Taller 3

Objetivo: Solución de Ecuaciones trigonometricas

Recordar que :

Primer cuadrante: $0 < \alpha < 90º$ entonces se tiene :

$sen\alpha > 0$, $cos\alpha > 0,$ $tang\ \alpha > 0,$ $cotg\alpha > 0,$ $sec\alpha > 0,$ $cosec\alpha > 0$

Segundo cuadrante : $90º < \alpha < 180º$ entonces se tiene :

$sen\alpha > 0,$ $cos\alpha < 0,$ $tang\alpha < 0,$ $cotg\alpha < 0,$ $sec\alpha < 0,$ $cosec\alpha > 0$

Tercer cuadrante : $180º < \alpha < 270º$ entonces se tiene :

$sen\alpha < 0,$ $cos\alpha < 0,$ $tang\alpha > 0,$ $cotg > 0,$ $sec\alpha < 0,$ $cosec\alpha < 0$

Cuarto cuadrante : $270º < \alpha < 360º$ entonces se tiene :

$sen\alpha < 0,$ $cos\alpha > 0,$ $tang\alpha < 0,$ $cotg < 0,$ $sec\alpha > 0,$ $cosec\alpha < 0$

Ejemplo 1: Si $sen\alpha = -0{,}3675\ \ Determinar\ \ \alpha\ \ con\ 0 < \alpha < 360º$

Solución: Como $sen\alpha < 0$ entonces los α buscados están en el III cuadrante y en el IV cuadrante, así $\alpha = sen^{-1}(-0,3675)$ luego $\alpha = 201{,}5615º$, $\alpha = 338{,}4385º$

Ejemplo 2: Si $cos\alpha = -0{,}2256\ \ Determinar\ \ \alpha\ \ con\ 0 < \alpha < 360º$

Solución: Como $cos\alpha < 0$ entonces los α buscados están en el II cuadrante y en el III

Luego $\alpha = cos^{-1}(-02256)$ entonces $\alpha = 103{,}038º$, $\alpha = 256{,}96º$

Ejemplo 3: Si $cotg\beta = 0{,}45\ Determinar\ \ \alpha\ \ con\ 0 < \alpha < 360º$

Solución: Observe que $cotg\alpha = \frac{1}{tag\alpha} = 0{,}45 \Longrightarrow tag\alpha = \frac{1}{0{,}45} = 2{,}2222$ por otra parte

$tag\alpha > 0$ entonces los α buscados están en el I cuadrante y en el III cuadrante

$\alpha = tag^{-1}(2{,}2222) \Longrightarrow \alpha = 65{,}772º$, $\alpha = 245{,}772$

Ejercicio:

1) Si $sec\alpha = 2{,}33\ \ Determinar\ \ \alpha\ \ con\ 0 < \alpha < 360º$

2) Si $cosec\beta = 3{,}25\ Determinar\ \ \beta\ \ con\ 0 < \beta < 360º$

3) Si $\cos(2\beta) = 0{,}345\ Determinar\ \ \beta\ \ con\ 0 < \beta < 360º$

Ahora veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo4: Si $sen\alpha = -0{,}3675\ \ Determinar\ \ \boldsymbol{\alpha}\ \ \boldsymbol{\epsilon}\ \boldsymbol{IR}$ (cambio la condición para α)

Solución : En este ejemplo se nos solicita en otras palabras encontrar la solución general

Para ellos buscamos en primer lugar la solución básica esto es $0 < \alpha < 360º$:

$\alpha = sen^{-1}(-0{,}3675) \Longrightarrow \alpha = 201{,}5615º$, $\alpha = 338{,}4385º$ (de acuerdo al ejemplo 1)

Ahora podemos encontrar la solución general:

$\alpha = 201{,}5615º + K\ 360º\ \ con\ \ k\epsilon\ \mathrm{Z}$

$\alpha = 338{,}4385 + K\ 360º\ con\ k\epsilon\mathrm{Z}$

La solución la escribimos formalmente $\{201{,}5615º + K\ 360º, 338{,}4385 + K\ 360º: k\epsilon\mathrm{Z}\ \}$

Ejemplo 5: Si $tag(3\alpha) = 0{,}679\ \ \ Determinar\ \ \alpha\ \ \epsilon\ IR$

Solución: A igual que el ejemplo anterior determinamos $0 < 3\alpha < 360º$ (solución básica y observe que el angulo se llama 3α)

$3\alpha = 34{,}17º$, $\qquad 3\alpha = 214{,}17º$

Ahora buscamos la solución general :

$3\alpha = 34{,}17º + K\ 360º \Longrightarrow \alpha = 11{,}39º + k\ 120º$

$3\alpha = 214{,}17º + K\ 360º \Longrightarrow \alpha = 71{,}39º + k\ 120º$

$\{11{,}39º + k\ 120º, 71{,}39º + k\ 120º: k\epsilon\mathrm{Z}\}$

Observe que: 34,17 +180=214,17

Asi podemos también escribir la solución anterior como sigue :

$3\alpha = 34{,}17º + K\ 180º \Longrightarrow \alpha = 11{,}39º + k\ 60º$

$\{11{,}39º + k60º\ :\ k\epsilon\mathrm{Z}\}$ (esto ocurre con la función tangente y contangente)

Ejemplo 6: Resolver la ecuación $2sen^2x - 5senx + 2 = 0$

Solución: es una ecuación cuadrática luego $senx = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} = \frac{5\pm3}{4}$

$senx = 2\ \vee\ senx = \frac{1}{2}$, de aquí se sabe que $senx = 2$ no tiene solución luego la solución sale de $senx = \frac{1}{2}$ podemos decir que la solución básica son: $x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}$

Así la solución general será :

$\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi K,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k:\ k\epsilon \mathrm{Z}\right\}$

Ejemplo7 : Resolver $\frac{sen(4x)}{1+\cos(4x)}=2-cotg(4x)$

Solución: $\frac{sen(4x)}{1+\cos(4x)}=2-cotg(4x) \Longrightarrow sen(4x)=\left(2-\frac{\cos(4x)}{sen(4x)}\right)(1+\cos(4x)$ con

$sen(4x)\neq 0\ \wedge 1+\cos(4x)\neq 0$

$$sen(4x)=\frac{(2sen(4x)-\cos(4x))}{sen(4x)}\ (1+\cos(4x) \Longrightarrow$$

$$sen^2(4x)=(2sen(4x)-\cos(4x))(1+\cos(4x)$$

$$1-cos^2(4x)=2sen(4x)+2sen(4x)\cos(4x)-\cos(4x)-cos^2(4x)$$

$$1=2sen(4x)+2sen(4x)\cos(4x)-\cos(4x) \Longrightarrow$$

$$0=2sen(4x)-1+(2sen(4x)-1)\cos(4x)$$

$0=(2sen(4x)-1)(\cos(4x)+1) \Longrightarrow 2sen(4x)-1=0\ \vee \cos(4x)+1=0$ pero sólo consideramos

$2sen(4x)-1=0$ (pues $\cos(4x)+1\neq 0$ condicion inicial)

Así se tiene: $sen(4x)=\frac{1}{2} \Longrightarrow 4x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $4x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Luego la solución será:

$$\left\{\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right\}$$