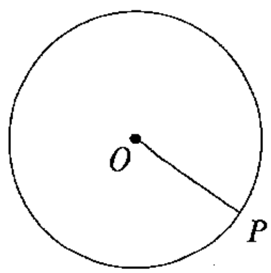
Elementos y propiedades

La circunferencia y sus elementos

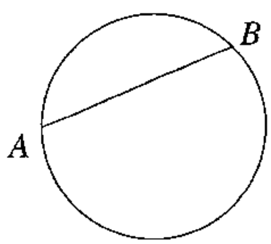
Una circunfería es en conjunto de puntos en el plano que equidistan a un punto dijo llamado centro de la circunferencia.

La figura muestra una circunferencia de centro O, y donde P es un punto de la circunferencia.



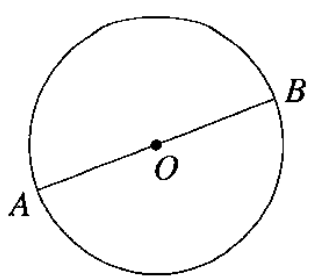
El segmento $\overline{OP}$ se llama **radio** de la circunferencia. Y es determinado por el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de esta.

Todos los radios tienen igual medida, y habitualmente se denotan con la letra $\boldsymbol{r}$.



Una **cuerda** es un segmento determinado por dos puntos cualquiera de la circunferencia.

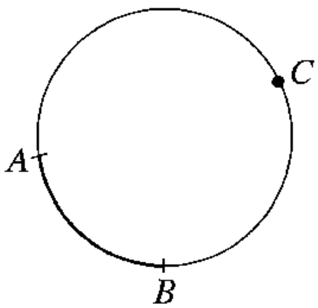
El segmento $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia.



Se denomina **diámetro** de la circunferencia a la cuerda que contiene al centro de la circunferencia.

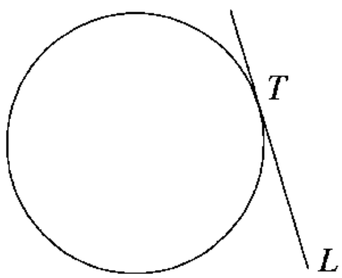
El segmento $\overline{AB}$ es el diámetro de la circunferencia de centro O.

Nicolás González M. n.gonzalezmartinez@icloud.com



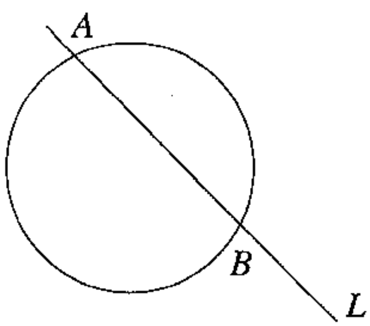
Un **arco** de circunferencia es una parte continua de ella. La "porción" $\widehat{AB}$ representa un arco de circunferencia.

Para nombrar un arco de circunferencia usamos las letras pero en sentido anti horario, es decir $\widehat{AB} \neq \widehat{BA}$



Una **recta tangente** a una circunferencia es una recta que la intersecta exactamente en un punto.

El punto de intersección se llama **punto de tangencia**.



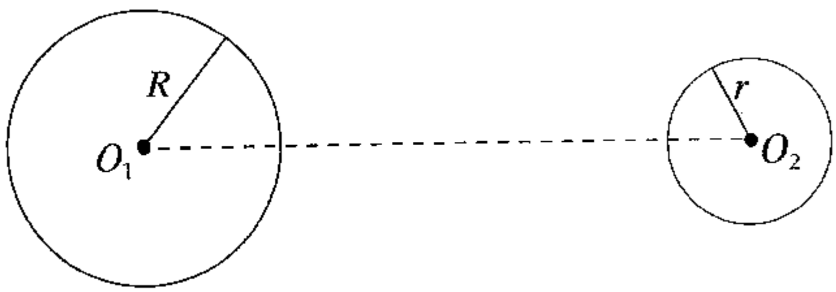
Una **recta secante** a una circunferencia es aquella que la intersecta exactamente es dos puntos.

La recta L es secante a la circunferencia y los puntos de intersección son A y B.

Propiedades y posiciones relativas de dos circunferencias

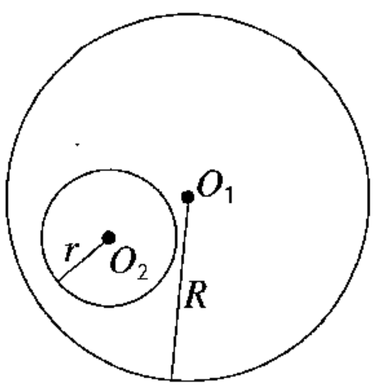
Circunferencias sin puntos en común

a) La distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios.



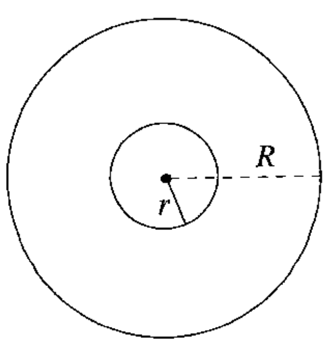
$$\overline{O_1O_2} > R + r$$

b) La distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios. La circunferencia de centro O_2 es interior a la circunferencia de centro O_1.



$$\overline{O_1O_2} > R - r$$

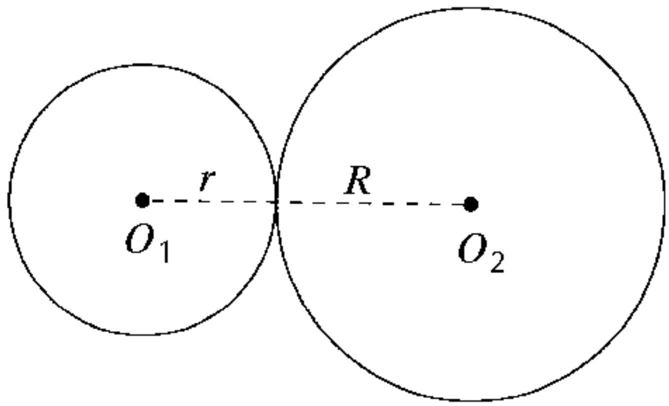
c) La distancia entre los centro es cero. En este caso las circunferencias se dicen **concéntricas**.



$$\overline{O_1O_2} = 0$$

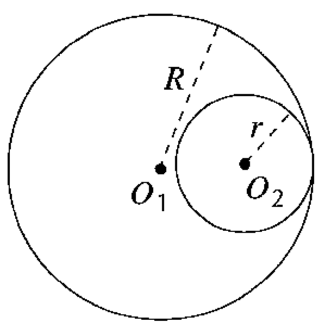
Circunferencias con un punto en común (o circunferencias tangentes).

a) **Circunferencias tangentes exterior**. La distancia entre sus centros es igual a la suma de ellos.



$$\overline{O_1O_2} = R + r$$

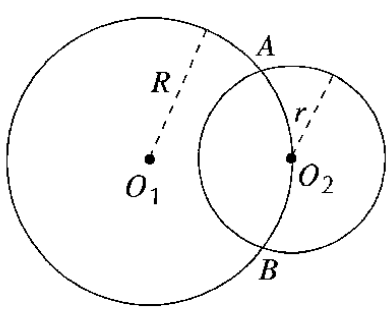
b) **Circunferencias tangentes interiores.** La distancia entre sus centros es igual al valor absoluto de la diferencias de sus radios.



$$\overline{O_1O_2} = |R - r|$$

Circunferencias con dos puntos en común (o circunferencias secantes).

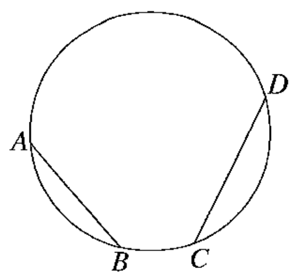
La distancia entre sus centros está comprendida entre la diferencia de sus radios y la suma de ellos, es decir, es mayor que la diferencia de los radios y menos que la suma de ellos.



$$|R - r| < \overline{O_1O_2} < |R + r|$$

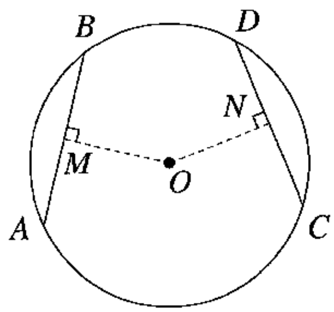
Propiedades de la circunferencia y sus elementos

a) Si dos cuerdas de una circunferencia son congruentes, entonces los arcos determinados por ellas también lo son, y viceversa.



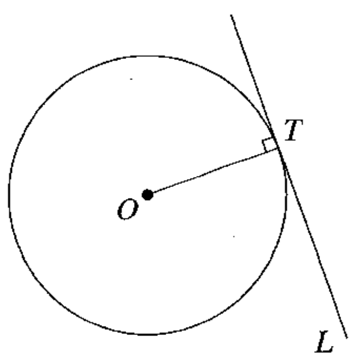
Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ entonces $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

b) Si dos cuerdas de una circunferencia son congruentes, entonces ellas equidistan al centro de la circunferencia.



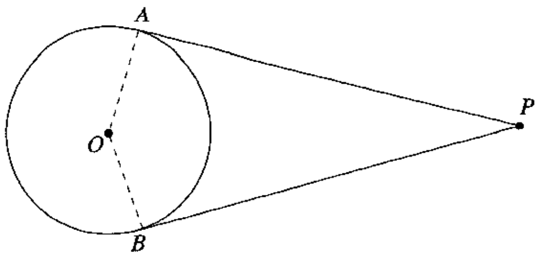
Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y además M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, entonces $\overline{MO} \cong \overline{ON}$.

c) Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



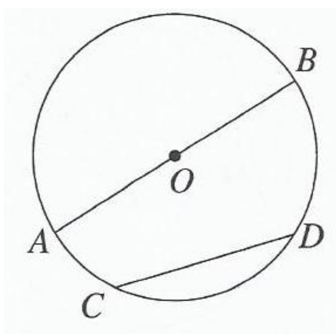
Si $\overleftrightarrow{LT}$ es tangente a la circunferencia de centro O en el punto T entonces $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{LT}$

d) Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan rectas tangentes a ella, entonces los segmentos determinados por el punto exterior y los puntos de tangencia son congruentes.



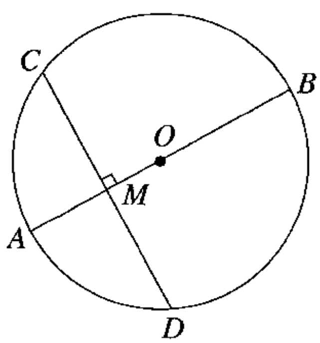
Si $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son rectas tangentes a la circunferencia en A y B respectivamente, entonces $\overline{AP} \cong \overline{BP}$

e) El diámetro es la mayor cuerda de la circunferencia. Si $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{CD}$ una cuerda cualquiera (que no pasa por el centro).



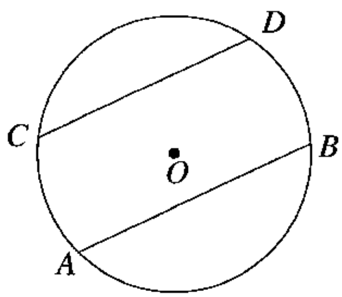
$\overline{AB} > \overline{CD}$.

f) Todo diámetro perpendicular a una cuerda la dimidia y también dimidia los arcos determinados por ella.



Si $\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{CD}$ cuerda, en donde $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y M es punto medio de $\overline{CD}$, entonces se cumple que $\overline{CM} \cong \overline{DM}$ y $\widehat{CA} \cong \widehat{AD}$.

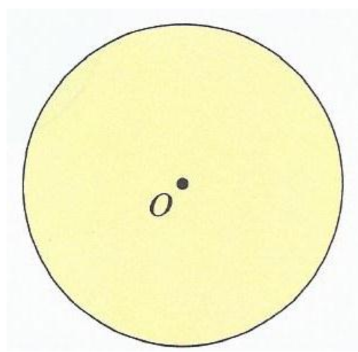
g) Los arcos comprendidos entre dos cuerdas paralelas en una circunferencia son congruentes.



Si $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ entonces $\widehat{CA} \cong \widehat{BD}$

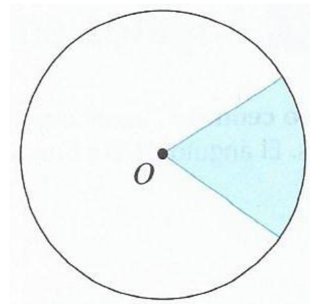
El círculo y sus elementos

Un círculo es el conjunto de puntos de un plano cuya distancia entre un punto fijo llamado centro y cualquier punto de él es menor o igual a un valor constante. Este valor constante es el radio del círculo.

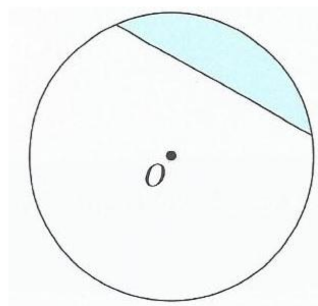


En la figura se muestra un círculo de centro O.

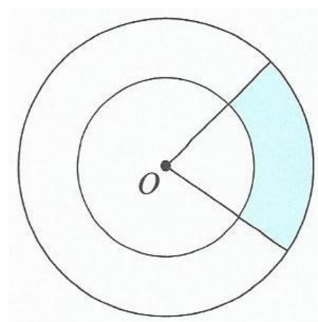
Elementos del círculo



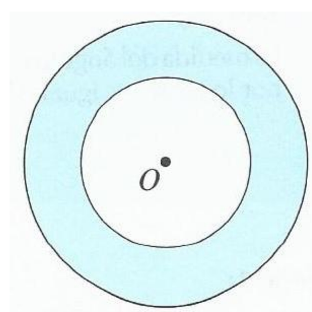
a) Un **sector circular** es una porción del círculo, determinada por dos radios y el arco comprendido entre ellos



b) Un **segmento circular** es una porción de círculo determinar por una cuerda y uno de los arcos determinados por ella.



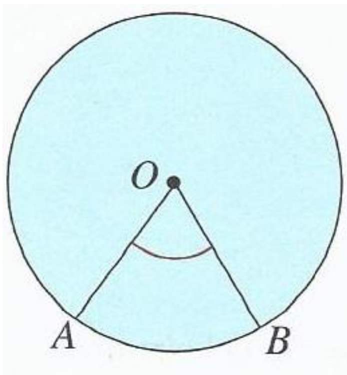
c) Un **trapecio circular** es la región del círculo determinada por dos circunferencias concéntricas y por dos radios.



d) Un **anillo circular** (o también llamada **corona circular**) es una porción del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.

Ángulos en la circunferencia y sus medidas

1) **Ángulo central** es aquel cuyo vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios de esta. El ángulo AOB es ángulo central.

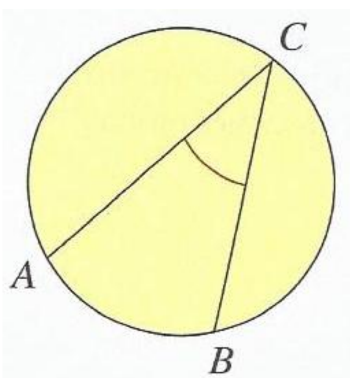


Teorema

La medida del ángulo central es igual a la medida del arco que interseca.

$$m(\measuredangle AOB) = m(\widehat{AB})$$

2) **Ángulo inscrito** es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas (o secantes) de ella. En ángulo ACB es un ángulo inscrito.



Teorema

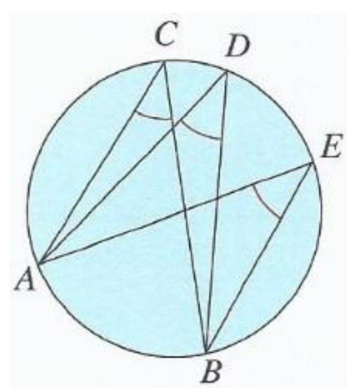
La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que interseca.

$$m(\measuredangle ACB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

Corolario

Todos aquellos ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes.

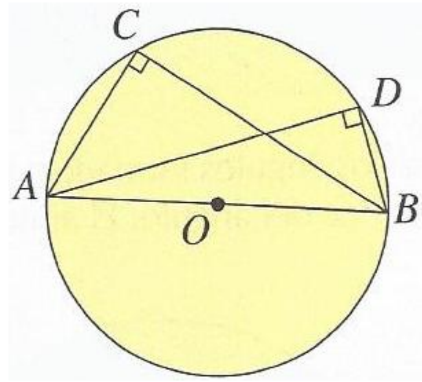
$$m(\measuredangle ACB) = m(\measuredangle ADB) = m(\measuredangle AEB)$$



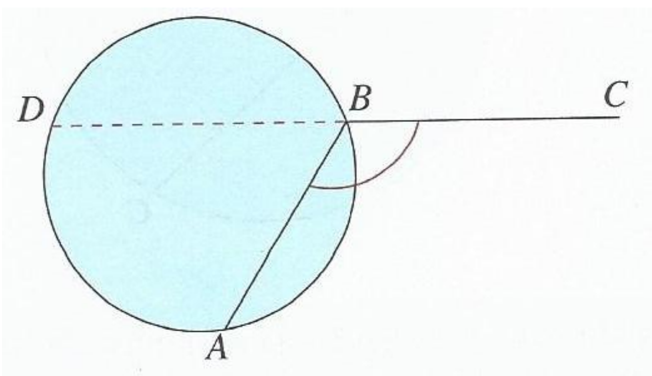
Corolario

Si un triángulo está inscrito en una circunferencia y además uno de los lados de él es diámetro de esta. Entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

$$m(\measuredangle ACB) = m(\measuredangle ADB) = 90°$$



3) **Ángulo exinscrito** es el ángulo adyacente a un ángulo inscrito. El ángulo ABC es un ángulo exinscrito.

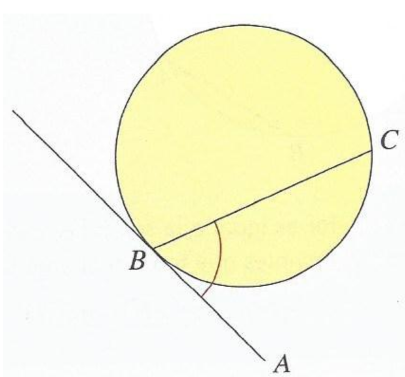


Teorema

La medida del ángulo exinscrito es igual a la semisuma de los arcos que tienen su origen en el vértice del ángulo (B) y sus extremos en uno de los lados y en la prolongación del otro.

$$m(\measuredangle ABC) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BD})}{2}$$

4) **Ángulo semi-inscrito** es aquel en donde uno de sus lados es una cuerda (o secante) de la circunferencia, el otro lado es una recta tangente y cuyo vértice es en punto de tangencia de dicha recta.

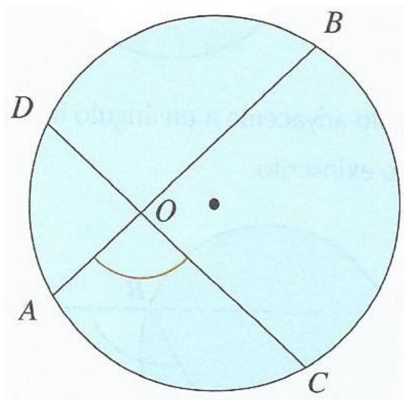


Teorema

La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del arco que interseca.

$$m(\measuredangle CBA) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$$

5) **Ángulo interior** es cualquiera de los ángulos formados por dos cuerdas que se intersecan. El punto de intersección es el vértice del ángulo. El ángulo AOC es ángulo interior.

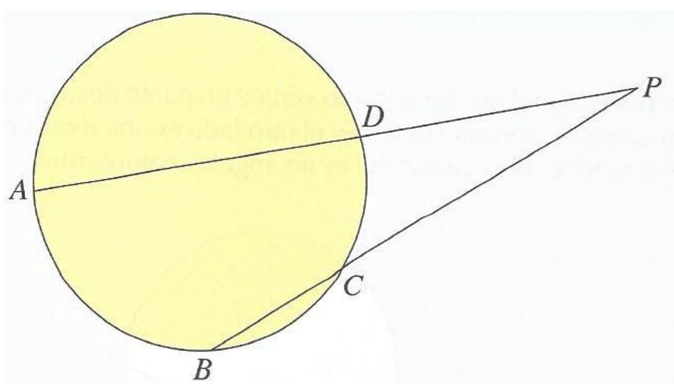


Teorema

La medida del angulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos determinados por las cuerdas que lo forman.

$$m(\measuredangle COA) = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD})}{2}$$

6) **Ángulo exterior** es el ángulo formado por dos secantes que se intersectan fuera de la circunferencia y dicho punto de intersección es el vértice del angulo. El angulo APB es un ángulo exterior.

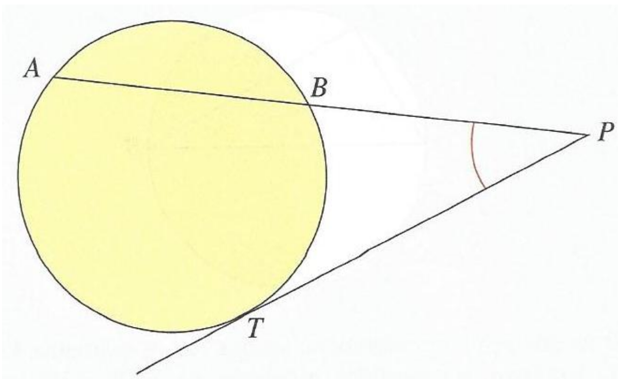


Teorema

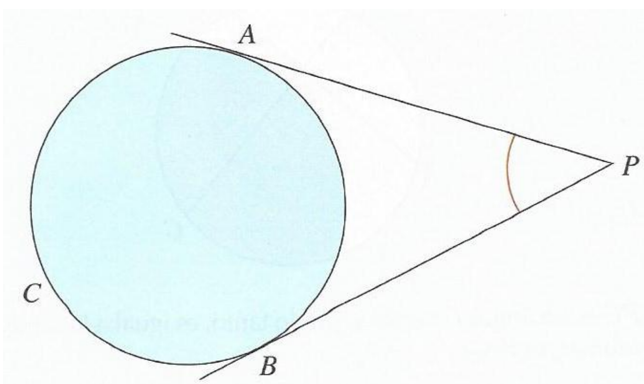
La medida del angulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos determinados por las secantes que lo forman.

$$m(\measuredangle BPA) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$$

Observación: también es ángulos exteriores el ángulo formado por una recta secante y una recta tangente y el angulo formado por dos rectas tangentes.



$$m(\measuredangle TPA) = \frac{m(\widehat{AT}) - m(\widehat{TB})}{2}$$



$$m(\measuredangle BPA) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{BA})}{2}$$

Ejercicios Resueltos