Taller2

Objetivo: Conocer identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son relaciones equivalentes que permiten hacer aplicaciones y cálculos simplificados

1) Así del taller 1 podemos deducir algunas :

$tang\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\alpha}$ con $\cos\alpha \neq 0$

$cotang\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$ con $sen\ \alpha \neq 0$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ con $\cos\alpha \neq 0$

$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ con $sen\ \alpha \neq 0$

2) Un segundo grupo esta dado por:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$(tang\ \alpha)(cotang\ \alpha) = 1$

$sec^2\alpha = 1 + tag^2\alpha$

$cosec^2\ \alpha = 1 + cotg^2(\alpha)$

Ejemplos:

1) Demostrar que $cosec\ \alpha + cotaga)(1 - \cos\alpha) = sen\ \alpha$

Solucion: usando las identidades correspondientes se tiene

$$(cosec\ \alpha + cotang\alpha)\left(1 - \cos\alpha\right) = \left(\frac{1}{sen\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}\right)\left(1 - \cos\alpha\right) = \left(\frac{1 - \cos\alpha}{sen\ \alpha}\right)(1 + cos\alpha)$$
$$= \frac{(1 - cos^2\alpha)}{sen\ \alpha} = \frac{sen^2\alpha}{sen\alpha} = sen\ \alpha$$

2) Demostrar que: $\sec\alpha - \cos\alpha = (tang\alpha)(sen\alpha)$

Solución: $\sec\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{cos\alpha} - \cos\alpha = \frac{1-cos^2\alpha}{cos\alpha} = \frac{sen^2\alpha}{cos\alpha} = \frac{(sen\alpha)}{cos\alpha}(sen\alpha) = (tag\alpha)(cos\alpha)$

3) Demostrar que : $\frac{1+cos^2(2\alpha)}{sen^2(2\alpha)} = 2cosec^2(2\alpha) - 1$

Solución: $\frac{1+cos^2(2\alpha)}{sen^2(2\alpha)} = \frac{1}{sen^2(2\alpha)} + \frac{cos^2(2\alpha)}{sen^2(2\alpha)} = cosec^2(2\alpha) + cotang^2(2\alpha) =$
$cosec^2(2\alpha) + (cosec^2(2\alpha) - 1) = 2cosec^2(2\alpha) - 1$

Ejercicios:

1) Demostrar

a) $\frac{sen(3\alpha)+\cos(3\alpha)}{\cos(3\alpha)} = 1 + tang(3\alpha)$

b) $(sec^2(2\beta)(cosec^2(2\beta) = sec^2(2\beta) + cosec^2(2\beta)$

c) $\frac{sen(\frac{3\alpha}{2})}{\mathrm{cosec}\,(\frac{3\alpha}{2})} + \frac{\cos(\frac{3\alpha}{2})}{\sec(\frac{3\alpha}{2})} = 1$

d) $\frac{sen^3(\gamma)+cos^3(\gamma)}{sen(\gamma)+\cos(\gamma)} = (1 - (sen(\gamma)(\cos(\gamma))$

2) Simplificar al máximo cada una de las siguientes expresiones

a) $(\cot(3\alpha) + cosec(3\alpha))(tang(3\alpha) - sen(3\alpha))$

b) $\frac{sen^3(2\delta)-cos^3(2\delta)}{sen(2\delta)-\cos(2\delta)}$

c) $\frac{cosec\,(\alpha)+1}{\left(\frac{1}{sen^2(\alpha)}\right)+cosec(\alpha)}$

Ahora veremos algunas propiedades que permitirán mas adelante obtener identidades que se necesitan conocer permanentemente.

1) $\boldsymbol{\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)}$ **(por eso se dice que es una función par)**
$\boldsymbol{sen(-\alpha) = -sen(\alpha)}$ **(en este caso se dice que es una función impar)**

2) $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = (cos\alpha)(cos\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)}$
$\boldsymbol{sen(\alpha+\beta) = (sen\alpha)\cos(\beta) + sen(\beta)\cos(\alpha)}$

De estos dos puntos se pueden deducir fácilmente algunas identidades como por ejemplo:
a) $\cos(2\alpha)$ y $sen(2\alpha)$
b) $\cos(\alpha-\beta)$ y $sen(\alpha-\beta)$

Veamos:
a) $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha)$ ahora aplicamos el punto (2) $\cos(\alpha+\beta)$ en que hacemos $\alpha = \beta$ y obtenemos:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = (cos\alpha)(cos\alpha) - (sen\alpha)(sen\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

La deducción es entonces :

$\boxed{\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)}$ (**esta identidad se debe tener siempre presente**)

De la misma manera se obtiene:

$\boxed{sen(2\alpha) = 2(sen\alpha)(cos\alpha)}$

b) $sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha+(-\beta))$ ahora se debe aplicar punto (2) y después punto (1)
$sen(\alpha)\cos(-\beta) + sen(-\beta)\cos(\alpha) = sen(\alpha)\cos(\beta) - sen(\beta)\cos(\alpha)$

Luego tenemos la identidad:

$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) - sen(\beta)\cos(\alpha)$

Ejercicio: Probar que $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$

Ejercicios: Desarrolle los siguientes ejemplos:

a) $\cos(180º - \alpha)$

b) $\mathrm{sen}(\pi + \theta)$

c) $sen\,(\alpha - 90º)$

d) $\cos(90º + \alpha - \beta)$

2) Demostrar las identidades:

$$cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$sen^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$sen(\beta + \gamma)sen(\beta - \gamma) = sen^2(\beta) - sen^2(\gamma)$$

3) Si $tang(\alpha + \beta) = \frac{tang(\alpha) + tang(\beta)}{1 - tang(\alpha)tang(\beta)}$ obtenga la identidad de

a) $tang(2\alpha)$

b)$tang(\alpha - \beta)$

4) Si $cotg(\alpha + \beta) = \frac{cotg(\alpha)ctg(\beta) - 1}{cotg(\alpha) + cotg(\beta)}$ obtenga la identidad de :

a) $cotg(2\alpha)$

b) $cotg(\alpha - \beta)$