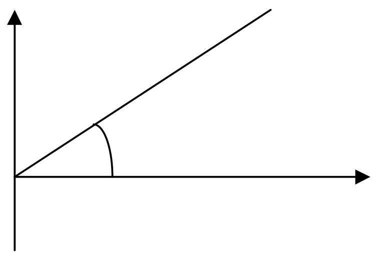
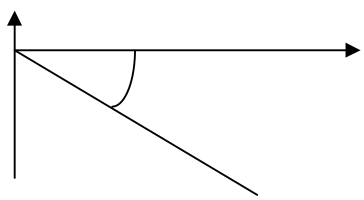
Taller 4

Objetivo: Aplicar el teorema del seno y del coseno

Recordar en primer lugar que se entiende por ángulo de Elevación y ángulo de Depresión



Ángulo de elevación (ángulo sobre la horizontal)

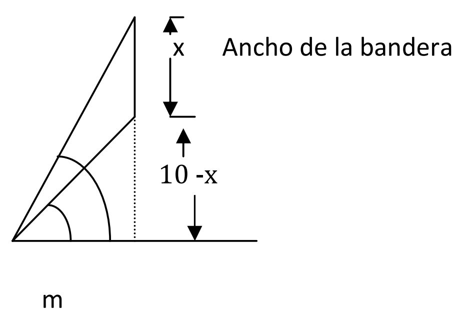


Angulo de depresión (ángulo bajo la horizontal)

Ejemplo1: Una bandera esta atada a un mástil de una altura de 10 pies . Los ángulos de elevación al punto superior e inferior son de 60º y 30º respectivamente. Determinar el ancho de la bandera.

Solucion:

Una representación gráfica ayuda a tener una visualización del problema



Sea m el cateto adyacente a los angulos dados luego se tiene :

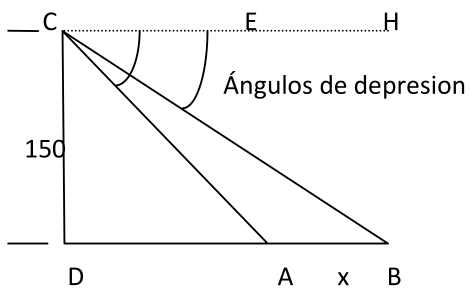
$$tg60º = \frac{10}{m} \Longrightarrow m = \frac{10}{tag60º} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Longrightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Luego $tag30º = \frac{10-x}{m} \Longrightarrow m = \frac{10-x}{tag30º} \Longrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} tag\ 30º = 10 - x$

$10 - x = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$

Ejemplo: Desde lo mas alto de una roca de 150 pies de altura, los ángulos de depresión de dos botes situados al sur del observador son de 15º y 75º Determinar la distancia que hay entre ellos .

Solucion : Representación grafica del problema



$< DCA = 15º$ luego $tag\ 15º = \frac{DA}{150} \Rightarrow DA = 150\ tag15º \Longrightarrow DA =$40.19

Por otro parte : $< DCB = 75º\ luego\ \ tag75º = \frac{DA+AB}{150} = \frac{DA+x}{150}$

$x = 150tag75º - 40.19 = 519.61$

Teorema del seno y del coseno

El teorema del seno y del coseno nos permiten relacionar ángulos y lados de un triangulo cualquiera, para ellos podemos considerar cuatro casos generales

i) Dados un lado y dos angulos

ii) Dados dos lados y uno de los ángulos opuestos

iii) Dados dos lados y el ángulo comprendido entre estos lados

iv) Dados tres lados

Teorema del seno se aplica cuando se conoce

I) dos lados y un angulo opuesto a estos lados

ii) dos angulos y un lado

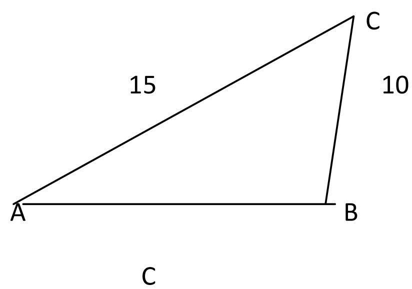
$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

Observe que la relación involucra las siguientes ecuaciones: $\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}$, $\frac{a}{sen\alpha}=\frac{c}{sen\gamma}$, $\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$

Ejemplo:

Sea triangulo ABC cuaquiera si a= 6 , b= 8 y $\alpha = 35º$ determinar c y los angulos en B y en C

Solucion: Representacion grafica del problema



Aplicando el teorema del seno se tiene :

$\frac{10}{sen35}=\frac{15}{sen\beta} \Longrightarrow sen\beta = \frac{15(sen35)}{10} \Longrightarrow sen\beta = 0{,}86 \Longrightarrow \beta = 59{,}35º \; (\beta = 120{,}65\;) **$

Por otro lado se tiene que: $\alpha+\beta+\gamma = 180 \Longrightarrow \gamma = 85{,}65$

$$\frac{10}{sen35}=\frac{c}{sen85{,}65} \Longrightarrow c = \frac{10sen85{,}65}{sen35} \Longrightarrow c = 17{,}38$$

<u>Observe que cuando se dan dos lados y uno de los angulos opuesto puede ocurrir que haya mas de una solución resuelva el ejercicio considerando el caso</u>**

Ejemplo2. Dado el triángulo ABC con $\alpha = 48º$, $\beta = 57 \; y \; c = 47$ determinar a y b.

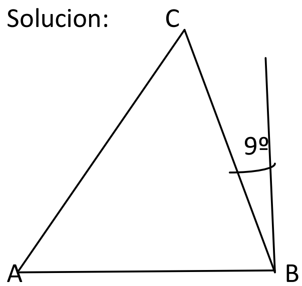
Solucion: $\alpha+\beta+\gamma = 180 \Longrightarrow \gamma = 75º$

$$\frac{47}{sen75}=\frac{a}{sen48} \Longrightarrow a = \frac{47sen48}{sen75} \Longrightarrow a = 36{,}15$$

$$\frac{47}{sen75}=\frac{b}{sen57} \Longrightarrow b = \frac{47sen57}{sen75} \Longrightarrow b = 40{,}8$$

Ejemplo: Desde la tierra se observa el sol con un angulo de 70º , un poste inclinado con un angulo de 9º respecto a una dirección opuesta al sol , refleja una sombra de 23 mts al nivel del suelo. Determinar la altura del poste.

Solucion:



$< A = 70º , < B = 81º\ , AB = 23$

Luego $< C = 29º$

$$\frac{23}{sen29} = \frac{BC}{sen70º} \Longrightarrow BC = \frac{23sen70}{sen29} \Longrightarrow BC = 44{,}5$$

Terema del coseno

Sea triangulo ABC cualquiera entonces:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cos\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cos\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cos\gamma)$

La ley del coseno se usa en general cuando se dan dos lados y el ángulo comprendido entre esos lados o se dan los tres lados (en este caso es útil tener presente que primero se busca el ángulo opuesto al mayor de los lados)

Ejemplo :Sea ABC triangulo cualquira tal que a= 25, b = 17 y c =14 Determinar los angulos interiores.

Solución: Como el lado mayor es a determinamos primero el valor de α

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cos\alpha) \Longrightarrow 625 = 289 + 196 - 476cos\alpha \Longrightarrow$

$cos\alpha = -\ 0{,}29 \Longrightarrow \alpha = 106{,}85$

Ahora podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{25}{sen106{,}85} = \frac{17}{sen\beta} \Longrightarrow sen\beta = \frac{17sen106{,}85}{25} \Longrightarrow \beta = 49{,}4$$

Asi $\gamma = 23{,}75$

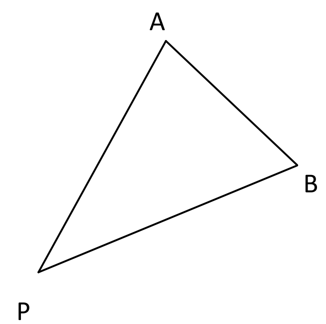
Ejemplo: Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y circulan en carreteras rectas que difieren 84º en dirección. Si viajan a 60 y 90 km por hora, respectivamente ¿ a que distancia aproximada se encontraran después de 20 minutos?

Solucion: Sabemos que la formula de velocidad – tiempo es : $d = \frac{v}{t}$ asi cada vehiculo en 20 minutos a recorrido:

$d = \frac{60}{20} = 3km$

$d = \frac{90}{20} = 4{,}5\ km$

Asi tenemos:

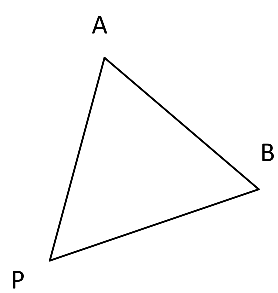


PA= 4,5 ; PB =3,, angulo APB = 84º por determinar AB

$AB^2 = PA^2 + PB)^2 - 2(PA)(PB)\cos{(BPA)}$

$(AB)^2 = 20{,}25 + 9 - 2.82 \Longrightarrow AB = 5{,}14\ km$

Ejemplo: Dos puntos A y B están en lados opuestos de un edificio.Para hallar la distancia entre los puntos , un agrimensor escoge un punto P que esta a 300 pie del punto A y a 438 pie del punto B , determina también que el angulo APB mide 40º . Determinar la distancia AB.



$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2(PA)(PB)\cos{(BPA)}$

$(AB)^2 = (300^2) + (438)^2 - 2(300)(438)cos40 \Longrightarrow AB = 283.77\ pie$