Trigonometría

SAG

Def 1.- Si la longitud de un arco subtendido por un arco es $\frac{1}{360}$ de la longitud de una circunferencia, entonces diremos que la unidad de medida de este se llamará grado sexagecimal.
Notación: Se anotará un grado sexagecimal por 1º

Def 2.-Se dice que el ángulo α tiene por medida un radián si este subtiende un arco de longitud igual al radio del círculo.

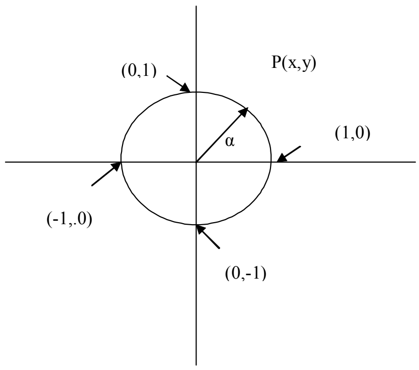
Estas definiciones nos permite encontrar una relación entre los ángulos medidos en radianes y loa ángulos medidos en grados.
Si α^{o} es un ángulo medido en grados y α^{r} es el ángulo medido en radianes entonces tenemos que

$$\frac{\alpha^{o}}{\alpha^{r}} = \frac{180}{\pi}$$

Usando esta relación se puede establecer por ejemplo que

α^{o}	1º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
α^{r}	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Consideremos ahora el conjunto $C(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}. x^2 + y^2 = 1\}$
Sea $P \in C(x,y)$ luego cuándo P toma distintas posiciones sobre la circunferencia entonces se tiene que $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$



Pero tambíen puede ser P determinado por un par de cordenadas (r,α) donde r es la longitud del segmento que une el origen O con el punto P y α es el ángulo cuyo vértice es el orígen medido desde el eje X en sentido contrario a las manecillas del reloj como lo indica la figura 1

Def 3. Se definen las siguientes funciones
a) $\cos : [0,2\pi] \to [-1,1]$ $\cos\alpha = \mathrm{Pr}_1(x,y) = x$
b) $sen : [0,2\pi] \to [-1,1]$ $sen\alpha = \mathrm{Pr}_2(x,y) = y$

Es inmediato que si $P(x,y) \in C$ entonces $x^2 + y^2 = 1$ luego se tiene

$$\boxed{\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$$

También es fácil observar que

$sen0 = 0$	$sen\pi = 0$
$sen\frac{\pi}{2} = 1$	$sen\frac{3\pi}{2} = -1$
$\cos 0 = 1$	$\cos\pi = -1$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

Las funciones sen y cos son epiyectivas, pero no son inyectivas en efecto tenemos
$sen0 = sen\pi$ pero $0 \neq \pi$
$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ pero $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
Prop 1. $\forall\alpha\beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta}$$

Demostración: Considere la figura 2

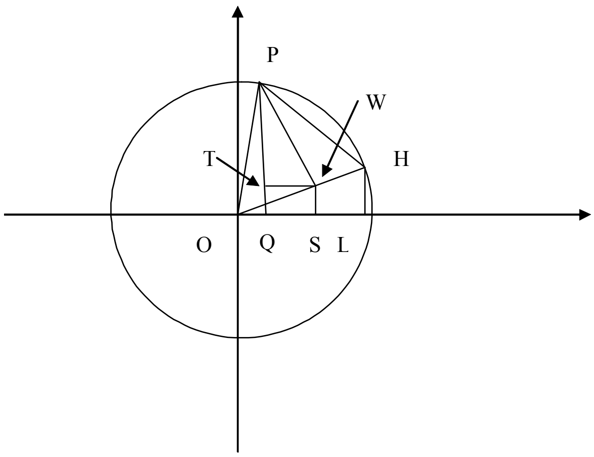


Fig 2

Sean $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle HOL$, $\sphericalangle\beta = \sphericalangle HOP, \overline{PQ} \perp \overline{OL}; \overline{PW} \perp \overline{OH};$
$\overline{WT} \perp \overline{PQ}; \overline{HL} \perp \overline{OL}, \overline{WS} \perp \overline{OL}$
Luego se tiene que
1.- $\triangle OLH \cong \triangle OSW \cong \triangle PTW$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \overline{OQ} = \overline{OS} - \overline{QS} = \overline{OS} - \overline{TW}$
3.-$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OW}}\overline{OW} - \dfrac{\overline{TW}}{\overline{PW}}\overline{PW}$

4.- Como $\dfrac{\overline{OS}}{\overline{OW}} = \dfrac{\overline{OL}}{\overline{OH}}$ y $\dfrac{\overline{TW}}{\overline{PW}} = \dfrac{\overline{LH}}{\overline{OH}}$ además $\overline{OH} = 1$

Entonces tenemos
$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{OL}}{\overline{OH}}\overline{OW} - \dfrac{\overline{LH}}{\overline{OH}}\overline{PW} = \overline{OL}\,\overline{OW} - \overline{LH}\,\overline{PW}$

5.- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$.

Observe que si aplicamos la Prop1 con la condición $\alpha = \beta$ se tiene

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

Def 4.- Se dice que una función es $f : A \to B$ es períodica con período p
si $f(x+p) = f(x)$

Ejemplo. La función $f(x) = \cos x,$ es periódica conperíodo $p = 2\pi$

En efecto $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ (aplicar Prop 1)

Def 5.- Se dice que una función $f : A \to B$ es una función par si $f(x) = f(-x)$
y es impar si $f(-x) = -f(x)$

Ejemplos:
La función $f(x) = x^2 - x^4$ es una función par
La función $f(x) = x^3 - x$ es una función impar

Prop 2.- $\forall\alpha \in \mathrm{R}$

a) $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ Función par

b) $sen(-\alpha) = -sen\alpha$ Función impar
Dem Considere la figura 3

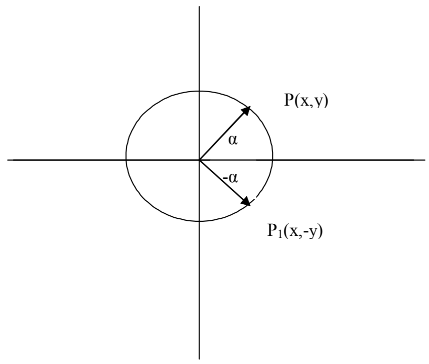


Fig 3

Dem : Sea $P(x,y) \in C$ luego se tiene
a) $\cos\alpha = \Pr_1(x,y) = x$
b) $\cos(-\alpha) = \Pr_1(x,-y) = x$
luego se tiene que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Ejercicio: Demuestre que $sen(-\alpha) = -sen\alpha$

Usando la Prop 1 y Prop 2 se demuestra la siguiente propiedad

Prop 3 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + sen\alpha sen\beta}$$

Dem: (ejercicio) Basta observar que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta))$

Obsevación:

1.-De la definición 3 y Prop 2 puede concluirse

$sen\alpha > 0$	$\forall \alpha \in \left]0, \pi\right[$
$\cos\alpha > 0$	$\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$
$sen\alpha < 0$	$\forall \alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[$
$\cos\alpha < 0$	$\forall \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Este último cuadro lo identificaremos hablando de CUADRANTES como sigue

Primer cuadrante $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Segundo cuadrante $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Tercer cuadrante $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Cuarto cuadrante $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

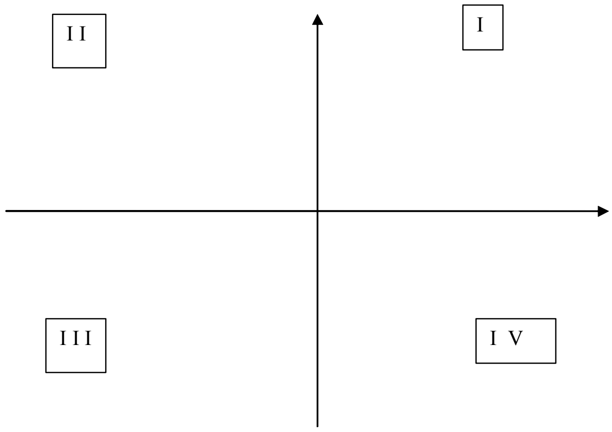


Fig 4

2.- Usando la Prop 3 se puede demostrar que $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sen\alpha$ y $sen(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ esta identidad nos permite demostrar la siguiente propiedad

Prop 4.- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cos\beta + sen\beta \cos\alpha}$$

Dem: $sen(\alpha+\beta) = \cos(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)) \ = \cos((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta)$

$= \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta + sen(\frac{\pi}{2}-\alpha)sen\beta = sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$

Observación:
1.- De la propiedad 4 y haciendo $\alpha = \beta$ se tiene

$$\boxed{sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha}$$

2. Usando $sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha+(-\beta))$ y la propiedad 4 se demuestra:

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha}$$

Usando las propiedades anteriores se pueden demostrar las siguientes identidades

Ejemlos
Probar que
a) $sen\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\alpha}{2}$
b) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
c) $sen^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
d) $sen(\alpha+\beta)sen(\alpha-\beta) = sen^2\alpha - sen^2\beta$

Dem:
a) Se sabe que
$sen2\theta = 2sen\theta\cos\theta$ (*)
Si llamamos $2\theta = \alpha \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}$ y reemplazando en (*) se tiene
$sen\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\alpha}{2}$

b) Se sabe que
$sen^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ y que $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$
luego se tiene
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

c) Este se demuestra igual que el ejemplo (b)

d) Usando las prop 3 y prop 4 se tiene
$sen(\alpha+\beta)sen(\alpha-\beta) = [sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha][sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha]$
$= (sen\alpha\cos\beta)^2 - (sen\alpha\cos\beta)(sen\beta\cos\alpha) + (sen\beta\cos\alpha)(sen\alpha\cos\beta) - (sen\beta\cos\alpha)^2$
$= (sen\alpha\cos\beta)^2 - (sen\beta\cos\alpha)^2 = sen^2\alpha(1-sen^2\beta) - sen^2\beta(1-sen^2\alpha)$
$= sen^2\alpha - sen^2\alpha sen^2\beta + sen^2\beta sen^2\alpha - sen^2\beta = sen^2\alpha - sen^2\beta.$

Relación entre las funciones trigonométricas y los triángulos rectángulos

Sea $\triangle EOD$ rectángulo como la figura y $OC = 1, \alpha = \sphericalangle EOD$

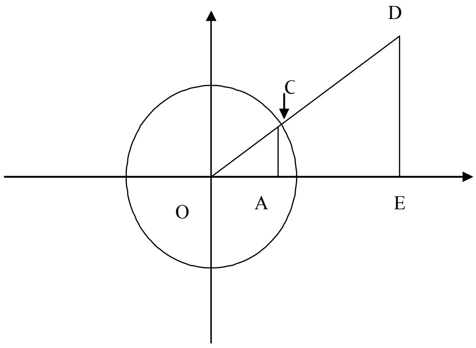


Fig 5

Se tiene entonces que los triángulos OAC y OED son semejantes (tienen tres ángulos iguales)

Luego se tiene

1.- $\frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OD} \Rightarrow OA = \frac{OE}{OD} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{OE}{OD}$

Observe que en el $\triangle OED$ se tiene que OE es el cateto adyacente y OD es la hipotenusa

2.- $\frac{CA}{OC} = \frac{DE}{OD} \Rightarrow CA = \frac{DE}{OD} \Rightarrow sen\alpha = \frac{DE}{OD}$

Observe que en el $\triangle OED$ se tiene DE es el cateto opuesto al $\sphericalangle\,\alpha$

Con esta relación podemos aplicar las funciones seno y coseno a los triángulos rectángulos como lo demostramos en el párrafo anterior, esto es

a) $\cos\alpha = \dfrac{cateto \text{ adyacente}}{hipotenusa}$

b) $sen\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{hipotenusa}$

Ahora estamos en condiciones de definir otras funciones trigonómetricas

Def 6.- $\forall\alpha \in \mathbb{R}$

a) $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ Función tangente

b)$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$ Función cotangente

c) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ Función secante

d) $\cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$ Función cosecante

De la definición 6 podemos concluir que aplicado a un triángulo rectángulos estas funciones serán

1.- $tg\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

2.- $ctg\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

3.- $\sec\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

4.- $\cos ec\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

También de la definición 6 se tienen las siguientes identidades

a) $tg\alpha\cos\alpha = sen\alpha$
b) $ctg\alpha sen\alpha = \cos\alpha$
c) $\sec\alpha\cos\alpha = 1$
d) $\cos ec\alpha sen\alpha = 1$
e) $tg\alpha ctg\alpha = 1$

Apliquemos estos datos para calcular funciones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º, y 60º

I) Considere un triángulo equilátero de lado de longitud 1 como la figura 6

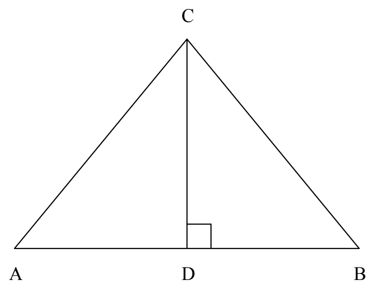


Fig 6

Tenemos entonces que el $\sphericalangle CAD = 60º$ y el $\sphericalangle DCA = 30º$, además $AD = \frac{1}{2}$, y aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle ADC$ se obtiene que $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Luego podemos afirmar que

α	$sen\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$\cos ec\alpha$
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

II) Consideremos ahora un triángulo isósceles rectágulo como la figura 7, donde $AB = 1$ y $BC = 1$

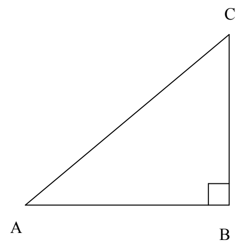


Fig 7

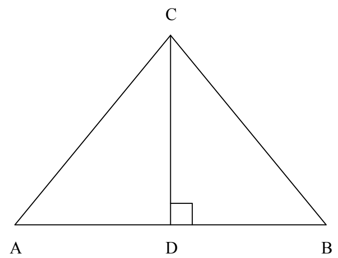
Así se tiene que $AC = \sqrt{2}$

α	$sen\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$\cos ec\alpha$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

También se pueden encontrar valores de ángulos como por ejemplo

$$sen125º = sen(180º - 45º) = sen45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 330º = \cos(360º - 30º) = \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tg125 = tg(180º - 45º) = -tg45º = -1$$

Ejercicio En el gráfico siguiente se tiene un triángulo cualquiera. Demuestre que el área está dada por $A = \frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AC}sen\alpha$ con $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle BAD$



Dem: Sabemos que el área es $A = \frac{1}{2}Base \times Altura$
Si consideramos el triángulo rectángulo ADC tendremos $sen\alpha = \frac{CD}{AC} \Rightarrow$
$CD = ACsen\alpha$ reenplazamos en $A = \frac{1}{2}\overline{AB}\overline{CD}$ y tenemos $A = \frac{1}{2}\overline{AB}\overline{AC}sen\alpha$

Prop 5 $\forall\alpha,\beta$

$$\boxed{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}}$$

Prop 6 $\forall\alpha,\beta$

$$\boxed{ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}}$$

Observe que si hacemos $\alpha = \beta$ en la propiedad 5 y 6 se obtiene

a) $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

b) $ctg2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$

GRAFICAS DE LA FUNCION SEN, COS Y TG

1. Gráfica de $f(x) = senx$

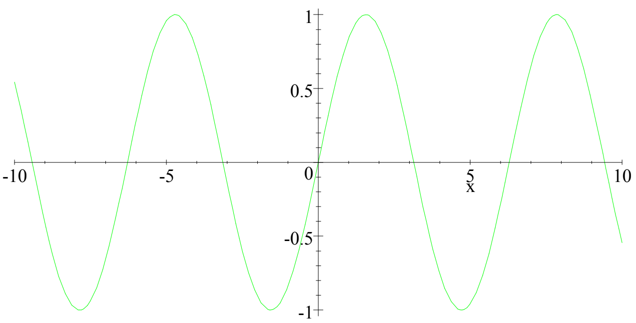


Fig 8

2.- Gráfica de $f(x) = \cos x$

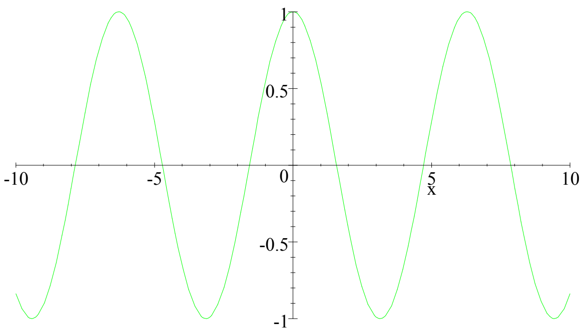


Fig 9

3.- Gráfica de $f(x) = tg\alpha$

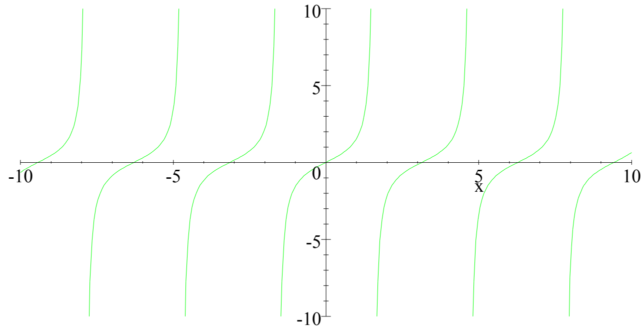


Fig 10

OBSERVE LAS GRAFICAS DE SEN Y COS

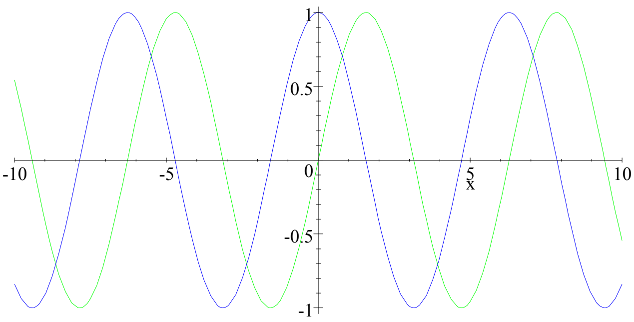
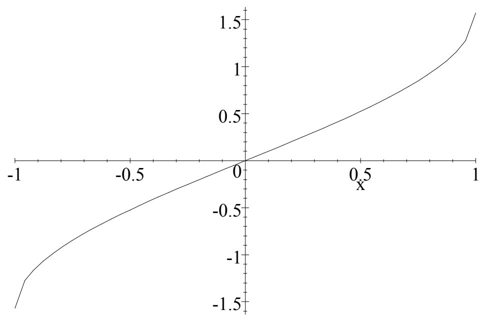
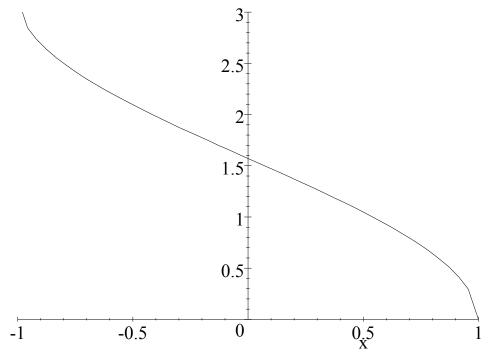


Fig 11

Se verifica que ambas funciones no son inyectivas, pero si hacemos una restricción del dominio a $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en el caso de $f(x) = senx$ y a $[0, \pi]$ en el caso que $f(x) = \cos x$ entonces si se tine que ambas funciones son biyectivas y por lo tanto tienen una función Inversa.



$$f(x) = \sin^{-1}x$$



$f(x) = \cos^{-1}x$

Observación:
La función inversa de $f(x) = senx$ se llama función Arco$senx = sen^{-1}x$
y la función inversa de $f(x) = \cos x$ se llama función Arcocos$x = \cos^{-1}x$
Luego se tiene que
$\alpha = Arcsenx \Leftrightarrow sen\alpha = x$
$\alpha = Arc\cos x \Leftrightarrow \cos\alpha = x$
De aquí en adelante nos referiremos en general a la relación inversa de las funciones trigonométricas.
Recuerde el siguiente gráfico

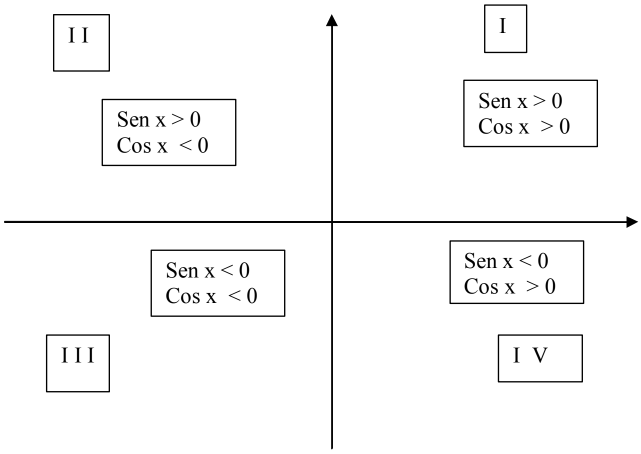


Fig 12

Ahora estamos en condiciones de resolver algunas ecuaciones trigonómetricas

Def Se dice que un conjunto S_0 es el conjunto solución principal de una ecuación trigonométrica sí y sólo sí $S_0 = \{x \in [0, 2\pi] : f(\alpha) = 0\}$

Ejemplo:Determine el conjunto solución principal de la ecuación $senx = \frac{1}{2}$
Solución:
1.- La función $senx > 0$ en el I cuadrante y en el II cuadrante
2. Ahora $senx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = arcsen\frac{1}{2}$ $(x = sen^{-1}x) \Rightarrow$
$x = 30º \vee x = 150º$
3 El conjunto solución principal es el conjunto

$S_0 = \{30^o, 150^o\}$

Ejemplo: Determine el conjunto solución principal de la ecuación $senx = -\frac{1}{2}$
Solución:
1. La función $senx < 0$ en el III y IV cuadrante
2.- $senx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = arcsen\frac{1}{2} \Rightarrow x = 210^o \vee x = 330^o$
3.- El conjunto solución principal será
$S_0 = \{210^o, 330^o\}$

Ejemplo: Determine el conjunto solución principal de la ecuación $\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$
1.- En este caso la ecuación es de 2º grado, por lo tanto su solución será
$\tan x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \tan x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$
2. Luego hay solución en donde $\tan x > 0$ y donde $\tan x < 0$
3 $\tan x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} > 0$ aquí hay solución en el I y III cuadrante
por lo tanto $x = 74^o, 19'$ y $x = 254^o 19'$
4.- $\tan x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} < 0$ así hay solución en el II y IV cuadrante
por lo tanto $x = 150^o 41'$ y $x = 330^o 41'$
5. El conjunto solución será
$S_0 = \{74^o, 19', 150^o 41', 254^o 19', 330^o 41'\}$

Def Se dice que S es el conjunto solución general de una ecuación trigonómetrica $y = f(x)$ si $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$

Ejemplo: Resolver $1 - senx = \cos x$
1.- Como $\cos x = \sqrt{1 - sen^2 x}$ entonces
$1 - senx = \sqrt{1 - sen^2 x} \quad ()^2$
$1 - 2senx + sen^2 x = 1 - sen^2 x$
$2sen^2 x - 2senx = 0$
$2senx(senx - 1) = 0$
$senx = 0 \vee senx = 1$
2.-lo que nos da las siguientes posibles soluciones principales
$x = 0^o, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = 2\pi$
Por comprobación se tiene que son soluciones principales
$x = 0^o, x = \frac{\pi}{2}, x = 2\pi$
3.- Así la solución general será

$S = \left\{0 + 2K\pi, \frac{\pi}{2} + 2K\pi\right\}$ con $k \in \mathbb{R}$

Ejemplo: Resolver $sen2x = \cos x$
1.- Como $sen2x = 2senx\cos x$ entonces tenemos la ecuación
$2senx\cos x - \cos x = 0$

$2\cos x(2senx - 1) = 0$
$\cos x = 0 \vee 2senx - 1 = 0$
$\cos x = 0 \vee senx = \frac{1}{2}$

2.- Así las soluciones principales serán
para $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$
para $senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

3.- Así la solución general será
$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2K\pi, \frac{5\pi}{6} + 2K\pi, \frac{\pi}{2} + K\pi, \right\}$

APLICACION SOBRE TRIANGULOS EN GENERAL

En la fig 13 sea triángulo ABC cualquiera $CE = h_c, \sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle BAC = \alpha$ $\sphericalangle ABC = \beta$, $AC = b, AB = c, BC = a$ y sea O el centro de la circunferencia

I Ley de los senos

En un $\triangle ABC$ con ángulos agudos se cumple que

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

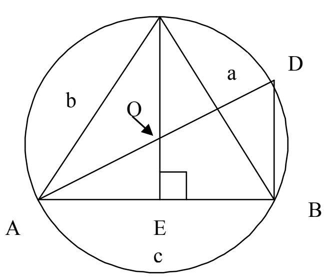


Fig 13

Dem:

En el $\triangle AEC$ se tiene $sen\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = bsen\alpha$

En el $\triangle BEC$ se tiene $sen\beta = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = asen\beta$

Luego se tiene $bsen\alpha = asen\beta \Rightarrow \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$

Analogamente se demuestra que $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma}$ y que $\frac{c}{sen\gamma} = \frac{b}{sen\beta}$

Ejercicio :

Demostrar que $\frac{a}{sen\alpha} = 2r$ siendo r el radio de la circunferencia

Ayuda : Observe que el triángulo ABD de la figura 13 es rectángulo en B y $\sphericalangle ADB = \gamma$.

II Ley del coseno

En un $\triangle ABC$ cualquiera se cumple

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

c)..$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Dem En la fig 14 sean $AD = u, DB = v, AC = b, BC = a, AB = c, h_c = CD$

$\alpha = \sphericalangle BAD, \beta = \sphericalangle ABC$ y $\gamma = \sphericalangle ACB$

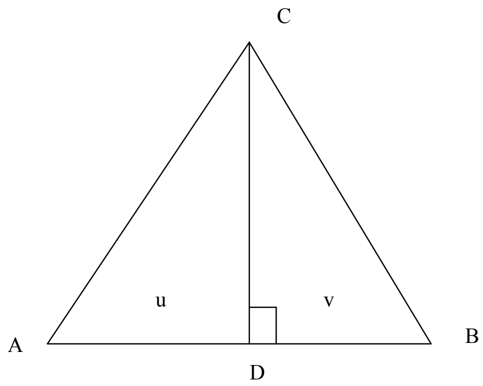


Fig 14

En el $\triangle ADC$ se tiene $b^2 = u^2 + h_c^2$ y $\cos\alpha = \dfrac{u}{b}$
luego $h_c^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2$

En el $\triangle BDC$ se tiene $a^2 = v^2 + h_c^2$ (*)
como $v = c - u \Rightarrow v = c - b\cos\alpha$
reemplazando en (*) se tiene
$a^2 = (c - b\cos\alpha)^2 + b^2 - (b\cos\alpha)^2 \Rightarrow$
$a^2 = c^2 - 2cb\cos\alpha + (b\cos\alpha)^2 + b^2 - (b\cos\alpha)^2$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$

Ejemplo. Determine los ángulos de un triángulo en que uno de los ángulos interiores es mayor que 90º
Considere la figura y observe que si $\alpha > 90º$,$\alpha = \sphericalangle BAC$ entonces

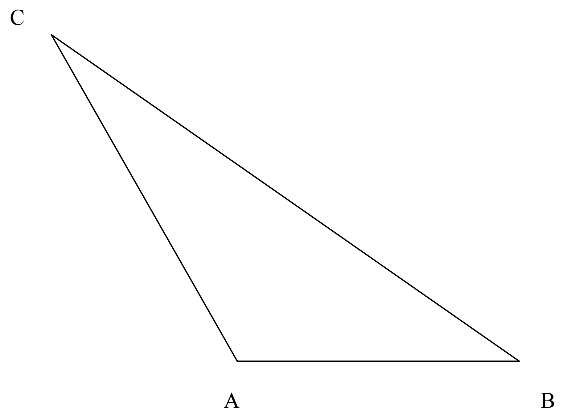


Fig 15

$\beta = 180 - \alpha - \gamma < 90^{o}$, $\gamma = 180^{o} - \alpha - \beta < 90^{o}$

$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow$

$\beta = \arccos(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac})$

analogamente

$\gamma = \arccos(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})$

observe que $\beta + \gamma < 90^{o}$ y que $\alpha = 180^{o} - (\beta + \gamma)$

así α queda determinado.

Ejemplo Resolver el triángulo dados los lados $a = 71.6, b = 33.4$ y $c = 60.24$.

Debemos determinar α, β y γ que son los ángulos interiores de vértices A, B y C.

Dados los datos usaremos el teorema del coseno

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{(33.4)^2 + (60.24)^2 - (71.6)^2}{2(33.4)(60.24)} = -9.4965 \times 10^{-2} \Rightarrow \alpha = 93^{o}54\prime 57,5"$

Aplicamos ahora el teorema del seno y tenemos

$\dfrac{sen\beta}{sen\alpha} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow sen\beta = \dfrac{b}{a}sen\alpha \Rightarrow sen\beta = \dfrac{33.4}{60.24}sen(93.916^{o})$

$sen\beta = 0.55192 \Rightarrow \beta = 37,22^{o}$

así $\gamma = 180^{o} - 93.916^{o} - 37.22^{o} = 48.864^{o}$

Ejemplo En la figura $\triangle ABC$ esta inscrito en una circunferencia de centro O

Demuestre que $a = 2rsen\alpha, b = 2rsen\beta$ y $c = 2rsen\gamma$

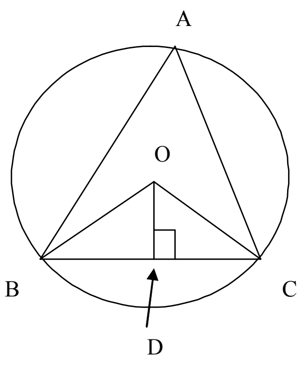
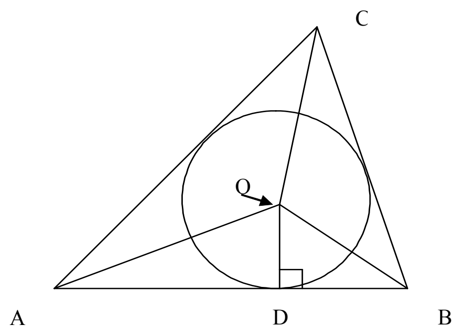


Fig 16

Sean $\alpha = \sphericalangle BAC, \beta = \sphericalangle ABC$ y $\gamma = \sphericalangle ACB$ de la figura
todos son ángulos inscritos, luego se tiene $\alpha = \sphericalangle BOD \Rightarrow$
$BD = rsen\alpha \Rightarrow a = BC = 2BD = 2rsen\alpha$
Luego se tiene que $a = 2rsen\alpha$
Por otra parte como $\frac{sen\alpha}{sen\beta} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = a\frac{sen\beta}{sen\alpha}$ reemplazando
$b = a\frac{sen\beta}{\frac{a}{2r}} \Rightarrow b = 2rsen\beta$
Analogamente se demuestra que $c = 2rsen\beta$

Ejercicio: **Demuestre que el área** A **del triángulo del ejemplo anterior esta dado por** $A = 2r^2 sen\alpha sen\beta sen\gamma$

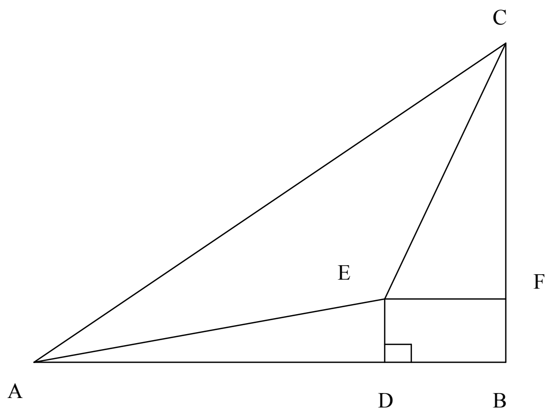
Ejemplo Demostrar que el radio r de una circunferencia inscrita en un triángulo de área A y perímetro p está dado por $r = \frac{2A}{p}$



El *área* solicitada está dada por
A =suma de las áreas de los triángulos AOB, COB y COA

$$A = \tfrac{1}{2}rc + \tfrac{1}{2}ra + \tfrac{1}{2}rb = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{rp}{2} \Rightarrow r = \frac{2A}{p}$$

Ejemplo: Desde un plano horizontal se observa la cima de un edificio con un ángulo de 45º. Si después de caminar 500 mts en la misma dirección de la cima del edificio con una pendiente de 15º respecto al plano horizontal se observa ahora la cima con un ángulo de 75º. Hallar la altura del edificio. Considere el gráfico siguiente, con BC la altura del edificio, $\sphericalangle DAF = 15º$ $\sphericalangle BAC = 45º, \sphericalangle FEC = 75º, AE = 500$



$CB = CAsen45$ (considerando $\triangle ABC$)

Por otro lado se pueden determinar facilmente el

$\sphericalangle ECA = 30º$ y aplicando el teorema del seno al $\triangle AED$

se tiene $\dfrac{sen15}{AE} = \dfrac{sen120}{AC} \Rightarrow AC = AE\dfrac{sen120}{sen15} \Rightarrow AC = 500\dfrac{sen120}{sen15}$

luego $AC = 2037$ aproximadamente$\Rightarrow$ $CB = 2037sen45$ $\Rightarrow$$\underline{CB = 1323.}$