B contiene al $Rec f$ o B=$Rec f$.

En general el $Rec f$ va a depender del Dominio.

Ejemplo 3: Sea f:[0,4] → $\mathbb{R}$ tal que $f(x)$=3x+2 observe que el dominio de la función es [0,4] esto significa que $0 \leq x \leq 4$ así se tiene que $Rec f$ se encontrara haciendo $0 \leq \frac{y-2}{3} \leq 4$, resolviendo se tiene que $2 \leq$ y ≤ 14. Por lo tanto el $Rec f$=[2,14] .

Si ahora tomamos $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x)=3x+2$ observamos que el $Dom f$ =[1,3] lo que significa que $1 \leq x \leq 3$, por lo tanto para determinar el $Rec f$ se debe cumplir que $1 \leq \frac{y-2}{3} \leq 3$, esto significa que $5 \leq$ y ≤ 11. Por lo tanto en este caso el $Rec f$=[5,11].

Cosideremos ahora unos gráficos que nos permitiran observar graficamente cuando una relacion representa una función

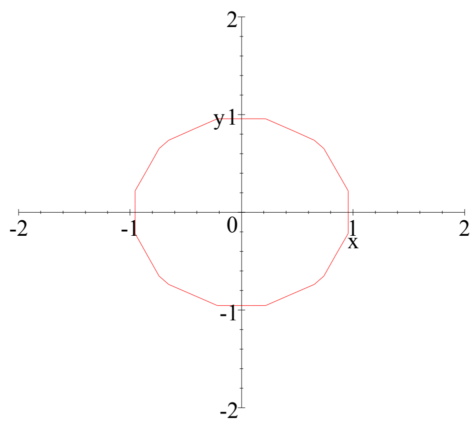


Fig 5

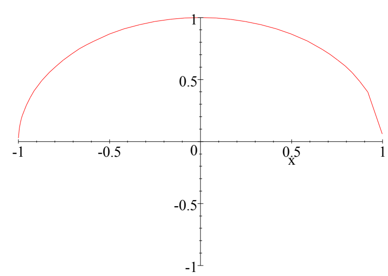


Fig 6

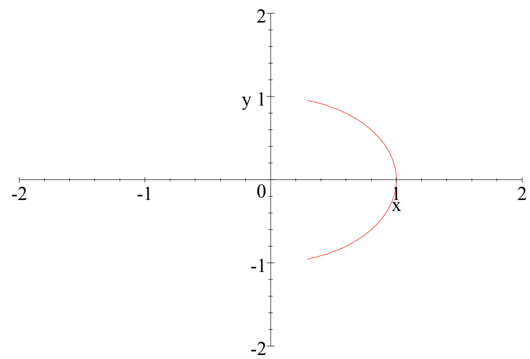


Fig 7

Las figuras 5 y 7 no son funciones , pues hay al menos un elementos del dominio que tiene dos imagenes. La figura 6 si es función, cada elemento del dominio tiene una sola imagen.

Analizaremos ahora aquellas funciones para las cuales cada elemento del dominio tiene su propia imagen (hay una relación uno a uno) y aquellas cuyo recorrido es igual al conjunto de llegada. Y por supuesto aquellas funciones que cumplen ambas condiciones. Estas funciones se denominan funciones inyectivas (uno a uno) , funciones epiyectivas (función sobre) y función biyectiva (función inyectiva y epiyectiva).

Def: (función inyectiva) Sea f: A→B función, se dice que es una función inyectiva (o uno a uno) si y solo si $\forall\, a \in Dom\, f(x), \forall\, b \in Dom\, f(x)$, se cumple que $f(a) = f(b) \Rightarrow$ a = b.

Observe que también se puede decir que f es inyectiva si y solo si $\forall\, a \in Dom\, f(x)$, $\forall\, b \in Dom\, f(x)$, se cumple que a $\neq$ b $\Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Ejemplo 4: Sea $f(x)$=$\frac{x+3}{x+2}$. Probar que $f(x)$ es inyectiva.

En particular observe que el $Dom\, f = \mathbb{R} - \{\text{-}2\}$. Luego para probar que f es inyectiva debemos aplicar la definición , esto es suponer que $\forall\, a \in Dom\, f(x), \forall\, b \in Dom\, f(x)$, se cumple que $f(a) = f(b)$ y probar que a=b.

$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a+3}{a+2}$=$\frac{b+3}{b+2} \Rightarrow$ (a+3)(b+2)=(b+3)(a+2) $\Rightarrow$ ab+2a+3b+6=ba+2b+3a+6
$\Rightarrow$ 2a+3b=2b+3a $\Rightarrow$ a=b.

Ejemplo 5: Sea $f(x)$=$2x^2 - x + 1$ ¿Es f una función inyectiva ?.
Supongamos que se cumple que $\forall\, a \in Dom\, f(x), \forall\, b \in Dom\, f(x) \Rightarrow$
$2a^2 - a + 1$=$2b^2 - b + 1$
$\Rightarrow 2a^2 - a = 2b^2 - b \Rightarrow 2(a^2 - b^2) = a - b \Rightarrow 2(a + b)(a - b) - (a - b) = 0.$
$\Rightarrow (a - b)(2(a + b) - 1) = 0 \Rightarrow a = b \vee 2a + 2b - 1 = 0.$

La ecuacion $2a + 2b - 1 = 0$ nos da la informacion que **hay a lo menos 2 elementos del dominio que tienen la misma imagen.** Por ejemplo si $a = 3$ ($3 \in Dom\, f$) entonces b= $-\frac{5}{2}$, luego se tiene que f(3)=f($-\frac{5}{2}$) pero $3 \neq -\frac{5}{2}$, asi f no es inyectiva.
Observe que el gráfico de esta función es representado aproximadamente por la Fig 8

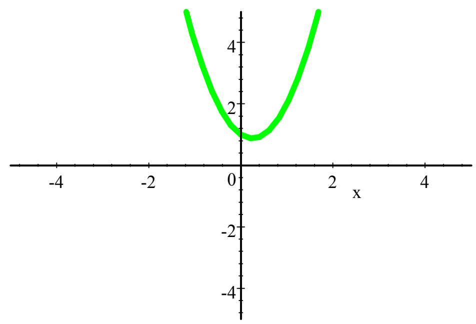


Fig 8

Ejemplo 6: Sea $f(x)$=| x | esta función no es inyectiva, en efecto se tiene -1 $\neq$ 1 pero se cumple que f(-1)=f(1).

El gráfico de f esta representado en la fig 9

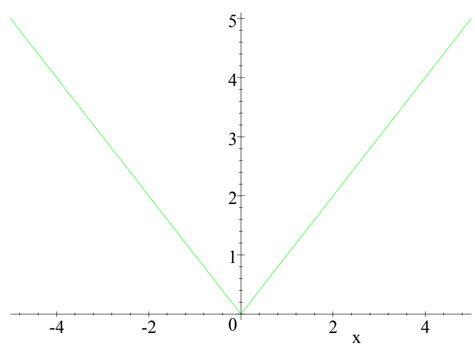


Fig 9

Ejemplo 7 : Sea $f(x)$=2x^2-x+1. Determine el maximo dominio para que la función f sea inyectiva.

En el ejemplo 5 probamos que esta función no es inyectiva.¿Como podemos obtener el máximo dominio para que esta función sea inyectiva ?
Para que sea inyectiva se debe cumplir que:
(2a+2b-1>0 $\vee$ 2a+2b-1<0) $\wedge$ a=b (Ver ejemplo 5).
$\Rightarrow$ ((4a $\geq$ 1 $\vee$ 4a $\leq$ 1)) $\Rightarrow$ a $\geq \frac{1}{4}$ $\vee$ a $\leq \frac{1}{4}$.

Esto nos dice que el máximo dominio es $[\frac{1}{4},\infty[\ \vee \ ]-\infty, \frac{1}{4}]$ para que la función considerada sea inyectiva..

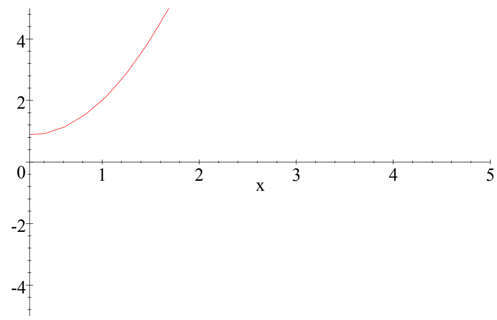


Fig 10

Observe que la tecnica usada para determinar el dominio donde f es inyectiva en el ejercicio 7 tiene a veces sus dificultades.

Ejemplo 8: Sea $f(x)=\frac{2x-1}{4-x^2}$ hacer restricciones para que la función sea inyectiva Observe que la grafica de esta función nos muestra que la función no es inyectiva.

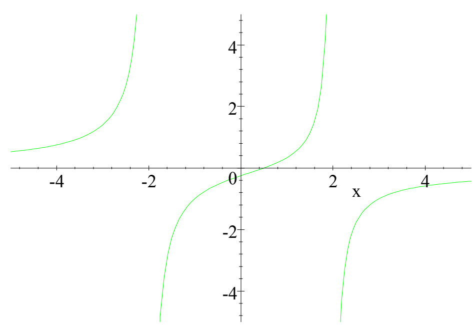


Fig 11

Si $f(a)=f(b) \Rightarrow \frac{2a-1}{4-a^2} = \frac{2b-1}{4-b^2} \Rightarrow 8a - 2ab^2 - 4 + b^2 = 8b - 2ba^2 - 4 + a^2$

$(a - b)(8 + 2ab - (a - b)) = 0$ para que esta igualdad se cumpla puede ocurrir que.

$a - b = 0 \wedge 8 + 2ab - a + b \neq 0$

$a = b \wedge 8+2ab-a-b \neq 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a + 8 \neq 0 \Rightarrow a^2 - a + 4 \neq 0$ lo que es cierto, pero no dice nada algebraicamente para determinar el dominio que haga que f sea inyectiva.

Ahora si usamos $a - b = 0 \wedge 8 + 2ab - a + b \neq 0 \Rightarrow a = b \wedge b \neq \frac{a-8}{2a-1}$ lo que significa que $\frac{a-8}{2a-1} \neq a$ (pues a=b) $\Rightarrow \frac{a-8}{2a-1} < a \vee \frac{a-8}{2a-1} > a$.

Resolviendo tenemos que $\frac{a-8}{2a-1} - a < 0 \vee \frac{a-8}{2a-1} - a > 0$.

$-\frac{2a^2-2a+8}{2a-1} < 0 \vee -\frac{2a^2-2a+8}{2a-1} > 0$

Por lo tanto como $2a^2 - 2a + 8 > 0$, $\forall$ a $\in$ $\mathbb{R}$, $2a - 1 > 0 \vee 2a - 1 < 0$
$\Rightarrow a > \frac{1}{2} \vee a < \frac{1}{2}$, luego para que f sea inyectiva podemos definirla por
f:] $-\infty, \frac{1}{2}$] $-$ {-2} $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x-1}{4-x^2}$
o tambien por
f:[$\frac{1}{2}$,∞[-{2} $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x-1}{4-x^2}$

La grafica de $f(x) = \frac{2x-1}{4-x^2}$ se mostro en el ejemplo 2

Def: (función epiyectiva) Sea f : A$\rightarrow$B, se dice que f es una función epiyectiva (o sobre) si y solo si $Recf = B$

Ejemplo 9: Sea f: $\mathbb{R}$-{ -1} $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.
Hacer restricciones para que f sea epiyectiva
Recordar que para verificar si una función es epiyectiva , se tiene que encontrar el $Recf$ y compararlo con el conjunto de llegada que en este caso es $\mathbb{R}$.

Buscando el recorrido de f se tiene $y = \frac{3x-2}{x+1}$
$\Leftrightarrow yx + y = 3x - 2 \Leftrightarrow yx - 3x = -2 - y$
$\Leftrightarrow x = \frac{-(2+y)}{y-3}$ por lo tanto $\frac{-(2+y)}{y-3} \in \mathbb{R}$ si $y \neq 3$, esto quiere decir que $Recf = \mathbb{R} - \{3\}$.

Asi decimos que la función f : $\mathbb{R}$ $-$ { -1} $\rightarrow$ $\mathbb{R} - \{3\}$ tal que $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ es epiyectiva.

Ejemplo 10 : Sea $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
Hacer restricciones para que la función f sea inyectiva y epiyectiva.

Observe que el dominio es $\mathbb{R}$-{-1,1}

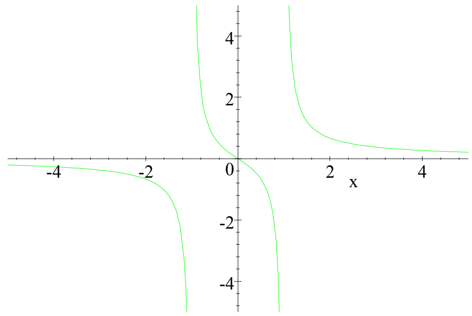
i) Veamos donde es inyectiva $f(a) = f(b) \Leftrightarrow \frac{a}{a^2-1} = \frac{b}{b^2-1} \Leftrightarrow$
$ab^2 - a = a^2b - b \Leftrightarrow ab^2 - a^2b - a + b = 0 \Leftrightarrow (b-a)(ab+1) = 0$

usemos a $\neq$ b $\wedge$ ab+1=0 $\Leftrightarrow$ a $\neq$ b $\wedge$ b=$\frac{-1}{a}$.
Luego $\frac{-1}{a} > a \vee \frac{-1}{a} < a$ resolviendo se tiene que $a > 0 \vee a < 0$.
Luego f sera inyectiva si el $Domf$=[0,∞[-{1} o el $Domf$=[-∞ ,0[-{ -1}

ii) Veamos ahora donde es epiyectiva y $= \frac{x}{x^2-1} \Leftrightarrow yx^2 - y = x \Leftrightarrow$
$yx^2 - x - y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y}$, luego el $Recf = \mathbb{R}$. (observe que para $x = 0$ $\Rightarrow y = 0$)
Asi concluimos que f:[0,∞ [-{1} $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ es inyectiva y epiyectiva.

Tambi$e$n podemos decir que f:[-∞,0[$-$ {-1} $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ es inyectiva y epiyectiva.

El grafico de $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ esta representado en la figura 8



{Def} (Función Biyectiva) Se dice que una función es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva.

Ejemplo 12. Probar que f:$\mathbb{R}-\{0\}$ → $\mathbb{R}$ $-$ { -1} tal que $f(x)=1-\frac{4x+1}{2x}$ es una función biyectiva.
Observe que $Domf$=$\mathbb{R}-\{0\}$ y el $Recf$=$\mathbb{R}$ $-$ { -1}.

Ahora probaremos primero que $f(x)$ es inyectiva
$f(a)$=$f(b)$ $\Rightarrow$ $1-\frac{4a+1}{2a}$=$1-\frac{4b+1}{2b}$ $\Rightarrow$ $\frac{4a+1}{2a}$=$\frac{4b+1}{2b}$ $\Rightarrow$ $a=b$.
Ahora debemos probar que es epiyectiva, esto significa que todo elemento de la llegada tiene una preimagen del dominio de f

y=$1-\frac{4x+1}{2x}$ $\Rightarrow$ $y=\frac{2x-4x-1}{2x}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{-1}{2(y+1)}$ esto nos confirma que el $Recf$=$\mathbb{R}$ $-$ { -1}
luego la función es biyectiva.

Ejemplo 13: Encuentre el dominio y recorrido más grande de modo que la función $f(x)=\sqrt{1-2x^2}$ sea biyectiva.

Encontremos el $Domf$

$$y=\sqrt{1-2x^2}\ \in\ \mathbb{R}\Rightarrow 1-2x^2\geq\ 0\Rightarrow\ (1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})\geq\ 0$$

	$-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}.\infty$
$1-x\sqrt{2}$	$+$	$+$	$-$
$1+x\sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$
$solucion$	$-$	$+$	$-$

Por lo tanto $Domf$=[$\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$]
El recorrido de f sera para cuando x=$\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}}$ $\in$ $\mathbb{R}$ con $y\geq\ 0$
$(1-y)(1+y)\geq\ 0\ \wedge\ y\geq\ 0$

	$-\infty,-1$	$-1,1$	$1,\infty$
$1-y$	$+$	$+$	$-$
$1+y$	$-$	$+$	$+$
$solucion$	$-$	$+$	$-$

Por lo tanto el $Recf$=[-1,1] $\cap$ [0,∞[=[0,1]
¿Donde es biyectiva ?

i) $f(a)=f(b) \Rightarrow \sqrt{1-2a^2}=\sqrt{1-2b^2} \Rightarrow 1-2a^2=1-2b^2$
$a^2-b^2=0 \Rightarrow$ (a + b)(a − b) =0 $\Rightarrow$ a=b $\vee$ a= − b
luego es inyectiva si se restringe el dominio de f a [0,$\frac{1}{\sqrt{2}}$] $\vee$ [-$\frac{1}{\sqrt{2}}$,0]

ii) La función es epiyectiva si $Recf$=[0,1]

Por lo tanto la función f : [0,$\frac{1}{\sqrt{2}}$]→ [0,1] tal que $f(x)=\sqrt{1-2x^2}$ es biyectiva.

Funciónes Compuestas

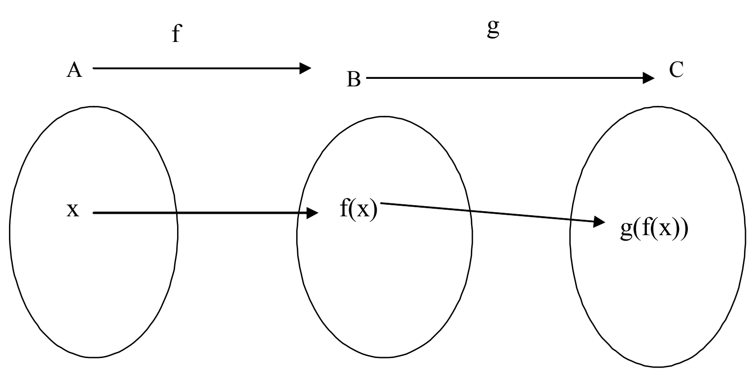
Def: Sean f y g funciones se define la función g compuesta con f por

$$\boxed{g\,o\,f=\{(x,y)\in Domf\times Rec\mathrm{g}: y=g(f(x))\}}$$

Observación :

De la definición de funciones compuesta se puede deducir

a)Si $x \in Domf$ entonces $f(x) \in Domg$ luego $g(f(x)) \in Recg$
b) ($g\,o\,f$)$(x)=g(f(x))$



c) Dom($g\,o\,f$)={ $x \in Domf/f(x) \in Domg$}

d) En general $g\,o\,f \neq f\,o\,g$
e) Dada dos funciones g y f ¿que condiciones se deben cumplir para poder definir $g\,o\,f$?
Se debe cumplir que el recorrido de la función f debe estar incluido en el dominio de la función g.

Ejemplo 14: Sean f:[-1,1] → $\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ y g: $\mathbb{R}$→ $\mathbb{R}$ tal que $g(x)$=2-x^2. Determinar $g\,o\,f$.
Es f.acil probar que el $Recf$=[0,1] $\subset$ $Domg$=$\mathbb{R}$, as$i$ se tiene $Dom\,g\,o\,f$=[-1,1] .
Ahora definamos $(g\,o\,f)(x)$
$(g\,o\,f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x^2}) =$ 2-$(\sqrt{1-x^2})^2$=$1+x^2$
as$i$ podemos definir ahora la función compuesta por
$g\,o\,f$: $[-1,1]$→ $\mathbb{R}$ tal que $g(f(x)) = 1+x^2$

¿Es posible ahora definir $f\,o$ g ?

Observe que el Rec g $=]-\infty$,2] no esta contenido en $[-1,1]$ luego no es posible definir bajo estas condiciones fog, sin embargo si hacemos restriciones para que $Recg \cap Domf \neq \Phi$ entonces si podemos definir fog.

Observe que $Recg \cap Domf = [-1,1]$, esto quiere decir que debemos encontrar todos los $x \in Domg$ tales que sus imagenes esten en [-1,1] luego tenemos

-1 $\leq 2-x^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x^2-3 \leq 0 \wedge x^2-1 \geq 0)$
$\Leftrightarrow [-\sqrt{3},\sqrt{3}] \cap (]-\infty, -1] \cup [1,\infty[\,)$=$[-\sqrt{3},-1] \cup [1,\sqrt{3}]$
Asi tenemos que $Domfog$= $[-\sqrt{3},-1] \cup [1,\sqrt{3}]$ y
$(fog)(x)$=$f(g(x))$=$f(2-x^2)$=$\sqrt{1-(2-x^2)^2}$

Conclución: fog:[-$\sqrt{3}$,-1] $\cup$ $[1,\sqrt{3}]$→ $\mathbb{R}$ tal que
$f(g(x))$=$\sqrt{1-(2-x^2)^2}$